Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Московский физико-технический институт (государственный университет)" (МФТИ)

На правах рукописи

Жуковский Максим Евгеньевич

ЛОГИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА СЛУЧАЙНОГО ГРАФА ЭРДЕША–РЕНЬИ

05.13.17 — теоретические основы информатики

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2018

Оглавление

Список основных обозначений **5**

Введение **7**

1. Законы нуля или единицы **29**
1.1. Основные определения и история задачи 29
1.2. Новые результаты 34
1.3. Малые подграфы в случайном графе 36
1.4. Игра Эренфойхта 47
1.5. Доказательства результатов 50
1.5.1. Циклические расширения и свойство разреженности 51
1.5.2. Стратегия SF 56
1.5.3. Доказательство теоремы 1.2.1 65
1.5.4. Доказательство теоремы 1.2.2 66
1.5.5. Доказательство теоремы 1.2.4 85

2. Спектры свойств первого порядка **102**
2.1. История задачи 103
2.2. Новые результаты 104
2.3. Доказательства результатов 106
2.3.1. Доказательство теоремы 2.2.1 106
2.3.2. Доказательство теоремы 2.2.2 110
2.3.3. Доказательство теоремы 2.2.3 122
2.3.4. Доказательство теоремы 2.2.4 127

3. Универсальный закон нуля или единицы **131**
3.1. Введение 131
3.2. Новые результаты 132
3.3. Доказательства 134
3.3.1. Доказательство теоремы 3.2.1. 134
3.3.2. Доказательство теоремы 3.2.2 138

3.3.3. Доказательство теоремы 3.2.3 141

4. Сходимость на границе **147**
4.1. Введение 147
4.2. Новый результат 149
4.3. Дополнительные конструкции 149
4.3.1. Вспомогательные графы 150
4.3.2. Построение замыкания $[A]_{\hat{G}}$ графа A в $\hat{G}$ 152
4.3.3. Построение графов $X^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3})$, $\hat{X}^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3})$, $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 154
4.3.4. Построение графов $X^l_j(\hat{x}_1)$, $\hat{X}^l_j(\hat{x}_1)$, $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 157
4.4. Вспомогательные утверждения 162
4.5. Доказательства лемм 164
4.5.1. Доказательство леммы 4.4.3 164
4.5.2. Доказательство леммы 4.4.2 168
4.5.3. Доказательство леммы 4.4.1 174
4.6. Доказательство теоремы 4.2.1 179

5. Перемены кванторов формул первого порядка с бесконечным спектром **180**
5.1. Введение и новый результат 180
5.2. Формулы существования и расширения 181
5.3. Вспомогательные конструкции 182
5.3.1. Язык $\mathcal{F}$ 183
5.3.2. Предваренные нормальные формы 184
5.4. Доказательство теоремы 5.1.1 188
5.4.1. Ноль перемен кванторов 190
5.4.2. Одна перемена кванторов 190
5.4.3. Две перемены кванторов 191
Переход к множествам графов 191
Построение плотной окрестности и определение ее структуры 192
Выделение ограниченного подграфа с той же структурой 193
Доказательство конечности спектра 194

6. Законы нуля или единицы для сильно разреженного случайного графа **198**
6.1. Введение 198

6.2. Новые k-законы для случайного сильно разреженного графа 199
6.3. Элементарная эквивалентность 200
6.4. Доказательства 201
6.4.1. Вспомогательные конструкции и утверждения . . . 201
6.4.2. Доказательство теоремы 6.3.2 208
6.4.3. Доказательство теоремы 6.3.4 208
6.4.4. Доказательство теоремы 6.2.1: монадический k-закон 212
6.4.5. Доказательство теоремы 6.2.1: k-закон для формул первого порядка 213

Заключение **217**

Список литературы **219**

Список основных обозначений

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множество действительных неотрицательных чисел;

$|A|$ — мощность конечного множества A;

$\lfloor a \rfloor$ — нижняя целая часть числа a;

$\lceil a \rceil$ — верхняя целая часть числа a;

$I(E)$ — индикатор события E;

$\mathsf{E}X$ — математическое ожидание случайной величины X;

$\mathsf{D}X$ — дисперсия случайной величины X;

$V(G)$ — множество вершин графа G;

$E(G)$ — множество ребер графа G;

$v(G)$ — количество вершин графа G;

$e(G)$ — количество ребер графа G;

$a(G)$ — количество автоморфизмов графа G;

$G|_V$ — подграф графа G, индуцированный на множество V;

$G \models L$ — предикат, истинный тогда и только тогда, когда граф G обладает свойством L;

$f(N) = o(g(N))$ — для любого числа $c > 0$ существует такое число N_0, что для любого $N > N_0$ выполнено неравенство $|f(N)| \leq c|g(N)|$;

$f(N) = O(g(N))$ — найдется такое число $C > 0$, что для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|f(N)| \leq C|g(N)|$;

$f(N) = \Theta(g(N))$ — найдутся такие числа $c, C > 0$, что для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $c|g(N)| \leq |f(N)| \leq C|g(N)|$;

$f(N) \sim g(N)$ — для любого $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $(1 - \varepsilon)g(N) \leq f(N) \leq (1 + \varepsilon)g(N)$;

$(S)'$ — множество предельных точек множества S;

$\mathcal{L}$ — класс свойств графов первого порядка;

$\mathcal{L}_k$ — класс свойств графов, выразимых формулами первого порядка, кванторная глубина которых не превосходит числа k;

$\mathcal{L}^k$ — класс свойств графов, выразимых формулами первого порядка, число перемен кванторов которых не превосходит k.

Введение

Актуальность.

Одним из важнейших (как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений) классов теоретико-информационных задач является оценивание сложности алгоритмов проверки свойств графов. В этом классе стоит выделить широко известную задачу о существовании подграфа изоморфного данному в другом фиксированном графе (называемую задачей поиска изоморфного подграфа). Разумеется, свойство существования изоморфного подграфа является выразимым на (логическом) языке первого порядка, а сложность алгоритма проверки истинности формулы первого порядка, как известно [76], легко оценивается в терминах параметров формулы (например, кванторной глубины). В этой связи оценивание параметров формулы первого порядка, с помощью которой наилучшим образом можно записать заданное свойство (иными словами, задача о выразимости), является отдельной важной задачей. Более подробно о связи сложности алгоритма проверки свойства с выразимостью этого свойства см., например, в [35, 56, 149, 150].

Классическим подходом к решению задачи о выразимости является подбор подходящих для опровержения выразимости конечных моделей (так, например, для опровержения выразимости свойства связности формулой первого порядка кванторной глубины k надо подобрать два графа, которые не будут различаться никакой такой формулой, но при этом один граф будет являться связным, а второй — нет). Поэтому здесь применяется и вероятностный метод, являющийся одним из ключевых инструментов современной теории графов: в качестве двух графов можно просто взять, например, две независимые реализации случайного графа с подходящим распределением вероятностей и большим числом вершин. В этом случае неразличимость этих графов с асимптотической вероятностью 1 в рамках фиксированного языка эквивалентна, так называемому, (логическому) закону нуля или единицы, который гласит, что вероятность истинности любой формулы из этого языка стремится либо к 0,

либо к 1 с ростом числа вершин случайного графа к бесконечности. Диссертационная работа посвящена закону нуля или единицы для наиболее известной модели случайного графа — биномиальной, известной также как случайный граф Эрдеша-Реньи.

Существует два типа задачи поиска подграфа, изоморфного фиксированному pattern-графу, в данном input-графе. В задаче первого типа (неиндуцированный случай) требование того, чтобы искомый подграф был индуцированным, не накладывается, в отличие от задачи второго типа (индуцированный случай). Если для задачи первого типа получен целый спектр выдающихся результатов (во многих ситуациях удается доказать, что задача решается за полиномиальное время от числа вершин n input-графа, при этом степень полинома не зависит от числа вершин v pattern-графа, или даже за линейное время [35]), то во втором случае таких сильных продвижений нет (известные алгоритмы работают за время, равное степени числа n, где показатель степени линейно зависит от v). Этот факт, в частности, связан с тем, что если бы удалось доказать, что для некоторого pattern-графа на v вершинах упомянутый показатель растет медленнее, чем любая линейная функция от v, то из этого результата незамедлительно бы следовало, что неверна гипотеза об экспоненциальном времени. Наилучшая известная оценка сверху этого показателя содержится в работе [93]; в частности, для pattern-графов на 4 вершинах она превосходит 3. В то же самое время, упомянутый способ решения задачи с помощью языка первого порядка дает показатель степени, в точности равный 3 [94]. Этот пример демонстрирует возможность применения формул первого порядка и в общем случае для усиления наилучшего известного результата. Заметим, наконец, что вероятностный подход, основанный на законах нуля или единицы, в некоторых ситуациях дает неулучшаемую оценку кванторной глубины формулы и, как следствие, временной сложности алгоритма проверки истинности формулы, выраженной в соответствующих терминах [149].

Первый (логический) закон нуля или единицы был сформулирован и доказан Ю.В. Глебским, Д.И. Коганом, М.И. Лиогоньким и В.А. Талановым в 1969 году [6] для *плотного* биномиального случайного графа (вероятность проведения ребра которого не зависит от числа вершин графа). В 1976 году тот же результат независимо был доказан Р. Фагиным [46]. С точки зрения приложения к задаче поиска изоморфного подграфа больший интерес представляет *разреженный случайный граф* (вероятность проведения ребра является степенной функцией от числа вершин графа с показателем α), так как в плотном биномиальном случайном графе, в

отличие от разреженного, с асимптотической вероятностью 1 содержится копия фиксированного pattern-графа, каким бы этот граф ни был. В 1988 году Дж. Спенсер и С. Шелах [106] исследовали зависимость справедливости закона нуля или единицы от параметра случайного графа α. Тем не менее, при приложении подобных результатов к задаче о выразимости представляется возможным лишь опровержение выразимости на языке первого порядка (в случае, если все-таки свойство выразимо, никакой информации о кванторной глубине мы получить не сможем). В [?] Спенсер ограничился формулами первого порядка кванторной глубины не более k, и доказал справедливость закона нуля или единицы для этого языка (k-*закона нуля или единицы*) в случае, если α принадлежит интервалу $(0, 1/(k-1))$. В [155] было установлено, что тот же результат верен и для интервала $(0, 1/(k-2))$, при этом новая верхняя граница является неулучшаемой. Заметим, что этот результат уже дает неулучшаемые оценки временной сложности проверки истинности формулы, выражающей свойство содержать индуцированный подграф, изоморфный данному, в некоторых нетривиальных ситуациях. Разумеется, расширение этого диапазона (т.е. получение интервалов значений параметра α, отделенных от нуля, при которых также справедлив k-закон) может позволить получить подобные неулучшаемые оценки и для других нетривиальных графов.

Поэтому актуальной является задача описания картины асимптотического поведения вероятностей истинности формул первого порядка для различных значений параметров α и k.

Стоит отметить, что при изучении доли выполнимости формулы (в различных языках) принято рассматривать и другую меру сложности формулы — число перемен кванторов (наибольшее количество перемен кванторов среди всех последовательностей вложенных кванторов) (см., например, [65, 66, 72, 73, 75]), у которой, правда, нет настолько наглядной алгоритмической мотивации. Заметим, что во всех перечисленных статьях, посвященных числу перемен кванторов, изучаются формулы второго порядка, и далее мы поясним, с чем это связано. Зададимся вопросом, какова минимальная сложность (в одном из двух определений) формулы *первого порядка*, для которой не выполнен закон нуля или единицы (т.е. вероятность истинности этой формулы не стремится ни к 0, ни к 1)? При постоянных p задаваться таким вопросом бессмысленно, так как закон выполнен вообще для всех формул первого порядка. В случае $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$, приходится ограничиваться первой

мерой сложности (кванторной глубиной), так как известными примерами формул, опровергающих закон, являются экзистенциальные предложения (т.е. минимальное число перемен кванторов равно нулю).

С другой стороны, нетривиальный вопрос о числе перемен кванторов формул порядка возникает в несколько другом контексте. В [111] доказано, что для некоторой формулы первого порядка существует бесконечно много показателей $\alpha \in (0,1)$, при которых вероятность истинности этой формулы на $G(n, n^{-\alpha})$ не стремится ни к 0, ни к 1. Какова наименьшая сложность этой формулы? Этот вопрос не является тривиальным для обоих мер сложности. В некоторых частных случаях конечность спектра для формул с не более двумя переменами кванторов доказана в работах [1, 28, 44, 103, 113, 142].

Заметим, наконец, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ интересен не только в контексте законов нуля или единицы. Так, для любого $\alpha \in (0,1)$ в [109] построен бесконечный граф, свойства первого порядка которого совпадают с асимптотическими свойствами случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$. Стоит подчеркнуть, что (в отличие от предыдущей ситуации) в случае постоянной вероятности проведения ребра $p \in (0,1)$ такой счетный граф ровно один (с точностью до изоморфизма), см. [45]. У этого графа существует явная конструкция, предложенная Радо [99].

Степень разработанности темы.

Остановимся подробнее на исследуемых в работе объектах. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество $\Omega_n = \{G = (V_n, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \ldots, n\}$. *Случайный граф в модели Эрдеша–Реньи* это случайный элемент $G(n,p)$ со значениями во множестве Ω_n и распределением $\mathsf{P}_{n,p}$ на $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным формулой

$$\mathsf{P}_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Мы будем считать, что все случайные графы $G(n,p)$ заданы на одном и том же вероятностном пространстве с вероятностной мерой P (см. [2, 22]). Будем говорить, что случайный граф $G(n,p)$ *подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств* $\mathcal{C}$, если для любого свойства $L \in \mathcal{C}$ предел $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L)$ существует и равен либо нулю, либо единице.

Свойства первого порядка записываются с помощью формул первого порядка, которые в свою очередь строятся с помощью двух символов

отношения $\sim$ (символ смежности) и $=$ (символ равенства); логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$; переменных $x, y, x_1, \ldots$; кванторов $\forall, \exists$. Символы переменных в языке первого порядка обозначают вершины графа. Рассмотрим в качестве примеров свойств первого порядка два свойства. Первое — свойство содержать треугольник, записываемое формулой

$$(\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \ [(x_1 \sim x_2) \wedge (x_1 \sim x_3) \wedge (x_2 \sim x_3)]),$$

второе — свойство содержать изолированную вершину, записываемое формулой:

$$(\exists x \forall y \ [x \nsim y]).$$

В случае когда случайный граф подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств $\mathcal{L}$, говорят что он просто *подчиняется закону нуля или единицы.*

Для случайного графа $G(n, 1/2)$ закон нуля или единицы был доказан в [6] и независимо в [46]. Заметим, что с помощью игры Эренфойхта легко доказать (см., например, [1]), что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если функция $p = p(n)$ достаточно медленно меняется:

$$\forall \alpha > 0 \quad \min\{p, 1-p\} n^{\alpha} \to \infty, \ n \to \infty. \tag{1}$$

Заметим, что последнее условие включает в себя случай $p = \frac{1}{2}$ и, тем самым, обобщает рассмотренную в [6, 46] ситуацию. Возникает естественный вопрос: подчиняется ли $G(n, p)$ закону нуля или единицы при $p = n^{-\alpha}$ (или при $p = 1 - n^{-\alpha}$), где $\alpha > 0$ — произвольное (не зависящее от n) число?

В работах [28, 104] доказно, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы при рациональных $\alpha \in (0, 1]$, а также при $\alpha = 1 + \frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$ (заметим, что при $\alpha = 0$ случайный граф является полным с вероятностью 1, а, следовательно, он подчиняется закону нуля или единицы). Для остальных значений α в [106] доказан закон нуля или единицы.

Теорема 1 (Т. Лучак, Дж. Спенсер, 1991, [79]; Дж. Спенсер, С. Шелах, 1988, [106])**.** *Случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если выполнено одно из свойств*

- *для некоторого иррационального числа $\alpha > 0$*

$$p = n^{-\alpha + o(1)},$$

- *для некоторого* $l \in \mathbb{N}$

$$n^{-1-1/l} = o(p),\ p = o(n^{-1-1/(l+1)}), \tag{2}$$

- *справедливы равенства*

$$p = n^{-1-o(1)},\ p = o(n^{-1}),$$

- *выполнены соотношения*

$$p = n^{-1+o(1)}, n^{-1} = o(p)$$

и для любой такой пары натуральных чисел r, s, *что* $s \geq r - 1 \geq 0$ *либо*

$$rnp - \ln n - s \ln \ln n \to -\infty,\ n \to \infty,$$

либо

$$rnp - \ln n - s \ln \ln n \to \infty,\ n \to \infty.$$

Важным дополнением к этой теореме служит следующий удивительный результат Дж. Линча.

Теорема 2 (Дж. Линч, 1992, [85])**.** *Пусть* $l \in \mathbb{N}$, $\alpha = \frac{l+1}{l}$, $p = n^{-\alpha}$. *Тогда для любого свойства первого порядка* L *существует*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L). \tag{3}$$

Если же $p = \frac{c}{n}$, *где* c — *произвольное положительное число, то для любого свойства первого порядка* L *предел (3) существует и может быть выражен функцией от* c, *использующей в своей записи само число* c, *сложение, умножение, деление и степени числа* e.

Будем говорить, что случайный граф $G(n,p)$ *подчиняется закону сходимости*, если для любого свойства первого порядка L существует предел (3). Итак, закон нуля или единицы и закон сходимости при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, исследованы полностью. При иррациональном α выполнен закон нуля или единицы (он также выполнен и при $p = n^{-\alpha+o(1)}$). При $\alpha > 2$ выполнен закон нуля или единицы. При рациональном α из интервала $(1 + \frac{1}{l+1}, 1 + \frac{1}{l})$ для некоторого натурального числа l также выполнен закон нуля или единицы. При $\alpha = 1 + \frac{1}{l}$ закон нуля или единицы не выполнен, но выполнен *закон сходимости* (для любого свойства первого порядка существует предел вероятности того, что случайный граф обладает этим свойством). При $\alpha = 1$ также не выполнен закон нуля или

единицы, но выполнен закон сходимости. При $\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ не выполнен даже закон сходимости.

Будем говорить, что случайный граф подчиняется k-закону нуля или единицы, если он подчиняется закону нуля или единицы для класса свойств (который мы в дальнейшем будем обозначать $\mathcal{L}_k$), записываемых с помощью формул первого порядка кванторной глубины (см., например, [39, 112, 130], а также раздел 1.1 настоящей работы) не более k. В работе [114] доказано, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы при $\alpha < \frac{1}{k-1}$. В [132, 155] мы доказали, что если $k \geq 3$, $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1/(k-2))$, то случайный граф $G(n,p)$ также подчиняется k-закону нуля или единицы. При $\alpha = 1/(k-2)$ существуют свойства из $\mathcal{L}_k$, вероятность которых сходится к константе, отличной от 0 и 1.

Таким образом, интерес представляет доказательство или опровержение k-закона при различных значениях $\alpha > 1/(k-2)$. В частности, возникает вопрос о наибольшем значении (меньшем 1), при котором не выполнен k-закон. Разумеется, интересен и вопрос о том, выполнен ли закон сходимости для формул первого порядка глубины k (k-закон сходимости) при $\alpha = \frac{1}{k-2}$.

Кроме того, открытым остается вопрос о том, при каких натуральных m случайный граф $G(n, n^{-1-1/m})$ подчиняется k-закону нуля или единицы, а при каких — нет.

Кроме того, в 1990 г. Дж. Спенсер [111] доказал, что для некоторого k существует бесконечно много параметров α, при которых случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Более того, он ввел связанное понятие спектра формулы, о котором речь пойдет ниже. В настоящей работе мы рассматриваем два понятия спектра, первое из которых мотивировано изучением k-законов нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$, а второе (более общее, но, на первый взгляд, менее естественное) было введено в работах Дж. Спенсера и С. Шелаха. Спектр $S_k^1 = \cup_{L \in \mathcal{L}_k} S(L)$ — это множество всех таких рациональных $\alpha \in (0,1)$, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Спектр S_k^2 — это множество всех рациональных $\alpha \in (0,1)$, которые не обладают следующим свойством. Для любого $L \in \mathcal{L}_k$ существует такое число $\varepsilon > 0$ и $\delta \in \{0,1\}$, что для любого $p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}]$ выполнено

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = \delta. \tag{4}$$

Разумеется $S_k^1 \subset S_k^2$, но чем мотивировано такое обобщение? Это понятие мотивировано существованием монотонных свойств первого порядка, пороговые функции которых имеют вид $n^{-\alpha+o(1)}$, где $\alpha \in (0,1)$ — рациональное число (см. раздел 1.3). В этой связи при некоторых $k \in \mathbb{N}$ и некоторых рациональных α выполнен k-закон нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$, тогда как случайный граф $G(n, n^{-\alpha+o(1)})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Поэтому естественно находить асимптотические вероятности выполнения свойств первого порядка не только для самой точки α, но и для некоторой ее малой окрестности. В работе [111] доказано, что при достаточно больших k множества S_k^1 и S_k^2 бесконечны. Возникает естественный вопрос: *а каково наименьшее k, обладающее таким свойством?*

В упомянутой работе [111] приведен пример такого свойства первого порядка L, что для любого $\varepsilon > 0$ и некоторого рационального числа $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \varepsilon\right)$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ обладает свойством L с асимптотической вероятностью, отличной от 0 и 1. Таким образом, если k — кванторная глубина некоторой формулы, выражающей свойство L, то $\frac{1}{3} \in (S_k^1)'$. Метод, с помощью которого строятся такие примеры, позволяет получать предельные точки спектров, не зависящие от k. Поэтому возникает вопрос: *существуют ли предельные точки спектров "вблизи" нуля или единицы? Иными словами, существуют ли для каждого $j \in \{1,2\}$ такие числа $a(k) \in (S_k^j)'$, $b(k) \in (S_k^j)'$, что*

$$\lim_{k\to\infty} a(k) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} b(k) = 1?$$

Известно также [106], что у любой предельной точки множества S_k^2 (множества S_k^1) существует левая полуокрестность, не содержащая точек множества S_k^2 (множества S_k^1). Стоит отметить, что если α — предельная точка множества S_k^1, то из этого не следует, что для любого $p > n^{-\alpha}$, $p = n^{-\alpha+o(1)}$ не выполнен закон нуля или единицы, как показывает, например, следующая теорема.

Теорема 3 (Т. Лучак, Дж. Спенсер, 1991, [79])**.** *Пусть $a < b$ — взаимно простые натуральные числа,*

$$p(n) = ((b-a+1)(\log n + \omega(n)\log\log n)n^{-a})^{1/b},$$

где $\omega(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, причем $p = n^{-\frac{a}{b}+o(1)}$. Тогда $G(n,p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Известны и другие результаты, относящиеся к асимптотике вероятностей свойств первого порядка случайного графа $G(n,p)$ [44, 26, 63], [109]–[117]. Так, например, в работе [117] приведено полное описание пределов

вероятностей обладания случайным графом свойствами первого порядка при $p = \Theta\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. В работе [116] для фиксированного свойства первого порядка L изучено поведение функции $f : (0, \infty) \setminus \mathbb{Q} \to \{0, 1\}$, заданной равенством

$$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, n^{-\alpha}) \models L).$$

Более детальную историю изучения асимптотики вероятностей свойств первого порядка можно найти в [33, 39, 57, 112, 115, 124, 130].

Также законы нуля или единицы и законы сходимости доказаны для случая других языков: формул первого порядка с унарными предикатами (см. [84, 105]) и других расширений языка первого порядка (см., например, [26, 64, 80, 81, 83, 95, 122, 123]). Так, ситуация в случае языка с бесконечными предложениями $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty,\omega}$ отличается от ситуации с языком первого порядка $\mathcal{L}$ только тем, что при $\alpha = 1$ и при иррациональном $\alpha \in (0, 1)$ в первом случае закон сходимости не выполнен (см., например, [83]).

Формулы второго порядка отличаются от формул первого порядка возможностью квантификации общности и существования не только над атомами, но и над предикатами. Примером свойства второго порядка служит связность графа (см. раздел 1.4 и [130]). Можно показать, что даже в случае $p = \text{const}$ закон нуля или единицы для свойств второго порядка случайного графа Эрдеша–Реньи не выполнен. Действительно, так называемый *монадический закон нуля или единицы* (см., например, [36, 59, 74, 88]) нарушается уже в простейшем случае равномерного распределения на множестве всех графов Ω_n, т.е. для случайного графа $G(n, \frac{1}{2})$ [60] (такой закон нуля или единицы определяется для класса свойств, выражаемых монадическими формулами второго порядка, символы переменных в которых обозначают вершины и унарные предикаты (во втором случае используются заглавные буквы); иными словами, $X(x)$ означает принадлежность вершины x множеству X).

При $\alpha \in (0, 1)$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ также не подчиняется монадическому закону нуля или единицы, что доказано в работе [121] (при $\alpha = 1$, как мы знаем, не выполнен даже закон нуля или единицы для логики первого порядка). С другой стороны, если функция p удовлетворяет соотношению (1), то случайный граф связен с вероятностью, стремящейся к 1. В этой связи, имеется несколько работ, в которых авторы ищут как можно более широкий подкласс свойств второго порядка, для которого закон нуля или единицы будет выполнен в случае $p = \text{const}$ или p,

удовлетворяющего соотношению (1).

Заметим, что несложно показать, что при выполнении условия (2) случайный граф $G(n,p)$ все же подчиняется монадическому закону нуля или единицы. Тем самым при $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha \in (1+\frac{1}{l+1}, 1+\frac{1}{l})$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, выполнен монадический закон нуля или единицы (разумеется, он выполнен и при $\alpha > 2$). Этот результат известен, но в силу его простоты он не публиковался (он является очевидным следствием двух стандартных фактов об отношении элементарной эквивалентности, приведенных ниже). Будем называть графы G и H MSO-k-*элементарно эквивалентными* (и писать $G \equiv_k^{\mathrm{MSO}} H$), если для любого свойства L, выражаемого монадической формулой кванторной глубины не более k, либо оба графа обладают этим свойством, либо оба графа этим свойством не обладают. В случае простой k-элементарной эквивалентности графов G и H (определение дано выше) мы будем писать $G \equiv_k H$.

Теорема 4 ([34], Theorem 2.2)**.** *Пусть*

$$G_1 \equiv_k^{\mathrm{MSO}} H_1, \quad G_2 \equiv_k^{\mathrm{MSO}} H_2.$$

Пусть, кроме того, $G_1 \sqcup G_2$, $H_1 \sqcup H_2$ *— дизъюнктные объединения графов (т.е.*

$$A \sqcup B = (V(A) \cup V(B), E(A) \cup E(B)),$$

если $V(A) \cap V(B) = \varnothing$*). Тогда*

$$G_1 \sqcup G_2 \equiv_k^{\mathrm{MSO}} H_1 \sqcup H_2.$$

То же самое верно и для эквивалентности $\equiv_k$*.*

Доказательство второй теоремы можно найти в той же работе.

Теорема 5 ([34], Theorem 2.3)**.** *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует такое натуральное число* $a = a(k)$*, что для любого графа* G *и любого натурального числа* $b \geq a$ *выполнено* $bG \equiv_k^{\mathrm{MSO}} aG$ *(и, разумеется,* $bG \equiv_k aG$*).*

Здесь aG *— дизъюнктное объединение* a *копий графа* G*.*

Пусть выполнено условие (2). Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $G(n,p)$ является объединением древесных (см., например, [8, 9, 37, 51]) компонент, в каждой из которых количество вершин не превосходит $l+1$. Кроме того, для любого дерева на не более чем $l+1$ вершине и любого натурального числа M в случайном графе с вероятностью, стремящейся к 1, найдется M компонент, изоморфных этому

дереву (см., например, Theorem 3.4, Remark 3.7 в [57]). Тогда легко видеть, что случайный граф $G(n,p)$ подчиняется монадическому закону нуля или единицы в силу теоремы 4 и теоремы 5.

Далее мы поговорим о других моделях случайных графов в контексте свойств первого порядка. Прежде всего хочется упомянуть обзор [124] известных законов нуля или единицы для различных случайных конечных структур. Также подобные результаты приведены в [112]. Поговорим далее подробнее о некоторых конкретных самых известных моделях.

Модель $G(n,m)$ по своим свойствам похожа на $G(n,p)$. Пусть m — натуральное число из отрезка $[1, C_n^2]$, а $\Omega_{n,m}$ — множество всех графов $G=(V_n,E)$ с условием $|E|=m$. Тогда *случайным графом* $G(n,m)$ называется случайный элемент с равномерным распределением на множестве $\Omega_{n,m}$. Граф $G(n,m)$ похож по своим свойствам на $G(n,p)$ (при $m=pC_n^2$). Многие авторы, исследовавшие граф $G(n,p)$, посвятили часть своих работ и графу $G(n,m)$, получив для него схожие результаты.

