На правах рукописи

Жуковский Максим Евгеньевич

Логика первого порядка случайного графа Эрдеша–Реньи

05.13.17 — теоретические основы информатики

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования “Московский физико-технический институт (государственный университет)” на кафедре дискретной математики факультета инноваций и высоких технологий

Официальные оппоненты:

Верещагин Николай Константинович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова;

Карпов Дмитрий Валерьевич,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН;

Ремесленников Владимир Никанорович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Омский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, заведующий лабороторией.

Ведущая организация:

Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Сколковский институт науки и технологий»

Защита диссертации состоится «17» декабря 2018г. в 11-00 на заседании диссертационного совета Д 002.077.05 при Институте проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН по адресу: 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН и на сайте www.iitp.ru. Автореферат разослан «____» __________ 2018г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н. Цитович Иван Иванович

Актуальность. Одним из важнейших (как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений) классов теоретико-информационных задач является оценивание сложности алгоритмов проверки свойств графов. В этом классе стоит выделить широко известную задачу о существовании подграфа изоморфного данному в другом фиксированном графе (называемую задачей поиска изоморфного подграфа). Разумеется, свойство существования изоморфного подграфа является выразимым на (логическом) языке первого порядка, а сложность алгоритма проверки истинности формулы первого порядка, как известно[1], легко оценивается в терминах параметров формулы (например, кванторной глубины). В этой связи оценивание параметров формулы первого порядка, с помощью которой наилучшим образом можно записать заданное свойство (иными словами, задача о выразимости), является отдельной важной задачей.

Классическим подходом к решению задачи о выразимости является подбор подходящих для опровержения выразимости конечных моделей (так, например, для опровержения выразимости свойства связности формулой первого порядка кванторной глубины k надо подобрать два графа, которые не будут различаться никакой такой формулой, но при этом один граф будет являться связным, а второй — нет). Поэтому здесь применяется и вероятностный метод, являющийся одним из ключевых инструментов современной теории графов: в качестве двух графов можно просто взять, например, две независимые реализации случайного графа с подходящим распределением вероятностей и большим числом вершин. В этом случае неразличимость этих графов с асимптотической вероятностью 1 в рамках фиксированного языка эквивалентна, так называемому, (логическому) закону нуля или единицы, который гласит, что вероятность истинности любой формулы из этого языка стремится либо к 0, либо к 1 с ростом числа вершин случайного графа к бесконечности. Диссертационная работа посвящена закону нуля или единицы для наиболее известной модели случайного графа — биномиальной, известной также как случайный граф Эрдеша-Реньи.

Существует два типа задачи поиска подграфа, изоморфного фиксированному pattern-графу, в данном input-графе. В задаче первого типа (неиндуцированный случай) требование того, чтобы искомый подграф был индуцированным, не накладывается, в отличие от задачи второго типа (индуцированный случай). Если для задачи первого типа получен целый спектр выдающихся результатов (во многих ситуациях удается доказать, что за-

[1]Libkin L. *Elements of Finite Model Theory.* Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer, 2004.

дача решается за полиномиальное время от числа вершин n input-графа, при этом степень полинома не зависит от числа вершин v pattern-графа, или даже за линейное время [2]), то во втором случае таких сильных продвижений нет (известные алгоритмы работают за время, равное степени числа n, где показатель степени линейно зависит от v). Этот факт, в частности, связан с тем, что если бы удалось доказать, что для некоторого pattern-графа на v вершинах упомянутый показатель растет медленнее, чем любая линейная функция от v, то из этого результата незамедлительно бы следовало, что неверна гипотеза об экспоненциальном времени. Наилучшая известная оценка сверху этого показателя содержится в работе [3]; в частности, для pattern-графов на 4 вершинах она превосходит 3. В то же самое время, упомянутый способ решения задачи с помощью языка первого порядка дает показатель степени, в точности равный 3[4]. Этот пример демонстрирует возможность применения формул первого порядка и в общем случае для усиления наилучшего известного результата. Заметим, наконец, что вероятностный подход, основанный на законах нуля или единицы, в некоторых ситуациях дает неулучшаемую оценку кванторной глубины формулы и, как следствие, временной сложности алгоритма проверки истинности формулы, выраженной в соответствующих терминах[5].

Первый (логический) закон нуля или единицы был сформулирован и доказан Ю.В. Глебским, Д.И. Коганом, М.И. Лиогоньким и В.А. Талановым в 1969 году[6] для *плотного* биномиального случайного графа (вероятность проведения ребра которого не зависит от числа вершин графа). В 1976 году тот же результат независимо был доказан Р. Фагиным[7]. С точки зрения приложения к задаче поиска изоморфного подграфа больший интерес представляет *разреженный случайный граф* (вероятность проведения ребра является степенной функцией от числа вершин графа с показателем α), так как в плотном биномиальном случайном графе, в отличие от разреженного, с асимптотической вероятностью 1 содержится копия фиксированного pattern-графа, каким бы этот граф ни был. В 1988 году Дж. Спенсер и С.

---

[2] Courcelle B. *The monadic second-order logic of graphs I. Recognizable sets of finite graphs.* Inf. Comput., 1990, V. 85, no. 1, P. 12–75.

[3] Nešetřil J., Poljak S. *On the complexity of the subgraph problem.* Commentat. Math. Univ. Carol. 1985. Vol. 26. P. 415–419

[4] Olariu S. *Paw-free graphs.* Inf. Process. Lett. 1988. Vol. 28. P. 53–54.

[5] Verbitsky O., Zhukovskii M. *On the First-Order Complexity of Induced Subgraph Isomorphism*, Leibniz International Proceedings in Informatics, 26th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic, 2017, 40:1–16.

[6] Глебский Ю.В., Коган Д.И., Лиогонький М.И., Таланов В.А. *Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов.* Кибернетика. 1969. № 2. С. 17–26.

[7] Fagin R. *Probabilities in finite models.* J. Symbolic Logic. 1976. V. 41. P. 50–58.

Шелах[8] исследовали зависимость справедливости закона нуля или единицы от параметра случайного графа α. Тем не менее, при приложении подобных результатов к задаче о выразимости представляется возможным лишь опровержение выразимости на языке первого порядка (в случае, если все-таки свойство выразимо, никакой информации о кванторной глубине мы получить не сможем). В [9] Спенсер ограничился формулами первого порядка кванторной глубины не более k, и доказал справедливость закона нуля или единицы для этого языка (*k-закона нуля или единицы*) в случае, если α принадлежит интервалу $(0, 1/(k-1))$. В [10] было установлено, что тот же результат верен и для интервала $(0, 1/(k-2))$, при этом новая верхняя граница является неулучшаемой. Заметим, что этот результат уже дает неулучшаемые оценки временной сложности проверки истинности формулы, выражающей свойство содержать индуцированный подграф, изоморфный данному, в некоторых нетривиальных ситуациях. Разумеется, расширение этого диапазона (т.е. получение интервалов значений параметра α, отделенных от нуля, при которых также справедлив k-закон) может позволить получить подобные неулучшаемые оценки и для других нетривиальных графов.

Поэтому актуальной является задача описания картины асимптотического поведения вероятностей истинности формул первого порядка для различных значений параметров α и k.