Случайный граф $G(n,p)$ является частным случаем графа

$$G(n,\{p_{i_1i_2}\}_{i_1,i_2\in\{1,\dots,n\}}). \tag{5}$$

Этот граф возникает, если при определении случайного графа считать, что некоторые пары вершин соединены с *различными* вероятностями, т.е. ребро $\{x_{i_1},x_{i_2}\}$, $1\le i_1,i_2\le n$, проведено с вероятностью $p_{i_1i_2}\in[0,1]$. Одним из важнейших примеров этого случайного графа является случайный граф $G(\mathcal{G}_n,p)$, где $\mathcal{G}_n=(\mathcal{V}_n,\mathcal{E}_n)$ — неориентированный граф на n вершинах без петель и кратных ребер. А именно,

$$G(\mathcal{G}_n,p)=G(n,\{p_{i_1i_2}\}_{i_1,i_2\in\{1,\dots,n\}}),$$

если

$$p_{i_1i_2}=\begin{cases} p, & \{x_{i_1},x_{i_2}\}\in\mathcal{E}_n;\\ 0, & \{x_{i_1},x_{i_2}\}\notin\mathcal{E}_n.\end{cases}$$

Частным случаем последнего графа помимо случайного графа $G(n,p)$ является *случайный дистанционный граф* (см. [15, 16, 138]).

Рассмотрение дистанционных графов мотивировано классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [17, 20, 23, 61, 100, 101, 108, 118]). Впервые полный дистанционный граф в геометрическом контексте рассмотрели в 1981 году П. Франкл и Р.М. Уилсон. С помощью этого графа они показали, что хроматическое

число пространства $\mathbb{R}^n$ растет экспоненциально (см. [47]). В 1991 году Дж. Кан и Г. Калаи применили результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное неодноточечное множество в $\mathbb{R}^n$ может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра (см. [17] и [58]). Таким образом, изучение внутренней структуры дистанционного графа и его подграфов играет исключительно важную роль. Сейчас с исследованием дистанционных графов связаны одни из самых широко изучаемых разделов комбинаторной геометрии (см. [17, 20, 23, 32, 61, 100, 101, 108, 118]). Отметим, что в то же время некоторые из этих графов изучаются и в теории кодирования (см. [12, 24, 102]).

В работах [136], [138]–[141] были изучены законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов, вершины которых являются векторами из $\{0,1\}^m$ с одинаковым количеством нулевых и единичных координат. Оказалось (см., например, [141]), что закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов не выполнен даже при p, не зависящем от числа вершин графа n. Однако в [136] были найдены подпоследовательности в рассматриваемой последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющиеся закону нуля или единицы, если выполнено условие (1). Эти результаты, в частности, показывают, что любой подграф либо содержится в почти всех дистанционных графах, полученных из полного дистанционного графа удалением ребер, либо не содержится в почти всех таких дистанционных графах. Кроме того, в статье [138] были исследованы законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной. Затем С.Н. Попова в [15] рассмотрела более общую модель — случайные дистанционные графы с вершинами в $\{-1,0,1\}^m$. Общий случай случайного дистанционного графа с вершинами в $\mathbb{Z}^m$ был рассмотрен С.Н. Поповой в [16]. В этой работе были получены условия, при которых последовательность случайных дистанционных графов подчиняется закону нуля или единицы, а также условия, при которых из упомянутой последовательности можно выделить подпоследовательность, подчиняющуюся этому закону. Изучению вероятностей свойств первого порядка случайного дистанционного графа посвящена также работа [134].

Рассматривалось и другое обобщение случайного графа $G(n,p)$ — случайный граф $G(n,\overline{p})$, где $\overline{p}=(p_1,p_2,\ldots)$ — последовательность чи-

сел из $[0,1]$. В этой модели для любой пары различных вершин i, j из $V_n = \{1, \ldots, n\}$ ребро $\{i, j\}$ проводится с вероятностью $p_{|j-i|}$. Все ребра проводятся независимо в совокупности. Действительно, легко видеть, что случайный граф $G(n,p)$ является частным случаем такого случайного графа (достаточно положить $p_1 = p_2 = \ldots = p$). В работе [78] исследована зависимость сходимости вероятностей $\mathsf{P}(G(n,\overline{p}) \models L)$ для свойств первого порядка L от выбора последовательности $\overline{p}$. В частности, установлен следующий закон нуля или единицы (в работе также исследовано поведение вероятностей свойств, записанных на языке первого порядка, в который добавлен символ $<$).

Теорема 6 (Т. Лучак, С. Шелах, 1995, [78])**.** *Пусть последовательность* $\overline{p}$ *удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = o(\ln n)$$

и $0 < p_i \leq \frac{1}{2}$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$*. Тогда для любого свойства первого порядка* L

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,\overline{p}) \models L) \in \{0,1\}.$$

Упомянем еще одну модель случайного графа, *случайный регулярный граф*. Пусть натуральное число r не превосходит $n-1$ и rn — четное число. Пусть, кроме того, $\Omega_r(n)$ — множество всех r-регулярных графов на множестве вершин V_n. Тогда случайный элемент $G_r(n)$, имеющий равномерное распределение на $\Omega_r(n)$, называется случайным регулярным графом. Эта модель менее изучена, чем $G(n,p)$ и $G(n,m)$, так как получение короткой асимптотической формулы для числа r-регулярных графов на n вершинах является сложной задачей. В 1960 году Р. Рид установил точную формулу для этого числа. К сожалению, эту формулу редко удается применить. Для нахождения асимптотики ее используют только в случае $r \leq 3$. Задачами такого рода занимались также Ф. Харари, Е.М. Палмер, Е.А. Бендер, Е.Р. Кэнфилд, А. Бекеши, Р. Бекеши, Дж. Комлош, Б. Боллобаш. Известно, что при фиксированном r случайный граф $G_r(n)$ не подчиняется закону нуля или единицы, так как, скажем, предел вероятности свойства существования треугольника в таком графе отличен от 0 и 1. Тем не менее для любого свойства первого порядка L существует предел вероятности $\mathsf{P}(G_r(n) \models L)$ (см. [82]). Более того, в [50] доказано, что при $r = \Theta(n)$ случайный граф $G_r(n)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Наконец, в работе [48] рассмотрен случай бесконечного графа и доказан так называемый геометрический закон нуля или единицы (вообще говоря, в работе этот результат формулируется для произвольной бесконечной структуры). Пусть X — связный бесконечный граф, степени всех вершин которого равномерно ограничены. Будем обозначать $d_X(x,y)$ наименьшее количество ребер в пути, соединяющем вершины x и y в графе X (оно может быть равно ∞). Для любого подграфа $Y \subseteq X$ положим

$$d_X(x,Y) = \min_{y\in Y} d_X(x,y),$$

$$B_n(X,Y) = X\,\big|_{\{x:\, d_X(x,Y)\le n\}}\,, \quad B_n(X,x) = B_n(X,(\{x\},\varnothing)).$$

Пусть L — свойство графов. Обозначим $\mathcal{B}_n(X,x)$ и $\mathcal{B}_n^L(X,x)$ множество всех подграфов в $B_n(X,x)$ и множество всех подграфов в $B_n(X,x)$, обладающих свойством L, сответственно. Будем говорить, что граф X подчиняется геометрическому закону нуля или единицы, если для любого $x \in X$ либо

$$\frac{\left|\mathcal{B}_n^L(X,x)\right|}{|\mathcal{B}_n(X,x)|} = 0,$$

либо

$$\frac{\left|\mathcal{B}_n^L(X,x)\right|}{|\mathcal{B}_n(X,x)|} = 1.$$

Теорема 7 (Р.Х. Гилман, Ю. Гуревич, А. Мясников, 2009, [48])**.** *Пусть для любого конечного подграфа Y графа X в нем существует такой подграф $\tilde{Y}$, изоморфный Y, что*

$$V(Y) \cap V(\tilde{Y}) = \varnothing, \quad E(X|_{V(Y)\cup V(\tilde{Y})}) = E(Y) \cup E(\tilde{Y}).$$

Тогда граф X подчиняется геометрическому закону нуля или единицы.

В работе [48] описаны различные приложения этого закона нуля или единицы.

Логические законы для некоторых других моделей случайных структур изучены в работах [13, 14, 36, 54, 62], [67]–[69], [88]–[91], [98].

Отметим, наконец, что понятие о случайном графе является сейчас одним из центральных в дискретной математике. Однако до середины 50-х годов XX века систематической теории случайных графов не было. Были лишь разрозненные работы, в которых случайные графы так или иначе возникали в качестве инструмента (см., например, [7, 41, 119]).

И лишь классические статьи [42]–[44] П. Эрдеша и А. Реньи, опубликованные на рубеже 50-х и 60-х годов, заложили основы современной науки о случайных графах. За прошедшие полвека теория случайных графов выросла в мощную и бурно развивающуюся дисциплину, богатую как фундаментальными результатами, так и приложениями в различных областях математики, информатики, биологии и др. К настоящему времени глубоко исследован целый ряд моделей случайного графа — от классической модели Эрдеша–Реньи и ее естественных обобщений до моделей веб-графов, социальных, биологических сетей и т.д. (см. [1, 10, 18, 19, 27, 38, 57, 77, 92, 96]). Изучение случайных графов началось после того, как П. Эрдеш установил, что многие задачи экстремальной теории графов помогает решать «вероятностный метод» (см. [1, 11, 27]). Помимо прочего, Эрдеш доказал с использованием «вероятностного метода», что для любых натуральных чисел $g \geq 3$ и $k \geq 3$ существует граф с хроматическим числом k и циклом наименьшей длины g. На самом деле, Эрдеш не был первым, кто применил вероятностную технику к задачам, связанным с конечными структурами. Вероятностный метод использовали также Р. Пэли, А. Зигмунд, Дж. Литтлвуд, А. Оффорд и другие. Вероятностные свойства некоторых комбинаторных структур изучали еще в 1940 году М. Кендалл и Б. Бабинтон-Смит. В 1943 году Т. Селе [119] впервые применил «вероятностный метод» к экстремальным задачам комбинаторики.

Огромное количество работ посвящено и другим интересным задачам, связанным с исследованиями случайного графа $G(n, p)$. П. Эрдеш, А. Реньи, К. Шургер, Б. Боллобаш, З. Палка, А.Д. Барбур и др. внесли значительный вклад в изучение распределения малых подграфов в случайном графе. Распределением количества деревьев занимались П. Эрдеш, А. Реньи, Б. Боллобаш, А.Д. Барбур и др. Вопросам, касающимся связности случайного графа, посвящены работы Е.Н. Гильберта, Т.Л. Остина, П. Эрдеша, А. Реньи, В.Е. Степанова, И.Н. Коваленко, Г.И. Ивченко, И.В. Медведева, Б. Боллобаша и др. Поиском гигантской компоненты и определением ее размера занимались Т. Лучак, Дж. Вирман, Б. Боллобаш, П. Эрдеш, А. Реньи и др. При каких условиях случайный граф является гамильтоновым, можно узнать из работ И. Палясти, В.А. Перепелица, Дж.В. Муна, Е.М. Райта, Дж. Комлоша, Е. Семереди, Л. Поша, А.Д. Коршунова и др. Длину максимального пути для $p = c/n$ изучали М. Айтаи, Дж. Комлош, Е. Семереди, В.Ф. де ла Вега, Б. Боллобаш, Т.И. Фенне, А.М. Фриз и др. В работах А.Дж. Хоффмана, Р.Р. Синглетона, Р.М. Дэмерелла, Е. Бэннэя, Т. Ито, Х.Д. Фридмана, П. Эрдеша,

А. Реньи, Б. Боллобаша и др. изучено распределение диаметра случайного графа.

Цель работы и задачи исследования.

Целью работы является изучение предельных вероятностей истинности формул первого порядка кванторной глубины не более k при различных значениях параметра α случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1) Доказательство или опровержение k-закона при различных значениях $\alpha \in (1/(k-2), 1)$, а именно, нахождение наибольшего $\alpha < 1$, при котором случайный граф не подчиняется k-закону нуля или единицы, и оценивание наибольшего $\varepsilon = \varepsilon(\beta)$, при котором разреженный случайный граф подчиняется k-закону нуля или единицы при всех значениях параметра из $(\beta-\varepsilon, \beta)$, если $\beta \in (0, 1)$ не зависит от k.

2) Доказательство или опровержение k-закона сходимости при наименьшем показателе α, при котором не выполнен k-закон нуля или единицы, т.е. при $\alpha = \frac{1}{k-2}$.

3) Исследование предельных точек множества значений параметра $\alpha < 1$ случайного разреженного графа, при которых не выполнен k-закон нуля или единицы, а именно:

   - оценивание наименьшей и наибольшей предельных точек;
   - оценивание наименьшего k, при котором предельные точки вообще существуют;
   - нахождение наименьшего k, при котором существует такая формула первого порядка с k переменами кванторов, что для бесконечно многих α вероятность ее истинности не стремится ни к 0, ни к 1.

4) Исследование зависимости от k множества натуральных чисел m, для которых разреженный случайный граф с параметром $1 + 1/m$ подчиняется k-закону нуля или единицы, а также закону нуля или единицы для монадических формул второго порядка с кванторной глубиной k.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из списка обозначений, введения, 6 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 231 страниц, из них 212 страниц текста (не считая титульного листа, оглавления, списка обозначений и библиографии). Библиография включает 155 наименований на 12 страницах.

В первой главе диссертации мы изучаем k-законы нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи $G(n, n^{-\alpha})$ для рациональных $\alpha \in (0, 1)$, близких к 1. В этой главе доказано, в частности, что при $k \geq 4$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы при

$$\alpha \in \left(1 - \frac{1}{2^k - 2}, 1\right),$$

а при

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^k - 2}$$

— не подчиняется (как и при $\alpha = 1$).

Во второй главе этой работы мы изучаем спектры формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной. В частности, в этой главе мы установили, что наименьшее k при котором множества S_k^1 и S_k^2 бесконечны, равно либо 4, либо 5.

Оценки для ε в первой задаче раздела "Цель работы и задачи исследования" мы приводим **в третьей главе** настоящей работы. В этой главе мы для каждого рационального числа $\beta \in (0, 1)$ находим нижнюю оценку на наибольшее значение ε, при котором случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы для всех $\alpha \in (\beta - \varepsilon, \beta)$. Более того, для всех рациональных β с числителем, не превосходящим 2, мы нашли такую верхнюю оценку на ε, что логарифмы верхней и нижней оценок имеют один и тот же порядок роста. Хочется отметить, что оценки получены, вообще говоря, для рациональных чисел β, которые могут зависеть от k.

В **четвертой главе** мы решаем вторую задачу раздела "Цель работы и задачи исследования", а именно, доказываем, что k-закон сходимости для случайного графа $G(n, n^{-1/(k-2)})$ выполнен.

В **пятой главе** мы отвечаем на третий вопрос из второй задачи раздела "Цель работы и задачи исследования", а именно, доказываем, что наименьшее k, при котором существует формула первого порядка с k переменами кванторов и бесконечным спектром, равно 3.

В **шестой главе** мы занимаемся последней, четвертой задачей раздела "Цель работы и задачи исследования". Пусть $T(s)$ — башня из s двоек (т.е. $T(1) = 2$, $T(s) = 2^{T(s-1)}$), а $\log^*$ — функция, обратная T (т.е. $\log^*(s) = \min\{i :, T(i) \leq s\}$). Мы доказываем, что при $k \geq 4$ и $m \geq T(k + \log^*(k + 1) + 3)$ случайный граф $G(n, n^{-1-1/m})$ подчиняется k-закону нуля или единицы, а при $k \geq 7$ и $m \leq 2T(k - 4)$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы.

Научная новизна.

Для решения поставленных задач были разработаны новые инструменты: предложена новая стратегия Консерватора в игре Эренфойхта, которая позволяет ему выигрывать на сильно разреженных графах; получено структурное описание всех сбалансированных графов с достаточно малой средней степенью; доказана возможность использования в записи свойств, с вероятностью, стремящейся к 1, записываемых на языке первого порядка (в случае разреженного случайного графа), арифметических операций; доказаны новые оценки количеств классов элементарной эквивалентностей графов и деревьев (как для языка первого порядка, так и для монадического языка второго порядка) и размеров наименьших элементов в них.

Полученные в диссертации результаты открывают возможность применения для задачи поиска изоморфного подграфа логичесих законов нуля или единицы для уменьшения времени поиска.

Положения, выносимые на защиту.

1) Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ при

$$\alpha \in (1 - 2^{1-k}, 1) \setminus$$

$$\left\{1 - \frac{1}{2^{k-1} + a/b},\ b \in \mathbb{N}, a \in \{1, \ldots, 2^{k-1} - b - 1\}, \text{НОД}(a, b) = 1\right\}.$$

подчиняется k-закон нуля или единицы, а при

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + a/b},\ b \in \mathbb{N}, a \in \{1, \ldots, 2^{k-1} - 2(b+1)^2\}$$

и при

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + a},\ a \in \{0, 1, \ldots, 2^{k-1} - 2\},$$

— не подчиняется.

В частности, наибольшее значение параметра случайного разреженного графа, меньшее 1, при котором не выполнен k-закон нуля или единицы, равно $1 - 1/(2^k - 2)$.

2) Для любых взаимно простых $t < s$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы для всех

$$\alpha \in \left(\frac{t}{s + \frac{s}{(s+1)^k - 1}}, \frac{t}{s} \right).$$

Для любых $m \geq 2$, $k \geq 10m - 5$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы при

$$\alpha = \frac{2}{m} - \frac{2^{10m-8-k}}{m(m-1)}.$$

3) При $k \geq 15$ наименьшая предельная точка множества значений α, при которых разреженный случайный граф не подчиняется k-закону нуля или единицы, принадлежит $[1/(k-2), 1/(k-11)]$. При $k \geq 8$ наибольшая предельная точка множества значений α, при которых разреженный случайный граф не подчиняется k-закону нуля или единицы, принадлежит $[1 - 2^{5-k}, 1 - 2^{1-k})$.

4) Наименьшее k, при котором существует такая формула первого порядка глубины k, что для бесконечно многих α вероятности ее истинности на случайном разреженном графе с параметром α не стремится ни к нулю, ни к единице, равно либо 4, либо 5. Наименьшее k, при котором существует такая формула первого порядка с k переменами кванторов, что для бесконечно многих α вероятности ее истинности на случайном разреженном графе с параметром α не стремится ни к нулю, ни к единице, равно 3.

5) Случайный граф $G(n, n^{-1/(k-2)})$ подчиняется k-закону сходимости.

6) При $k \geq 4$ и $m \geq T(k+\log^*(k+1)+3)$ случайный граф $G(n, n^{-1-1/m})$ подчиняется k-закону нуля или единицы, а при $k \geq 7$ и $m \leq 2T(k-4)$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. То же самое верно и для монадического k-закон нуля или единицы.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в задачах о выразимости — а именно, для оценивания такого наименьшего k, при котором фиксированное свойство (например, содержать индуцированный подграф, изоморфный данному) может быть записано с помощью формулы первого порядка кванторной глубины k. Результаты о выразимости в свою очередь применяются для оценивания временной сложности алгоритма проверки соответствующего графового свойства. Таким образом, полученные результаты могут использоваться теоретико-информационных задачах, связанных с алгоритмами на графах.

Полученные нами результаты о классах элементарной эквивалентности (оценки количества классов эквивалентностей и размеров наименьших элементов в них) графов и деревьев для языка первого порядка и монадического языка второго порядка интересны как сами по себе, так и могут послужить инструментом в различных задачах, относящихся к теориям конечных моделей и формальных языков.

Методы исследования.

Для доказательства основных результатов диссертации широко применялся аппарат следующих дисциплин: теория графов, теория вероятностей и математическая логика. Помимо стандартной техники, применяемой для доказательства (или опровержения) законов нуля или единицы (классические стратегии в игре Эренфойхта, вероятностные предельные теоремы и неравенства, метод моментов), мы использовали разработанные нами инструменты, описанные в разделе “Научная новизна”.

Степень достоверности и апробация результатов.

Обоснованность и достоверность результатов подтверждается тем, что

они были опубликованы в ведущих отечественных и зарубежных рецензируемых журналах, обсуждались на международных конференциях и семинарах. Достоверность результатов также подтверждается строгими доказательствами и правильным использованием ранее полученных результатов других авторов.

Основные результаты диссертации опубликованы в 20 работах (10 из них написано без соавторов), 18 из которых входят в перечень ВАК (8 из них написано без соавторов). Личный вклад соискателя в работах с соавторами заключается в следующем. М.Е. Жуковским предложены идеи доказательств всех основных результатов диссертации, опубликованных в работах, написанных в соавторстве. Список работ приведен в конце диссертации.

Апробация работы.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах: семинарах на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова и факультете инноваций и высоких технологий МФТИ (ГУ) под рук. профессора А.М. Райгородского (2012–2015 гг.), семинаре кафедры алгебры под руководством А.В. Михалева и В.Н. Латышева механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (2014г.), семинаре отдела дискретной математики в математическом институте имени Стеклова (2014г.), Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам (2014г.), семинаре "Современные проблемы математической логики" факультета математики НИУ ВШЭ (2015г.), семинарах Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН (2015г. и 2018г.), Колмоговском семинаре на механико-математическом факультете МГУ (2015г.), семинаре по комбинаторике в университете Франкфурта им. И.В. Гете под руководством профессора А. Коджа-Оглана и профессора Ю. Персона (2016 г.), Коллоквиуме Факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ (2017г.), семинаре по теории кодирования ИППИ РАН (2017г.), общеинститутском семинаре "Коллоквиум МИАН" (2017г.), семинаре "Современные проблемы математической логики 2" факультета математики НИУ ВШЭ (2018г.).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: «4th Polish Combinatorial Conference» (Бедлево, Польша, 2012), «55-ая международная научная конференция МФТИ» (Дол-

гопрудный, Московская область, Россия, 2012), «Franco-Russian workshop on Algorithms, complexity and applications» (Москва, Россия, 2012), «Erdos centennial» (Будапешт, Венгрия, 2013), «EMS 2013» (Будапешт, Венгрия, 2013), «RSA'16» (Познань, Польша, 2013), «Workshop on random graphs and their applications» (Москва, Россия, 2013), «56-ая международная научная конференция МФТИ» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2013), «Moscow Workshop on Combinatorics and Number Theory» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2014), «Workshop on Extremal Graph Theory» (Москва, Россия, 2014), «Sum(m)it:240» (Будапешт, Венгрия, 2014), «57-ая международная научная конференция МФТИ» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2014), «RSA'17» (Питтсбург, США, 2015), «Workshop on Logic and Random Graphs» (Лейден, Голландия, 2015), «58-ая международная научная конференция МФТИ» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2015), «Workshop on Extremal Combinatorics and Combinatorial Geometry» (Долгопрудный, Московская область, Россия, 2016), «The 6th International Conference on Network Analysis» (Нижний Новгород, Россия, 2016), «IX международная Петрозаводская конференция «Вероятностные методы в дискретной математике»» (Петрозаводск, Россия, 2016), «Bordeaux Graph Workshop» (Бордо, Франция, 2016), «RSA'18» (Гнезно, Польша, 2017).

Благодарности. Автор признателен профессору Андрею Михайловичу Райгородскому и профессору Дмитрию Александровичу Шабанову за неоценимую помощь в работе и за полезные замечания, профессору Олегу Васильевичу Вербицкому за обсуждение результатов и изучение приложений, профессору Александру Вадимовичу Булинскому за огромную поддержку. Автор также выражает благодарность всем соавторам, участвовавшим в написании статей, результаты из которых включены в настоящую работу: А.Д. Матушкину, А.Е. Медведевой, Л.Б. Островскому и Дж.Х. Спенсеру.

Глава 1.

Законы нуля или единицы

В этой главе мы сформулируем определения случайного графа в модели Эрдеша–Реньи, свойств первого порядка, различных законов нуля или единицы. Все эти объекты мы будем использовать и в других двух главах. Основными результатами главы являются теоремы 1.2.1–1.2.4, в которых утверждаются и опровергаются законы нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ для α близких к 1.

1.1. Основные определения и история задачи

Напомним основные определения. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество $\Omega_n = \{\mathcal{G} = (V_n, E)\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_n = \{1, \ldots, n\}$. Назовем *случайным графом в модели Эрдеша–Реньи* случайный элемент $G(n, p)$ со значениями во множестве Ω_n и распределением $\mathsf{P}_{n,p}$ на $\mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}$, определенным формулой

$$\mathsf{P}_{n,p}(\mathcal{G}) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Иными словами, любые две различные вершины случайного графа соединены ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар вершин (см. [1, 10, 27, 44, 57, 79, 130]). В дальнейшем мы будем рассматривать модели, в которых вероятность p зависит от количества вершин n, причем нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей свойств случайных графов при $n \to \infty$. Мы будем считать, что для всех $n \in \mathbb{N}$ случайные графы $G(n, p)$ заданы на одном и том же вероятностной пространстве с вероятностной мерой P.

Формулы первого порядка (применительно к свойствам графов) строятся с помощью символов отношения $\sim$ (символ смежности) и $=$; логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$; переменных $x, y, x_1, \ldots$ (переменные — это вершины графа); кванторов $\forall, \exists$.

Опишем построение формул подробнее (см. [5, 21, 39, 55, 76, 130]). Введем для этого понятие *атома*. Это объект, который либо имеет вид $(x \sim y)$, либо имеет вид $(x = y)$, где x, y — переменные. Атом является формулой. Все входящие в атом переменные являются *свободными*. Ниже мы даем определение связанных и свободных переменных и вместе с этим дальнейшее определение формул первого порядка. Пусть G — некоторый граф (не обязательно конечный). Рассмотрим произвольные вершины i_1, i_2 этого графа. Если $i_1 \sim i_2$, то будем говорить, что формула $(x \sim y)$ *истинна* для графа G на наборе (i_1, i_2). В противном случае будем говорить, что формула *ложна*. Формула $(x = y)$ истинна только на наборах, состоящих из двух одинаковых вершин, т.е. на наборах (i, i). Иными словами, формула истинна на некотором наборе вершин, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. Пусть ϕ, ϕ_1, ϕ_2 — формулы, X, X_1, X_2 и Y, Y_1, Y_2 — соответствующие множества свободных и связанных переменных, переменная x принадлежит X. Конструкции

$$\neg\phi,\ (\phi_1 \vee \phi_2),\ (\phi_1 \wedge \phi_2),\ (\phi_1 \Rightarrow \phi_2),\ (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2),\ (\forall x\, \phi),\ (\exists x\, \phi)$$

являются формулами. При этом $X \setminus \{x\}$ — множество свободных переменных формул

$$(\forall x\, \phi), \quad (\exists x\, \phi),$$

а $Y \cup \{x\}$ — множество связанных переменных этих формул, $X_1 \cup X_2$ — множество свободных переменных формул

$$(\phi_1 \vee \phi_2),\ (\phi_1 \wedge \phi_2),\ (\phi_1 \Rightarrow \phi_2),\ (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2), \tag{1.1}$$

$Y_1 \cup Y_2$ — множество связанных переменных этих формул, X — множество свободных переменных формулы $(\neg\phi)$, Y — множество связанных переменных этой формулы. Так же, как и в случае атома, формула является истинной на некотором наборе вершин, если предикат, выражаемый этой формулой, принимает значение 1 на этом наборе. *Замкнутыми* называются формулы, не содержащие свободных переменных. Замкнутая формула либо всегда истинна для графа G, либо всегда ложна.

Определим *кванторную глубину формулы*. Глубина атома равна нулю. Глубина формул (1.1) равна максимуму глубин формул ϕ_1 и ϕ_2. Глубина формулы $(\neg\phi)$ равна глубине формулы ϕ. Глубина формул $(\forall x\, \phi)$

и $(\exists x\, \phi)$ на единицу больше глубины ϕ. Замкнутые формулы называются *эквивалентными*, если они одновременно истинны или одновременно ложны для любого графа G.

Приведем примеры формул первого порядка. Формула

$$(\forall x \forall y\ [(\neg(x = y)) \Rightarrow (x \sim y)])$$

является замкнутой (обе переменные связанные) и выражает свойство графа быть полным, ее кванторная глубина равна 2. Глубина незамкнутой формулы

$$([\exists x_3\ ([x_1 \sim x_3] \wedge [x_2 \sim x_3])] \vee [\forall y_1 \forall y_2\ ([y_1 \sim y_2] \Rightarrow [(y_1 \sim x_1) \wedge (y_2 \sim x_2)])])$$

также равна 2, переменные x_1, x_2 являются свободными, остальные — связанными.

В дальнейшем мы будем рассматривать только замкнутые формулы. Если замкнутая формула ϕ первого порядка истинна для графа G, то будем говорить, что граф G *обладает свойством первого порядка* L, которое определено формулой ϕ, и писать $G \models L$. Обозначим $\mathcal{L}$ класс свойств графов, выражаемых замкнутыми формулами первого порядка. Пусть, кроме того, $\mathcal{L}_k$ — класс свойств графов, выражаемых замкнутыми формулами первого порядка с кванторной глубиной, не превосходящей k. Пусть G и H — два произвольных графа. Если для любого свойства $L \in \mathcal{L}_k$ либо оба графа G, H обладают свойством L, либо оба не обладают, то мы будем говорить, что эти графы являются *k-элементарно эквивалентными*. В соответствии с определением эквивалентности формул можно показать (см., например, [5, 39]), что множество всех формул с кванторной глубиной, органиченной сверху числом k, разбивается на конечное число классов эквивалентности. Так как все формулы из одного класса эквивалентности выражают одно и то же свойство из $\mathcal{L}_k$, то $|\mathcal{L}_k| < \infty$. В этой связи отношение k-элементарной эквивалентности разбивает множество всех графов на конечное число классов эквивалентности.

В дальнейшем, если выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = 1,$$

то будем говорить, что случайный граф *с асимптотической вероятностью 1* обладает свойством L.

Напомним, кроме того, несколько необходимых понятий из теории графов. Пусть G — некоторый граф. Пусть, кроме того, $W \subseteq V(G)$.

Тогда *индуцированным подграфом* $G|_W$ будем называть такой граф H, что $V(H) = W$ и

$$\forall i_1, i_2 \in V(G)\ (\{i_1, i_2\} \in E(H)) \Leftrightarrow (\{i_1, i_2\} \in E(G))).$$

Два графа G и H называются *изоморфными* (пишем $G \cong H$), если существует такое биективное отображение $g : V(G) \to V(H)$, что выполнено условие

$$\forall i_1, i_2 \in V(G)\ (\{i_1, i_2\} \in E(G)) \Leftrightarrow (\{g(i_1), g(i_2)\} \in E(H))).$$

Это отображение называется *изоморфизмом* графов G и H. Путем, соединяющим вершины x и y называется граф, множество ребер которого имеет вид $\{\{x, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \ldots, \{u_{m-1}, u_m\}, \{u_m, y\}\}$, при этом эти ребра и вершины $x, u_1, \ldots, u_m, y$ не должны быть попарно различными. *Длиной пути* называется число ребер в нем. Если эти вершины являются попарно различными, то путь называется *простым. Простым циклом* называется связный граф, все вершины которого имеют степень 2, количества вершин и ребер которого совпадают. *Длиной простого цикла* называется число ребер (вершин) в нем. *Полным графом на k вершинах* называется граф на k вершинах, в котором проведены все C_k^2 ребер. Такой граф будем обозначать K_k.

Обратимся, наконец, к законам нуля или единицы для случайного графа $G(n, p)$. Рассмотрим некоторую функцию $p : \mathbb{N} \to [0, 1]$. Случайный граф подчиняется *закону нуля или единицы* (см. [1, 6, 33, 39, 46, 48, 49, 57, 63, 79, 87, 106, 112, 132, 133, 135, 144], [126]–[130]), если для любого свойства $L \in \mathcal{L}$ выполняется одно из двух условий

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p(n)) \models L) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p(n)) \models L) = 1. \tag{1.2}$$

В 1969 году Ю.В. Глебский, Д.И. Коган, М.И. Лиогонький и В.А. Таланов получили следующий закон нуля или единицы, который в 1976 году был независимо доказан Р. Фагиным.

Теорема 1.1.1. (Ю.В. Глебский и др., 1969, [6], Р. Фагин, 1976, [46]) *Пусть функция p удовлетворяет условию (1). Тогда случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.*

На самом деле, в упомянутых работах закон доказан для случая $p = \text{const}$. Тем не менее доказательство работает и для $p = p(n)$, удовлетворяющего условию (1).

Также в статье Дж. Спенсера и С. Шелаха описан результат, в котором расширен класс функций p, при которых случайный граф $G(n,p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Теорема 1.1.2. (Дж. Спенсер, С. Шелах, 1988, [106]) *Пусть $p(n) = n^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$, α — иррациональное. Тогда $G(n,p)$ подчиняется закону нуля или единицы.*

Заметим, что из результатов, доказанных в работах [28, 104] следует, что если α — рациональное, $0 < \alpha \leq 1$ и $p = n^{-\alpha}$, то случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется закону нуля или единицы (см., например, [1, 57, 130]).

Наконец, помимо класса всех свойств первого порядка $\mathcal{L}$ в контексте законов нуля или единицы рассматривался класс свойств $\mathcal{L}^\infty$, выражаемых формулами, которые содержат бесконечное количество конъюнкций или дизъюнкций (предложения в таком языке бесконечны, в отличие от предложений, выражающих свойства из класса $\mathcal{L}$). В работе [86] для такого класса свойств доказан закон нуля или единицы, аналогичный теореме 1.1.2. В 1997 году М. МакАртур были установлены некоторые законы нуля или единицы для подмножества $\mathcal{L}_k^\infty$ такого класса свойств. Свойства в этом подмножестве выражаются формулами с числом различных переменных, ограниченным числом k (см. [87]). А именно, были получены законы для случайного графа $G(n,p)$ при $p = n^{-\alpha}$ и $\alpha < \frac{1}{k-1}$. Итак, случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется закону нуля или единицы для свойств из класса $\mathcal{L}$ при $p = n^{-\alpha}$ и рациональных $\alpha \in (0,1]$, но в то же самое время подчиняется закону нуля или единицы для свойств из класса $\mathcal{L}_k^\infty$ при некоторых рациональных $\alpha \in (0,1]$. Поэтому представляется естественным рассмотреть класс $\mathcal{L}_k$ и выяснить, при каких рациональных $\alpha \in (0,1]$ случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для свойств из этого класса. В 2012 мы получили первый результат на пути к ответу на этот вопрос, о нем и пойдет речь ниже.

Будем говорить, что случайный граф подчиняется k-закону нуля или единицы, если для любого свойства $L \in \mathcal{L}_k$ выполняется одно из двух условий (1.2).

Теорема 1.1.3. ([132, 155]) *Пусть $p = n^{-\alpha}$. Если $\alpha \in (0, \frac{1}{k-2})$, то случайный граф $G(n,p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы. Если же $\alpha = \frac{1}{k-2}$, то случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется k-закону нуля*

или единицы.

Таким образом, мы доказали, что $\frac{1}{k-2}$ — наименьшее положительное значение α, при котором случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. В настоящей работе мы описали асимптотическое поведение вероятностей свойств из множества $\mathcal{L}_k$ графа $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha \geq 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$. В частности, мы нашли наибольшее значение α (меньшее 1), при котором нарушается k-закон. Эти результаты мы формулируем в следующем разделе. Далее в разделе 1.3 мы опишем необходимые для доказательств результатов работы конструкции, а также опишем их свойства. В разделе 1.4 мы сформулируем теорему Эренфойхта и расскажем о ее применениях. Доказательства основных результатов главы мы приводим в разделе 1.5. Как будет видно из формулировок результатов и их доказательств, поведение вероятностей свойств первого порядка даже при $\alpha \in [1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1)$ оказывается очень сложным, и полностью изучить его для всех α из этого интервала не удается. Тем не менее в третьей главе мы частично даем ответ даже на вопрос, при каких $\alpha \in (\frac{1}{k-2}, 1 - \frac{1}{2^{k-1}})$ случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

1.2. Новые результаты

Как показывает следующий результат, сформулированный и доказанный нами в работах [144, 151, 154], при $\alpha \in (1 - \frac{1}{2^k}, 1)$ выполнен k-закон нуля или единицы.

Теорема 1.2.1. *Пусть $k > 3$ — произвольное натуральное число. Пусть, кроме того, $\mathcal{Q}$ — множество положительных дробей с числителем, не превосходящим числа 2^{k-1}. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы, если*

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + \beta}, \quad \beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}.$$

Итак, мы рассмотрели интервал $(1 - 2^{1-k}, 1)$ и получили множество рациональных чисел α из этого интервала, при которых k-закон справедлив. Так как любое число из $(1-2^{1-k}, 1)$ представляется в виде $1-\frac{1}{2^{k-1}+\beta}$, закон будет выполнен при любых α из

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}, 1\right) \bigcup \left(1 - \frac{1}{2^k - 1}, 1 - \frac{1}{2^k}\right) \bigcup \ldots \bigcup$$

$$\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}},1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}+1}\right)\bigcup$$
$$\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+\frac{2^{k-1}-1}{2}},1-\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-2}}\right)\bigcup\ldots\bigcup$$
$$\left(1-\frac{1}{2^{k-1}+\frac{2^{k-1}}{3}},1-\frac{1}{2^{k-1}+\frac{2^{k-1}-\left[\frac{2^{k-1}}{3}\right]}{2}}\right)\bigcup\ldots.$$

Длины интервалов уменьшаются при стремлении концов к $1-2^{1-k}$. Кроме того, для некоторых из них мы доказали, что на концах интервалов k-закон не выполнен.

Теорема 1.2.2. *Пусть $k > 3$ — произвольное натуральное число и $\tilde{\mathcal{Q}}$ — множество целых неотрицательных чисел, не превосходящих $2^{k-1}-2$. Случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы, если*

$$\alpha = 1-\frac{1}{2^{k-1}+\beta}, \quad \beta \in \tilde{\mathcal{Q}}.$$

Если $k > 5$,

$$\alpha = 1-\frac{1}{2^{k-1}+a/b},$$

где

$$a \in \{1, 2, \ldots, 2^{k-1}-2(b+1)^2\},$$

то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ также не подчиняется k-закону нуля и единицы.

Формулировка и доказательство теоремы 1.2.2 приведены в работах [127, 133, 144, 151, 154].

Заметим, что теоремы 1.2.1 и 1.2.2 не дают максимального значения $\alpha \in (0,1)$, при котором случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Так, остается вопрос, выполнен ли закон при $\alpha \in \{1-\frac{1}{2^k-1}, 1-\frac{1}{2^k}\}$. Мы ответили на этот вопрос в работе [135].

Теорема 1.2.3. *Пусть $k > 3$ — произвольное натуральное число и*

$$\alpha \in \left\{1-\frac{1}{2^{k-1}-1}, 1-\frac{1}{2^k}\right\}.$$

Тогда случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

Наконец, остается вопрос, конечно ли множество чисел

$$\alpha \in \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right),$$

для которых случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы. Положительный ответ дается в работах [137, 152], в которых получен следующий результат.

Теорема 1.2.4. *Пусть $k > 3$, b — произвольные натуральные числа, $\frac{a}{b}$ — несократимая положительная дробь. Обозначим $\nu = \max\{1, 2^{k-1} - b\}$. Пусть*

$$a \in \{\nu, \nu + 1, \ldots, 2^{k-1}\}, \quad \alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + a/b}.$$

Тогда случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

Доказательства всех теорем мы приводим в разделе 1.5. Заметим, что теорема 1.2.3 является частным случаем теоремы 1.2.4, поэтому в разделе 1.5 мы приводим только доказательство последней теоремы.

1.3. Малые подграфы в случайном графе

Напомним некоторые определения, относящиеся к теории случайных подмножеств в биномиальной модели [1, 27]. Пусть L — произвольное свойство графов. Функция $p_0 = p_0(n)$, обладающая одним из двух условий

$$\forall p \ \left[\left((p = o(p_0)) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = 0\right)\right) \wedge \left((p_0 = o(p)) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = 1\right)\right)\right], \tag{1.3}$$

$$\forall p \ \left[\left((p = o(p_0)) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = 1\right)\right) \wedge \left((p_0 = o(p)) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = 0\right)\right)\right], \tag{1.4}$$

называется *пороговой для свойства* L. Свойство L называется *монотонным*, если выполнено одно из двух условий. Либо для любых графов H и G с $V(H) = V(G)$ из того что граф H обладает этим свойством и $H \subseteq G$ следует, что граф G также обладает этим свойством (в этом случае свойство называется *возрастающим*), либо для любых графов H и G с $V(H) = V(G)$ из того что граф G обладает этим свойством и $H \subseteq G$ следует, что граф H также обладает этим свойством (в этом случае свойство называется *убывающим*). Как доказали Б. Боллобаш и А. Томасон в 1987 году, у всех монотонных свойств существует пороговая функция [31], причем в случае возрастающих свойств эта функция удовлетворяет условию (1.3), а в случае убывающих — условию (1.4).

В 1960 году П. Эрдеш и А. Реньи доказали теорему о существовании пороговой функции для свойства "$G(n,p)$ содержит копию данного сбалансированного графа" (определение сбалансированного графа дано ниже в этом абзаце), которая позже была обобщена А. Ручинским и А. Винсом на случай произвольного (не обязательно сбалансированного) графа. Рассмотрим произвольный граф G. В дальнейшем мы будем обозначать $v(G)$ количество вершин графа G и $e(G)$ — количество ребер. Назовем отношение $\rho(G) = \frac{e(G)}{v(G)}$ *плотностью графа* G. Граф G называется *сбалансированным*, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G называется *строго сбалансированным*, если для каждого собственного подграфа это неравенство является строгим.

Теорема 1.3.1. (П. Эрдеш, А. Реньи, 1960, [44]) *Пусть* G *— сбалансированный граф. Тогда функция* $p = n^{-1/\rho(G)}$ *является пороговой для графа* $G(n,p)$ *и свойства содержать копию графа* G.

Заметим, что свойство содержать копию фиксированного графа является возрастающим, поэтому пороговая функция для него удовлетворяет условию (1.3).

Пусть теперь G — произвольный граф. Положим

$$\rho^{\max}(G) = \max_{H \subseteq G} \rho(H).$$

Теорема 1.3.2. (А. Ручински, А. Винс, 1985, [103]) *Функция*

$$p = n^{-1/\rho^{\max}(G)}$$

является пороговой для графа $G(n,p)$ *и свойства содержать копию графа* G.

Кроме того, в 1981 году Б. Боллобаш нашел асимптотическое распределение количества копий в $G(n,p)$ фиксированного строго сбалансированного графа в случае, когда вероятность проведения ребра равна пороговой функции для свойства появления копии рассматриваемого графа. Здесь и далее для произвольного графа G мы будем обозначать N_G количество копий G в случайном графе $G(n,p)$ (с точностью до перенумерации вершин). Пусть G — строго сбалансированный граф.

Теорема 1.3.3. (Б. Боллобаш, 1981, [28]) *Пусть a — количество автоморфизмов графа G, $p = n^{-1/\rho(G)}$. Тогда*

$$N_G \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1/a), \;\; n \to \infty.$$

Здесь $\mathrm{Pois}(1/a)$ *— пуассоновская случайная величина со средним* $1/a$.

Нам также понадобится следующий результат, являющийся дополнением к теореме 1.3.2, доказательство которого можно найти, например, в [1] (см. теорему 4.5).

Лемма 1.3.1. *Пусть G — произвольный граф. Пусть, кроме того, выполнено равенство $n^{-1/\rho^{\max}(G)} = o(p)$. Тогда существует такое число $c > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(1-\varepsilon < \frac{N_G}{cn^{v(G)}p^{e(G)}} < 1+\varepsilon\right) = 1.$$

Обратимся теперь к подсчету числа расширений малых подграфов в случайном графе. Рассмотрим такие произвольные графы G и H (являющиеся подграфами некоторого графа Γ), что $H \subset G, V(H) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $V(G) = \{x_1, \ldots, x_l\}$ и множество $E(G) \setminus (E(H) \cup E(G \setminus H))$ не пусто. Обозначим $e(G,H) = e(G) - e(H)$, $v(G,H) = v(G) - v(H)$,

$$\rho(G,H) = \frac{e(G,H)}{v(G,H)}, \quad \rho^{\max}(G,H) = \max_{H \subset K \subseteq G} \rho(K,H).$$

Более того, пусть $e^{\min}(G,H)$ — минимальное число $e(K,H)$ по всем таким графам K, что $H \subset K \subseteq G$, $\rho(K,H) = \rho^{\max}(G,H)$ и множество $E(K) \setminus (E(H) \cup E(K \setminus H))$ не пусто. Рассмотрим графы $\tilde{H}$, $\tilde{G}$, где $V(\tilde{H}) = \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m\}$, $V(\tilde{G}) = \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_l\}$, $\tilde{H} \subset \tilde{G}$. Граф $\tilde{G}$ называется $(G, (x_1, \ldots, x_m))$-*расширением набора вершин* $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$, если

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \Rightarrow \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}).$$

Если

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \in E(G) \setminus E(H) \Leftrightarrow \{\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{i_2}\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}),$$

то расширение назовем *точным*. Рассмотрим свойство $L_{(G,H)}$ содержать $(G, (x_1, \ldots, x_m))$-расширение любого m-вершинного набора.

Теорема 1.3.4. (Дж. Спенсер, 1990, [113]) *Существуют такие* $0 < \varepsilon < K$, *что*

$$\text{если } p \le \varepsilon n^{-1/\rho^{\max}(G,H)} (\ln n)^{1/e^{\min}(G,H)}, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L_{(G,H)}) = 0;$$

$$\text{если } p \ge K n^{-1/\rho^{\max}(G,H)} (\ln n)^{1/e^{\min}(G,H)}, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L_{(G,H)}) = 1.$$

Очевидно, для *сбалансированных пар* (G, H) (максимальная плотность $\rho(K, H)$ достигается на паре (G, H)) величину $\rho^{\max}(G, H)$ в утверждении теоремы можно заменить на $\rho(G, H)$. По аналогии с графами, пара (G, H) называется *строго сбалансированной*, если $\rho(G, H) > \rho(K, H)$ для любого такого графа K, что $H \subset K \subset G$.

Обозначим $N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ случайную величину, равную количеству $(G, (x_1, \ldots, x_m))$-расширений набора $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ в $G(n, p)$.

Теорема 1.3.5. (Дж. Спенсер, 1990, [110]) *Существуют такое число* $c > 0$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся числа* $t \in \mathbb{N}$, $K > 0$, *удовлетворяющие следующему свойству. Если*

$$p \ge K n^{-1/\rho^{\max}(G,H)} (\ln n)^{1/t},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\forall(\tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_m) \ \left(1 - \varepsilon < \frac{N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)}{c n^{v(G,H)} p^{e(G,H)}} < 1 + \varepsilon\right)\right) = 1.$$

При доказательстве наших результатов мы будем использовать следствия из леммы 1.3.1 и теоремы 1.3.5, которые опираются на следующие определения.

Зафиксируем число $\alpha > 0$. Положим

$$v(G, H) = |V(G) \setminus V(H)|, \ e(G, H) = |E(G) \setminus E(H)|,$$

$$f_\alpha(G, H) = v(G, H) - \alpha e(G, H).$$

Если для любого такого графа S, что $H \subset S \subseteq G$, выполнено неравенство $f_\alpha(S,H) > 0$, то пара (G,H) называется *α-надежной* (см. [1, 57, 130]). Если же для любого такого S, что $H \subseteq S \subset G$, выполнено неравенство $f_\alpha(G,S) < 0$, то пара (G,H) называется *α-жесткой* (см. [1, 57, 130]).

Для любого натурального числа a обозначим $\mathrm{cl}^a(G)$ (см. [1]) такой подграф в Γ (будем называть его *a-замыканием*), что существуют $s \in \mathbb{Z}_+$ и графы $G_0, G_1, \ldots, G_s$, обладающие следующими свойствами: $G = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_s = \mathrm{cl}^a(G)$, для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$ выполнены неравенства $f_\alpha(G_i, G_{i-1}) < 0$, $v(G_i, G_{i-1}) \leq a$ и не существует такого подграфа $\tilde{G}$ в Γ, что $f_\alpha(\tilde{G}, G_s) < 0$ и $v(\tilde{G}, G_s) \leq a$. Прежде чем сформулировать следствие, о котором шла речь выше, напомним лемму о замыканиях из [1].

Лемма 1.3.2. *Пусть $p \leq n^{-\alpha}$. Тогда для любых натуральных чисел a и m существует такое положительное число D, что с вероятностью, стремящейся к 1, для любого подграфа $\tilde{G} \subset G(n,p)$ с $v(\tilde{G}) = m$ выполнено неравенство $v(\mathrm{cl}^a(\tilde{G})) < D$.*

Введем, наконец, понятие максимальной пары. Пусть $\tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \Gamma$ и $T \subset K$, причем $V(T) = \{v_1, \ldots, v_t\}$, $t \leq |V(\tilde{G})|$. Пару $(\tilde{G}, \tilde{H})$ назовем *(K,T)-максимальной в Γ*, если у любого такого набора t вершин $\mathbf{t}$ графа $\tilde{G}$, что в этом наборе есть хотя бы одна вершина из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{H})$, не существует такого точного $(K,(v_1,\ldots,v_t))$-расширения $\tilde{K}$ в Γ, что оно пересекается с графом $\tilde{G}$ лишь по вершинам набора $\mathbf{t}$ и каждая вершина из $V(\tilde{K})$, не принадлежащая набору $\mathbf{t}$, не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G})$, не принадлежащей набору $\mathbf{t}$. Аналогично, граф $\tilde{G}$ назовем *(K,T)-максимальным в Γ*, если у любого набора t вершин $\mathbf{t}$ графа $\tilde{G}$ не существует такого точного $(K,(v_1,\ldots,v_t))$-расширения $\tilde{K}$ в Γ, что оно пересекается с графом $\tilde{G}$ только по вершинам набора $\mathbf{t}$ и каждая вершина из $V(\tilde{K})$, не принадлежащая набору $\mathbf{t}$, не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G})$, не принадлежащей набору $\mathbf{t}$.

Следствие 1.3.1. *Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Пусть, кроме того, пара (G,H) (по-прежнему $V(H) = \{x_1, \ldots, x_m\}$) является α_2-надежной и $\mathcal{K}$ — конечное множество таких пар графов, что для любой пары $(K,T) \in \mathcal{K}$ выполнены неравенства $f_{\alpha_1}(K,T) < 0$ и $v(T) \leq v(G)$. Пусть $p \in [n^{-\alpha_2}, n^{-\alpha_1}]$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, для любых вершин $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m$ графа $G(n,p)$ существует такое точное $(G,(x_1,\ldots,x_m))$-*

расширение $\tilde{G}$ набора $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$, что для любой пары $(K,T) \in \mathcal{K}$ пара $(\tilde{G}, G(n,p)|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m\}})$ является (K,T)-максимальной в $G(n,p)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m \in V_n$. Пусть $N^{\mathcal{K}}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ — число всех таких $(G,(x_1,\ldots,x_m))$-расширением $\tilde{G}$ набора $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ в $G(n,p)$, что для любой пары $(K,T) \in \mathcal{K}$ пара $(\tilde{G}, G(n,p)|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m\}})$ является (K,T)-максимальной в $G(n,p)$. Для любой пары $(K,T) \in \mathcal{K}$ обозначим $N^{(K,T)}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ количество всех таких $(G,(x_1,\ldots,x_m))$-расширений $\tilde{G}$ набора $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)$ в $G(n,p)$, что пара $(\tilde{G}, G(n,p)|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m\}})$ *не* является (K,T)-максимальной в $G(n,p)$.

Пусть $p \in [n^{-\alpha_2}, n^{-\alpha_1}]$.

Рассмотрим произвольную пару $(K,T) \in \mathcal{K}$, для которой существуют $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и такие графы $R = R(K,T), S_1, S_2$, что $H \subset R \subseteq G$, $p \le n^{-\alpha}$, $S_1 \subseteq T$, $S_1 \subset S_2 \subseteq (K \setminus (T \setminus S_1))$, $v(R) \ge v(S_1)$ и

$$f_\alpha(R,H) + f_\alpha(S_2,S_1) < 0$$

(обозначим $\hat{\mathcal{K}}$ множество всех таких пар (K,T), и для каждой пары $(K,T) \in \hat{\mathcal{K}}$ обозначим $\mathcal{R}(K,T)$ множество всех графов $R(K,T)$, для которых существуют S_1, S_2, удовлетворяющие перечисленным выше свойствам).

Пусть $(K,T) \in \hat{\mathcal{K}}$, $R \in \mathcal{R}(K,T)$. Так как $p \le n^{-\alpha}$, то по лемме 1.3.2 существует такое число $D(R,K,T)$, что с вероятностью, стремящейся к 1,

$$\forall (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \ \left(N^{(K,T)}_{(R,H)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) < D(R,K,T) \right).$$

Пусть $\tilde{R}$ — произвольный граф, удовлетворяющий условию $H \subset \tilde{R} \subseteq G$. Тогда выполнено неравенство $f_{\alpha_2}(\tilde{R}, H) > 0$. Следовательно, для любого M

$$p \ge n^{-\alpha_2} \gg n^{-1/\rho(\tilde{R},H)} (\ln n)^M.$$

Поэтому для любых K и M выполнено неравенство

$$p \ge K n^{-1/\rho^{\max}(G,H)} (\ln n)^M$$

при достаточно больших n. Из теоремы 1.3.5 следует, что для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется такое $c > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью, стремящейся к 1, для любых вершин $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m, \tilde{x}_{m+1}, \ldots, \tilde{x}_{m+N}$ существует хотя бы

$$(1-\varepsilon) c n^{v(G,H)} p^{e(G,H)}$$

точных $(G,(x_1,\dots,x_m))$-расширений набора $(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m)$ в индуцированном подграфе $G(n,p)|_{V_n\setminus\{\tilde{x}_{m+1},\dots,\tilde{x}_{m+N}\}}$. Положим

$$N=\sum_{(K,T)\in\hat{\mathcal{K}}}\sum_{R\in\mathcal{R}(K,T)}D(R,K,T)v(R,H).$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ и некоторого $c>0$ с вероятностью, стремящейся к 1, в $G(n,p)$

$$\forall(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m)\ \left(N^{\hat{\mathcal{K}}}_{(G,H)}(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m)>(1-\varepsilon)cn^{v(G,H)}p^{e(G,H)}\right). \qquad (1.5)$$

Положим

$$\alpha_0=\sup\{\alpha:\ \forall n\in\mathbb{N}\,(p\geq n^{-\alpha})\}.$$

Пусть $(K,T)\in\mathcal{K}\setminus\hat{\mathcal{K}}$. Пусть, кроме того, существуют такие графы $R=R(K,T),S_1,S_2$, что $H\subset R\subseteq G$, $S_1\subseteq T$, $S_1\subset S_2\subseteq(K\setminus(T\setminus S_1))$, $v(R)\geq v(S_1)$ и

$$f_{\alpha_0}(R,H)+f_{\alpha_0}(S_2,S_1)=0$$

(обозначим $\tilde{\mathcal{K}}$ множество всех таких пар (K,T)). Так как для любой пары графов (A,B) с $V(B)=\{x_1,\dots,x_b\}$ и любого числа D свойство

у любого набора вершин $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_b$ графа $G(n,p)$ существует не более D

$$(A,(x_1,\dots,x_b))\text{-расширений этого набора}$$

является убывающим, то из леммы 1.10 из [57] и теоремы 1.3.5 следует, что для любого достаточно малого $\delta>0$ с вероятностью, стремящейся к 1, для любого набора $(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m)$

$$N^{(K,T)}_{(G,H)}(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m)<2\frac{v(G)!}{(v(G)-v(T))!}n^{v(G,H)+v(K,T)}n^{(-\alpha_0+\delta)(e(G,H)+e(K,T))}=$$

$$=O\left(n^{v(G,H)}p^{e(G,H)}n^{f_{\alpha_0}(K,T)}\left(\frac{n^{-\alpha_0}}{p}\right)^{e(G,H)}n^{\delta(e(G,H)+e(K,T))}\right)=$$

$$=O\left(n^{v(G,H)}p^{e(G,H)}n^{f_{\alpha_0}(K,T)}n^{\delta(2e(G,H)+e(K,T))}\right). \qquad (1.6)$$

Пусть $(K,T)\in\mathcal{K}\setminus(\hat{\mathcal{K}}(G,H)\cup\tilde{\mathcal{K}}(G,H))$. Тогда для любых таких S_1,S_2, $S_1\subseteq T$, $S_1\subset S_2\subseteq(K\setminus(T\setminus S_1))$, и R, $H\subset R\subseteq G$, что $v(R)\geq v(S_1)$, и любых M

$$p\geq n^{-\alpha_2}\gg n^{-\frac{v(R,H)+v(S_2,S_1)}{e(R,H)+e(S_2,S_1)}}(\ln n)^M,$$

так как для любой пары графов (A, B) функция $f_\alpha(A, B)$ является непрерывной по α на (α_1, α_2). Поэтому по теореме 1.3.5 с вероятностью, стремящейся к 1, для любого набора $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$ и некоторого $C > 0$

$$N^{(K,T)}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) < C\frac{v(G)!}{(v(G) - v(T))!} n^{v(G,H)+v(K,T)} p^{e(G,H)+e(K,T)} =$$

$$= O\left(n^{v(G,H)} p^{e(G,H)} n^{f_{\alpha_1}(K,T)}\right). \tag{1.7}$$

Из неравенств (1.5), (1.6) (1.7), $f_{\alpha_1}(K, T) < 0$ и конечности множества $\mathcal{K}$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\forall(\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_m) \ \left(N^{\mathcal{K}}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) > \frac{c}{2} n^{v(G,H)} p^{e(G,H)}\right)\right) = 1,$$

так как

$$N^{\mathcal{K}}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) \geq N^{\hat{\mathcal{K}}}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) - \sum_{(K,T)\in\hat{\mathcal{K}}\cup\tilde{\mathcal{K}}} N^{(K,T)}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m).$$

Следствие доказано. □

Заметим, что следствие 1.3.1 можно переформулировать, рассмотрев строго сбалансированные графы с плотностью, меньшей чем $1/\alpha_2$, вместо α_2-надежных пар. В этом случае доказательство похоже на доказательство сформулированного следствия. Основная разница состоит в том, что вместо теоремы 1.3.5 необходимо применять лемму 1.3.1. Сформулируем и докажем соответствующее утверждение.