Степень разработанности темы. В 1969 году Ю.В. Глебский, Д.И. Коган, М.И. Лиогонький и В.А. Таланов (независимо в 1976 году Р. Фагин) установили, что если вероятность ребра в биномиальной модели Эрдеша–Реньи равна 1/2, то случайный граф подчиняется закону нуля или единицы для языка первого порядка (или просто *закону нуля или единицы*). В 1991 году Дж. Спенсер доказал, что то же самое верно и для всех таких вероятностей проведения ребра p, что и p, и $1-p$ не убывают быстрее степенной функции. Случай степенной функции p (разреженный случайный граф) был рассмотрен в 1988 году Дж. Спенсером и С. Шелахом. Они доказали, что разреженный случайный граф не подчиняется закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда значение параметра α (показателя степени) либо равно $1+1/l$ для некоторого натурального l, либо является рациональными числом из (0,1].

В 1991 г. Спенсер доказал, что k-закон выполнен, если параметр случай-

[8] Shelah S., Spencer J.H. *Zero-one laws for sparse random graphs.* J. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 1. P. 97–115.

[9] Spencer J.H. *Threshold spectra via the Ehrenfeucht game.* Discrete Applied Math. 1991. Vol. 30. P. 235–252.

[10] Zhukovskii M.E. *Zero-one k-law.* Discrete Mathematics. 2012. Vol. 312. P. 1670–1688.

ного разреженного графа меньше чем $1/(k-1)$. В 2012 г. мы доказали, что эту оценку можно улучшить до $1/(k-2)$, и такая оценка является наилучшей. Таким образом, интерес представляет доказательство или опровержение k-закона при различных значениях $\alpha > 1/(k-2)$. В частности, возникает вопрос о наибольшем значении (меньшем 1), при котором не выполнен k-закон.

Будем говорить, что случайный граф *подчиняется закону сходимости* (*k-закону сходимости*), если для любой формулы первого порядка (кванторной глибины не более k) вероятность истинности этой формулы на случайном графе сходится. Разумеется, если случайный граф подчиняется закону нуля или единицы, то он подчиняется и закону сходимости. Дж. Спенсер и С. Шелах установили, что при рациональных значениях параметра из $(0,1]$ нет даже сходимости, а в 1992 году Дж. Линч доказал, что при значениях параметрах, равных $1+1/l$ или 1, разреженный случайный граф подчиняется закону сходимости. Вопрос о том, выполнен ли k-закон сходимости в ситуации, когда k-закон нуля или единицы для случайного разреженного графа не выполнен, остается открытым.

Кроме того, в 1990 г. Дж. Спенсер доказал, что для некоторого k существует бесконечно много параметров α, при которых разреженный случайный граф с соответствующим параметром не подчиняется закону нуля или единицы. Возникает естественный вопрос: а каково наименьшее k, обладающее таким свойством?

Известны и другие результаты, относящиеся к асимптотике вероятностей свойств первого порядка биномиального случайного графа. Так, например, в 1999 г. Дж. Спенсер и Л. Тома привели полное описание пределов вероятностей обладания случайным графом свойствами первого порядка при вероятности проведения ребра, близкой к пороговой вероятности связности случайного графа. В работе Дж. Спенсера и Г. Тардоша для фиксированной формулы первого порядка изучено поведение вероятности истинности этой формулы на случайном разреженном графе как функции от параметра графа.

Для других языков законы нуля или единицы изучались Дж. Линчем, Дж. Спенсером, С. Шелахом, Дж. Тишкиевичем, П. Колайтисом, М. Варди, А. Блассом, Ю. Гуревичем, Д. Козеном, М. Кауфманном, Дж.-М. ле Барсом, М. МкАртур и другими. Так, например, ситуация в случае языка первого порядка с бесконечными предложениями отличается от ситуации с рассматриваемым конечным языком первого порядка только тем, что при параметре, равном 1 или иррациональному числу из $(0,1)$, в первом случае закон сходимости не выполнен. Множество работ посвящено и законам нуля или единицы для монадического языка нуля или единицы, в котором в качестве переменных выступают не только вершины графа, но и унарные предикаты. Примером свойства, выразимого на монадическом языке второго порядка, служит связность графа. Закон нуля или единицы для такого языка в случае постоянной вероятности проведения ребра и в случае разреженного графа с параметром, не превосходящим 1, изучался в работах М. Кауфманна и С. Шелаха 1985 г. и Дж. Тишкиевича 1993 г. соответсвенно. Тем не менее, вопрос о справедливости закона нуля или единицы и закона сходимости для монадического языка второго порядка даже в самом простом случае (при $\alpha > 1$) оказался не полностью закрытым.

Законы нуля или единицы рассматривались и в контексте других моделей случайных конечных структур. Среди таких структур наиболее изученными являются случайный дистанционный граф, случайный граф, вероятности проведения ребер которого зависят от номеров вершин, случайный регулярный граф, а также случайный граф в модели предпочтительного присоединения.

Цель работы и задачи исследования. Целью работы является изучение предельных вероятностей истинности формул первого порядка кванторной глубины не более k при различных значениях параметра случайного разреженного биномиального графа. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1) Доказательство или опровержение k-закона при различных значениях $\alpha \in (1/(k-2), 1)$, а именно, нахождение наибольшего $\alpha < 1$, при котором случайный граф не подчиняется k-закону нуля или единицы, и оценивание наибольшего $\varepsilon = \varepsilon(\beta)$, при котором разреженный случайный граф подчиняется k-закону нуля или единицы при всех значениях параметра из $(\beta - \varepsilon, \beta)$, если $\beta \in (0, 1)$ не зависит от k.

2) Доказательство или опровержение k-закона сходимости при наименьшем показателе α, при котором не выполнен k-закон нуля или единицы.

3) Исследование предельных точек множества значений параметра $\alpha < 1$ случайного разреженного графа, при которых не выполнен k-закон нуля или единицы, а именно, оценивание наименьшей и наибольшей предельных точек, оценивание наименьшего k, при котором предельные точки вообще существуют, а также нахождение наименьшего k, при котором существует такая формула первого порядка с k переменами

кванторов, что для бесконечно многих α вероятность ее истинности не стремится ни к 0, ни к 1.

4) Исследование зависимости от k множества натуральных чисел m, для которых разреженный случайный граф с параметром $1 + 1/m$ подчиняется k-закону нуля или единицы, а также закону нуля или единицы для монадических формул второго порядка с кванторной глубиной k.

Научная новизна. Для решения поставленных задач были разработаны новые инструменты: предложена новая стратегия Консерватора в игре Эренфойхта, которая позволяет ему выигрывать на сильно разреженных графах; получено структурное описание всех сбалансированных графов с достаточно малой средней степенью; доказана возможность использования в записи свойств, с вероятностью, стремящейся к 1, записываемых на языке первого порядка (в случае разреженного случайного графа), арифметических операций; доказаны новые оценки количеств классов элементарной эквивалентностей графов и деревьев (как для языка первого порядка, так и для монадического языка второго порядка) и размеров наименьших элементов в них.

Полученные в диссертации результаты открывают возможность применения для задачи поиска изоморфного подграфа логичесих законов нуля или единицы для уменьшения времени поиска.

Положения, выносимые на защиту.

1. Наибольшее значение параметра случайного разреженного графа, меньшее 1, при котором не выполнен k-закон нуля или единицы, равно $1 - 1/(2^k - 2)$.

2. Для любого рационального β существует такой интервал $(\beta - \varepsilon, \beta)$ экспоненциально малой длины, что для любого значения параметра α из этого интервала случайный разреженный граф подчиняется k-закону нуля или единицы. Кроме того, экспоненциальное убывание является оптимальным для дробей β, числитель которых не превосходит 2.