Следствие 1.3.2. *Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Пусть G — строго сбалансированный граф с $\rho(G) < 1/\alpha_2$ и $\mathcal{K}$ — конечное множество таких пар графов, что для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$ выполнены неравенства $f_{\alpha_1}(K, T) < 0$ и $v(T) \leq v(G)$. Если $p \in [n^{-\alpha_2}, n^{-\alpha_1}]$, то с асимптотической вероятностью 1 в случайном графе $G(n, p)$ существует копия графа G, являющаяся (K, T)-максимальной для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$.*

Доказательство. Пусть $N^{\mathcal{K}}_G$ — число всех копий графа G в $G(n, p)$, являющихся (K, T)-максимальными в $G(n, p)$ для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$. Кроме того, по аналогии с доказательством следствия 1.3.1 для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$ обозначим $N^{(K,T)}_G$ количество копий графа G в $G(n, p)$, которые *не* являются (K, T)-максимальными в $G(n, p)$.

Для произвольного графа H положим

$$f_\alpha(H) = v(H) - \alpha e(H).$$

Пусть $p \in [n^{-\alpha_2}, n^{-\alpha_1}]$.

Рассмотрим произвольную пару $(K,T) \in \mathcal{K}$, для которой существуют $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и такие графы $R = R(K,T), S_1, S_2$, что $R \subseteq G$, $p \le n^{-\alpha}$,

$$S_1 \subseteq T, \quad S_1 \subset S_2 \subseteq (K \setminus (T \setminus S_1)), \quad v(R) \ge v(S_1), \tag{1.8}$$

$$f_\alpha(R) + f_\alpha(S_2, S_1) < 0 \tag{1.9}$$

(будем использовать обозначения $\hat{\mathcal{K}}$, $\mathcal{R}(K,T)$, задающие те же множества, что и при доказательстве следствия 1.3.1).

Пусть $(K,T) \in \hat{\mathcal{K}}$, $R \in \mathcal{R}(K,T)$. Пусть, кроме того, $\tilde{G}$ — объединение графа R и такого графа $\tilde{S}_2$, изоморфного S_2, где графы S_1, S_2 удовлетворяют условиям (1.8), (1.9), что $\tilde{S}_2 \cap R = \tilde{S}_1$ и граф $\tilde{S}_1$ изоморфен графу S_1. Тогда, очевидно, в силу (1.9) выполнено $\rho(\tilde{G}) > \frac{1}{\alpha}$. Так как $p \le n^{-\alpha}$, то по теореме 1.3.2 с вероятностью, стремящейся к 1,

$$N_G^{(K,T)} = 0.$$

Более того, в силу леммы 1.3.1, так как $p \ge n^{-\alpha_2}$, то существует такое $c > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью, стремящейся к 1,

$$N_G > (1-\varepsilon) c n^{v(G)} p^{e(G)}.$$

Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, в $G(n,p)$

$$N_G^{\hat{\mathcal{K}}} > (1-\varepsilon) c n^{v(G)} p^{e(G)}. \tag{1.10}$$

Положим

$$\alpha_0 = \sup\{\alpha : \ \forall n \in \mathbb{N}\, p \ge n^{-\alpha}\}.$$

Пусть $(K,T) \in \mathcal{K} \setminus \hat{\mathcal{K}}$. Пусть, кроме того, существуют такие графы $R = R(K,T), S_1, S_2$, что $R \subseteq G$, выполнены условия (1.8) и

$$f_{\alpha_0}(R) + f_{\alpha_0}(S_2, S_1) = 0 \tag{1.11}$$

(обозначим $\tilde{\mathcal{K}}$ множество всех таких пар (K,T)). Пусть $(K,T) \in \tilde{\mathcal{K}}$. Пусть, кроме того, $\tilde{G}$ — объединение графа R и такого графа $\tilde{S}_2$, изоморфного S_2, где графы R, S_1, S_2 удовлетворяют условиям (1.8), (1.11), что $\tilde{S}_2 \cap R = \tilde{S}_1$ и граф $\tilde{S}_1$ изоморфен графу S_1. Очевидно, если копия графа G не является (K,T)-максимальной, то в объединении с соответствующим расширением она дает граф, максимальная плотность которого меньше $1/(\alpha_0 - \delta)$ для любого $\delta \in (0, \alpha_0)$ (это очевидно следует из того, что $(K,T) \notin \hat{\mathcal{K}}$). Так как для любого числа D и графа A свойство

в графе $G(n,p)$ существует не более D копий графа A

является убывающим, то из леммы 1.10 из [57] и леммы 1.3.1 следует, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $C > 0$, что с вероятностью, стремящейся к 1,

$$N_G^{(K,T)} < C\frac{v(G)!}{(v(G)-v(T))!}n^{v(G)+v(K,T)}n^{(-\alpha_0+\delta)(e(G)+e(K,T))} =$$

$$= O\left(n^{v(G)}p^{e(G)}n^{f_{\alpha_0}(K,T)}n^{\delta(e(G)+e(K,T))}\right). \tag{1.12}$$

Пусть $(K,T) \in \mathcal{K} \setminus (\hat{\mathcal{K}}(G,H) \cup \tilde{\mathcal{K}}(G,H))$. Тогда для любых таких S_1, S_2, $S_1 \subseteq T$, $S_1 \subset S_2 \subseteq (K \setminus (T \setminus S_1))$, и R, $R \subseteq G$, что $v(R) \geq v(S_1)$, и любого $M \in \mathbb{N}$

$$p \geq n^{-\alpha_0} \gg n^{-\frac{v(R)+v(S_2,S_1)}{e(R)+e(S_2,S_1)}}(\ln n)^M,$$

так как для любой пары графов (A,B) функции $f_\alpha(A)$ и $f_\alpha(A,B)$ является непрерывными по α на (α_1,α_2). Поэтому по лемме 1.3.1 для некоторого числа $C > 0$ с вероятностью, стремящейся к 1,

$$N_{(G)}^{(K,T)} < C\frac{v(G)!}{(v(G)-v(T))!}n^{v(G)+v(K,T)}p^{e(G)+e(K,T)} = O\left(n^{v(G)}p^{e(G)}n^{f_{\alpha_1}(K,T)}\right). \tag{1.13}$$

Из оценок (1.10), (1.12) (1.13), $f_{\alpha_1}(K,T) < 0$ и конечности множества $\mathcal{K}$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(N_{(G)}^{\mathcal{K}} > \frac{c}{2}n^{v(G)}p^{e(G)}\right) = 1.$$

Следствие доказано. □

Будем называть пары $(G,(x_1,\dots,x_m))$ и $(\tilde{G},(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m))$, где

$$\{x_1,\dots,x_m\} \subset V(G), \quad \{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m\} \subset \tilde{V}(G),$$

изоморфными, если граф $\tilde{G}$ является точным $(G,(x_1,\dots,x_m))$-расширением набора $(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m)$.

Нам, кроме того, понадобится утверждение, сформулированное ниже, о существовании "нерасширяющейся" копии строго сбалансированного графа. Метод для получения результатов такого рода изложен в статье [30]. Ниже мы применяем этот метод для доказательства упомянутого утверждения.

Пусть граф H — строго сбалансированный, (G,H) — строго сбалансированная пара, $\rho(H) = \rho(G,H) = 1/\alpha$. Пусть, кроме того, $V(H) =$

$\{h_1, \dots, h_v\}$, где $v = v(H)$. Обозначим W наибольшее (по мощности) множество v-вершинных наборов в V_n, обладающее следующим свойством. Для любых двух наборов

$$w_1 = (x_{i_1}, \dots, x_{i_v}), w_2 = (x_{i_{\sigma(1)}}, \dots, x_{i_{\sigma(v)}}) \in W,$$

совпадающих как множества, перестановка σ, примененная к набору $(h_1, \dots, h_v)$, не оставляет на месте ребра графа H (т.е. отображение $\phi : V(H) \to V(H)$, заданное равенствами $\phi(h_i) = h_{\sigma(i)}$, $i \in \{1, \dots, v\}$, не является автоморфизмом графа H). Очевидно,

$$|W| = \frac{n!}{(n-v)!a(H)}.$$

Для каждого $w \in W$ будем обозначать $\overline{w}$ множество, составленное из элементов набора w. Пусть для $w = (x_{i_1}, \dots, x_{i_v}) \in W$ событие A_w заключается в том, что некоторый остовный подграф графа $G(n, n^{-\alpha})|_{\overline{w}}$ изоморфен H, причем соответствующий изоморфизм переводит вершину x_{i_j} в вершину h_j для каждого $j \in \{1, \dots, v\}$.

Лемма 1.3.3. *Для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ в последовательности натуральных чисел с положительной асимптотической вероятностью, отличной от 1, в графе $G(n_i, n_i^{-\alpha})$ существует хотя бы одна копия H и у любого $w \in V_{n_i}$, для которого выполнено событие A_w, не существует $(G, (h_1, \dots, h_v))$-расширения в $G(n_i, n_i^{-\alpha})$.*

Доказательство. Обозначим

$$N_H^-(w) = \sum_{\tilde{w}} I(A_{\tilde{w}}),$$

где сумма берется по всем $\tilde{w} \in W$, не пересекающим набор w,

$$N_H^+(w) = \sum_{\tilde{w}} \xi_{\tilde{w}},$$

где сумма берется по всем таким $\tilde{w} \in W$, пересекающим набор w, что $\overline{\tilde{w}} \cap \overline{w} \neq \overline{w}$, а для любого $\mathcal{G} \in \Omega_n$ имеем $\xi_{\tilde{w}}(\mathcal{G}) = 1$ тогда и только тогда, когда выполнено событие A_w для графа $\mathcal{G}$ с добавленными в него ребрами между любыми двумя вершинами из $\overline{w} \cap \overline{\tilde{w}}$ (в противном случае $\xi_{\tilde{w}}(\mathcal{G}) = 0$). Положим

$$N_H(w) = N_H^-(w) + N_H^+(w).$$

Обозначим μ_n вероятность того, что в графе $G(n, n^{-\alpha})$ существует хотя бы одна копия H и у любого v-вершинного набора w в V_n, для которого выполнено событие A_w, не существует $(G, (h_1, \ldots, h_v))$-расширения в $G(n, n^{-\alpha})$. Тогда

$$\mathsf{P}(N_H > 0) \geq \mu_n = \mathsf{P}(N_G = 0) - \mathsf{P}(N_H = 0) \geq \mathsf{P}(N_H = 1, N_G = 0).$$

В силу теоремы 1.3.3

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(N_H > 0) = 1 - e^{-1/a(H)}.$$

Наконец,

$$\mathsf{P}(N_H = 1, N_G = 0) = \sum_{w\in W} \mathsf{P}(N_H = 1, N_G = 0|A_w)\mathsf{P}(A_w) \geq$$

$$\geq \sum_{w\in W} \mathsf{P}(N_H(w) = 0, N_{(G,H)}(w) = 0)\mathsf{P}(A_w) =$$

$$= \mathsf{P}(N_H(w_0) = 0, N_{(G,H)}(w_0) = 0) \sum_{w\in W} \mathsf{P}(A_w) \sim$$

$$\sim \frac{1}{a(H)}\mathsf{P}(N_H^-(w_0) = 0, N_{(G,H)}(w_0) = 0),$$

где $w_0 \in W$ — произвольный набор. Асимптотическое равенство выполнено в силу того, что по теореме 1.3.2 в графе $G(n, n^{-\alpha})$ с вероятностью, стремящейся к 1, не существует подграфов, количество вершин которых не превосходит $2v$, а плотность больше $1/\alpha$. Вероятность

$$\mathsf{P}(N_H^-(w_0) = 0, N_{(G,H)}(w_0) = 0)$$

стремится к некоторому положительному числу, отличному от 1 (см. [30]). Тем самым, лемма доказана. □

1.4. Игра Эренфойхта

При доказательстве законов нуля или единицы для класса свойств первого порядка, как было замечено выше, используется теорема Эренфойхта. Перед тем как сформулировать ее, напомним некоторые определения. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Определим игру Эренфойхта $\mathrm{EHR}(G, H, k)$ на двух графах

G, H (необязательно конечных) с двумя игроками (Новатором и Консерватором) и с фиксированным числом раундов k (см. [1, 5, 25, 40, 57, 107, 130]). Пусть

$$V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad V(H) = \{y_1, \ldots, y_m\}.$$

На ν-м ходу ($1 \leq \nu \leq k$) Новатор выбирает вершину из любого графа (он выбирает либо $x_{j_\nu} \in V(G)$, либо $y_{j'_\nu} \in V(H)$). Затем Консерватор выбирает вершину из оставшегося графа. Если Новатор выбирает на μ-м ходу, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu = j_\nu$ ($\nu < \mu$), то Консерватор должен выбрать $y_{j'_\nu} \in V(H)$. Если же на этом ходу Новатор выбирает, скажем, вершину $x_{j_\mu} \in V(G)$, $j_\mu \notin \{j_1, \ldots, j_{\mu-1}\}$, то и Консерватор должен выбрать такую вершину $y_{j'_\mu} \in V(H)$, что $j'_\mu \notin \{j'_1, \ldots, j'_{\mu-1}\}$. Если он не может этого сделать, то игру выигрывает Новатор. К концу игры выбраны вершины $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k} \in V(G)$, а также вершины $y_{j'_1}, \ldots, y_{j'_k} \in V(H)$. Некоторые из этих вершин могут совпадать. Выберем из них только различные: $x_{h_1}, \ldots, x_{h_l}$; $y_{h'_1}, \ldots, y_{h'_l}$, $l \leq k$. Консерватор побеждает тогда и только тогда, когда отображение

$$\varphi : \{x_{h_1}, \ldots, x_{h_l}\} \to \{y_{h'_1}, \ldots, y_{h'_l}\},$$

определенное равенствами $\varphi(x_{h_\nu}) = y_{h'_\nu}$ для всех $\nu \in \{1, \ldots, l\}$, является изоморфизмом графов $G|_{\{x_{h_1}, \ldots, x_{h_l}\}}$ и $H|_{\{y_{h'_1}, \ldots, y_{h'_l}\}}$. Мы будем говорить, что *у Консерватора есть выигрышная стратегия*, если для каждого раунда с номером $\nu \in \{1, \ldots, k\}$ при любом выборе Новатором вершины Консерватор может выбрать такую вершину, что в конце игры Консерватор побеждает. В противном случае, мы будем говорить, что *у Новатора есть выигрышная стратегия*. Сформулируем, наконец, теорему Эренфойхта о связи между элементарной эквивалентностью и игрой Эренфойхта.

Теорема 1.4.1. (А. Эренфойхт, 1960, [40]) *Пусть G, H — два графа, k — натуральное число. Графы G, H являются k-элементарно эквивалентными тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре* $\mathrm{EHR}(G, H, k)$.

Для того, чтобы продемонстрировать, для каких задач оказывается полезна теорема Эренфойхта, приведем следующий пример. Предположим, что свойство связности можно записать на языке первого порядка. Пусть k — глубина формулы первого порядка, с помощью которой можно записать это свойство. Рассмотрим связный граф G, являющийся

бесконечным простым путем, и несвязный граф $H = H_1 \sqcup H_2$, являющийся объединением двух бесконечных простых путей H_1 и H_2. Такие графы не являются k-элементарно эквивалентными в силу предположения. Тогда по теореме 1.4.1 у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G, H, k)$. Тем не менее можно показать, что выигрышная стратегия есть у Консерватора (см., например, [130]), что противоречит нашему предположению. Таким образом, свойство связности нельзя записать на языке первого порядке.

Сформулируем теперь критерий справедливости закона нуля или единицы. Этот критерий является следствием из теоремы 1.4.1 (см., например, [1, 57, 130]).

Теорема 1.4.2. *Случайный граф $G(n, p)$ подчиняется k-закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathsf{P}(\text{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре } \mathrm{EHR}(G(n, p(n)), G(m, p(m)), k)) = 1. \tag{1.14}$$

Заметим, что из сформулированного утверждения, очевидно, следует, что случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда равенство (1.14) справедливо для любого $k \in \mathbb{N}$.

Мы так же будем использовать еще одно следствие из теоремы Эренфойхта, сформулированное и доказанное ниже. Пусть $p_1 = p_1(n)$, $p_2 = p_2(n)$ — две такие функции, принимающие значения в $[0, 1]$, что $p_1(n) < p_2(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.4.3. *Если для любого $p \in (p_1, p_2)$ выполнено равенство (1.14), то для любого свойства первого порядка $L \in \mathcal{L}_k$ существует такое $\delta \in \{0, 1\}$, что равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p) \models L) = \delta \tag{1.15}$$

выполнено для любого $p \in (p_1, p_2)$. Кроме того, если для любого свойства $L \in \mathcal{L}_k$ существует такое $\delta \in \{0, 1\}$, что равенство (1.15) выполнено для любого $p \in (p_1, p_2)$, то с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре

$$\mathrm{EHR}(G(n, p(n)), G(m, \tilde{p}(m)), k)$$

для любого $p, \tilde{p} \in (p_1, p_2)$.

Доказательство. Пусть для любого свойства $L \in \mathcal{L}_k$ существует такое $\delta \in \{0, 1\}$, что равенство (1.15) выполнено для любого $p \in (p_1, p_2)$.

Пусть $p, \tilde{p} \in (p_1, p_2)$. Положим $\hat{p} = p$, если n — нечетное число, и $\hat{p} = \tilde{p}$, если n — четное число. Случайный граф $G(n, \hat{p})$ подчиняется k-закону нуля или единицы. Поэтому в силу теоремы 1.4.2 у Консерватора есть выигрышная стратегия в игреEHR$(G(n, \hat{p}(n)), G(m, \hat{p}(m)), k)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n, m \to \infty$. Рассмотрев только нечетные n и четные m, можно прийти к выводу, что с вероятностью стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре EHR$(G(n, p(n)), G(m, \tilde{p}(m)), k)$.

Пусть для любого $p \in (p_1, p_2)$ выполнено равенство (1.14). Пусть, кроме того, $L \in \mathcal{L}_k$. В силу теоремы 1.4.2

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p) \vDash L) \in \{0, 1\}$$

для любого $p \in (p_1, p_2)$. Предположим, что существуют $p, \tilde{p} \in (p_1, p_2)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p) \models L) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, \tilde{p}) \models L) = 1.$$

Очевидно, для фиксированного n функция $\mathsf{P}(G(n, p) \models L)$ является непрерывной по p. Следовательно, найдется такая функция $\hat{p} = \hat{p}(n) \in (p(n), \tilde{p}(n))$, что при достаточно больших n выполнено равенство

$$\mathsf{P}(G(n, \hat{p}) \models L) = \frac{1}{2}.$$

Получили противоречие с законом нуля или единицы. Теорема доказана. □

1.5. Доказательства результатов

Доказательства будут построены по следующей схеме. Для всех теорем, в которых утверждается справедливость закона нуля или единицы, мы будем пользоваться теоремой 1.4.2, т.е. доказывать, что с вероятностями, стремящимися к 1, у Консерватора существуют выигрышные стратегии. Центральная часть этих стратегий, называемая стратегией SF, описана в разделе 1.5.2. Всюду при описании стратегий будем считать, что

в каждом раунде игроки выбирают вершины отличные от уже выбранных. Такое предположение не ограничивает общности в силу того, что размеры графов в рассматриваемых случаях а также утверждения, используемые в рассуждениях, позволяют выбирать вершины, отличные от уже выбранных. В разделе 1.5.1 мы опишем некоторые свойства разреженности графов G, H, благодаря которым Консерватор выигрывает, придерживаясь стратегии SF. Затем в разделе 1.5.3 мы докажем теорему 1.2.1, установив, что случайный граф при наложенных на него ограничениях из условии теоремы обладает упомянутым свойством разреженности с вероятностью, стремящейся к 1. Теорему 1.2.2 мы докажем в разделе 1.5.4. При этом в зависимости от значений b мы будем приводить либо выигрышную стратегию Новатора, либо пример формулы, опровергающей закон. При доказательстве теоремы 1.2.4 в разделе 1.5.5 мы также воспользуемся стратегией SF, но, так как случайный граф уже не будет с вероятностью, стремящейся к 1, обладать свойством разреженности, этой стратегией мы будем пользоваться только на последних раундах игры.

1.5.1. Циклические расширения и свойство разреженности

Пусть $m \in \mathbb{N}$ — произвольное натуральное число. Рассмотрим такую пару графов (G, H), что $G \supset H$. Будем говорить, что граф G является *m-расширением графа H первого типа*, если $m \geq 3$ и выполнено следующее условие. Существует такая вершина x_1 графа G, что

$$V(G) \setminus V(H) = \{y_1^1, \ldots, y_{t_1}^1, y_1^2, \ldots, y_{t_2}^2\},$$

$$E(G) \setminus E(H) = \{\{x_1, y_1^1\}, \{y_1^1, y_2^1\}, \ldots, \{y_{t_1-1}^1, y_{t_1}^1\},$$
$$\{y_{t_1}^1, y_1^2\}, \{y_1^2, y_2^2\}, \ldots, \{y_{t_2-1}^2, y_{t_2}^2\}, \{y_{t_2}^2, y_{t_1}^1\}\},$$

где $t_1 + t_2 \leq m - 1$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 2$ и $\rho^{\max}(G) < \frac{m}{m-1}$ (при $t_1 = 0$ вершина x_1 является смежной с вершинами $y_1^2, y_{t_2}^2$). Граф G мы называем *m-расширением графа H второго типа*, если $m \geq 2$ и выполнено следующее условие. Существуют две такие различные вершины x_1, x_2 графа G, что

$$G = (V(H) \sqcup \{y_1, \ldots, y_t\}, E(H) \sqcup \{\{x_1, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \ldots, \{y_{t-1}, y_t\}, \{y_t, x_2\}\}),$$

где $t \leq m-1$ и $\rho^{\max}(G) < \frac{m}{m-1}$. Граф G является *m-расширением графа H третьего типа*, если $m \geq 2$, $V(H) = V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ и $\rho^{\max}(G) < \frac{m}{m-1}$.

Для произвольного натурального числа $m \geq 3$ определим множество графов $\mathcal{H}_m$. Пусть x — вершина. Граф без ребер на множестве вершин $\{x\}$, принадлежит $\mathcal{H}_m$. Более того, $\mathcal{H}_m$ — множество, содержащее наименьшее количество элементов и обладающее следующим свойством. Если $G \in \mathcal{H}_m$, то $\mathcal{H}_m$ содержит все попарно неизоморфные m-расширения первого, второго и третьего типов графа G.

Заметим, что любой граф G из $\mathcal{H}_m$, отличный от $(\{x\}, \varnothing)$, содержит в себе конечный набор таких вложенных графов $G_1, \ldots, G_t$,

$$G_0 = (\{x\}, \varnothing) \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t \subseteq G,$$

что выполнены следующие свойства:

— $G_i \neq G_{i+1}$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$,

— граф G либо совпадает с G_t, либо является m-расширением третьего типа графа G_t, а графы G_i являются m-расширениями первого или второго типа графов G_{i-1} при $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$.

Такую последовательность графов $G_0, G_1, \ldots, G_t, G$ будем называть *m-разложением* графа G.

Сформулируем утверждение о свойствах множества $\mathcal{H}_m$.

Лемма 1.5.1. *Выполнены следующие свойства.*

1. *Пусть $m \geq 3$. Пусть, кроме того, $G \in \mathcal{H}_m$ и $G_0, G_1, \ldots, G_t, G$ — его m-разложение, причем либо $t = 1$ и $G_t \neq G$, либо $t \geq 2$. Тогда найдутся такие натуральные числа a, b, что $b \leq m$ и*

$$\rho^{\max}(G) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b/a}.$$

2. *Пусть $m \geq 2$ и $\rho \in (1, m/(m-1))$ — произвольное число. Тогда существует такое число $\eta \in \mathbb{N}$, что для любого натурального $v > \eta$ и у любого графа $G \in \mathcal{H}_m$ на v вершинах найдется подграф на не более чем η вершинах с плотностью, превосходящей ρ.*

Доказательство начнем со свойства 1. Если $t = 1$, то $\rho(G_1) = 1$, $v(G_1) \leq m$. Следовательно,

$$\rho(G) = \frac{v(G_1) + e}{v(G_1)},$$

где $e \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{v(G_1)-e}{e}} < \frac{m}{m-1}.$$

Если $e = 1$, то $v(G_1) = m$ и

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{m-1+1}.$$

Если $e > 1$, то $v(G_1) > (m-1)e$. Это противоречит неравенству $v(G_1) \leq m$. Поэтому свойство 1 в рассмотренном случае выполнено.

Пусть $t \geq 2$. Положим

$$v^{i+1} = v(G_{i+1}) - v(G_i), \quad i \in \{0, 1, \ldots, t-1\},$$

Докажем, что $\rho(G_t) = 1 + \frac{1}{m-1+b_1/(t-1)}$ при некотором $b_1 \leq m$. Справедливы соотношения

$$\rho(G_t) = \frac{v^1 + \ldots + v^t + t}{1 + v^1 + \ldots + v^t} = 1 + \frac{t-1}{1 + v^1 + \ldots + v^t} < 1 + \frac{1}{m-1}.$$

Поэтому

$$\rho(G_t) = 1 + \frac{1}{m-1+\frac{b_1}{t-1}},$$

где

$$b_1 = 1 + v^1 + \ldots + v^t - (m-1)(t-1).$$

Так как $v^i \leq m-1$, $i \in \{1, \ldots, t\}$, то имеем

$$0 < b_1 \leq 1 + t(m-1) - (m-1)(t-1) = m.$$

Докажем теперь, что

$$\rho(G) = 1 + \frac{1}{m-1+b_2/(t+e_0-1)},$$

где $b_2 \leq m, e_0 = e(G) - e(G_t)$. Имеем

$$\rho(G) = \frac{m(t-1)+b_1+e_0}{(m-1)(t-1)+b_1} = 1 + \frac{1}{m-1+\frac{b_1-(m-1)e_0}{t-1+e_0}}.$$

Так как $\rho(G) < 1 + \frac{1}{m-1}$, то $0 < b_2 \leq b_1 \leq m$, где

$$b_2 = b_1 - (m-1)e_0.$$

Пусть, наконец, $H \subset G$, $\rho(G) < \rho(H) < \frac{m}{m-1}$. Тогда

$$\rho(H) = \frac{m(t-1) + b_1 + e_0 - y}{(m-1)(t-1) + b_1 - x}$$

для некоторых натуральных чисел x, y. Справедливо неравенство $y \geq x$, так как граф G — связный. Докажем, что

$$\rho(H) = 1 + \frac{1}{m - 1 + b/(t + e_0 - 1 + x - y)},$$

где $b \leq m$. Имеем

$$\rho(H) = 1 + \frac{1}{m - 1 + \frac{b_1 + y(m-1) - mx - (m-1)e_0}{t-1+e_0+x-y}}.$$

Так как $\rho(H) > \rho(G)$, то

$$\frac{b_1 + y(m-1) - mx - (m-1)e_0}{t - 1 + e_0 + x - y} < \frac{b_1 - (m-1)e_0}{t - 1 + e_0}.$$

Но знаменатель первой дроби не больше, чем знаменатель второй. Следовательно,

$$b = b_1 + y(m-1) - mx - (m-1)e_0 < b_1 - (m-1)e_0 \leq m,$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству свойства 2. В силу определения m-расширений первого и второго типа, если $G_0, G_1, \ldots, G_t, G$ — m-разложение некоторого графа $G \in \mathcal{H}_m$, то

$$v(G_{i+1}) - v(G_i) \leq m - 1, \quad e(G_{i+1}) - e(G_i) = v(G_{i+1}) - v(G_i) + 1$$

для всех $i \in \{0, \ldots, t-1\}$. Следовательно,

$$\rho(G) \geq \rho(G_t) =$$

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{t-1}(e(G_{i+1}) - e(G_i))}{1 + \sum\limits_{i=0}^{t-1}(v(G_{i+1}) - v(G_i))} = 1 + \frac{t-1}{1 + \sum\limits_{i=0}^{t-1}(v(G_{i+1}) - v(G_i))} \geq 1 + \frac{t-1}{1 + (m-1)t}. \tag{1.16}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого такого графа $G \in \mathcal{H}_m$, что

$$v(G) \geq (m-1)n + 1,$$

его m-разложение $G_0, G_1, \ldots, G_t, G$ удовлетворяет неравенству

$$1 + (m-1)t \geq (m-1)n + 1.$$

Поэтому $t \geq n$. Из этого неравенства и (1.16) следует, что

$$\rho(G) \geq 1 + \frac{1}{m - 1 + \frac{m}{t-1}} \geq 1 + \frac{1}{m - 1 + \frac{m}{n-1}} = \frac{mn}{(m-1)n+1}.$$

Кроме того, для любого $\rho \in (1, \frac{m}{m-1})$ найдется такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $n \geq n_0$ выполнено неравенство

$$\frac{mn}{(m-1)n+1} > \rho.$$

Заметим, наконец, что в любом графе из $\mathcal{H}_m$ на более чем $(m-1)(n+1)+1$ вершинах найдется подграф из $\mathcal{H}_m$, количество вершин которого находится в отрезке

$$[(m-1)n + 1, (m-1)(n+1) + 1].$$

Поэтому, очевидно, для

$$\eta = (m-1)(n_0+1) + 1$$

утверждение леммы выполнено.

Обратимся, наконец, к упомянутому свойству разреженности. Пусть n_1, n_2, n_3, n_4 — некоторые натуральные числа, $n_2 \leq n_1$, $n_4 \leq n_3$, ρ — произвольное положительное число. Будем говорить, что граф G является $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$-*разреженным*, если он обладает следующими свойствами.

1) Пусть $\mathcal{K}$ — множество таких $1/\rho$-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_1) \leq n_3$, $v(K_2) \leq n_4$. Пусть K — граф, количество вершин которого не превосходит n_1. Если $\rho^{\max}(K) < \rho$, то G содержит такой подграф, изоморфный K, что он является (K_1, K_2)-максимальным в G для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$. Если $\rho^{\max}(K) > \rho$, то G не содержит подграф, изоморфный K.

2) Пусть $\mathcal{H}$ — конечное множество таких $1/\rho$-надежных пар (H_1, H_2), что $v(H_1) \leq n_1$, $v(H_2) \leq n_2$. Пусть $\mathcal{K}$ — множество таких $1/\rho$-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_1) \leq n_3$, $v(K_2) \leq n_4$. Тогда для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$ (положим $V(H) = \{h_1, \ldots, h_m\}$) и для

любого подграфа $G_2 \subset G$ на $v(H_2)$ вершинах (положим $V(G_2) = \{g_1, \ldots, g_m\}$) в графе G найдется подграф G_1, являющийся таким точным $(H_1, (h_1, \ldots, h_m))$-расширением набора вершин $(g_1, \ldots, g_m)$, что пара (G_1, G_2) является (K_1, K_2)-максимальной в G для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$.

Стратегия Консерватора, описанная в следующем разделе, опирается именно на свойство $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$-разреженности обоих графов, на которых играют Новатор и Консерватор (при некоторых значениях n_1, n_2, n_3, n_4, ρ).

1.5.2. Стратегия SF

Пусть

$$\rho \in \left(1, \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}-1}\right), \quad \rho \notin \left\{1 + \frac{1}{2^{k-1}-1+b/a},\ a, b \in \mathbb{N}, b \leq 2^{k-1}\right\}.$$

Обозначим $\eta(\rho)$ число из формулировки леммы 1.5.1, т.е. такое число, что для любого натурального $v > \eta(\rho)$ и у любого графа $G \in \mathcal{H}_{2^{k-1}}$ на v вершинах найдется подграф на не более чем $\eta(\rho)$ вершинах с плотностью, превосходящей ρ. Положим

$$n_1(\rho) = \eta(\rho) + k\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right]+1\right), \quad n_2(\rho) = \eta(\rho) + (k-2)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right]+1\right), \tag{1.17}$$

$$n_3 = 2^{k-1}+1, \quad n_4 = 2. \tag{1.18}$$

Пусть графы G, H являются $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженными. Весь этот раздел мы посвятим описанию выигрышной статегии Консерватора в игре $\mathrm{EHR}(G, H, k)$.

Будем обозначать X_i граф, выбранный Новатором в i-ом раунде. Оставшийся граф будем обозначать Y_i. Вершины, выбранные в графе X_i в первых i раундах, обозначим $x_i^1, \ldots, x_i^i$, в графе Y_i — $y_i^1, \ldots, y_i^i$. Итак, пусть в первом раунде Новатор выбрал вершину x_1^1. В силу леммы 1.5.1 и свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа X_1 в нем не существует подграфа, изоморфного некоторому графу из $\mathcal{H}_{2^{k-1}}$ с количеством вершин, превосходящим $\eta(\rho)$. Обозначим $\tilde{X}_1^1$ подграф в X_1 на v_1 вершинах, изоморфный некоторому графу из $\mathcal{H}_{2^{k-1}}$, содержащий вершину x_1^1 и обладающий следующим свойством. В X_1 не существует подграфа, содержащего вершину x_1^1 и изоморфного некоторому графу из $\mathcal{H}_{2^{k-1}}$, количество

вершин которого превосходит v_1. Выполнены неравенства $v_1 \leq \eta(\rho) < n_1(\rho)$. Поэтому в силу леммы 1.5.1 и свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа X_1 плотность графа $\tilde{X}_1^1$ меньше, чем ρ. Следовательно, по свойству $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа Y_1 в нем найдется подграф $\tilde{Y}_1^1$, изоморфный $\tilde{X}_1^1$ и являющийся (K_1, K_2)-максимальным в Y_1 для любой $1/\rho$-жесткой пары (K_1, K_2) с $v(K_1) \leq n_3$, $v(K_2) \leq n_4$. Пусть при соответствующем изоморфизме $\varphi_1 : \tilde{X}_1^1 \to \tilde{Y}_1^1$ вершина x_1^1 переходит в вершину y_1^1, которую и выберет Консерватор в первом раунде.

Введем ряд обозначений, которые нам потребуются в дальнейшем. Пусть X — произвольный граф, x, y — две его вершины, A, B — два его подграфа. Тогда обозначим $d_X(x, y)$ длину наименьшего пути в X, соединяющей вершины x и y. *Длиной* пути мы называем количество ребер в нем, *наименьшим путем* мы называем путь, имеющий наименьшую длину среди рассматриваемых. Пусть

$$d_X(x, A) = d_X(A, x) = \min_{v \in V(A)} d_X(x, v), \quad d_X(A, B) = \min_{v \in V(A)} d_X(v, B).$$

Прежде чем перейти к продолжению описания стратегии, введем еще одно важное для наших целей понятие. Пусть сыграно i раундов, где $i \in \{1, \ldots, k\}$. Пусть $r \in \{1, \ldots, i\}$, $z_1 = z_1(\rho)$, $z_2 = z_2(\rho)$ — некоторые натуральные числа, а непересекающиеся по вершинам графы $\tilde{X}_i^1, \ldots, \tilde{X}_i^r \subset X_i$, $\tilde{Y}_i^1, \ldots, \tilde{Y}_i^r \subset Y_i$ обладают следующими свойствами.

I Вершины $x_i^1, \ldots, x_i^i$ принадлежат множеству $V(\tilde{X}_i^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_i^r)$, а вершины $y_i^1, \ldots, y_i^i$ принадлежат множеству $V(\tilde{Y}_i^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_i^r)$.

II Для любых различных $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, r\}$ справедливы неравенства

$$d_{X_i}(\tilde{X}_i^{j_1}, \tilde{X}_i^{j_2}) > 2^{k-i}, \;\; d_{Y_r}(\tilde{Y}_i^{j_1}, \tilde{Y}_i^{j_2}) > 2^{k-i}.$$

III Для любого $j \in \{1, \ldots, r\}$ в графе X_i (в графе Y_i) не существует циклического 2^{k-i}-расширения графа $\tilde{X}_i^j$ (графа $\tilde{Y}_i^j$).

IV Мощности множеств $V(\tilde{X}_i^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_i^r)$, $V(\tilde{Y}_i^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_i^r)$ не превосходят

$$z_1 + (i-1)z_2.$$

V Графы $\tilde{X}_i^j$ и $\tilde{Y}_i^j$ изоморфны при каждом $j \in \{1, \ldots, r\}$ и при некотором соответствующем изоморфизме (общим для всех графов, так как они не имеют общих вершин) вершины x_i^l переходят в вершины y_i^l при каждом $l \in \{1, \ldots, i\}$.

Два набора графов $\tilde{X}_i^1, \ldots, \tilde{X}_i^r$ и $\tilde{Y}_i^1, \ldots, \tilde{Y}_i^r$, обладающие описанными свойствами, мы будем называть (k, i, r, z_1, z_2)-*регулярно эквивалентными в* (X_i, Y_i). Кроме того, изоморфизм, упомянутый в условии V, мы будем обозначать $\varphi(k, i, r)$ (так как такой изоморфизм, вообще говоря, не является единственным, то мы рассматриваем произвольный изоморфизм, упомянутый в V).

Замечание. Свойство $(k, 1, 1, z_1, z_2)$-регулярной эквивалентности графов $\tilde{X}_1^1$ и $\tilde{Y}_1^1$ определяется условиями I, III, IV и V. Свойство (k, k, r, z_1, z_2)-регулярной эквивалентности наборов графов $\tilde{X}_k^1, \ldots, \tilde{X}_k^r$ и $\tilde{Y}_k^1, \ldots, \tilde{Y}_k^r$ определяется условиями I, II, IV и V.

Итак, пусть сыграно i раундов, $1 \leq i < k$. Опишем стратегию Консерватора в $i+1$-ом раунде. Основная идея этой статегии состоит в следующем. Очевидно, благодаря выбору первых вершин в первом раунде графы $\tilde{X}_1^1, \tilde{Y}_1^1$ являются $\left(k, 1, 1, \eta(\rho), \lfloor \frac{1}{\rho - 1} \rfloor + 1\right)$-регулярно эквивалентными в (X_1, Y_1). Действительно, свойства I, IV и V выполнены по построению. В графе X_1 не существует циклического 2^{k-1}-расширения графа $\tilde{X}_1^1$, так как такое расширение принадлежало бы множеству $\mathcal{H}_{2^{k-1}}$ и количество его вершин превосходило бы количество вершин графа $\tilde{X}_1^1$, что противоречит определению этого графа. В графе Y_1 не существует циклического 2^{k-1}-расширения графа $\tilde{Y}_1^1$, так как граф $\tilde{Y}_1^1$ является (K_1, T_1)-максимальным и (K_2, T_2)-максимальным в Y_1, где

$$V(T_1) = \{x\},\ V(K_1) = \{x, y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_m\},$$

$$E(K_1) = \{\{x, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \ldots, \{y_{r-1}, y_r\}, \{y_r, y_{y+1}\}, \ldots, \{y_m, y_r\}\},$$

$$V(T_2) = \{x_1, x_2\},\ V(K_2) = \{x_1, y_1, \ldots, y_m, x_2\},$$

$$E(K_2) = \{\{x_1, y_1\}, \{y_1, y_2\}, \ldots, \{y_m, x_2\}\},$$

$m \leq 2^{k-1}$ (такие пары (K_i, T_i) являются $1/\rho$-жесткими с $v(K_i) \leq 2^{k-1}$, $v(T_i) \leq 2$). Мы предположим, что для некоторого $r \in \{1, \ldots, i\}$ граф X_i содержит подграфы $\tilde{X}_i^1, \ldots, \tilde{X}_i^r$, а граф Y_i — подграфы $\tilde{Y}_i^1, \ldots, \tilde{Y}_i^r$, такие что наборы $(\tilde{X}_i^1, \ldots, \tilde{X}_i^r)$, $(\tilde{Y}_i^1, \ldots, \tilde{Y}_i^r)$ являются $\left(k, i, r, \eta(\rho), \lfloor \frac{1}{\rho - 1} \rfloor + 1\right)$-регулярно эквивалентными в (X_i, Y_i). Далее Консерватор должен в раунде с номером $i+1$ выбрать одну вершину так, чтобы образовались $\left(k, i+1, l, \eta(\rho), \lfloor \frac{1}{\rho - 1} \rfloor + 1\right)$-регулярно эквивалетные наборы подграфов в (X_{i+1}, Y_{i+1}) для некоторого $l \in \{1, \ldots, i+1\}$. Эту стратегию, которой

Консерватор может пользоваться в каждом раунде благодаря существованию регулярно эквивалентных наборов, мы будем называть *стратегией* SF. Заметим, что если после k-го раунда найденные наборы являются $\left(k, k, r, \eta(\rho), \lfloor\frac{1}{\rho-1}\rfloor + 1\right)$-регулярно эквивалентными, то графы $X_k|_{\{x_k^1,\ldots,x_k^k\}}$ и $X_k|_{\{x_k^1,\ldots,x_k^k\}}$ изоморфны (причем изоморфизм сохраняет порядок вершин) и, следовательно, Консерватор победил.

Итак, пусть для некоторого $r \in \{1,\ldots,i\}$ граф X_i содержит подграфы $\tilde{X}_i^1,\ldots,\tilde{X}_i^r$, граф Y_i содержит подграфы $\tilde{Y}_i^1,\ldots,\tilde{Y}_i^r$, такие что наборы $(\tilde{X}_i^1,\ldots,\tilde{X}_i^r)$, $(\tilde{Y}_i^1,\ldots,\tilde{Y}_i^r)$ являются $\left(k, i, r, \eta(\rho), \lfloor\frac{1}{\rho-1}\rfloor + 1\right)$-регулярно эквивалентным в (X_i, Y_i).

Если $X_{i+1} = X_i$, то положим $\tilde{X}_{i+1}^j = \tilde{X}_i^j$, $\tilde{Y}_{i+1}^j = \tilde{Y}_i^j$, $j \in \{1,\ldots,r\}$. В противном случае положим $\tilde{X}_{i+1}^j = \tilde{Y}_i^j$, $\tilde{Y}_{i+1}^j = \tilde{X}_i^j$, $j \in \{1,\ldots,r\}$. Пусть φ_{i+1} — изоморфизм из $\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^r$ в $\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r$, переводящий графы $\tilde{X}_{i+1}^j$ в $\tilde{Y}_{i+1}^j$ при $j \in \{1,\ldots,r\}$. Пусть, кроме того, $\varphi_{i+1}(x_{i+1}^j) = y_{i+1}^j$ при $j \in \{1,\ldots,i\}$. Рассмотрим далее три различные ситуации.

1) Предположим, что Новатор в $i+1$-ом раунде выбрал вершину x_{i+1}^{i+1} из множества $V(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^r)$. Тогда Консерватор выберет $y_{i+1}^{i+1} = \varphi(x_{i+1}^{i+1})$. Заметим, что мы определили графы $\tilde{X}_{i+1}^1,\ldots,\tilde{X}_{i+1}^r, \tilde{Y}_{i+1}^1,\ldots,\tilde{Y}_{i+1}^r$, просто переобозначив графы $\tilde{X}_i^1,\ldots,\tilde{X}_i^r, \tilde{Y}_i^1,\ldots,\tilde{Y}_i^r$ и не меняя их структуры. Поэтому, как нетрудно видеть, наборы $(\tilde{X}_{i+1}^1,\ldots,\tilde{X}_{i+1}^r)$ и $(\tilde{Y}_{i+1}^1,\ldots,\tilde{Y}_{i+1}^r)$ являются $\left(k, i+1, r, \eta(\rho), \lfloor\frac{1}{\rho-1}\rfloor + 1\right)$-регулярно эквивалентными в (X_{i+1}, Y_{i+1}) при $i < k-1$ (в частности, очевидно, что графы $\tilde{X}_{i+1}^j$ и $\tilde{Y}_{i+1}^j$ изоморфны при каждом $j \in \{1,\ldots,r\}$ и при соответствующем изоморфизме φ_{i+1} (одном и том же для всех графов) вершины x_{i+1}^j переходят в вершины y_{i+1}^j, $j \in \{1,\ldots,i+1\}$).

2) Предположим теперь, что Новатор выбрал вершину x_{i+1}^{i+1}, не принадлежащую множеству $V(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^r)$, при этом

$$d_{X_{i+1}}(x_{i+1}^{i+1}, \tilde{X}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^r) \le 2^{k-1-i}.$$

Обозначим $\mathbf{x}$ набор вершин множества $V(\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^r)$, $\mathbf{y}$ набор вершин множества $V(\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r)$ (вершины в этих наборах находятся в таком порядке, что изоморфизм графов $\tilde{X}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^r$ и $\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r$ сохраняет этот порядок). Заметим, что в силу определения графов $\tilde{X}_{i+1}^1,\ldots,\tilde{X}_{i+1}^r$ в графе X_{i+1} найдется ровно один путь $c_{X_{i+1}}$,проходящая только через вершины графа

$X_{i+1} \setminus \left(\tilde{X}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_{i+1}\right)$ (не считая последней вершины), длины, не превосходящей 2^{k-1-i}, соединяющая x^{i+1}_{i+1} с некоторой вершиной $\tilde{x}^l_{i+1}$ графа $\tilde{X}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_{i+1}$, где $l \in \{1, \ldots, r\}$, $\tilde{x}^l_{i+1} \in V(\tilde{X}^l_{i+1})$. Следовательно, пара

$$(\tilde{X}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_{i+1} \cup c_{X_{i+1}}, \tilde{X}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_{i+1})$$

является $1/\rho$-надежной. Кроме того,

$$|V(\tilde{Y}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{Y}^r_{i+1})| <$$

$$\eta(\rho) + (i-1)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right]+1\right) \leq \eta(\rho) + (k-2)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right]+1\right).$$

Поэтому в силу свойства $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа Y_{i+1} в нем найдется такое точное $(\tilde{X}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_{i+1} \cup c_{X_{i+1}}, \mathbf{x})$-расширение Y набора $\mathbf{y}$, что пара $(Y, \tilde{Y}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{Y}^r_{i+1})$ является (K_1, K_2)-максимальной для всех таких $1/\rho$-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_2) = 2$, $v(K_1) \leq 2^{k-1-i}$. Действительно,

$$|V(\tilde{X}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_{i+1} \cup c_{X_{i+1}})| \leq$$

$$\eta(\rho) + (k-2)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right]+1\right) + 2^{k-1-i} <$$

$$\eta(\rho) + (k-2)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right]+1\right) + \frac{1}{\rho-1} \leq$$

$$\eta(\rho) + (k-1)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right]+1\right) = n_1(\rho).$$

Иными словами, существует такая вершина $y^{i+1}_{i+1} \in V(Y_{i+1})$, что

$$d_{Y_{i+1}}(y^{i+1}_{i+1}, \tilde{Y}^l_{i+1}) = d_{X_{i+1}}(x^{i+1}_{i+1}, \tilde{X}^l_{i+1}),$$

и единственный путь $c_{Y_{i+1}}$ длины, не превосходящей 2^{k-1-i}, соединяющая y^{i+1}_{i+1} с некоторой вершиной $\tilde{y}^l_{i+1}$ графа $\tilde{Y}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{Y}^r_{i+1}$, $\tilde{y}^l_{i+1} \in V(\tilde{Y}^l_{i+1})$. Переопределим графы $\tilde{X}^l_{i+1}, \tilde{Y}^l_{i+1}$:

$$\tilde{X}^l_{i+1} := \tilde{X}^l_{i+1} \cup c_{X_{i+1}}, \quad \tilde{Y}^l_{i+1} := \tilde{Y}^l_{i+1} \cup c_{Y_{i+1}}.$$

Остальные графы

$$\tilde{X}^1_{i+1}, \ldots, \tilde{X}^{l-1}_{i+1}, \tilde{X}^{l+1}_{i+1}, \ldots, \tilde{X}^r_{i+1}, \tilde{Y}^1_{i+1}, \ldots, \tilde{Y}^{l-1}_{i+1}, \tilde{Y}^{l+1}_{i+1}, \ldots, \tilde{Y}^r_{i+1}$$

оставим без изменений. Продолжим изоморфизм графов φ_{i+1} на вершины из множества $V(\tilde{X}^l_{i+1})$: для вершины v пути $c_{X_{i+1}}$ с номером

h, считая от $\tilde{x}^l_{i+1}$, найдем вершину u пути $c_{Y_{i+1}}$с тем же номером h, считая от $\tilde{y}^l_{i+1}$, и определим $\varphi_{i+1}(v) = u$. Тогда

$$\varphi_{i+1}|_{\tilde{X}^j_{i+1}} : \tilde{X}^j_{i+1} \to \tilde{Y}^j_{i+1}$$

— изоморфизм при каждом $j \in \{1, \ldots, r\}$ и $\varphi_{i+1}(x^j_{i+1}) = y^j_{i+1}$ при всех $j \in \{1, \ldots, i+1\}$, т.е. графы $\tilde{X}^1_{i+1}, \ldots, \tilde{X}^r_{i+1}, \tilde{Y}^1_{i+1}, \ldots, \tilde{Y}^r_{i+1}$ обладают свойствами I и V. Докажем, что при $i < k-1$ выполнено свойства II, III и IV. Для этого достаточно доказать следующие утверждения:

— для любого $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{l\}$

$$d_{X_{i+1}}(\tilde{X}^j_{i+1}, \tilde{X}^l_{i+1}) > 2^{k-i-1}, \quad d_{Y_{i+1}}(\tilde{Y}^j_{i+1}, \tilde{Y}^l_{i+1}) > 2^{k-i-1};$$

— в графе X_{i+1} (в графе Y_{i+1}) не найдется подграфа, являющегося циклическим 2^{k-i-1}-расширением графа $\tilde{X}^l_{i+1}$ (графа $\tilde{Y}^l_{i+1}$) первого или второго типа;

— мощность множеств $|V(\tilde{X}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_{i+1})|$, $|V(\tilde{Y}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{Y}^r_{i+1})|$ не превосходит

$$\eta(\rho) + i\left(\left[\frac{1}{\rho - 1}\right] + 1\right).$$

Предположим, что найдется $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{l\}$ и путь длины, не превосходящей 2^{k-1-i}, соединяющий некоторую вершину u графа $\tilde{X}^l_{i+1}$ с некоторой вершиной v графа $\tilde{X}^j_{i+1}$. Так как $2^{k-1-i} < 2^{k-i}$, то $u \in V(c_{X_{i+1}})$. Но длина пути $c_{X_{i+1}}$не превосходит 2^{k-1-i}. Следовательно,

$$d_{X_{i+1}}(\tilde{X}^j_{i+1}, \tilde{X}^l_{i+1} \setminus (c_{X_{i+1}} \setminus \{\tilde{x}^l_{i+1}\})) \leq 2^{k-1-i} + 2^{k-1-i} = 2^{k-i}.$$

Но величина в левой части неравенства равна либо $d_{X_i}(\tilde{X}^l_i, \tilde{X}^j_i)$, либо $d_{Y_i}(\tilde{Y}^l_i, \tilde{Y}^j_i)$, что противоречит со свойством $\left(k, i, r, \eta(\rho), \lfloor \frac{1}{\rho-1} \rfloor + 1\right)$-регулярной эквивалентности наборов $(\tilde{X}^1_i, \ldots, \tilde{X}^r_i)$, $(\tilde{Y}^1_i, \ldots, \tilde{Y}^r_i)$. Таким образом,

$$d_{X_{i+1}}(\tilde{X}^j_{i+1}, \tilde{X}^l_{i+1}) > 2^{k-i-1}.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$d_{Y_{i+1}}(\tilde{Y}^j_{i+1}, \tilde{Y}^l_{i+1}) > 2^{k-i-1}.$$

Доказательство второго утверждения мы тоже приводим только для графа X_{i+1}, так как оно в точности повторяет доказательство для

графа Y_{i+1}. Итак, пусть в графе X_{i+1} существует подграф W, являющийся 2^{k-1-i}-расширением первого или второго типа графа $\tilde{X}^l_{i+1}$. Рассмотрим множество ребер

$$E = E(W) \setminus (E(\tilde{X}^l_{i+1}) \cup E(W \setminus \tilde{X}^l_{i+1})).$$

Вершин, принадлежащих множеству $V(\tilde{X}^l_{i+1})$ и являющихся концами ребер из E, не более двух. Обозначим их v_1 и v_2 (вообще говоря, эти вершины могут совпадать). Если

$$v_1, v_2 \in V(\tilde{X}^l_{i+1}) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\tilde{x}^l_{i+1}\}),$$

то мы приходим к противоречию с тем, что наборы $(\tilde{X}^1_i, \ldots, \tilde{X}^r_i)$, $(\tilde{Y}^1_i, \ldots, \tilde{Y}^r_i)$ являются $\left(k, i, r, \eta(\rho), \lfloor \frac{1}{\rho-1} \rfloor + 1\right)$-регулярно эквивалентными. Если же хотя бы одна из вершин v_1, v_2 не принадлежит множеству $V(\tilde{X}^l_{i+1}) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\tilde{x}^l_{i+1}\})$, то в графе W найдется подграф W_1, множество вершин которого содержит $V(\tilde{X}^l_{i+1}) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\tilde{x}^l_{i+1}\})$, являющийся 2^{k-i}-расширением первого или второго типа графа

$$W|_{V(\tilde{X}^l_{i+1}) \setminus (V(c_{X_{i+1}}) \setminus \{\tilde{x}^l_{i+1}\})}.$$

Снова приходим к противоречию со свойством $\left(k, i, r, \eta(\rho), \lfloor \frac{1}{\rho-1} \rfloor + 1\right)$-регулярной эквивалентности наборов $(\tilde{X}^1_i, \ldots, \tilde{X}^r_i)$, $(\tilde{Y}^1_i, \ldots, \tilde{Y}^r_i)$. Последнее утверждение выполнено, так как количество добавленных вершин не превосходит

$$2^{k-1-i} \leq \left[\frac{1}{\rho - 1}\right] + 1.$$

Если $i = k - 1$, то в обоих случаях, так как

$$\varphi_k : \tilde{X}^1_k \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_k \to \tilde{Y}^1_k \cup \ldots \cup \tilde{Y}^r_k$$

— изоморфизм и $\varphi_k(x^j_k) = y^j_k$ при всех $j \in \{1, \ldots, k\}$, то графы $X_k|_{\{x^1_k, \ldots, x^k_k\}}$, $Y_k|_{\{y^1_k, \ldots, y^k_k\}}$ также изоморфны и Консерватор побеждает.

3. Пусть, наконец,

$$d_{X_{i+1}}(x^{i+1}_{i+1}, \tilde{X}^1_{i+1} \cup \ldots \cup \tilde{X}^r_{i+1}) > 2^{k-1-i}.$$

Найдем подграф в X_{i+1}, содержащий наибольшее количество вершин, одна из которых совпадает с x^{i+1}_{i+1}, и изоморфный некоторому

графу из множества $\mathcal{H}_{2^{k-1-i}}$. Обозначим полученный граф $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$. Так как граф X_{i+1} обладает свойством $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности, он содержит не более одного простого цикла.

Рассмотрим пару (H_1, H_2), где граф H_1 является простым путем длины $\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1$, объединенным с графом, изоморфным $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ (вершина x_{i+1}^{i+1} при соответствующем изоморфизме переходит в некоторую вершину h). Граф H_2 содержит лишь одну вершину $\tilde{h}$, которая является концевой вершиной рассмотренного пути, отличной от h. Рассмотрим, кроме того, множество $\mathcal{K}$ всех таких пар (K_1, K_2), что для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$ граф K_2 является циклическим 2^{k-1-i}-расширением первого или второго типа графа K_1, $v(K_1) \leq 2$. Заметим, что пара (H_1, H_2) является $1/\rho$-надежной. Поэтому в силу $(n_1(\rho), n_2(\rho), n_3, n_4, \rho)$-разреженности графа Y_{i+1} найдутся такие число $l \in \{1, \ldots, r\}$, вершины

$$y_{i+1}^{i+1} \in V(Y_{i+1}) \setminus V(\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r), \tilde{y}_{i+1}^l \in V(\tilde{Y}_{i+1}^l),$$

простой путь $c_{Y_{i+1}} \subset Y_{i+1}$ длины $\left\lfloor \frac{1}{\rho-1} \right\rfloor + 1$ и граф $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1} \subset Y_{i+1}$, что выполнены следующие свойства. Путь $c_{Y_{i+1}}$ соединяет вершины $\tilde{y}_{i+1}^l$ и y_{i+1}^{i+1}, графы $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$ и $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ изоморфны,

$$d_{Y_{i+1}}(y_{i+1}^{i+1}, \tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r) = \left\lfloor \frac{1}{\rho-1} \right\rfloor + 1,$$

$$V(c_{Y_{i+1}}) \cap V(\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}) = \{y_{i+1}^{i+1}\}$$

и пара

$$(\tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r \cup c_{Y_{i+1}} \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}, \tilde{Y}_{i+1}^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^r)$$

является (K_1, K_2)-максимальной в Y_{i+1} для всех пар $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$.