3. При $k \geq 15$ наименьшая предельная точка множества значений α, при которых разреженный случайный граф не подчиняется k-закону нуля или единицы, принадлежит $[1/(k-2), 1/(k-11)]$. При $k \geq 8$ наибольшая предельная точка множества значений α, при которых разреженный случайный граф не подчиняется k-закону нуля или единицы, принадлежит $[1 - 2^{5-k}, 1 - 2^{1-k})$.

4. Наименьшее k, при котором существует такая формула первого порядка глубины k, что для бесконечно многих α вероятности ее истинности на случайном разреженном графе с параметром α не стремится ни к нулю, ни к единице, равно либо 4, либо 5. Наименьшее k, при котором существует такая формула первого порядка с k переменами кванторов, что для бесконечно многих α вероятности ее истинности на случайном разреженном графе с параметром α не стремится ни к нулю, ни к единице, равно 3.

5. Случайный разреженный граф с параметром $1/(k-2)$ подчиняется k-закону сходимости.

6. Наибольшее m, для которого случайный разреженный граф с параметром $1+1/m$ не подчиняется k-закону нуля или единицы, оценивается и снизу и сверху башней из $k(1+o(1))$ двоек. То же самое верно и для закона нуля или единицы для монадических формул второго порядка глубины k.

Методы исследования. Для доказательства основных результатов диссертации широко применялся аппарат следующих дисциплин: теория графов, теория вероятностей и математическая логика. Помимо стандартной техники, применяемой для доказательства (или опровержения) законов нуля или единицы (классические стратегии в игре Эренфойхта, вероятностные предельные теоремы и неравенства, метод моментов), мы использовали разработанные нами инструменты, описанные в разделе “Научная новизна”.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в задачах о выразимости — а именно, для оценивания такого наименьшего k, при котором фиксированное свойство (например, содержать индуцированный подграф, изоморфный данному) может быть записано с помощью формулы первого порядка кванторной глубины k. Результаты о выразимости в свою очередь применяются для оценивания временной сложности алгоритма проверки соответствующего графового свойства. Таким образом, полученные результаты могут использоваться теоретико-информационных задачах, связанных с алгоритмами на графах.

Полученные нами результаты о классах элементарной эквивалентности (оценки количества классов эквивалентностей и размеров наименьших элементов в них) графов и деревьев для языка первого порядка и монадического языка второго порядка интересны как сами по себе, так и могут послужить инструментом в различных задачах, относящихся к теориям конечных моделей и формальных языков.

Апробация работы. По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах: семинарах на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова и факультете инноваций и высоких технологий МФТИ (ГУ) под рук. профессора А.М. Райгородского (2012–2015 гг.), семинаре кафедры алгебры под руководством А.В. Михалева и В.Н. Латышева механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (2014г.), семинаре отдела дискретной математики в математическом институте имени Стеклова (2014г.), Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам (2014г.), семинаре "Современные проблемы математической логики" факультета математики НИУ ВШЭ (2015г.), семинарах Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН (2015г. и 2018г.), Колмоговском семинаре на механико-математическом факультете МГУ (2015г.), семинаре по комбинаторике в университете Франкфурта им. И.В. Гете под руководством профессора А. Коджа-Оглана и профессора Ю. Персона (2016 г.), Коллоквиуме Факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ (2017г.), семинаре по теории кодирования ИППИ РАН (2017г.), общеинститутском семинаре "Коллоквиум МИАН" (2017г.), семинаре "Современные проблемы математической логики 2" факультета математики НИУ ВШЭ (2018г.).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: «4th Polish Combinatorial Conference» (Бедлево, Польша, 2012), «55-ая международная научная конференция МФТИ» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2012), «Franco-Russian workshop on Algorithms, complexity and applications» (Москва, Россия, 2012), «Erdos centennial» (Будапешт, Венгрия, 2013), «EMS 2013» (Будапешт, Венгрия, 2013), «RSA'16» (Познань, Польша, 2013), «Workshop on random graphs and their applications» (Москва, Россия, 2013), «56-ая международная научная конференция МФТИ» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2013), «Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2014), «Workshop on Extremal Graph Theory» (Москва, Россия, 2014), «Sum(m)it:240» (Будапешт, Венгрия, 2014), «57-ая международная научная конференция МФТИ» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2014), «RSA'17» (Питтсбург, США, 2015), «Workshop on Logic and Random Graphs» (Лейден, Голландия, 2015), «58-ая международная научная конференция МФТИ» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2015), «Workshop on Extremal Combinatorics and Combinatorial Geometry» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2016), «The 6th International Conference on Network Analysis» (Нижний Новгород, Россия, 2016), «IX международная Петрозаводская конференция «Вероятностные методы в дискретной математике»» (Петрозаводск, Россия, 2016), «Bordeaux Graph Workshop» (Бордо, Франция, 2016), «RSA'18» (Гнезно, Польша, 2017).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 20 работах (10 из них написано без соавторов), 18 из которых входят в перечень ВАК (8 из них написано без соавторов). Личный вклад соискателя в работах с соавторами заключается в следующем. М.Е. Жуковским предложены идеи доказательств всех основных результатов диссертации, опубликованных в работах, написанных в соавторстве. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, 6 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 231 страница, из них 212 страниц текста (не считая титульного листа, оглавления, списка обозначений и библиографии). Библиография включает 155 наименований на 13 страницах.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении излагается история исследований, относящихся к асимптотическому поведению вероятностей свойств первого порядка случайного графа Эрдеша и Реньи, а также описывается структура диссертации.

Для точных формулировок результатов **главы 1** введем ряд обозначений. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество Ω_n всех неориентированных графов $G = (V_n, E)$ без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, ..., n\}$. Назовем *случайным графом в модели Эрдеша–Реньи* случайный элемент $G(n, p)$ со значениями во множестве Ω_n и распределением $\mathsf{P}_{n,p}$ на $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным формулой

$$\mathsf{P}_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|},$$

где $|E|$ — мощность множества E, $p \in [0, 1]$.

Свойства первого порядка задаются формулами первого порядка, которые строятся с помощью символов отношения $\sim, =$, логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$, переменных $x, y, x_1, ...$, кванторов $\forall, \exists$. В качестве переменных выступают вершины графа. Символ отношения $\sim$ выражает свойство двух вершин быть смежными.

Опишем построение формул подробнее. Введем для этого понятие *атома*. Это объект, который либо имеет вид $(x \sim y)$, либо имеет вид $(x = y)$, где x, y — переменные. Атом является формулой. Все входящие в атом переменные являются *свободными*. Ниже мы даем определение связанных и свободных переменных и вместе с этим дальнейшее определение формул первого порядка. Пусть G — некоторый граф (не обязательно конечный). Рассмотрим произвольные вершины i_1, i_2 этого графа. Если $i_1 \sim i_2$, то будем говорить, что формула $(x \sim y)$ *истинна* для графа G на наборе (i_1, i_2). В противном случае будем говорить, что формула *ложна*. Формула $(x = y)$ истинна только на наборах, состоящих из двух одинаковых вершин, т.е. на наборах (i, i). Иными словами, формула истинна на некотором наборе вершин, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. Пусть ϕ, ϕ_1, ϕ_2 — формулы, X, X_1, X_2 и Y, Y_1, Y_2 — соответствующие множества свободных и связанных переменных, переменная x принадлежит X. Конструкции

$$\neg\phi,\ (\phi_1 \vee \phi_2),\ (\phi_1 \wedge \phi_2),\ (\phi_1 \Rightarrow \phi_2),\ (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2),\ (\forall x\, \phi),\ (\exists x\, \phi)$$

являются формулами. При этом $X\setminus\{x\}$ — множество свободных переменных формул

$$(\forall x\, \phi), \quad (\exists x\, \phi),$$

а $Y \cup \{x\}$ — множество связанных переменных этих формул, $X_1 \cup X_2$ — множество свободных переменных формул

$$(\phi_1 \vee \phi_2),\ (\phi_1 \wedge \phi_2),\ (\phi_1 \Rightarrow \phi_2),\ (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2), \tag{1}$$

$Y_1 \cup Y_2$ — множество связанных переменных этих формул, X — множество свободных переменных формулы $(\neg\phi)$, Y — множество связанных переменных этой формулы. Так же, как и в случае атома, формула является истинной на некотором наборе вершин, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. *Замкнутыми* называются формулы, не содержащие свободных переменных. Замкнутая формула либо всегда истинна для графа G, либо всегда ложна.