Продолжим изоморфизм графов φ_{i+1} на вершины из множества $V(\tilde{X}_{i+1}^{r+1})$:

$$\varphi_{i+1}|_{\tilde{X}_{i+1}^{r+1}} : \tilde{X}_{i+1}^{r+1} \to \tilde{Y}_{i+1}^{r+1},$$

причем $\varphi_{i+1}(x_{i+1}^{i+1}) = y_{i+1}^{i+1}$.

Докажем, что наборы графы $(\tilde{X}_{i+1}^1, \ldots, \tilde{X}_{i+1}^{r+1})$, $(\tilde{Y}_{i+1}^1, \ldots, \tilde{Y}_{i+1}^{r+1})$ обладают свойством $\left(k, i+1, r+1, \eta(\rho), \lfloor \frac{1}{\rho-1} \rfloor + 1\right)$-регулярной эквивалентности при $i < k-1$. Свойство I выполнено, так как $x_{i+1}^{i+1} \in$

$V(\tilde{X}_{i+1}^{r+1})$, $y_{i+1}^{i+1} \in V(\tilde{Y}_{i+1}^{r+1})$. Из изоморфности пар $(c_{Y_{i+1}} \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}, \tilde{y}_{i+1}^{l})$, $(H_1, \tilde{h})$ следует изоморфность пар $(\tilde{X}_{i+1}^{1} \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^{r+1}, \mathbf{x})$, $(\tilde{Y}_{i+1}^{1} \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x}$ — набор вершин из множества $V(\tilde{X}_{i+1}^{1} \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^{r})$, $\mathbf{y}$ — набор вершин из множества $\tilde{Y}_{i+1}^{1} \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r}$ (вершины в этих наборах идут в таком порядке, что изоморфизм графов $\tilde{X}_{i+1}^{1} \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^{r}$ и $\tilde{Y}_{i+1}^{1} \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r}$ сохраняет этот порядок), и справедливость свойства V. Пусть $j \in \{1, \ldots, r\}$. Предположим, что существует такая вершина $v \in V(\tilde{X}_{i+1}^{r+1})$, отличная от x_{i+1}^{i+1}, что

$$d_{X_{i+1}}(v, \tilde{X}_{i+1}^{j}) < 2^{k-1-i}.$$

Тогда в графе X_{i+1} существует подграф, являющийся 2^{k-i}-расширением первого типа графа $\tilde{X}_{i+1}^{j}$. Тем самым, мы получили противоречие со свойством $\left(k, i+1, r, \eta(\rho), \lfloor \frac{1}{\rho-1} \rfloor + 1\right)$-регулярной эквивалентности наборов $(\tilde{X}_{i+1}^{1}, \ldots, \tilde{X}_{i+1}^{r})$, $(\tilde{Y}_{i+1}^{1}, \ldots, \tilde{Y}_{i+1}^{r})$ в (X_{i+1}, Y_{i+1}). Следовательно,

$$d_{X_{i+1}}(\tilde{X}_{i+1}^{j}, \tilde{X}_{i+1}^{r+1}) \geq 2^{k-1-i}.$$

Кроме того,

$$d_{Y_{i+1}}(\tilde{Y}_{i+1}^{j}, \tilde{Y}_{i+1}^{r+1}) > d_{Y_{i+1}}(\tilde{Y}_{i+1}^{j}, y_{i+1}^{i+1}) - |V(\tilde{Y}_{i+1}^{r+1})| \geq$$

$$\geq \left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1 - 2^{k-1-i} > 2^{k-1} - 2^{k-1-i} \geq 2^{k-2} \geq 2^{k-1-i}.$$

Граф $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ (граф $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$) не имеет общих вершин с графом $\tilde{X}_{i+1}^{1} \cup \ldots \cup \tilde{X}_{i+1}^{r}$ (графом $\tilde{Y}_{i+1}^{1} \cup \ldots \cup \tilde{Y}_{i+1}^{r}$) по построению. Справедливы соотношения

$$|W_1 \cup \ldots \cup W_{r+1}| = |V(W_1 \cup \ldots \cup W_r)| + |V(W_{r+1})| \leq$$

$$\leq \eta(\rho) + (i-1)\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1\right) + 2^{k-1-i} < \eta(\rho) + i\left(\left[\frac{1}{\rho-1}\right] + 1\right),$$

где либо $W_j = \tilde{X}_{i+1}^{j}$ для всех $j \in \{1, \ldots, r+1\}$, либо $W_j = \tilde{Y}_{i+1}^{j}$ для всех $j \in \{1, \ldots, r+1\}$. Докажем, наконец, что в графе X_{i+1} (в графе Y_{i+1}) не найдется подграфа, являющегося 2^{k-1-i}-расширением графа $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ (графа $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$). В случае графа $\tilde{X}_{i+1}^{r+1}$ достаточно вспомнить, что он содержит наибольшее количество вершин среди всех графов, изоморфных какому-либо графу из $\mathcal{H}_{2^{k-1-i}}$ и содержащих вершину x_{i+1}^{i+1}. Граф Y_{i+1} не содержит графов, являющихся 2^{k-1-i}-расширениями первого или второго типа графа $\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$, так как граф

$\tilde{Y}_{i+1}^{r+1}$ является (K_1, K_2)-максимальным в Y_{i+1} для всех $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$.

Если $i = k - 1$, то так как

$$\varphi_k : \tilde{X}_k^1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_k^{r+1} \to \tilde{Y}_k^1 \cup \ldots \cup \tilde{Y}_k^{r+1}$$

— изоморфизм и $\varphi_k(x_k^j) = y_k^j$ при всех $j \in \{1, \ldots, k\}$, то графы $X_k|_{\{x_k^1, \ldots, x_k^k\}}$, $Y_k|_{\{y_k^1, \ldots, y_k^k\}}$ также изоморфны и Консерватор побеждает.

1.5.3. Доказательство теоремы 1.2.1

Пусть $\beta \in (0, \infty) \setminus \mathcal{Q}$ — произвольное число, $\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1}+\beta}$, $\rho = 1/\alpha$. Для того, чтобы с вероятностью, стремящейся к 1, Консерватор выиграл в игре $\mathrm{EHR}(G(n, n^{-\alpha}), G(m, m^{-\alpha}), k)$, пользуясь стратегией, описанной в предыдущем разделе, достаточно доказать, что с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ является $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$-разреженным, где n_1, n_2, n_3, n_4 определены равенствами (1.17), (1.18). Обратимся сначала к первому свойству в определении $(n_1, n_2, n_3, n_4, \rho)$-разреженного графа. Рассмотрим такое множество $\mathcal{G}$ попарно неизоморфных графов, количество вершин которых не превосходит n_1, а максимальная плотность отлична от ρ, что любой граф G с $v(G) \leq n_1$ и $\rho^{\max}(G) \neq \rho$ изоморфен некоторому графу из $\mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{G}_1$ — такое множество попарно неизоморфных графов, количество вершин которых не превосходит n_1, а максимальная плотность меньше, чем ρ, что любой граф, удовлетворяющий заданным условиям, изоморфен некоторому графу из $\mathcal{G}_1$. Пусть, наконец, $\mathcal{K}$ — множество α-жестких пар (K_1, K_2) с $v(K_1) \leq n_3$, $v(K_2) \leq n_4$. Заметим, что если G — произвольный граф, максимальная плотность которого $\rho^{\max(G)} < \rho$, то в нем найдется такой строго сбалансированный подграф H с плотностью $\rho(H) = \rho^{\max}(G)$, что пара (G, H) является $1/\rho$-надежной. Действительно, выберем в качестве H подграф с наименьшим числом вершин, плотность которого равна $\rho^{\max}(G)$. Такой подграф является строго сбалансированным. Предположим, что существует подграф такой $K \subseteq G$, что $H \subset K$ и $f_{1/\rho}(K, H) \leq 0$. Тогда

$$\rho(K) = \frac{e(H) + e(K, H)}{v(H) + v(K, H)} = \frac{\rho^{\max}(H)v(H) + \rho(v(K, H) - f_{1/\rho}(K, H))}{v(H) + v(K, H)} \geq$$

$$\frac{\rho^{\max}(G)v(H) + \rho v(K, H)}{v(H) + v(K, H)} > \rho^{\max}(G).$$

Получили противоречие. Следовательно, пара (G, H) — $1/\rho$-надежная. Заметим, кроме того, что граф G является (K_1, K_2)-максимальным тогда

и только тогда, когда (K_1, K_2)-максимальными являются граф H и пара (G, H). Поэтому

$$\mathsf{P}\left(N_G^{\mathcal{K}} > 0\right) \geq \mathsf{P}\left(\left[N_H^{\mathcal{K}} > 0\right] \wedge \left[\forall(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m)\ \left(N_{(G,H)}^{\mathcal{K}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) > 0\right)\right]\right). \tag{1.19}$$

Очевидно, $|\mathcal{G}_1| \leq |\mathcal{G}| < \infty$. Поэтому в соответствии с теоремой 1.3.2 справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\forall G \in \mathcal{G}_1\ N_G > 0) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\exists G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_1\ N_G > 0) = 0.$$

В соответствии со следствием 1.3.2 и неравенством (1.19) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\forall G \in \mathcal{G}_1\ N_G^{\mathcal{K}} > 0) = 1.$$

Свойство 1) доказано.

Пусть $\mathcal{H}$ — конечное множество таких $1/\rho$-надежных пар (H_1, H_2), что $v(H_1) \leq n_1$, $v(H_2) \leq n_2$. Пусть $\mathcal{K}$ — множество таких $1/\rho$-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_1) \leq n_3$, $v(K_2) \leq n_4$ и мощность $\mathcal{K}$ максимальна. В силу следствия 1.3.1 выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\forall(H_1, H_2) \in \mathcal{H}\, \forall(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{v(H_2)})\ N_{(H_1,H_2)}^{\mathcal{K}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{v(H_2)}) > 0) = 1.$$

Тем самым, свойство 2) а, следовательно, и теорема 1.2.1 доказаны.

1.5.4. Доказательство теоремы 1.2.2

Доказательство теоремы мы разобьем на два случая.

1.5.4.1 Случай $b = 2$**.** Пусть $k > 3$ — некоторое натуральное число, $\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1}+\beta}$, где $\beta \in \{1, \ldots, 2^{k-1} - 2\}$. Далее мы рассмотрим такие свойства L_1 и L_2, что если $G \models L_1$ и $H \models L_2$, то у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G, H, k)$. Более того, мы докажем, что случайный граф $G(n, p)$ обладает свойствами L_1 и L_2 с асимптотическими вероятностями, отличными от 0. Тем самым в силу теоремы 1.4.2 мы докажем теорему 1.2.2 для рассматриваемого случая.

Положим

$$\rho = \frac{1}{\alpha} = \frac{2^{k-1} + \beta}{2^{k-1} + \beta - 1}.$$

Рассмотрим граф $X = C_1 \cup C_2 \cup D$, где C_1, C_2 — простые циклы, не имеющие общих вершин, D — простой путь длины 2^{k-2}, если β — четное

число, и длины $2^{k-2}-1$, если β — нечетное число. Пусть c_1, c_2 — такие вершины графа D, что

$$\{c_1\} = V(C_1) \cap V(D), \quad \{c_2\} = V(C_2) \cap V(D),$$

$$v(C_1) + v(C_2) = 2^{k-1} + \beta - e(D),$$

$$v(C_1) \in \{u := 2^{k-2}-1, 2^{k-2}, \ldots, 2^{k-1}-1\},$$

$$v(C_2) \in \{3, 4, \ldots, 2^{k-2}-1\}.$$

Числа $v(C_1)$ и $v(C_2)$ являются нечетными.

Будем говорить, что граф обладает свойством L_1, если он содержит индуцированный подграф, изоморфный X, а также не содержит копии ни одного графа на не более 2^{k+1} вершинах и плотностью, превосходящей ρ. Будем говорить, что граф обладает свойством L_2, если он не содержит копии ни одного графа на не более 2^{k+1} вершинах и плотностью, не меньшей ρ. Пусть некоторый граф G обладает свойством L_1, граф H — свойством L_2.

В первом раунде Новатор выбирает такую вершину x_1 графа G, что x_1 является вершиной некоторого подграфа $G_1 \cup G_2$ в G, изоморфного X и обладающего следующими свойствами:

$$G_1 \cong C_1, \quad G_2 \cong C_2 \cup D, \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{x_1\}.$$

Консерватор выбирает некоторую вершину $y_1 \in V(H)$. Во-первых, предположим, что для любой вершины y, обладающей свойством

$$d_H(y_1, y) = \frac{v(C_1)-1}{2},$$

не существует пути длины $\frac{v(C_1)+1}{2}$, соединяющего вершину y с вершиной y_1 в H. Тогда Новатор выберет такую вершину x_2 графа G_1, что

$$d_{G_1}(x_1, x_2) = \frac{v(C_1)-1}{2}.$$

Если $v(C_1) = 3$, то Консерватор выберет такую вершину y_2, что $y_1 \sim y_2$. Очевидно, в графе H у вершин y_1 и y_2 не существует общего соседа. Следовательно, Новатор выберет общего соседа вершин x_1 и x_2 в графе G_1 и победит. Пусть $v(C_1) > 3$. Если Консерватор выберет такую вершину y_2, что

$$d_H(y_1, y_2) > \frac{v(C_1)-1}{2},$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^3_G(1,2,\frac{v(C_1)-1}{2})$, определение которой мы даем в конце этого раздела. Если Консерватор выберет такую вершину y_2, что

$$1 < d_H(y_1, y_2) < \frac{v(C_1)-1}{2},$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^3_H(1,2,d_H(y_1,y_2))$. Если Консерватор выберет такую вершину y_2, что

$$d_H(y_1, y_2) = 1,$$

то Новатор победит. Окончательно, если Консерватор выберет такую вершину y_2, что

$$d_H(y_1, y_2) = \frac{v(C_1)-1}{2},$$

то в третьем раунде Новатор веберет такую вершину $x_3 \in V(G_1)$, что

$$d_{G_1}(x_1, x_3) = \left\lfloor \frac{v(C_1)+1}{4} \right\rfloor, \quad d_{G_1}(x_2, x_3) = \left\lceil \frac{v(C_1)+1}{4} \right\rceil.$$

Если $v(C_1) = 5$, то Консерватор выберет такую вершину y_3, что $y_1 \sim y_3$ и $y_2 \nsim y_3$. Очевидно, в H у вершин y_2 и y_3 не существует общего соседа. Поэтому Новатор выберет общего соседа вершин x_2 и x_3 в G_1 и победит. Пусть $v(C_1) > 5$. Консерватор выбирает вершину y_3. Очевидно, либо

$$d_H(y_1, y_3) \neq \left\lfloor \frac{v(C_1)+1}{4} \right\rfloor,$$

либо

$$d_H(y_2, y_3) \neq \left\lceil \frac{v(C_1)+1}{4} \right\rceil.$$

Если

$$1 < d_H(y_1, y_3) < \left\lfloor \frac{v(C_1)+1}{4} \right\rfloor,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^4_H(1,3,d_H(y_1,y_3))$. Если $d_H(y_1,y_3) = 1$, то Новатор побеждает. Если

$$d_H(y_1, y_3) > \left\lfloor \frac{v(C_1)+1}{4} \right\rfloor,$$

то Новатор воспользуется стратегий $\mathsf{S}^4_G(1,3,\lfloor\frac{v(C_1)+1}{4}\rfloor)$. Если

$$1 < d_H(y_2, y_3) < \left\lceil \frac{v(C_1)+1}{4} \right\rceil,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_H^4(2,3,d_H(y_2,y_3))$. Если

$$d_H(y_2,y_3)=1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_H(y_2,y_3)>\left\lceil\frac{v(C_1)+1}{4}\right\rceil,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_G^4(2,3,\lceil\frac{v(C_1)+1}{4}\rceil)$.

Во-вторых, предположим, что в графе H существует такая вершина y, что $d_H(y_1,y)=\frac{v(C_1)-1}{2}$ и существует путь длины $\frac{v(C_1)+1}{2}$, соединяющий вершины y и y_1. Пусть A и B — два пути в H, соединяющие вершины y_1 и y. Пусть

$$e(A)=\frac{v(C_1)-1}{2},\quad e(B)=\frac{v(C_1)+1}{2}.$$

Заметим, что $e(A\cup B)=v(A\cup B)$. Действительно, в противном случае (если $e(A\cup B)>v(A\cup B)$)

$$v(A\cup B)<v(C_1)\le 2^{k-1}-1,$$

$$\rho(A\cup B)\ge 1+\frac{1}{v(A\cup B)}>1+\frac{1}{2^{k-1}-1}>1/\alpha.$$

Это противоречит свойствам графа H. Поэтому в графе $A\cup B$ существует ровно одно такое циклическое $v(C_1)$-расширение первого типа H_1 графа $(\{y_1\},\varnothing)$, что его длина (количество ребер в нем) $l\le v(C_1)$ нечетна.

1) Предположим, что $l<v(C_1)$. Тогда Новатор выберет во втором раунде такую вершину $y_2\in V(H)$, что

$$d_H(y_1,y_2)=\frac{l-1}{2}.$$

Если $l=3$, то Консерватор выберет такую вершину x_2, что $x_1\sim x_2$. Очевидно, в графе G у вершин x_1 и x_2 нет общего соседа. Поэтому Новатор выберет общего соседа вершин y_1 и y_2 в H_1 и победит. Пусть $l>3$. Консерватор выберет вершину x_2. Если

$$d_G(x_1,x_2)>\frac{l-1}{2},$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_H^3(1,2,\frac{l-1}{2})$. Если

$$1<d_G(x_1,x_2)<\frac{l-1}{2},$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^3_G(1, 2, d_G(x_1, x_2))$. Если

$$d_G(x_1, x_2) = 1,$$

то Новатор побеждает. Наконец, если

$$d_G(x_1, x_2) = \frac{l-1}{2},$$

то в графе G не существует пути длины $\frac{l+1}{2}$, соединяющего вершины x_1 и x_2. Действительно, если такой путь существует, то в графе G для некоторого m существует циклическое m-расширение G_3 первого типа графа $(\{x_1\}, \varnothing)$ длины не более l. Длины расширений G_1 и G_2 превосходят l. Поэтому $G_3 \not\subseteq G_1 \cup G_2$, и в пересечении графов $G_1 \cup G_2$ и G_3 находится не менее одной вершины. Тогда

$$v(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \leq 2^{k-1} + \beta - 1 + l - 1 < 2^k + \beta - 2,$$

$$\rho(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \geq$$

$$1 + \frac{2}{v(G_1 \cup G_2 \cup G_3)} > 1 + \frac{2}{2^k + \beta - 2} > 1 + \frac{1}{2^{k-1} + \beta - 1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Это противоречит свойствам графа G. Тогда в третьем раунде Новатор выбирает такую вершину $y_3 \in V(H)$, что

$$d_H(y_1, y_3) = \left\lfloor \frac{l+1}{4} \right\rfloor, \quad d_H(y_2, y_3) = \left\lceil \frac{l+1}{4} \right\rceil.$$

Если $l = 5$, то Консерватор выберет такую вершину x_3, что $x_1 \sim x_3$ и $x_2 \nsim x_3$. Очевидно, в графе G у вершин x_2 и x_3 не существует общего соседа. Поэтому Новатор выберет общего соседа вершин y_2 и y_3 в H_1 и победит. Пусть $l > 5$. Консерватор выберет вершину x_3. Очевидно, либо

$$d_G(x_1, x_3) \neq \left\lfloor \frac{l+1}{4} \right\rfloor,$$

либо

$$d_G(x_2, x_3) \neq \left\lceil \frac{l+1}{4} \right\rceil.$$

Если

$$1 < d_G(x_1, x_3) < \left\lfloor \frac{l+1}{4} \right\rfloor,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^4_G(1, 3, d_G(x_1, x_3))$. Если

$$d_G(x_1, x_3) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_G(x_1, x_3) > \left\lfloor \frac{l+1}{4} \right\rfloor,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_H^4(1, 3, \lfloor \frac{l+1}{4} \rfloor)$. Если

$$1 < d_G(x_2, x_3) < \left\lceil \frac{l+1}{4} \right\rceil,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_G^4(2, 3, d_G(x_2, x_3))$. Если

$$d_G(x_2, x_3) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_G(x_2, x_3) > \left\lceil \frac{l+1}{4} \right\rceil,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_H^4(2, 3, \lceil \frac{l+1}{4} \rceil)$.

2) Пусть $l = v(C_1)$. Этот случай в свою очередь разбивается на два.

   а) Если количество ребер в цикле F из графа H_1 не превосходит u и в H_1 существует вершина y_2 степени 3, то во втором раунде Новатор выберет вершину y_2. Заметим, что

$$2^{k-2} - 2 \geq \frac{l-3}{2} \geq v(H_1) - v(F) = d_{H_1}(y_1, y_2) = d_H(y_1, y_2).$$

   Равенство

$$d_{H_1}(y_1, y_2) = d_H(y_1, y_2)$$

   выполнено, потому что в противном случае в графе H существует подграф с не более

$$v(F) + 2(v(H_1) - v(F)) - 1 = l - 1 < 2^{k-1} - 1$$

   вершинами и плотностью, большей чем $1 + \frac{1}{2^{k-1}-1}$. Путь Консерватор выбирает вершину $x_2 \in V(G)$. Если

$$d_{H_1}(y_1, y_2) < d_G(x_1, x_2),$$

   то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_H^3(1, 2, d_{H_1}(y_1, y_2))$. Если

$$d_{H_1}(y_1, y_2) > d_G(x_1, x_2) > 1,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^3_G(1, 2, d_G(x_1, x_2))$. Если

$$d_{H_1}(y_1, y_2) > d_G(x_1, x_2) = 1,$$

то Новатор побеждает. Пусть

$$d_{H_1}(y_1, y_2) = d_G(x_1, x_2).$$

Очевидно, в графе H_1 существует такая вершина y_3, что

$$d_{H_1}(y_2, y_3) = \frac{v(F) - 1}{2},$$

и путь длины $\frac{v(F)+1}{2}$, соединяющий вершины y_2 и y_3. В третьем раунде Новатор выберет вершину y_3. Если $v(F) = 3$, то Консерватор выберет такую вершину x_3, что $x_2 \sim x_3$. Очевидно, в графе G у вершин x_2 и x_3 нет общего соседа. Следовательно, Новатор выберет общего соседа вершин y_2 и y_3 в графе H и победит. Пусть $v(F) > 3$ (это возможно лишь в случае $k \geq 5$). Пусть, кроме того, Консеватор выбрал вершину x_3. Если

$$d_G(x_2, x_3) > \frac{v(F) - 1}{2},$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^4_H(2, 3, \frac{v(F)-1}{2})$. Если

$$1 < d_G(x_2, x_3) < \frac{v(F) - 1}{2},$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^4_G(2, 3, d_G(x_2, x_3))$. Если

$$d_G(x_2, x_3) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_G(x_2, x_3) = \frac{v(F) - 1}{2},$$

то в графе G не существует пути длины $\frac{v(F)+1}{2}$, соединяющего вершины x_2 и x_3. В противном случае в графе G существует подграф на не более

$$2^{k-1} + \beta - 1 + 2^{k-1} - 1 = 2^k + \beta - 2$$

вершинах с плотностью, превосходящей

$$1 + \frac{2}{2^k + \beta - 2} > 1/\alpha.$$

Тогда в четвертом раунде Новатор выберет такую вершину $y_4 \in V(H)$, что

$$d_H(y_2, y_4) = \left\lfloor \frac{v(F)+1}{4} \right\rfloor, \quad d_H(y_3, y_4) = \left\lceil \frac{v(F)+1}{4} \right\rceil.$$

Если $v(F) = 5$, то Консерватор выберет такую вершину x_4, что $x_2 \sim x_4$ и $x_3 \nsim x_4$. Очевидно, в графе G у вершин x_3 и x_4 нет общего соседа. Следовательно, Новатор выберет общего соседа вершин y_3 и y_4 в графе H_1 и победит. Пусть $v(F) > 5$. Пусть, кроме того, Консерватор выбирает вершину x_4. Очевидно, либо

$$d_G(x_2, x_4) \neq \left\lfloor \frac{v(F)+1}{4} \right\rfloor,$$

либо

$$d_G(x_3, x_4) \neq \left\lceil \frac{v(F)+1}{4} \right\rceil.$$

Если

$$1 < d_G(x_2, x_4) < \left\lfloor \frac{v(F)+1}{4} \right\rfloor,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^5_G(2, 4, d_G(x_2, x_4))$. Если

$$d_G(x_2, x_4) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_G(x_2, x_4) > \left\lfloor \frac{v(F)+1}{4} \right\rfloor,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^5_H(2, 4, \lfloor \frac{v(F)+1}{4} \rfloor)$. Если

$$1 < d_G(x_3, x_4) < \left\lceil \frac{v(F)+1}{4} \right\rceil,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^5_G(3, 4, d_G(x_3, x_4))$. Если

$$d_G(x_3, x_4) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_G(x_3, x_4) > \left\lceil \frac{v(F)+1}{4} \right\rceil,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^5_H(3, 4, \lceil \frac{v(F)+1}{4} \rceil)$.

б) Если число ребер в цикле F превосходит u или $l = v(F) = u$, то Новатор выберет вершину x_2 степени 3 в графе G_2. Предположим, что Консерватор выбирает вершину y_2. Если

$$1 < d_H(y_1, y_2) < d_{G_2}(x_1, x_2),$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^3_H(1, 2, d_H(y_1, y_2))$. Если

$$d_H(y_1, y_2) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_H(y_1, y_2) > d_{G_2}(x_1, x_2),$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^3_G(1, 2, d_{G_2}(x_1, x_2))$. Пусть

$$d_H(y_1, y_2) = d_{G_2}(x_1, x_2).$$

Обозначим L путь в H длины $d_H(y_1, y_2)$, соединяющий вершины y_1 и y_2. В графе G_2 существует такое циклическое $v(C_2)$-расширение первого типа графа $(\{x_2\}, \varnothing)$, что его длина равна $v(C_2)$. Преположим, что в графе H для некоторого m существует такое циклическое m-расширение первого типа H_2 графа $(\{y_2\}, \varnothing)$, что его длина $\tilde{l} \leq v(C_2)$. Если простой цикл из графа H_1 и простой цикл из графа H_2 не совпадают, то

$$v(H_1 \cup H_2 \cup L) \leq 2^{k-1} + \beta - 1,$$

$$\rho(H_1 \cup H_2 \cup L) \geq 1 + \frac{1}{2^{k-1} + \beta - 1} \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Это противоречит свойствам графа H. Если циклы совпадают и $L \cup H_2 \not\supseteq H_1$, то

$$v(H_1 \cup H_2 \cup L) \leq 2^{k-1} + \beta - 4$$

(так как число вершин в цикле не меньше трех),

$$\rho(H_1 \cup H_2 \cup L) \geq 1 + \frac{1}{2^{k-1} + \beta - 4} > \frac{1}{\alpha}.$$

Это также противоречит свойствам графа H. Наконец, если циклы совпадают и $L \cup H_2 \supseteq H_1$, то

$$2(v(H_1) - v(F)) = 2((v(H_1) - v(F)) + (v(H_2) - v(F)) + \frac{1}{2}v(F)) - \tilde{l} \geq$$

$$2^{k-1} - 2^{k-2} + 1 = 2^{k-2} + 1.$$

Следовательно,

$$v(F) = l - 2(v(H_1) - v(F)) \leq 2^{k-1} - 1 - 2^{k-2} - 1 = 2^{k-2} - 2. \quad (1.20)$$

Это противоречит неравенству $v(F) \geq u$.

Осталось рассмотреть последний случай. Если в графе H нет циклических m-расширений графа $(\{y_2\}, \varnothing)$ длины, не превосходящей $v(C_2)$, то Новатор выберет такую вершину x_3 в простом цикле из графа G_2, что

$$d_G(x_2, x_3) = \frac{v(C_2) - 1}{2}.$$

Если $v(C_2) = 3$, то Консерватор выберет такую вершину y_3, что $y_2 \sim y_3$. Очевидно, в графе H у вершин y_2 и y_3 нет общего соседа. Поэтому Новатор выберет общего соседа вершин x_2 и x_3 в графе G и победит. Пусть $v(F) > 3$ (это возможно только в случае $k \geq 5$). Консерватор выберет некоторую вершину y_3. Если

$$d_H(y_2, y_3) > \frac{v(C_2) - 1}{2},$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^4_G(2, 3, \frac{v(C_2)-1}{2})$. Если

$$1 < d_H(y_2, y_3) < \frac{v(C_2) - 1}{2},$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}^4_H(2, 3, d_H(y_2, y_3))$. Если

$$d_H(y_2, y_3) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_H(y_2, y_3) = \frac{v(C_2) - 1}{2},$$

то в графе H не найдется пути длины $\frac{v(C_2)+1}{2}$, соединяющего вершины y_2 и y_3. В четвертом раунде Новатор выберет такую вершину $x_4 \in V(G)$, что

$$d_G(x_2, x_4) = \left\lfloor \frac{v(C_2) + 1}{4} \right\rfloor, \quad d_G(x_3, x_4) = \left\lceil \frac{v(C_2) + 1}{4} \right\rceil.$$

Если $v(C_2) = 5$, то Консерватор выберет такую вершину y_4, что $y_2 \sim y_4$ и $y_3 \nsim y_4$. Очевидно, в графе H у вершин y_3 и y_4 не существует общего соседа. Следовательно, Новатор выберет общего соседа вершин x_3 и x_4 в графе G_2 и победит. Пусть $v(F) > 5$. Пусть, кроме того, Консерватор выбрал вершину y_4. Если

$$1 < d_H(y_2, y_4) < \left\lfloor \frac{v(C_2)+1}{4} \right\rfloor,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_H^5(2, 4, d_H(y_2, y_4))$. Если

$$d_H(y_2, y_4) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_H(y_2, y_4) > \left\lfloor \frac{v(C_2)+1}{4} \right\rfloor,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_G^5(2, 4, \lfloor \frac{v(C_2)+1}{4} \rfloor)$. Если

$$1 < d_H(y_3, y_4) < \left\lceil \frac{v(C_2)+1}{4} \right\rceil,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_H^5(3, 4, d_H(y_3, y_4))$. Если

$$d_H(y_3, y_4) = 1,$$

то Новатор побеждает. Если

$$d_H(y_3, y_4) > \left\lceil \frac{v(C_2)+1}{4} \right\rceil,$$

то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_G^5(3, 4, \lceil \frac{v(C_2)+1}{4} \rceil)$. Итак, для завершения описания стратегии нам осталось привести статегию S, являющуюся выигрышной стратегий Консерватора.

Стратегия S. Предположим, что сыграно i раундов, где $i \in \{2, \ldots, k-1\}$. Пусть выбраны вершины $x_1, \ldots, x_i$ и $y_1, \ldots, y_i$ в графах G и H соответственно. Более того, пусть $j_1 < j_2$ — два числа из множества $\{1, \ldots, i\}$ и $s \in \{2, 3, \ldots, 2^{k-i}\}$. Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_G^{i+1}(j_1, j_2, s)$ (стратегией $\mathsf{S}_H^{i+1}(j_1, j_2, s)$), если в графе G (в графе H) существует простой путь длины s, соединяющий вершину x_{j_1} (вершину y_{j_1}) с вершиной x_{j_2} (с вершиной y_{j_2}), и

$$d_H(y_{j_1}, y_{j_2}) > s \quad (d_G(x_{j_1}, x_{j_2}) > s).$$

Определим стратегию $\mathsf{S}_G^{i+1}(j_1, j_2, s)$ (стратегия $\mathsf{S}_H^{i+1}(j_1, j_2, s)$ определяется аналогичным образом). Рассмотрим такой путь $L \subset G$, что $e(L) = s$ и x_{j_1}, x_{j_2} — концевые вершины этого пути. Тогда в $V(L)$ существует такая вершина x_{i+1}, что

$$d_L(x_{j_1}, x_{i+1}) = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor, \quad d_L(x_{j_2}, x_{i+1}) = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil.$$

Новатор выберет вершину x_{i+1}. Пусть Консерватор выбирает некоторую вершину y_{i+1}. Если $s = 2$, то, очевидно, Новатор побеждает. Если $s = 3$, то Консерватор выберет такую вершину y_{i+1}, что $y_{i+1} \sim y_{j_1}$ и $d_H(y_{i+1}, y_{j_2}) > 2$. Поэтому Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_G^{i+2}(j_2, i+1, 2)$ и победит. Если $s > 3$, то либо

$$d_H(y_{j_1}, y_{i+1}) > \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor,$$

либо

$$d_H(y_{j_2}, y_{i+1}) > \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil.$$

Если выполнено первое неравенство, то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_G^{i+2}(j_1, i+1, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor)$. Действительно,

$$\left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \in \{2, 3, \ldots, 2^{k-i-1}\}.$$

Если же выполнено второе неравенство, то Новатор воспользуется стратегией $\mathsf{S}_G^{i+2}(j_2, i+1, \lceil \frac{s}{2} \rceil)$. Действительно,

$$\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil \in \{2, 3, \ldots, 2^{k-i-1}\}.$$

Если $i = k - 1$ и Новатор до сих пор не победил, то в графе G для некоторых чисел $j_1 < j_2 \in \{1, \ldots, k-1\}$ у вершин x_{j_1}, x_{j_2} существует общий сосед x_k. Кроме того,

$$d_H(y_{j_1}, y_{j_2}) > 2.$$

Следовательно, в раунде с номером k Новатор выберет вершину x_k и победит.

Заметим, что случай $\beta = 0$ полностью аналогичен разобранным. Действительно, доказательство утверждения в этом случае дословно повторяет доказательство в случае $\beta > 0$, если при $k > 4$ заменить значение u на $2^{k-2} - 3$, положить $v(C_1) = u$, $v(C_2) = 3$, а формулу (1.20) переписать следующим образом:

$$v(F) = l - 2(v(H_1) - v(F)) = 2^{k-2} - 3 - 2^{k-2} - 1 = -4.$$

При $k = 4$ аналогичные рассуждения можно проделать для таких графов C_1, C_2, D, что

$$e(D) = 2, \quad e(C_1) = e(C_2) = 3.$$

Действительно, в первом раунде Новатор снова выбирает такую вершину x_1 графа G, что x_1 является вершиной некоторого подграфа $G_1 \cup G_2$ в G, изоморфного X и обладающего следующими свойствами:

$$G_1 \cong C_1, \quad G_2 \cong C_2 \cup D, \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{x_1\}.$$

Консерватор выбирает некоторую вершину $y_1 \in V(H)$. Предположим, что в графе H нет треугольника, содержащего вершину y_1. Тогда Новатор последовательно выбирает в графе G еще две вершины x_2 и x_3 так, чтобы вершины x_1, x_2, x_3 образовывали треугольник, и выигрывает. Если в графе H есть такой треугольник $\tilde{C}_1$, что y_1 — одна из его вершин, то Новатор выбирает вершину x_2 графа G_2, находящуюся на расстоянии 2 от x_1. Если Консерватор выбирает вершину y_2, смежную с y_1, то Новатор выигрывает. Если расстояние между вершинами y_1 и y_2 превосходит 2, то в третьем раунде Новатор выбирает вершину x_3, являющуюся общим соседом вершин x_1 и x_2 и выигрывает, так как в графе H у вершин y_1 и y_2 нет общих соседей. Пусть

$$d_H(y_1, y_2) = 2. \tag{1.21}$$

Предположим, что в графе H есть треугольник $\tilde{C}_2$, содержащий вершину y_2. Обозначим $\tilde{D}$ путь длины 2, соединяющий вершины y_1 и y_2 в графе H. Очевидно, вершина y_2 не принадлежит треугольнику $\tilde{C}_1$ — иначе бы мы получили противоречие с равенством (1.21). Если все вершины треугольника $\tilde{C}_2$ принадлежат графу $\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}$, то в графе $H|_{V(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D})}$ ребер хотя бы на одно больше, чем в графе $\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}$. Но тогда

$$v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}) \leq 5, \quad \rho(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}) \geq \frac{v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}) + 1}{v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D})} \geq \frac{6}{5} > \frac{1}{\alpha} = \frac{8}{7},$$

что противоречит свойству L_2 графа H. Если ровно одна вершина треугольника $\tilde{C}_2$ не принадлежит графу $\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}$, то в графе $\tilde{C}_1 \cup \tilde{D} \cup \tilde{C}_2$ число ребер хотя бы на два больше, чем в графе $\tilde{C}_2 \cup \tilde{D}$. В этом случае

$$v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D} \cup \tilde{C}_2) \leq 6, \quad \rho(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D} \cup \tilde{C}_2) \geq \frac{v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}) + 2}{v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}) + 1} \geq \frac{7}{6} > \frac{1}{\alpha},$$

что снова противоречит свойству L_2. Если, наконец две вершины треугольника $\tilde{C}_2$ не принадлежат графу $\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}$, то в графе $\tilde{C}_1 \cup \tilde{D} \cup \tilde{C}_2$

число ребер ровно на три больше, чем в графе $\tilde{C}_2 \cup \tilde{D}$. В этом случае

$$v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D} \cup \tilde{C}_2) \leq 7, \quad \rho(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D} \cup \tilde{C}_2) = \frac{v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}) + 3}{v(\tilde{C}_1 \cup \tilde{D}) + 2} \geq \frac{8}{7} = \frac{1}{\alpha},$$

что в очередной раз противоречит свойству L_2. Следовательно, в графе H не существует треугольника, содержащего вершину y_2. Тогда Новатор за оставшиеся два раунда последовательно выбирает в графе G еще две вершины x_3 и x_4 так, чтобы вершины x_2, x_3, x_4 образовывали треугольник, и выигрывает.

Докажем теперь, что случайный граф $G(n,p)$ обладает свойствами L_1 и L_2 с вероятностями, стремящимися к некоторым положительным числам. Граф X является строго сбалансированным и его плотность равна ρ. Поэтому в силу теоремы 1.3.3 случайный граф содержит копию графа X с вероятностью, стремящейся к $1 - e^{-1/a(X)}$. Более того, по теореме 1.3.2 с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф не содержит копий графов на не более чем 2^{k+1} вершинах с плотностью, превосходящей ρ. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L_1) = 1 - e^{-1/a(X)}.$$

Осталось доказать, что с положительной асимптотической вероятностью случайный граф не содержит копий графов, число вершин которых не превосходит 2^{k+1}, а плотность равна ρ. Последнее справедливо по теореме о совместном распределении количеств копий различных графов в случайном графе (см. [57], Chapter III, Remark 3.20), так как множество рассматриваемых графов конечно.

1.5.4.2 Случай $b > 2$. Пусть $\tilde{\Omega}_n$ — множество графов из Ω_n, которые не содержат ни одного подграфа H с

$$v(H) \leq 2(b+2)2^{k-2}, \quad \rho(H) > 1/\alpha.$$

Докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1.5.2. *Свойство $d_G(v_1, v_2) = i$ вершин v_1 и v_2 графа G можно записать формулой с кванторной глубиной $\lceil \log_2 i \rceil$.*

Доказательство. Свойство $d_G(v_1, v_2) = i$ можно записать с помощью

следующей формулы:

$$D_i(v_1, v_2) := \left(P_i(v_1, v_2) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{i-1} (\neg P_j(v_1, v_2)) \right) \right),$$

где $P_j(v_1, v_2)$ — формула (которую мы определим ниже), выражающая свойство графа содержать путь длины j между v_1 и v_2. Так как кванторная глубина $D_i(v_1, v_2)$ равна максимальной из кванторной глубин $P_j(v_1, v_2)$, $j \in \{1, \ldots, i\}$, достаточно показать, что формула $P_i(v_1, v_2)$ имеет кванторную глубину $\lceil \log_2 i \rceil$.

Докажем индукцией по i.

При $i = 1$ формула

$$P_1(v_1, v_2) := (v_1 \sim v_2)$$

имеет кванторную глубину 0.

Пусть предположение справедливо для $i - 1$. Докажем для i :

$$P_i(v_1, v_2) := [\exists x \ (\underbrace{P_{\lceil i/2 \rceil}(v_1, x)}_{\lceil \log_2 \lceil i/2 \rceil \rceil} \wedge \underbrace{P_{\lfloor i/2 \rfloor}(v_2, x)}_{\lceil \log_2 \lfloor i/2 \rfloor \rceil})].$$

Получаем, что кванторная глубина $P_i(v_1, v_2)$ равна

$$1 + \lceil \log_2 \lceil i/2 \rceil \rceil = \lceil \log_2 i \rceil,$$

что и требовалось доказать.

Введем еще несколько определений и обозначений.

Пусть $s, l \in \mathbb{N}$. Будем называть граф G *арканом с параметрами* (s, l), если $G = L \cup C$, где L — простой путь длины s между некоторыми вершинами v и u графа G, C — простой цикл длины l, проходящий через вершину u, и $V(C) \cap V(L) = \{u\}$.

Будем называть граф $G = (V, E)$ *двухпроходным графом, проходящим через вершину* v_1, если выполнено:

- $G = L_1 \cup L_2$, где L_1, L_2 — простые пути от вершины v_1 до вершины $v_2 \in V(G)$, при этом $e(L_1) = e(L_2) - 1$;
- для некоторых вершин r_1, r_2 графа G справедливо $G = L^1 \cup C \cup L^2$, где L^1 — простой путь от вершины v_1 до вершины r_1, L^2 — простой путь от вершины r_2 до вершины v_2, C — простой цикл,

$$V(L^1) \cap V(C) = \{r_1\}, \quad V(C) \cap V(L^2) = \{r_2\},$$
$$V(L^1) \cap V(L^2) = \varnothing, \quad L_1 \cap L_2 = L^1 \cup L^2.$$

Длина двухпроходного графа — величина, равная $e(L_1) + e(L_2)$.

Пусть $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$.

Пусть $C_{2m+1}(v_1)$, $m \in \{1, \ldots, 2^{k-3} - 1\}$, — формула, выражающая свойство графа $\mathcal{G}$ содержать двухпроходный граф длины $2m+1$, проходящий через вершину v_1. Ее можно определить следующим образом:

$$C_{2m+1}(v_1) = (\exists v_2 \ (\tilde{C}_{2m+1}(v_1, v_2) \vee \tilde{C}_{2m+1}(v_2, v_1))),$$

где

$$\tilde{C}_{2i+1}(v_1, v_2) = \Big(D_i(v_1, v_2) \wedge \Big[\exists z \ \Big(\Big(D_{\lceil \frac{i+1}{2} \rceil}(v_1, z) \wedge D_{\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor}(z, v_2)\Big) \vee$$

$$\Big(D_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}(v_1, z) \wedge \tilde{C}_{2\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1}(z, v_2)\Big)\Big)\Big]\Big), \quad i \geq 2,$$

$$\tilde{C}_3(v_1, v_2) = ([v_1 \sim v_2] \wedge [\exists z \ ((v_1 \sim z) \wedge (z \sim v_2))]).$$

Для произвольной формулы P будем обозначать $\mathrm{D}(P)$ кванторную глубину P. Очевидно, при $i \geq 2$ имеем

$$\mathrm{D}(\tilde{C}_{2i+1}(v_1, v_2)) =$$

$$\max\Big\{\lceil \log_2 i \rceil, \lceil \log_2 (i+1) \rceil, 1 + \mathrm{D}((\tilde{C}_{2\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + 1}(v_1, v_2)))\Big\} = \lceil \log_2 (i+1) \rceil.$$

Поэтому

$$\mathrm{D}(C_{2m+1}(v_1)) = 1 + \lceil \log_2 (m+1) \rceil. \tag{1.22}$$

Формула $C_{2m+1}(v_1)$ выражает свойство существования двух различных простых путей от вершины v_1 до вершины v_2 длин m и $m+1$. Обозначим объединение таких путей G и докажем, что в связном графе G количество ребер не превосходит количества вершин. Предположим противное. Тогда плотность графа G не меньше, чем

$$\frac{2m+1}{2m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2m+1}} \geq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{k-2}-1}} > \frac{1}{\alpha}.$$

При этом

$$v(G) \leq 2m + 1 \leq 2^{k-2} - 1.$$

Получили противоречие с определением множества $\tilde{\Omega}_n$. Следовательно, истинность формулы $C_{2m+1}(v_1)$ для графа $\mathcal{G}$ влечет существование в графе $\mathcal{G}$ двухпроходного графа длины $2m+1$, проходящего через вершину v_1. Если граф $\mathcal{G}$ содержит двухпроходной граф G длины $2m+1$, проходящий через вершину v_1, а формула $C_{2m+1}(v_1)$ не является истинной, то в

$\mathcal{G}$ существует такой подграф $\tilde{G} \supset G$, что $v(\tilde{G}) - v(G) < m$, $e(\tilde{G}) > v(\tilde{G})$. Следовательно,

$$\rho(\tilde{G}) = 1 + \frac{e(\tilde{G}) - v(\tilde{G})}{v(\tilde{G})} \geq 1 + \frac{1}{3m} \geq 1 + \frac{1}{3 \cdot 2^{k-3} - 3} > \frac{1}{\alpha}.$$

При этом

$$v(\tilde{G}) < 3m \leq 3 \cdot 2^{k-3} - 3.$$

Получили противоречие. Таким образом, истинность формулы $C_{2m+1}(v_1)$ для графа $\mathcal{G}$ и существование в графе $\mathcal{G}$ двухпроходного графа длины $2m+1$, проходящего через вершину v_1, эквивалентны.

Определим формулу $T^p_{2m+1}(v_1)$, $m \in \{1, \ldots, 2^{k-3} - 1\}$, $p \in \mathbb{N}$, выражающую свойство графа содержать двухпроходный граф длины $2m+1$, который проходит через некоторую вершину v_2, находящуюся на расстоянии p от v_1, при этом не существует двухпроходного графа длины не более $2m-1$, проходящего через вершину, находящуюся на расстоянии менее p от вершины v_1. Не существует, кроме того, и двухпроходного графа длины $2m+1$, проходящего через вершину, находящуюся на расстоянии $p-1$ от вершины v_1 (и, следовательно, через вершину v_2 не проходит двухпроходных графов длины, меньшей $2m+1$, из чего, в свою очередь, следует, что существующий двухпроходный граф длины $2m+1$ является арканом). Запишем ее:

$$T^p_{2m+1}(v_1) =$$

$$\left(\tilde{T}^p_{2m+1}(v_1) \wedge (\neg \tilde{T}^p_{2m-1}(v_1)) \wedge (\neg \tilde{T}^{p-1}_{2m+1}(v_1)) \wedge (\neg \tilde{T}^{p+1}_{2m-1}(v_1)) \wedge (\neg \tilde{T}^{p-1}_{2m-1}(v_1))\right),$$

где

$$\tilde{T}^p_{2m+1}(v_1) = \left(\exists v_2 \left(D_p(v_1, v_2) \wedge C_{2m+1}(v_2) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m-1} (\neg C_{2i+1}(v_2))\right)\right)\right).$$

Заметим, что если для некоторой вершины v_1 графа $\mathcal{G}$ и некоторых $m \leq 2^{k-3} - 1$, $p \leq 2^{k-2}$ истинна формула $T^p_{2m+1}(v_1)$, то граф $\mathcal{G}$ содержит вершину v_2, находящуюся на расстоянии p от вершины v_1, путь L длины p от вершины v_1 до вершины v_2 и цикл D длины $2m+1$, пересекающий L только по вершине v_2 (иначе граф $L \cup D$ содержал бы более одного простого цикла и тогда его плотность превосходила бы $1/\alpha$, что противоречило бы определению множества $\tilde{\Omega}_n$).

Положим

$$a = 2^{k-1} - 2(b+1)^2 - \delta,$$

где δ — целое неотрицательное число, не превосходящее $2^{k-1} - 2(b+1)^2$. Обозначим $m_i = 2^{k-3} - i$ при $i \in \{1, \ldots, b+1\}$. Рассмотрим, кроме того, такие натуральные числа $p_1, \ldots, p_{b+1}$, что

$$p_1 + \ldots + p_{b+1} = (b+1)2^{k-2} - (b+1)^2 - \delta,$$

$p_1 < \ldots < p_{b+1} < 2^{k-2}$ и выполнены неравенства $p_{i+1} - p_i \geq 2$, $i \in \{1, \ldots, b\}$ (очевидно, такие числа найдутся). Имеем

$$\frac{b}{1-\alpha} = b \cdot 2^{k-1} + a = (b+1)2^{k-1} - 2(b+1)^2 - \delta = \sum_{i=1}^{b+1}(2m_i + 1 + p_i).$$

Запишем основную формулу:

$$Tr = \left(\exists v_1 \ \left(T^{p_1}_{2m_1+1}(v_1) \wedge \ldots \wedge T^{p_{b+1}}_{2m_{b+1}+1}(v_1)\right)\right).$$

Используя лемму 1.5.2 и равенство (1.22), посчитаем кванторную глубину формулы Tr: $\mathrm{D}(Tr)$ не превосходит величины

$$1 + \max_{i \in \{1,\ldots,b+1\}} \mathrm{D}\left(T^{p_i}_{2m_i+1}(v_1)\right) \leq$$

$$1 + \max_{i \in \{1,\ldots,b+1\}} \max\{1 + \lceil \log_2(p_i+1) \rceil, 2 + \lceil \log_2(m_i+1) \rceil\} =$$

$$1 + \max\{1 + \lceil \log_2 2^{k-2} \rceil, 2 + \lceil \log_2(2^{k-3} - 1 + 1) \rceil\} = k.$$

Пусть граф $\mathcal{G}$ содержит подграф $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_{b+1}$, где $F_1, F_2, \ldots, F_{b+1}$ есть арканы с параметрами $(p_1, 2m_1+1)$, $(p_2, 2m_2+1)$, …, $(p_{b+1}, 2m_{b+1}+1)$ соответственно, при этом в каждом из множеств $V(F_i \cap F_j)$, $i \neq j \in \{1, \ldots, b+1\}$, лежит единственая вершина v, которая также является единственной вершиной степени 1 графов $F_1, F_2, \ldots, F_{b+1}$. Легко заметить, что граф F является строго сбалансированным и $\rho(F) = 1/\alpha$. Тогда формула Tr, очевидно, истинна. Действительно, в противном случае в графе $\mathcal{G}$ нашелся бы такой подграф $\tilde{F} \supset F$, что

$$v(\tilde{F}) - v(F) < 2^{k-1}, \quad e(\tilde{F}) - e(F) > v(\tilde{F}) - v(F),$$

но тогда

$$v(\tilde{F}) < 2(b+2)2^{k-2}, \quad \rho(\tilde{F}) > 1/\alpha,$$

что противоречит определению множества $\tilde{\Omega}_n$.

Пусть теперь для графа $\mathcal{G}$ формула Tr истинна. Так как $m_i \leq 2^{k-3} - 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, b+1\}$, то $\mathcal{G}$ содержит подграф $H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{b+1}$,

где $H_1, H_2, \ldots, H_{b+1}$ есть объединения простых путей $L_1, L_2, \ldots, L_{b+1}$ с длинами $p_1, \ldots, p_{b+1}$ соответственно, одной из концевых вершин каждой из которых является некоторая вершина v_1, и простых циклов $D_1, D_2, \ldots$, D_{b+1} на $2m_1+1, 2m_2+1, \ldots, 2m_{b+1}+1$ вершинах сответственно, проходящих через вторые концевые вершины $v_2^1, \ldots, v_2^{b+1}$ путей $L_1, L_2, \ldots, L_{b+1}$ соответственно (и только через них). Более того, для каждой вершины v_2^i, $i \in \{1, \ldots, b+1\}$, не существует цикла, проходящего через нее и имеющего длину $2m_i - 1$.

Предположим, что для некоторого $i \in \{2, \ldots, b+1\}$ выполнено

$$V(H_i) \subset V(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}).$$

Тогда найдется такое число $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, что $v_2^i \in V(D_j)$. Действительно, в противном случае $d_{\mathcal{G}}(v_2^i, v_1) < p_i$. Тогда через вершину v_2^i проходит цикл длины $2m_j + 1$ и цикл длины $2m_i + 1$. Следовательно, $e(D_i \cup D_j) > v(D_i \cup D_j)$, $v(D_i \cup D_j) < 2(m_i + m_j + 1)$. Но в таком случае $\rho(D_i \cup D_j) > 1 + \frac{1}{2(2^{k-2}-1)} > \frac{1}{\alpha}$. Получили противоречие. Следовательно, $V(H_i) \cap V(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}) \neq V(H_i)$. Так как все вершины (кроме v_1) графа H_i имеют степень 2, то

$$v((H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}) \cap H_i) > e((H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}) \cap H_i),$$

а, следовательно, величина

$$u_i := v(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_i) - v(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1})$$

меньше величины

$$e_i := e(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_i) - e(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}).$$

Обозначим $u_1 = v(H_1)$, $e_1 = e(H_1)$. Тогда

$$\rho(H) = \frac{e_1 + e_2 + \ldots + e_{b+1}}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{b+1}} = 1 + \frac{e_1 - u_1 + e_2 - u_2 + \ldots + e_{b+1} - u_{b+1}}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{b+1}} \geq$$

$$\geq 1 + \frac{b}{1 + 2m_1 + \ldots + 2m_{b+1} + p_1 + p_2 + \ldots + p_{b+1}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Так как

$$v(H) \leq 2(b+1) \cdot 2^{k-2},$$

то $\rho^{\max}(H) \leq 1/\alpha$. Следовательно,

$$u_i = 2m_i + 1 + p_i$$

для любого $i \in \{1, 2, \ldots, b+1\}$. Последнее верно тогда и только тогда, когда графы H и F изоморфны.

Пусть L_n — множество графов в Ω_n, для которых истинна формула Tr. Тогда

$$\mathsf{P}(G(n,p) \supset F) \le \mathsf{P}(G(n,p) \in L_n) = \mathsf{P}(G(n,p) \in L_n,\, G(n,p) \in \tilde{\Omega}_n) +$$
$$+\mathsf{P}(G(n,p) \in L_n,\, G(n,p) \notin \tilde{\Omega}_n) \le \mathsf{P}(G(n,p) \supset F) + \mathsf{P}(G(n,p) \notin \tilde{\Omega}_n).$$

По теореме 1.3.3 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \supset F) = 1 - e^{-1/a(F)}.$$

Кроме того, по теореме 1.3.2

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \notin \tilde{\Omega}_n) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in L_n) = 1 - e^{-1/a(F)}.$$

Поэтому k-закон нуля и единицы не выполнен. Теорема доказана.

1.5.5. Доказательство теоремы 1.2.4

Пусть $k > 3$, b — произвольные натуральные числа, $\frac{a}{b}$ — несократимая положительная дробь,

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + a/b}, \quad p = n^{-\alpha}.$$

Пусть, кроме того,

$$a \in \{\max\{1, 2^{k-1} - b\}, \ldots, 2^{k-1}\}.$$

Определим множество графов $\mathcal{S}$. Граф G принадлежит $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда он обладает следующими свойствами.

1) В графе G нет строго сбалансированных подграфов, количество вершин которых не превосходит $2^{2k}b$, а плотность больше, чем $1/\alpha$.

2) Пусть $\mathcal{H}$ — множество таких α-надежных пар (H_1, H_2), что $v(H_1) \le 2^{2k}b + k2^k$. Пусть $\mathcal{K}$ — множество таких α-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_1) \le 2^k$, $v(K_2) \le 2$. Тогда для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$, $V(H_2) = \{v_1, \ldots, v_h\}$, и для любого подграфа $G_2 \subset G$, $V(G_2) = \{x_1, \ldots, x_h\}$, в графе G найдется такое точное $(H_1, (v_1, \ldots, v_h))$-расширение G_1 набора $(x_1, \ldots, x_h)$, что пара (G_1, G_2) является (K_1, K_2)-максимальной в G для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$.

3) Пусть $\mathcal{H}$ — множество таких α-жестких пар (H_1, H_2), что $v(H_1) \leq 2^k$, $v(H_2) \leq 2$. Тогда для любого строго сбалансированного графа H с $\rho(H) < 1/\alpha$, количество вершин которого не превосходит $2^{2k}b$, в графе G найдется копия H, являющаяся (H_1, H_2)-максимальной в G для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$.

В силу теоремы 1.3.2, следствия 1.3.1 и следствия 1.3.2 справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{S}) = 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 1.4.2 для доказательства теоремы 1.2.4 достаточно найти выигрышную стратегию Консерватора в $\mathrm{EHR}(G, H, k)$ для всех таких пар графов (G, H), что $G, H \in \mathcal{S}$.

Пусть $G, H \in \mathcal{S}$, а, как и при описании стратегии SF, X_r, Y_r — графы, из которых в r-ом раунде выбирали вершины Новатор и Консерватор соответственно. Таким образом, множества $\{X_r, Y_r\}$ и $\{G, H\}$ совпадают для всех $r \in \{1, \ldots, k\}$. Вершины, выбранные в первых r раундах в графе X_r, мы как и прежде будем обозначать $x_r^1, \ldots, x_r^r$, а в графе Y_r — $y_r^1, \ldots, y_r^r$. Стратегию Консерватора будем описывать по индукции, причем это описание разобьем на два этапа, первый из которых назовем S, второй — SF. В первом раунде Консерватор всегда пользуется стратегией S и продолжает руководствоваться ей до тех пор, пока в некотором раунде не совершит построения, позволяющие воспользоваться стратегией SF, описанной в разделе 1.5.2.