Определим *кванторную глубину формулы*. Глубина атома равна нулю. Глубина формул (1) равна максимуму глубин формул ϕ_1 и ϕ_2. Глубина формулы $(\neg\phi)$ равна глубине формулы ϕ. Глубина формулм$(\forall x\, \phi)$ и $(\exists x\, \phi)$ на единицу больше глубины ϕ.

В дальнейшем мы будем рассматривать только замкнутые формулы. Если замкнутая формула ϕ первого порядка истинна для графа G, то будем говорить, что граф G *обладает свойством первого порядка* L, которое определено формулой ϕ, и писать $G \models L$. Обозначим $\mathcal{L}$ класс свойств графов, выражаемых замкнутыми формулами первого порядка. Пусть, кроме того, $\mathcal{L}_k$ — класс свойств графов, выражаемых замкнутыми формулами первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей k.

Мы будем считать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ случайные графы $G(n,p)$ заданы на одном и том же вероятностной пространстве с вероятностной мерой P. В дальнейшем, если выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = 1,$$

то будем говорить, что случайный граф *с асимптотической вероятностью 1* обладает свойством L.

Рассмотрим некоторую функцию $p : \mathbb{N} \to [0,1]$. Мы говорим, что случайный граф подчиняется *закону нуля или единицы*, если для любого свойства $L \in \mathcal{L}$ выполняется одно из двух соотношений

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = 1. \tag{2}$$

В 1969 году Ю.В. Глебский, Д.И. Коган, М.И. Лиогонький и В.А. Талановполучили первый закон нуля или единицы для свойств первого порядка случайного графа Эрдеша–Реньи, который в 1976 году был независимо доказан Р. Фагиным. Они доказали, что при $p = \mathrm{const}$ случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы. Доказательство работает и для функций $p = p(n)$, удовлетворяющих условию

$$\forall \alpha > 0 \ \min\{p, 1-p\} n^{\alpha} \to \infty, \, n \to \infty.$$

Мы рассматриваем класс функций $p(n) = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, который изучали Дж. Спенсер и С. Шелах. Они доказали, что для $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 1]$ закон нуля или единицы справедлив. Если же $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, то случайный граф не подчиняется закону нуля или единицы. Нам удалось получить уточнение этого результата и расширить класс функций $p(n)$ для достаточно большого класса свойств первого порядка.

Будем говорить, что случайный граф подчиняется k-закону нуля или единицы, если для любого свойства, записываемого с помощью формулы первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей k, выполняется одно из двух условий (2). В 2012 году мы доказали, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы при $\alpha \in (0, \frac{1}{k-2})$. Если же $\alpha = \frac{1}{k-2}$, то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы.

Таким образом, мы доказали, что $\frac{1}{k-2}$ — наименьшее положительное значение α, при котором случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. В диссертационной работе мы описали асимптотическое поведение вероятностей свойств из множества $\mathcal{L}_k$ графа $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha \geq 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$. В частности, мы нашли наибольшее значение α (меньшее 1), при котором нарушается k-закон. Основными результатами главы 1 являются следующие утверждения.

Теорема 1.2.1.[11] *Пусть $k > 3$ — произвольное натуральное число. Пусть, кроме того, $\mathcal{Q}$ — множество положительных дробей с числителем, не превосходящим числа 2^{k-1}. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы, если*

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + \beta}, \quad \beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}.$$

[11]Нумерация всех утверждений в автореферате совпадает с нумерацией соответствующих утверждений в диссертации.

Итак, мы рассмотрели интервал $(1-2^{1-k},1)$ и получили множество рациональных чисел α из этого интервала, при которых k-закон справедлив. Так как любое число из $(1-2^{1-k},1)$ представляется в виде $1-\frac{1}{2^{k-1}+\beta}$, закон будет выполнен при любых α из

$$\left(1-\frac{1}{2^k},1\right)\bigcup\left(1-\frac{1}{2^k-1},1-\frac{1}{2^k}\right)\bigcup\dots\bigcup$$

$$\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}},1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}+1}\right)\bigcup$$

$$\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+\frac{2^{k-1}-1}{2}},1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}}\right)\bigcup\dots\bigcup$$

$$\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+\frac{2^{k-1}}{3}},1-\frac{1}{2^{k-1}+\frac{2^{k-1}-\left[\frac{2^{k-1}}{3}\right]}{2}}\right)\bigcup\dots.$$

Длины интервалов уменьшаются при стремлении концов к $1-2^{1-k}$. Кроме того, для некоторых из них мы доказали, что на концах интервалов k-закон не выполнен.

Теорема 1.2.2. *Пусть $k>3$ — произвольное натуральное число и $\tilde{\mathcal{Q}}$ — множество целых неотрицательных чисел, не превосходящих $2^{k-1}-2$. Случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы, если*

$$\alpha=1-\frac{1}{2^{k-1}+\beta},\quad \beta\in\tilde{\mathcal{Q}}.$$

Если $k>5$,

$$\alpha=1-\frac{1}{2^{k-1}+a/b},$$

где

$$a\in\{1,2,\dots,2^{k-1}-2(b+1)^2\},$$

то случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ также не подчиняется k-закону нуля и единицы.

Заметим, что теоремы 1.2.1 и 1.2.2 не дают максимального значения $\alpha\in(0,1)$, при котором случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Так, остается вопрос, выполнен ли закон при

$$\alpha\in\left\{1-\frac{1}{2^k-1},1-\frac{1}{2^k}\right\}. \tag{3}$$

Мы ответили на этот вопрос в следующей теореме.

Теорема 1.2.3. *Пусть $k > 3$ — произвольное натуральное число и выполнено (3). Тогда случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.*

Наконец, остается вопрос, конечно ли множество чисел

$$\alpha \in \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right),$$

для которых случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Положительный ответ содержит следующий результат.

Теорема 1.2.4. *Пусть $k > 3$, b — произвольные натуральные числа, $\frac{a}{b}$ — несократимая положительная дробь. Обозначим*

$$\nu = \max\{1, 2^{k-1} - b\}.$$

Пусть

$$a \in \{\nu, \nu + 1, \dots, 2^{k-1}\}, \quad \alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + a/b}.$$

Тогда случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

Отметим, что для получения результатов этой главы мы ввели понятие циклического расширения, которое позволяет описывать структуру разреженного графа. Более формально, пусть $m \in \mathbb{N}$ — произвольное натуральное число. Рассмотрим такую пару графов (G, H), что $G \supset H$.

Будем говорить, что граф G является *m-расширением графа H первого типа*, если $m \geq 3$ и выполнено следующее условие. Существует такая вершина x_1 графа G, что

$$V(G) \setminus V(H) = \{y_1^1, \dots, y_{t_1}^1, y_1^2, \dots, y_{t_2}^2\},$$

$$E(G) \setminus E(H) = \{\{x_1, y_1^1\}, \{y_1^1, y_2^1\}, \dots, \{y_{t_1-1}^1, y_{t_1}^1\},$$
$$\{y_{t_1}^1, y_1^2\}, \{y_1^2, y_2^2\}, \dots, \{y_{t_2-1}^2, y_{t_2}^2\}, \{y_{t_2}^2, y_{t_1}^1\}\},$$

где $t_1 + t_2 \leq m - 1$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 2$ и $\rho^{\max}(G) < \frac{m}{m-1}$ (при $t_1 = 0$ вершина x_1 является смежной с вершинами $y_1^2, y_{t_2}^2$). Здесь $\rho^{\max}(G)$ — это *максимальная плотность* графа G, т.е.

$$\rho^{\max}(G) = \max_{S \subseteq G} \frac{e(S)}{v(S)},$$

где $e(S)$, $v(S)$ — число ребер и число вершин в графе S соответственно.

Граф G мы называем *m-расширением графа H второго типа*, если $m \geq 2$ и выполнено следующее условие. Существуют две такие различные вершины x_1, x_2 графа G, что

$$G = (V(H) \sqcup \{y_1, \ldots, y_t\}, E(H) \sqcup \{\{x_1, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \ldots, \{y_{t-1}, y_t\}, \{y_t, x_2\}\}),$$

где $t \leq m-1$ и $\rho^{\max}(G) < \frac{m}{m-1}$. Граф G является *m-расширением графа H третьего типа*, если $m \geq 2$, $V(H) = V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ и $\rho^{\max}(G) < \frac{m}{m-1}$.

Для произвольного натурального числа $m \geq 3$ определим множество графов $\mathcal{H}_m$. Пусть x — вершина. Граф без ребер на множестве вершин $\{x\}$, принадлежит $\mathcal{H}_m$. Более того, $\mathcal{H}_m$ — множество, содержащее наименьшее количество элементов и обладающее следующим свойством. Если $G \in \mathcal{H}_m$, то $\mathcal{H}_m$ содержит все попарно неизоморфные m-расширения первого, второго и третьего типов графа G.

Заметим, что любой граф G из $\mathcal{H}_m$, отличный от $(\{x\}, \varnothing)$, содержит в себе конечный набор таких вложенных графов $G_1, \ldots, G_t$,

$$G_0 = (\{x\}, \varnothing) \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t \subseteq G,$$

что выполнены следующие свойства:

- $G_i \neq G_{i+1}$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$,
- граф G либо совпадает с G_t, либо является m-расширением третьего типа графа G_t, а графы G_i являются m-расширениями первого или второго типа графов G_{i-1} при $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$.

Такую последовательность графов $G_0, G_1, \ldots, G_t, G$ будем называть *m-разложением* графа G.

Сформулируем ключевое утверждение о свойствах множества $\mathcal{H}_m$.

Лемма 1.5.1. *Выполнены следующие свойства.*

1. *Пусть $m \geq 3$. Пусть, кроме того, $G \in \mathcal{H}_m$ и $G_0, G_1, \ldots, G_t, G$ — его m-разложение, причем либо $t = 1$ и $G_t \neq G$, либо $t \geq 2$. Тогда найдутся такие натуральные числа a, b, что $b \leq m$ и*
$$\rho^{\max}(G) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b/a}.$$
2. *Пусть $m \geq 2$ и $\rho \in (1, m/(m-1))$ — произвольное число. Тогда существует такое число $\eta \in \mathbb{N}$, что для любого натурального $v > \eta$ и у любого графа $G \in \mathcal{H}_m$ на v вершинах найдется подграф на не более чем η вершинах с плотностью, превосходящей ρ.*

В **главе 2** диссертации изучается структура множеств рациональных чисел $\alpha \in (0,1)$, для которых случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. А именно, для каждого свойства первого порядка L рассматриваются два множества $S^1(L)$ и $S^2(L)$, называемые *спектрами*. Первое определение возникает при рассмотрении вероятностей проведения ребра вида $p = n^{-\alpha}$. Множество $S^1(L)$ состоит из всех таких $\alpha \in (0,1)$, что *не* выполнено следующее свойство:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,n^{-\alpha}) \models L) \tag{4}$$

существует и равен либо нулю, либо единице. Второе определение возникает при рассмотрении более широкого класса вероятностей $p = n^{-\alpha+o(1)}$. Множество $S^2(L)$ состоит из всех таких $\alpha \in (0,1)$, что *не* выполнено следующее свойство: существуют $\delta \in \{0,1\}$ и $\varepsilon > 0$, для которых равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,n^{-\alpha}) \models L) = \delta$$

справедливо для любого $p(n) \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Обозначим S_k^1 и S_k^2 объединение множеств $S^1(L)$ и $S^2(L)$ соответственно по всем $L \in \mathcal{L}$, записываемым с помощью формул первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей числа k.

В работе Дж. Спенсера 1990 г. доказано, что при достаточно больших k множества S_k^1 и S_k^2 бесконечны. Известно также[12], что у любой предельной точки множества S_k^2 (множества S_k^1) существует левая полуокрестность, не содержащая точек множества S_k^2 (множества S_k^1).

Основные результаты второй главы диссертации отвечают на следующие вопросы.

Q1 Каковы наименьший и наибольший элементы множества S_k^2? Наименьший и наибольший элементы множества S_k^1 найдены в главе 1 и равны соответсвенно $\frac{1}{k-2}$ и $1 - \frac{1}{2^k-2}$.

Q2 Существуют ли предельные точки множеств S_k^1 и S_k^2 вблизи наименьшей и наибольшей точки спектров? В работах Дж. Спенсера доказано только существование свойства первого порядка, спектр которого содержит предельную точку, равную $\frac{1}{3}$.

[12] Shelah S., Spencer J.H. *Zero-one laws for sparse random graphs.* J. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 1. P. 97–115.

Q3 Насколько много элементов спектров S_k^1, S_k^2 в окрестности наибольшей и наименьшей точки? Заметим, что ответ на этот вопрос в случае наибольшей точки множества S_k^1 дан в теоремах 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4:

$$\left| S_k^1 \cap \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right) \right| \in (c_1 2^{3k/2}, c_2 2^{2k})$$

для некоторых положительных констант c_1, c_2.

Q4 Для каждого $j \in \{1, 2\}$ каково минимальное значение k, при котором спектр S_k^j бесконечен?

Итак, для любого натурального k мы нашли наименьший и наибольший элементы множества S_k^2 и, тем самым, ответили на вопрос Q1.

Теорема 2.2.1. *Если* $k > 3$, *то*

$$\min S_k^2 = \frac{1}{k-1}, \quad \max S_k^2 = 1 - \frac{1}{2^k - 2}.$$

Кроме того,

$$S_3^2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\}.$$

Кроме того, мы оценили наименьшие и наибольшие предельные точки множеств S_k^1 и S_k^2 и, тем самым, ответили на вопрос Q2. Для любого $j \in \{1, 2\}$ обозначим $(S_k^j)'$ множество предельных точек в S_k^j. Из приведенного ниже результата следует, что вблизи 0 и 1 есть предельные точки множеств $(S_k^j)'$.

Теорема 2.2.2. *При* $k \geq 15$

$$\min(S_k^1)' \in \left[\frac{1}{k-2}, \frac{1}{k-11} \right],$$

при $k \geq 10$

$$\min(S_k^2)' \in \left[\frac{1}{k-2}, \frac{1}{k-7} \right],$$

при $k \geq 8$

$$\max(S_k^1)' \in \left[1 - \frac{1}{2^{k-5}}, 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \right).$$

Так как $S_k^2 \supset S_k^1$, то из сформулированной ниже теоремы 2.2.3 следует, что и

$$\max(S_k^2)' \in \left[1 - \frac{1}{2^{k-5}}, 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \right).$$

при $k \geq 8$.

При ответе на вопрос Q3 мы оценили мощности пересечений

$$\left|S_k^1 \cap \left(0, \frac{1}{k-2.5}\right)\right|, \quad \left|S_k^2 \cap \left(0, \frac{1}{k-2.5}\right)\right|, \quad \left|S_k^2 \cap \left(1-\frac{1}{2^{k-1}}, 1\right)\right|.$$

Теорема 2.2.3. *Для любого $j \in \{1,2\}$*

$$\left|S_k^j \cap \left(0, \frac{1}{k-2.5}\right)\right| = \Omega(k2^k).$$

Кроме того, при всех $k \geq 5$

$$\left|S_k^2 \cap \left(1-\frac{1}{2^{k-1}}, 1\right)\right| \in (c_1 2^{3k/2}, c_2 2^{2k})$$

для некоторых положительных констант c_1, c_2. Наконец, если $k > 3$, то

$$S_k^2 \cap \left(0, \frac{1}{k-2}\right) = \left\{\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1.5}\right\}. \tag{5}$$

Мы улучшили верхнюю оценку на наименьшую предельную точку спектра S_k^1 при всех $k \leq 20$ и верхнюю оценку на наименьшую предельную точку спектра S_k^2 при всех $k \leq 12$.

Теорема 2.2.4. *Для любого $k \geq 5$ выполнено*

$$\frac{1}{[k/2]} \in (S_k^1)'.$$

Из этой теоремы вытекает ответ на вопрос Q4: наименьшее k, при котором спектр S_k^1 (S_k^2) бесконечен, равно либо 4, либо 5.

В **третьей главе** диссертации мы продолжаем изучать k-законы нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$, но рассматриваем уже весь интервал $(0,1)$. Как было замечено выше, предельные точки спектров являются правосторонними пределами. Так как для любого натурального k множество свойств, выражаемых формулами первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей k, конечно, то слева от каждой рациональной точки $t/s \in (0,1)$ существует целый интервал, внутри которого нет ни одной точки спектра S_k^2 (поэтому на этом интервале выполнен k-закон нуля или единицы). Мы нашли явно такой интервал для любых натуральных $k \geq 4$ и рациональных $t/s \in (0,1)$, а также для рациональных чисел t/s

с числителем, не превосходящим 2, мы доказали, что логарифм длины найденного нами интервала имеет тот же порядок малости, что и логарифм длины максимального такого интервала.

Теорема 3.2.1. *Пусть*

$$\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0,1), \quad k \geq 4. \tag{6}$$

Положим

$$q = \frac{(s+1)^k - 1}{s}. \tag{7}$$

Тогда внутри интервала

$$\left(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s} \right) \tag{8}$$

нет точек спектра S_k^2.

Так как $S_k^1 \subset S_k^2$, то имеет место следующее очевидное утверждение для законов нуля или единицы.

Следствие 3.2.1. *Пусть выполнены условия (6), (7). Тогда если* α *принадлежит интервалу (8), то случайный граф* $G(n, n^{-\alpha})$ *подчиняется* k*-закону нуля или единицы.*

Кроме того, мы показали, что если выполнено условие

$$C_{k-2}^{[s/t]} < s + 1, \tag{9}$$

то интервал, полученный в теореме 3.2.1 можно увеличить.

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены условия (6). Положим*

$$q = \frac{(s+1)^{k-2}(1 + s(C_{k-2}^{[s/t]} + 1)) - 1}{s}. \tag{10}$$

Тогда внутри интервала (8) нет точек спектра S_k^2.

Так как $S_k^1 \subset S_k^2$, то снова имеет место следствие для законов нуля или единицы.

Следствие 3.2.2. *Пусть выполнены условия (6), (10). Тогда если* α *принадлежит интервалу (8), то случайный граф* $G(n, n^{-\alpha})$ *подчиняется*

k-закону нуля или единицы.

Легко видеть, что если выполнено неравенство (9), то теорема 3.2.2 дает больший интервал значений α, при которых выполнен k-закон, чем теорема 3.2.1.

Итак, ранее был доказан k-закон нуля или единицы для правой и левой полуокрестности 0 и 1 соответственно. При этом оставался огромный промежуток между $\frac{1}{k-2}$ и $1-\frac{1}{2^{k-1}}$, внутри которого не было найдено интервалов, для которых выполняется k-закон нуля или единицы. С помощью теоремы 3.2.1 и теоремы 3.2.2 мы можем найти такие интервалы на любом промежутке из интервала $(0,1)$.

Длина интервала, предъявленного в теореме 3.2.1, равна

$$\frac{t}{s(s+1)^k}.$$

Мы доказали, что для точек вида

$$\frac{t}{s}=\frac{2}{m}, \quad m \geq 2, \tag{11}$$

теорема 3.2.1 дает правильный порядок малости оценки логарифма длины максимального интервала с правым концом $\frac{t}{s}$, все точки которого "подчиняются k-закону нуля или единицы". Более формально, для каждого $m \geq 2$, для каждого достаточно большого k мы нашли слева от точки $\frac{2}{m}$ такую точку α, для которой не выполнен k-закон нуля или единицы, причем величина $\frac{2}{m}-\alpha$ уменьшается экспоненциально с ростом k.

Теорема 3.2.3. *Пусть выполнены условия (11) , $k \geq 10m-5$. Тогда при*

$$\alpha=\frac{t}{s}-\frac{1}{2^{k-10m+8}m(m-1)}$$

случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы.

Напомним, что случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется закону нуля или единицы при $p=n^{-\alpha}$, где $\alpha \in (0,1)$ — рациональное число. Возникает естественный вопрос. Для любого ли свойства первого порядка L существует предел вероятности $\mathsf{P}(G(n,p) \models L)$ при упомянутых условиях? Ответ на этот вопрос известен, и мы дадим его ниже.

Как было отмечено выше, при любом иррациональном $\alpha > 0$ выполнен закон нуля или единицы. Известно также, что при любом (в том числе, рациональном) $\alpha > 2$ и любом α из интервала $(1 + \frac{1}{l+1}, 1 + \frac{1}{l})$ (каково бы ни было натуральное число l) выполнен закон нуля или единицы. При $\alpha = 1 + \frac{1}{l}$ закон нуля или единицы не выполнен, но выполнен *закон сходимости* (для любого свойства первого порядка существует предел вероятности того, что случайный граф обладает этим свойством). При $\alpha = 1$ также не выполнен закон нуля или единицы, но выполнен закон сходимости. При $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ не выполнен даже закон сходимости.

Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется 3-закону нуля или единицы при всех $\alpha \in (0, 1)$. Кроме того, при $\alpha = 1$ выполнен *3-закон сходимости* (для любого свойства первого порядка L, выраженного формулой первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей 3, существует предел (4)). Справедлив ли аналогичный результат для любого $k \geq 3$ на границе интервала $(0, \frac{1}{k-2})$, полученного в теореме 1.1.3? Мы ответили на этот вопрос в **четвертой главе** диссертационной работы.

Теорема 4.2.1. *Пусть*

$$k \geq 4, \quad p = n^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{k-2}.$$

Тогда для любого свойства L, записываемого с помощью формулы первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей k, существует предел (4).

Пусть ϕ — формула первого порядка, а $S(\phi)$ — множество всех таких $\alpha \in (0, 1)$, что вероятность $\mathsf{P}(G(n, n^{-\alpha}) \models \phi)$ не сходится ни к 0, ни к 1 при $n \to \infty$. Как мы выяснили в главе 2, наименьшая глубина формулы с бесконечным *спектром* $S(\phi)$, равна либо 4, либо 5. В **пятой главе** мы ответили на вопрос, чему равно наименьшее число перемен кванторов такой формулы.

Теорема 5.1.1. *Минимальное k, для которого существует замкнутая формула первого порядка с бесконечным спектром и числом перемен кванторов k, равно* 3.

Формула с тремя переменными кванторами и бесконечным спектром получена на основе результатов главы 2 и имеет следующий вид:

$$\phi = \exists x_1 \exists x_2 \left[\left(\exists x_3 \exists x_4 \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le 4} (x_i \sim x_j) \right) \right) \wedge (\varphi(x_1, x_2)) \right],$$

где $\varphi(x_1, x_2) =$

$$\forall y_1 \left([y_1 \sim x_1] \vee [y_1 \sim x_2] \vee [\forall y_2([\neg(y_2 \sim x_1)] \vee [\neg(y_2 \sim y_1)])] \vee [\exists z \, (z \sim x_1) \wedge \right.$$

$$\left. (z \sim x_2) \wedge (\forall u \, [([\neg(u \sim z)] \vee [\neg(u \sim y_1)]) \vee (u \sim x_1) \vee (u \sim x_2)])]\right).$$

Выше речь шла о законах нуля или единицы для случайного “разреженного” графа $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha \in (0, 1)$. В **шестой** главе мы рассматриваем “сильно разреженный” случайный граф, т.е. $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha > 1$.

Разумеется, при $\alpha > 2$ с асимптотической вероятностью 1 в случайном графе нет ребер, а, следовательно, он подчиняется k-закону нуля или единицы. Более того, как уже было сказано выше, в 1988 г. С. Шелах и Дж. Спенсер доказали, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы при всех $\alpha > 1$, не принадлежащих множеству $\{1 + \frac{1}{l}, \, l \in \mathbb{N}\}$. При $\alpha = 1 + \frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$, закон нарушается.

Напомним, что *монадическое формулы второго порядка*, как и формулы первого порядка, строятся с помощью символов отношений $\sim$ и $=$, логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$, переменных $x, y, x_1, \ldots$, кванторов $\forall, \exists$, но еще и с помощью переменных $X, Y, X_1, \ldots$, выражающих унарные предикаты. Как и в случае формул первого порядка, мы называем кванторной глубиной формулы максимальную длину цепи вложенных кванторов.

Например, монадическая формула

$$(\forall X([\exists x_1 \exists x_2 (X(x_1) \wedge (\neg(X(x_2))))] \Rightarrow [\exists y \exists z (X(y) \wedge (\neg(X(z))) \wedge (y \sim z))]))$$

имеет глубину 3 и выражает свойство связности графа. Как известно, это свойство нельзя записать на языке первого порядка.

Случайный граф $G(n, p)$ подчиняется монадическому (k-) закону нуля или единицы, если для любой монадической формулы (с кванторной глубиной не более k) либо с асимптотической вероятностью 1 эта формула истинна, либо с асимптотической вероятностью 0 — ложна. Разумеется, если не выполнен (k-) закон нуля или единицы, то не выполнен и монадический (k-) закон нуля или единицы. В 1993 г. Дж. Тышкиевич доказал, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется монадическому закону нуля или единицы даже для иррациональных $\alpha \in (0, 1)$. Для $\alpha > 1$, отличного от

$1+1/l$, монадический закон выполнен.

Таким образом, случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется как k-закону, так и монадическому k-закону, если $\alpha \neq 1+1/l$ для любого натурального l. В главе 6 мы доказали сформулированную ниже теорему. Пусть $T(s)$ — башня из s двоек:

$$T(s) = 2^{T(s-1)}, \quad T(1) = 2,$$

а $\log^*(s)$ — обратная функция:

$$\log^*(s) = \min\{i : T(i) \geq s\}.$$

Теорема 6.2.1. *Пусть l — натуральное число, $\alpha = 1 + 1/l$.*

- *Если $k \geqslant 4$ и*

$$l \geqslant T(k + \log^*(k+1) + 3),$$

то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется монадическому k-закону нуля или единицы.

- *Если $k \geqslant 7$ и*

$$l \leq 2T(k-4),$$

то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы (даже для формул первого порядка).

Доказательство этой теоремы опирается как на известные результаты о классах элементарной эквивалентности для языка первого порядка, так и на доказанные нами утверждения о классах элементарной эквивалентности для монадических формул второго порядка. Эти результаты интересны сами по себе, и мы приводим их ниже.

Для графов G и H и натурального числа k мы пишем $G \equiv_k^{\mathrm{FO;\,gr}} H$, если любая формулы первого порядка ϕ с кванторной глубиной не более k либо истинна для графов G и H, либо ложна для обоих. Аналогичным образом для монадических формул определяется отношение эквивалентности $\equiv_k^{\mathrm{MSO;\,gr}}$. Для фиксированного k будем обозначать множества классов эквивалентностей $\mathcal{R}_k^{\mathrm{FO;\,gr}}$ и $\mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,gr}}$ для языка первого порядка и монадического языка второго порядка соответственно. Как известно, для любого k количества классов эквивалентности обоих типов конечны (см., например, [13]). Кроме того, в 2006 г. О. Пихурко, Дж. Спенсер и О. Вербицкий установили верхнюю оценку на это количество

$$r_k^{\mathrm{FO;\,gr}} := |\mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,gr}}| \leq T(k + 2 + \log^*(k)) + O(1).$$

[13] Ebbinghaus H.-D., Flum J. *Finite model theory*, 2nd Edition, Springer, 1999.

Для $r_k^{\mathrm{MSO;\,gr}} = |\mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,gr}}|$ мы доказали аналогичный результат.

Теорема 6.3.2. *Для любого натурального числа k*

$$r_k^{\mathrm{MSO;\,gr}} \leq T(k+2+\log^*(k)).$$

Для того, чтобы доказать теорему 6.2.1, нам понадобилось сформулировать и доказать аналогичные результаты для укорененных деревьев. Напомним, что *укорененное дерево* T_R — это дерево с выделенной вершиной (*корнем*) R. Если $R\dots xy$ — простой путь в T_R, то x называется *отцом* y, а y — *сыном* x. Язык первого порядка в случае укорененных деревьев содержит константный символ R (для корня) и отношение "отец – сын" $P(x,y)$ (монадический язык содержит, как и в случае графов, еще и символы переменных унарных предикатов). Для любого натурального числа k для укорененных деревьев аналогичным образом (как и в случае графов) вводятся отношения эквивалентностей $\equiv_k^{\mathrm{FO;\,tr}}$, $T_R \equiv_k^{\mathrm{FO;\,tr}} T'_{R'}$, а также множества $\mathcal{R}_k^{\mathrm{FO;\,tr}}$, $\mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,tr}}$ и их мощности $r_k^{\mathrm{FO;\,tr}}$, $r_k^{\mathrm{MSO;\,tr}}$ соответственно. В упомянутой выше работе доказано, что

$$r_k^{\mathrm{FO;\,tr}} \leq T(k+2+\log^*(k)) + O(1).$$

Кроме того, для любого $A \in \mathcal{R}_k^{\mathrm{FO;\,tr}}$ выполнено

$$\min_{T_R \in A} |V(T_R)| \leq T(k+4+\log^*(k)) + O(1).$$

Мы получили похожий результат для $\equiv_k^{\mathrm{MSO;\,tr}}$-эквивалентности.

Теорема 6.3.4. *Пусть $k \geq 4$ — натуральное число. Тогда*

$$r_k^{\mathrm{MSO;\,tr}} \leq T(k+2+\log^*(k)). \qquad (12)$$

Кроме того, для любого $A \in \mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,tr}}$

$$\min_{T_R \in A} |V(T_R)| \leq T(k+3+\log^*(k+1)).$$

В **заключении** перечисляются полученные в диссертации основные результаты, а также обсуждаются открытые вопросы, связанные с темой диссертации.

Основные результаты диссертации. Получены следующее научные результаты, являющиеся новыми на период проведения исследований и опубликования:

1. Найдено наибольшее значение параметра случайного разреженного графа, меньшее 1, при котором не выполнен k-закон нуля или единицы. Кроме того, выполнимость k-закона исследована для многих значений параметра, близких к этому наибольшему значению.

2. Для любого рационального β найден явный интервал $(\beta-\varepsilon, \beta)$ значений параметра случайного разреженного графа, при которых выполнен k-закон нуля или единицы, при этом ε убывает экспоненциально с ростом k, и доказано, что экспоненциальное убывание является оптимальным для дробей, числитель которых не превосходит 2.

3. При достаточно больших k получены (в асимптотическом смысле оптимальные) оценки на наименьшую и наибольшую предельные точки множества значений α, при которых случайный разреженный граф с параметром α не подчиняется k-закону нуля или единицы.

4. Доказано, что наименьшее k, при котором существует такая формула первого порядка глубины k, что для бесконечно многих α вероятности ее истинности на случайном разреженном графе с параметром α не стремится ни к нулю, ни к единице, равно либо 4, либо 5. Найдено наименьшее k, при котором существует такая формула первого порядка с k переменами кванторов, что для бесконечно многих α вероятности ее истинности на случайном разреженном графе с параметром α не стремится ни к нулю, ни к единице.

5. Доказано, что случайный разреженный граф с параметром $1/(k-2)$ подчиняется k-закону сходимости.

6. Найдены верхняя и нижняя оценка на наибольшее m, для которого случайный разреженный граф с параметром $1+1/m$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Обе оценки являются (с точностью до константного множителя) башнями из двоек, при этом количества двоек в башнях асимптотически эквивалентны. Аналогичный результат получен и для закона нуля или единицы для монадических формул второго порядка, кванторная глубина которых не превосходит k.

Благодарности. Автор признателен профессору Андрею Михайловичу Райгородскому, профессору Олегу Васильевичу Вербицкому и профессору Дмитрию Александровичу Шабанову за неоценимую помощь в работе и за полезные замечания. Автор также выражает благодарность всем соавторам, участвовавшим в написании статей, результаты из которых включены в настоящую работу: А.Д. Матушкину, А.Е. Медведевой, Л.Б. Островскому и Дж.Х. Спенсеру.

Работы автора по теме диссертации

1. Zhukovskii M. E. Extension of the Zero-one k-law // Electronic Notes in Discrete Mathematics. — 2013. — Vol. 43. — P. 263–269.

2. Жуковский М. Е. Расширение k-закона нуля или единицы // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 454. — № 1. — С. 23–26.

3. Zhukovskii M. E. On the convergence of probabilities of the random graphs' properties expressed by first-order formulas with a bounded quantifier depth // Moscow Journal of Combinatorics and Theory of Numbers. — 2014. — Vol. 4. — no. 2. — P. 119–154.

4. Спенсер Дж., Жуковский М. Е. О спектрах в языке первого порядка для случайного графа Эрдеша–Реньи // Доклады Академии Наук. — 2015. — Т. 463. — № 6. — С. 642–645.

5. Жуковский М. Е. О предельных точках спектров свойств первого порядка случайного графа // Доклады Академии Наук. — 2015. — Т. 465. — № 4. — С. 403–406.

6. Жуковский М. Е. О 4-законе нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи // Математические заметки. — 2015. — Т. 97. — № 2. — С. 203–216.

7. Жуковский М. Е. О наибольшей критической точке в k-законе нуля или единицы // Математический сборник. — 2015. — Т. 206. — № 4. — С. 13–34.

8. Жуковский М. Е., Райгородский А. М. Случайные графы: модели и предельные характеристики // Успехи математических наук. — 2015. — Т. 70. — № 1. — С. 35–88.

9. Жуковский М. Е. Спектры формул первого порядка малой кванторной глубины // Успехи математических наук. — 2015. — Т. 70. — № 6. — С. 209–210.

10. Жуковский М. Е., Матушкин А. Д. Универсальный k–закон нуля или единицы // Математические заметки. — 2016. — Т. 99. — № 4. — С. 511–525.

11. Жуковский М. Е., Медведева А. Е. О наибольших критических точках в k-законе нуля или единицы // Математические заметки. — 2016. — Т. 99. — № 3. — С. 342–349.

12. Spencer J. H., Zhukovskii M. E. Bounded Quantifier Depth Spectra for Random Graphs // Discrete Mathematics. — 2016. — Vol. 339. — no. 6. — P. 1651–1664.

13. Zhukovskii M. E. On infinite spectra of first order properties of random graphs // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2016. — Vol. 6. — no. 4. — P. 73–102.

14. Жуковский М. Е., Островский Л. Б. Свойства первого порядка и монадические свойства сильно разреженных случайных графов // Доклады Академии Наук. — 2016. — Т. 470. — № 5. — С. 499–501.

15. Zhukovskii M. E. On the zero-one k-law extensions // European Journal of Combinatorics. — 2017. — Vol. 60. — P. 66–81.

16. Ostrovsky L. B., Zhukovskii M. E. Monadic second-order properties of very sparse random graphs // Annals of pure and applied logic. — 2017. — Vol. 168. — no. 11. — P. 2087–2101.

17. Жуковский М. Е. Перемены кванторов в формулах первого порядка с бесконечным спектром // Проблемы передачи информации. — 2017. — Т. 53. — № 4. — С. 93–106.

18. Жуковский М. Е., Островский Л. Б. Свойства первого порядка ограниченной кванторной глубины сильно разреженных случайных графов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2017. — Т. 81. — № 6. — С. 100–113.

19. Жуковский М. Е., Матушкин А. Д. Спектры формул первого порядка с малой кванторной глубиной и малым числом перемен кванторов // Доклады Академии Наук. — 2017. — Т. 475. — № 2. — С. 127–129.

20. Matushkin A. D., Zhukovskii M. E. First order sentences about random graphs: small number of alternations // Discrete Applied Mathematics. — 2018. — Vol. 236. — P. 329–346.