Для избежания громоздких обозначений в этом разделе мы будем называть два набора графов $\tilde{X}_r^1, \ldots, \tilde{X}_r^l$ и $\tilde{Y}_r^1, \ldots, \tilde{Y}_r^l$ *(k, r, l)-регулярно эквивалентными в (X_r, Y_r)*, если они являются $(k, r, l, 2^{2k}b, 2^{k-1})$-регулярно эквивалентными в (X_r, Y_r). Два графа $\tilde{X}_r^1$ и $\tilde{Y}_r^1$ мы будем называть *ослабленно (k, r)-эквивалентными в (X_r, Y_r)*, если при $l = 1$ выполнены свойства I, IV и V (из определения регулярной эквивалентности наборов графов) и в графе X_r (в графе Y_r) не существует циклического $2^{k-r} - 1$-расширения графа $\tilde{X}_r^1$ (графа $\tilde{Y}_r^1$), не существует циклического 2^{k-r}-расширения второго типа графа $X_r|_{\{x_r^1,\ldots,x_r^r\}}$ (графа $Y_r|_{\{y_r^1,\ldots,y_r^r\}}$) и существует не более одного циклического 2^{k-r}-расширения графа $\tilde{X}_r^1$ (графа $\tilde{Y}_r^1$).

Основная идея стратегии Консерватора состоит в следующем. Консерватор должен за некоторое количество раундов r, где $r \in \{1, \ldots, k-1\}$,

выбирать вершины так, что к концу раунда с номером r в графах X_r, Y_r образуются (k, r, l)-регулярно эквивалетные наборы подграфов в (X_r, Y_r) для некоторого $l \in \{1, \ldots, r\}$. В первом раунде Новатор должен воспользоваться стратегией S_1, описанной в следующем подразделе. К концу r-го раунда, $r \in \{1, \ldots, k-3\}$, если Консерватору еще не удалось построить (k, r, l)-регулярно эквивалентные графы, то, как мы покажем, ему либо удастся найти ослабленно (k, r)-эквивалентные графы, после чего он должен воспользоваться в $r+1$-м раунде стратегией S_{r+1}, либо он должен воспользовтся стратегией S^1_{r+1}. После стратегии S^1_{r+1} Консерватор к стратегии S_{r+j}, $j \geq 2$, никогда не возвращается. Стратегией SF Консерватор начинает пользоваться в некотором раунде с номером $r+1 \geq 2$ после того, как в раунде с номером r ему удалось найти (k, r, l)-регулярно эквивалентные наборы графов в (X_r, Y_r) для некоторого $l \in \{1, \ldots, r\}$. В разделе 1.5.2 доказано, что Консерватор побеждает с помощью стратегии SF. Все упомянутые стратегии (кроме стратегии SF) описаны ниже.

1.5.5.1 Стратегия S_1. Рассмотрим первый раунд и две возможности для выбора Новатором первой вершины.

Пусть в графе X_1 не существует циклического 2^{k-1}-расширения графа $(\{x^1_1\}, \varnothing)$. В этом случае Консерватор выберет вершину $y^1_1 \in V(Y_1)$, обладающую следующим свойством (такая вершина найдется, так как $Y_1 \in \mathcal{S}$, а, следовательно, Y_1 обладает свойством 3)). У графа $(\{y^1_1\}, \varnothing)$ нет циклических 2^{k-1}-расширений в Y_1. Положим $\tilde{X}^1_1 = (\{x^1_1\}, \varnothing)$, $\tilde{Y}^1_1 = (\{y^1_1\}, \varnothing)$. Условие III свойства $(k, 1, 1)$-регулярной эквивалентности графов $\tilde{X}^1_1$ и $\tilde{Y}^1_1$ в (X_1, Y_1) мы только что доказали. Условия же I, IV и V выполнены очевидно. В этом случае во втором раунде Консерватор должен воспользоваться стратегией SF.

Пусть в графе X_1 существует хотя бы одно циклическое 2^{k-1}-расширение $\tilde{X}^1_1$ графа $(\{x^1_1\}, \varnothing)$. Докажем, что найдется такая последовательность графов $G_1, G_2, \ldots, G_s$, что

a) для любого $i \in \{1, \ldots, s-1\}$ граф G_{i+1} является циклическим 2^{k-1}-расширением графа G_i в X_1, G_1 — циклическое 2^{k-1}-расширение графа $(\{x^1_1\}, \varnothing)$,

b) либо $X_1|_{V(G_s)} = G_s$, либо $\rho(X_1|_{V(G_s)}) < 1/\alpha$,

c) у графа G_s нет циклических 2^{k-1}-расширений в X_1,

d) если для некоторого $i \in \{1, \dots, s-1\}$ граф G_{i+1} является циклическим 2^{k-1}-расширением графа G_i, но не является циклическим $2^{k-1}-1$-расширением графа G_i, то существует такое $\mu \in \{1, \dots, s-1\}$, что граф $G_{\mu+1}$ является циклическим 2^{k-1}-расширением графа G_μ, но не является циклическим $2^{k-1}-1$-расширением графа G_μ, причем в графе $X_1 \setminus (G_{\mu+1} \setminus G_\mu)$ не содержится циклических 2^{k-1}-расширений графа G_μ.

Докажем существование такой последовательности графов.

Очевидно, найдется последовательность $G_1 \subset G_2 \dots \subset G_i$, для которой выполнены следующие свойства. Во-первых, G_1 — циклическое 2^{k-1}-расширение графа $(\{x_1^1\}, \varnothing)$, G_j — циклическое 2^{k-1}-расширение графа G_{j-1} для любого $j \in \{2, \dots, i\}$. Во-вторых, $j = i$ — первый номер (если такой вообще есть), для которого граф G_j является циклическим 2^{k-1}-расширением графа G_{j-1}, но не является циклическим $2^{k-1}-1$-расширением графа G_{j-1} (здесь мы считаем, что $G_0 = (\{x_1^1\}, \varnothing)$). Если такого номера нет, то у графа G_i нет циклических 2^{k-1}-рашсирений в X_1 (очевидно, такое число i найдется, причем $i \leq 2^{k-1}b + 1$, так как при $i = 2^{k-1}b + 2$ плотность графа G_i превосходит $1/\alpha$, и мы получаем противоречие со свойством 1)). В последнем случае последовательность $G_1, \dots, G_s$ $(s = i)$, обладающая свойствами a), c) и d), уже построена. Если все-таки G_i — не является "последним" расширением, то рассмотрим произвольное циклическое 2^{k-1}-расширение $\hat{G}_i$ графа G_{i-1} в $X_1 \setminus (G_i \setminus G_{i-1})$ (если такое вообще найдется). Будем добавлять по очереди таким же образом циклические 2^{k-1}-расширения $\hat{G}_{i+1}, \hat{G}_{i+2}, \dots$ каждого предыдущего графа до тех пор пока у графа $\hat{G}_{\hat{s}}$ не окажется циклических 2^{k-1}-расширений в $X_1 \setminus (G_i \setminus G_{i-1})$. Очевидно, граф $\hat{G}_{\hat{s}} \cup G_i$ является циклическим 2^{k-1}-расширением графа $\hat{G}_{\hat{s}}$, но не является его циклическим $2^{k-1}-1$-расширением, при этом у графа $\hat{G}_{\hat{s}}$ нет циклических 2^{k-1}-расширений в $X_1 \setminus ((\hat{G}_{\hat{s}} \cup G_i) \setminus \hat{G}_{\hat{s}})$. Таким образом, мы построили $\hat{s}+1$ первых членов последовательности графов:

$$G_1, \dots, G_{i-1}, \hat{G}_i, \dots, \hat{G}_{\hat{s}}, \hat{G}_{\hat{s}} \cup G_i.$$

Будем добавлять к графу $\hat{G}_{\hat{s}} \cup G_i$ циклические 2^{k-1}-расширения (каждый следующий граф является расширением предыдущего) до тех пор, пока у последнего графа не станет циклических 2^{k-1}-рашсирений в X_1. Очевидно, мы получим последовательность графов (обозначим ее $G_1, G_2, \dots, G_s$), обладающую свойствами a), c) и d) (при этом $s \leq 2^{k-1}b + 1$, так как при $s = 2^{k-1}b + 2$ плотность графа G_s превосходит $1/\alpha$, и мы получаем противоречие со свойством 1)).

Предположим, что

$$e(X_1|_{V(G_s)}) > e(G_s).$$

Предположим также, что

$$e(X_1|_{V(G_s)}) - e(G_s) \geq 2.$$

Так как $s \leq 2^{k-1}b + 1$, то в силу свойства 1) имеем

$$\rho^{\max}(X_1|_{V(G_s)}) \leq 1/\alpha < 1 + \frac{1}{2^{k-1} - 1}.$$

Тогда

$$1 + \frac{1}{2^{k-1} - 1} > \rho^{\max}(X_1|_{V(G_s)}) \geq \frac{2^{k-1} + 2}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2^{k-2}},$$

что неверно, так как $k > 3$. Итак,

$$e(X_1|_{V(G_s)}) - e(G_s) = 1.$$

Положим

$$e(G_i) - e(G_{i-1}) = e_i \leq 2^{k-1}$$

для любого $i \in \{1, \ldots, s\}$, где $G_0 = (\{x_1^1\}, \varnothing)$. Тогда

$$1/\rho(X_1|_{V(G_s)}) = \frac{e_1 + \ldots + e_s - s + 1}{e_1 + \ldots + e_s + 1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + \frac{(e_1 - 2^{k-1}) + \ldots + (e_s - 2^{k-1}) + 1}{s}}.$$

Поэтому либо

$$1/\rho(X_1|_{V(G_s)}) = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + \frac{1}{s}},$$

либо

$$1/\rho(X_1|_{V(G_s)}) \leq 1 - \frac{1}{2^{k-1}} < \alpha,$$

причем последнее неравенство выполнено, если хотя бы одно из e_i не превосходит $2^{k-1} - 1$. В последнем случае получаем противоречие со свойством 1) графа X_1, так как $s \leq 2^{k-1}b + 1$. Тем самым,

$$1/\rho(X_1|_{V(G_s)}) = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + \frac{1}{s}}$$

и

$$e_1 = \ldots = e_s = 2^{k-1}.$$

Если $1/\rho(X_1|_{V(G_s)}) > \alpha$, то свойство b) выполнено. Если $1/\rho(X_1|_{V(G_s)}) < \alpha$, то получаем противоречие со свойством 1) графа X_1. Следовательно,

$$1 - \frac{1}{2^{k-1} + a/b} = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + 1/s}.$$

Так как a/b — несократимая дробь, то $a = 1$, $b = s$, что возможно только если $2^{k-1} - b \leq 1$. Поэтому $s \geq 7$. Обозначим вершины дополнительного ребра, существующего по нашему предположению, u, v. Если $u, v \in V(G_{s-1})$, то пусть $u \in V(G_{j_1+1}) \setminus V(G_{j_1})$, $v \in V(G_{j_2+1}) \setminus V(G_{j_2})$, где $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq s-2$, $G_0 = (\varnothing, \varnothing)$. Тогда, очевидно, если во множестве $V(G_{j_2+1}) \setminus V(G_{j_2})$ содержится более одной вершины, то найдутся такие графы $\tilde{G}_{j_2+1}, \ldots, \tilde{G}_{s+1}$, что для любого $j \in \{j_2, \ldots, s\}$ граф $\tilde{G}_{j+1}$ является циклическим 2^{k-1}-расширением графа $\tilde{G}_j$, где $\tilde{G}_{j_2} = G_{j_2}$, и для любого $j \in \{j_2+2, \ldots, s+1\}$ имеем $\tilde{G}_j = X_1|_{V(G_{j-1})}$. Если $v(G_{j_2+1}, G_{j_2}) = 1$, то

$$1 + \frac{1}{2^{k-1}-1} > \rho^{\max}(X_1|_{V(G_{j_2+1})}) \geq \frac{2^{k-1}+3}{2^{k-1}+1} = 1 + \frac{1}{2^{k-2}+1/2},$$

что неверно, так как $k > 3$. Очевидно, последовательность $G_1, \ldots, G_{i-1}$, $\tilde{G}_i$, $\ldots$, $\tilde{G}_{s+1}$ обладает свойствами a)–d) (в качестве 2^{k-1}-расширения в свойстве d) можно взять расширение $\tilde{G}_{s+1}$ графа $\tilde{G}_s$). Пусть, наконец, хотя бы одна из вершин u, v (скажем, v) принадлежит множеству $V(G_s) \setminus V(G_{s-1})$. Если граф $G_s \setminus (G_{s-1} \setminus G_{s-2})$ является циклическим 2^{k-1}-расширением графа G_{s-2} и $u \notin V(G_{s-1}) \setminus V(G_{s-2})$, то переобозначим

$$G_{s-1} := G_s \setminus (G_{s-1} \setminus G_{s-2}),$$

что сведет задачу к предыдущему случаю. Если граф $G_s \setminus (G_{s-1} \setminus G_{s-2})$ является циклическим 2^{k-1}-расширением графа G_{s-2} и $u \in V(G_{s-1}) \setminus V(G_{s-2})$, либо $G_s \setminus (G_{s-1} \setminus G_{s-2})$ не является циклическим 2^{k-1}-расширением графа G_{s-2}, то найдутся такие графы $\tilde{G}_s, \tilde{G}_{s+1}$, что граф $\tilde{G}_s$ является циклическим 2^{k-1}-расширением графа G_{s-1}, граф $\tilde{G}_{s+1}$ является циклическим 2^{k-1}-расширением графа $\tilde{G}_s$, $\tilde{G}_{s+1} = X_1|_{V(G_s)}$ и у графа G_{s-1} нет циклических 2^{k-1}-расширений в $X_1 \setminus (\tilde{G}_s \setminus G_{s-1})$. Поэтому последовательность $G_1, \ldots, G_{s-1}, \tilde{G}_s$, $\tilde{G}_{s+1}$ обладает свойствами a)–d).

Итак, пусть $G_1, G_2, \ldots, G_s$ — последовательность, обладающая свойствами a)–d). Докажем, что граф $X_1|_{V(G_s)}$ — строго сбалансированный. Пусть $\tilde{G}$ — произвольный собственный подграф графа $X_1|_{V(G_s)}$. Обозначим

$$\tilde{G}_1 = X_1|_{V(G_1)} \cap \tilde{G}.$$

Если $\tilde{G}_1 \neq X_1|_{V(G_1)}$, то

$$v(\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_1)}, \tilde{G}) \leq 2^{k-1} - 1,$$

$$e(\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_1)}, \tilde{G}) \geq v(\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_1)}, \tilde{G}) + 1.$$

Следовательно, плотность графа $\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_1)}$ не меньше

$$\frac{e(\tilde{G}) + v(\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_1)}, \tilde{G}) + 1}{v(\tilde{G}) + v(\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_1)}, \tilde{G})} >$$

$$\min \left\{ \frac{e(\tilde{G})}{v(\tilde{G})}, 1 + \frac{1}{v(\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_1)}, \tilde{G})} \right\} = \rho(\tilde{G}).$$

Аналогичным образом показывается, что

$$\rho(X_1|_{V(G_s)}) \geq \rho(\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_{s-1})}) \geq \ldots \geq \rho(\tilde{G} \cup X_1|_{V(G_1)}) \geq \rho(\tilde{G}),$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое, потому что $\tilde{G}$ — собственный подграф в $X_1|_{V(G_s)}$. Следовательно, граф $X_1|_{V(G_s)}$ — строго сбалансированный.

Если $\rho(X_1|_{V(G_s)}) < 1/\alpha$, то положим $\tilde{X}_1^1 = X_1|_{V(G_s)}$. В графе Y_1 найдется (K,T)-максимальный для любой такой α-жесткой пары (K,T), что $v(K) \leq 2^k$, $v(T) \leq 2$, подграф $\tilde{Y}_1^1$, изоморфный $\tilde{X}_1^1$ в силу определения графа Y_1. Пусть $\varphi : \tilde{X}_1^1 \to \tilde{Y}_1^1$ — изоморфизм. Тогда Консерватор выберет вершину $y_1^1 := \varphi(x_1^1)$. По построению у графов $\tilde{X}_1^1$ и $\tilde{Y}_1^1$ не существует циклических 2^{k-1}-расширений в X_1 и Y_1 соответственно. Следовательно, графы $\tilde{X}_1^1$ и $\tilde{Y}_1^1$ являются $(k,1,1)$-регулярно эквивалентными в (X_1, Y_1). В этом случае также во втором раунде Консерватор должен воспользоваться стратегией SF. Обратимся к последнему случаю.

Пусть выполнено $\rho(X_1|_{V(G_s)}) = 1/\alpha$. Тогда и $\rho(G_s) = 1/\alpha$. Положим $G_0 = (\{x_1^1\}, \varnothing)$. Обозначим, кроме того, $e_i = e(G_i, G_{i-1})$ для каждого $i \in \{1, \ldots, s\}$. Тогда

$$1 + \frac{1}{2^{k-1} + a/b - 1} = \frac{e_1 + \ldots + e_s}{e_1 + \ldots + e_s - s + 1} = 1 + \frac{1}{\frac{e_1 + \ldots + e_s}{s-1} - 1}.$$

Так как a/b — несократимая дробь, то $s \geq b + 1$. Очевидно, при

$$a \geq \max\{1, 2^{k-1} - b\}$$

существует такое $\mu \in \{0, \ldots, s-1\}$, что $G_{\mu+1}$ не является циклическим $2^{k-1} - 1$-расширением графа G_μ. Действительно, в противном случае

$$\rho(G_s) \geq \frac{(2^{k-1}-1)s}{(2^{k-1}-2)s + 1} = 1 + \frac{1}{2^{k-1} - 2 + \frac{2^{k-1}-1}{s-1}} \geq 1 + \frac{1}{2^{k-1} - 2 + \frac{2^{k-1}-1}{b}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{k-1} + \frac{2^{k-1}-2b-1}{b}} > 1/\alpha.$$

Из строгой сбалансированности графа G_s следует, что $\rho^{\max}(G_\mu) < 1/\alpha$. Так как $Y_1 \in \mathcal{S}$, в графе Y_1 найдется (K,T)-максимальный для любой такой α-жесткой пары (K,T), что $v(K) \leq 2^k$, $v(T) \leq 2$, подграф $\tilde{Y}_1^1$, изоморфный $\tilde{X}_1^1 := G_\mu$, в силу определения графа Y_1. Пусть $\varphi : \tilde{X}_1^1 \to \tilde{Y}_1^1$ — изоморфизм. Тогда Консерватор выберет вершину $y_1^1 := \varphi(x_1^1)$. По построению графы $\tilde{X}_1^1$ и $\tilde{Y}_1^1$ являются ослабленно $(k,1)$-регулярно эквивалентными в (X_1, Y_1), поэтому во втором раунде Консерватор пользуется стратегией S_2.

1.5.5.2 Стратегия S_{r+1}. Пусть по окончании r-го раудна существуют графы $\tilde{X}_r^1, \tilde{Y}_r^1$, которые являются ослабленно (k,r)-эквивалентными в (X_r, Y_r), причем $\varphi : \tilde{X}_r^1 \to \tilde{Y}_r^1$ — изоморфизм.

В $r+1$-м раунде, $r \in \{1, \ldots, k-2\}$, Новатор выбирает некоторую вершину x_{r+1}^{r+1}. Если $X_{r+1} = X_r$, то положим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_r^1$. Иначе положим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_r^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{X}_r^1$.

Если $x_{r+1}^{r+1} \in V(\tilde{X}_{r+1}^1)$, то Консерватор выберет вершину $y_{r+1}^{r+1} = \varphi(x_{r+1}^{r+1})$, если $X_{r+1} = X_r$, и вершину $y_{r+1}^{r+1} = \varphi^{-1}(x_{r+1}^{r+1})$, если $X_{r+1} = Y_r$. Так как у графов $\tilde{X}_r^1, \tilde{Y}_r^1$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в X_r, Y_r соответственно (по определению ослабленной (k,r)-эквивалентности), то графы $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}), поэтому в $r+2$-ом раунде Консерватор пользуется стратегией SF.

Предположим, что вершина x_{r+1}^{r+1} не принадлежит множеству $V(\tilde{X}_{r+1}^1)$.

Отдельно рассмотрим случаи $r < k-2$ и $r = k-2$. Пусть $r < k-2$.

Если

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, x_{r+1}^{r+1}) > 2^{k-r-1}$$

и в графе X_{r+1} нет циклических 2^{k-r-1}-расширений графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing)$, то положим $\tilde{X}_{r+1}^2 = (\{x_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing)$. В силу свойства 2) графа Y_{r+1} в нем найдется такая вершина y_{r+1}^{r+1}, что

$$d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^1, y_{r+1}^{r+1}) = 2^{k-r-1} + 1$$

и у графа $(\{y_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing)$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в Y_{r+1}. Положим $\tilde{Y}_{r+1}^2 = (\{y_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing)$. Если у графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing)$ существует ровно одно циклическое 2^{k-r-1}-расширение графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing)$, то обозначим его $\tilde{X}_{r+1}^2$. Пусть

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2) > 2^{k-r-1}.$$

В силу свойства 2) графа $\tilde{Y}_{r+1}^1$ в нем найдется такая вершина y_{r+1}^{r+1} и

подграф $\tilde{Y}^2_{r+1}$, что

$$d_{Y_2}(\tilde{Y}^1_{r+1}, \tilde{Y}^2_{r+1}) = 2^{k-r-1} + 1,$$

пары $(\tilde{Y}^2_{r+1}, (\{y^{r+1}_{r+1}\}, \varnothing))$ и $(\tilde{X}^2_{r+1}, (\{x^{r+1}_{r+1}\}, \varnothing))$ изоморфны, у графа $\tilde{Y}^2_{r+1}$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в Y_{r+1}. Так как графы $\tilde{X}^1_r, \tilde{Y}^1_r$ являются ослабленно (k, r)-регулярно эквивалентными в (X_r, Y_r), то у них нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в X_r и Y_r соответственно. Очевидно, во всех рассмотренных случаях наборы графов $\tilde{X}^1_{r+1}, \tilde{X}^2_{r+1}$ и $\tilde{Y}^1_{r+1}, \tilde{Y}^2_{r+1}$ являются $(k, r+1, 2)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}), поэтому в $r+2$-ом раунде Консерватор пользуется стратегией SF. Пусть

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}^1_{r+1}, \tilde{X}^2_{r+1}) \leq 2^{k-r-1}.$$

В этом случае в силу ослабленной (k, r)-регулярной эквивалентности графов $\tilde{X}^1_r, \tilde{Y}^1_r$ в (X_r, Y_r) имеем

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}^1_{r+1}, \tilde{X}^2_{r+1}) = 2^{k-r-1},$$

и в графе X_{r+1} нет циклического $2^{k-r-1}-1$-расширения графа $(\{x^{r+1}_{r+1}\}, \varnothing)$. В этом случае Консерватор в силу свойства 2) графа Y_{r+1} сможет выбрать такую вершину y^{r+1}_{r+1}, что существует изоморфизм $L_X \cup \tilde{X}^1_{r+1} \to L_Y \cup \tilde{Y}^1_{r+1}$, переводящий вершины $x^1_{r+1}, \ldots, x^{r+1}_{r+1}$ в $y^1_{r+1}, \ldots, y^{r+1}_{r+1}$ соответственно, где L_X — цепь наименьшей длины в графе X_{r+1}, соединяющая x^{r+1}_{r+1} с некоторой вершиной графа $\tilde{X}^1_{r+1}$, L_Y — цепь наименьшей длины в графе Y_{r+1}, соединяющая y^{r+1}_{r+1} с некоторой вершиной графа $\tilde{Y}^1_{r+1}$, и пара $(L_Y \cup \tilde{Y}^1_{r+1}, \tilde{Y}^1_{r+1})$ является циклически 2^{k-r-1}-максимальной в Y_{r+1}. Переобозначим $\tilde{X}^1_{r+1} := \tilde{X}^1_{r+1} \cup L_X$, $\tilde{Y}^1_{r+1} := \tilde{Y}^1_{r+1} \cup L_Y$. Далее Консерватор переходит к стратегии S^1_{r+2}. Докажем, наконец, что у графа $(\{x^{r+1}_{r+1}\}, \varnothing)$ не может быть более одного циклического 2^{k-r-1}-расширения. Действительно, в случае наличия двух таких расширений A и $\tilde{A}$ имеем

$$1/\rho(A \cup \tilde{A}) \leq \frac{2^{k-r-1} + 2^{k-r-1} - 1}{2^{k-r-1} + 2^{k-r-1}} = 1 - \frac{1}{2^{k-r}} < \alpha,$$

что противоречит свойству 1), так как $v(A \cup \tilde{A}) \leq 2^{k-r} - 1$.

Если

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}^1_{r+1}, x^{r+1}_{r+1}) \leq 2^{k-r-1},$$

то рассмотрим цепь L_X в X_{r+1} наименьшей длины, соединяющей x^{r+1}_{r+1} с некоторой вершиной графа $\tilde{X}^1_{r+1}$. В силу свойства 2) графа Y_{r+1} в нем найдется такая вершина y^{r+1}_{r+1}, что

$$d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}^1_{r+1}, y^{r+1}_{r+1}) = d_{X_{r+1}}(\tilde{X}^1_{r+1}, x^{r+1}_{r+1}),$$

существует изоморфизм $L_X \cup \tilde{X}^1_{r+1} \to L_Y \cup \tilde{Y}^1_{r+1}$, переводящий вершины $x^1_{r+1}, \ldots, x^{r+1}_{r+1}$ в $y^1_{r+1}, \ldots, y^{r+1}_{r+1}$ соответственно, и пара $(L_Y \cup \tilde{Y}^1_{r+1}, \tilde{Y}^1_{r+1})$ является циклически 2^{k-r-1}-максимальной, где L_Y — цепь наименьшей длины, соединяющая вершину y^{r+1}_{r+1} с некоторой вершиной графа $\tilde{Y}^1_{r+1}$ в графе Y_{r+1}. По построению граф Y_{r+1} не содержит циклического 2^{k-r-1}-расширения графа $\tilde{Y}^1_{r+1}$. Переобозначим $\tilde{Y}^1_{r+1} := \tilde{Y}^1_{r+1} \cup L_Y$. Если у графа $L_X \cup \tilde{X}^1_{r+1}$ не существует циклического 2^{k-r-1}-расширения в X_{r+1}, то переобозначим $\tilde{X}^1_{r+1} := L_X \cup \tilde{X}^1_{r+1}$. Очевидно, графы $\tilde{X}^1_{r+1}$ и $\tilde{Y}^1_{r+1}$ являются $(k, r+1, 1)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}), и далее Консерватор пользуется стратегией SF. Если у графа $L_X \cup \tilde{X}^1_{r+1}$ существует циклическое 2^{k-r-1}-расширение в X_{r+1}, то по построению

$$d_{X_{r+1}}(x^{r+1}_{r+1}, \tilde{X}^1_{r+1}) = 2^{k-r-1}$$

и у графа $L_X \cup \tilde{X}^1_{r+1}$ не существует циклического $2^{k-r-1}-1$-расширения в X_{r+1}. Для выбора цепи L_X в таком случае было не более двух возможностей. Если возможность одна, то циклическое 2^{k-r-1}-расширение графа $L_X \cup \tilde{X}^1_{r+1}$ либо является расширением первого типа, либо один из концов цепи L_X не совпадает ни с одной из вершин $x^1_{r+1}, \ldots, x^{r+1}_{r+1}$. Если же возможностей две, то если циклическое 2^{k-r}-расширение графа $\tilde{X}^1_{r+1}$ является расширением первого типа, то выберем в качестве цепи L_X произвольную из двух. Если же циклическое 2^{k-r}-расширение графа $\tilde{X}^1_{r+1}$ является расширением второго типа, то в силу ослабленной (k, r)-регулярной эквивалентности графов $\tilde{X}^1_{r+1}, \tilde{Y}^1_{r+1}$ в (X_{r+1}, Y_{r+1}) хотя бы одна из двух цепей не содержит ни одну из вершин $x^1_{r+1}, \ldots, x^r_{r+1}$. Выберем именно такую цепь в качестве L_X. Очевидно, графы $\tilde{X}^1_{r+1} := L_X \cup \tilde{X}^1_{r+1}, \tilde{Y}^1_{r+1}$ являются ослабленно $(k, r+1)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}). Поэтому далее Консерватор пользуется стратегией S_{r+2}.

Пусть, наконец, $r = k - 2$.

Если

$$d_{X_{k-1}}(\tilde{X}^1_{k-1}, x^{k-1}_{k-1}) > 2,$$

то положим $\tilde{X}^2_{k-1} = (\{x^{k-1}_{k-1}\}, \varnothing)$. В силу свойства 2) графа Y_{k-1} в нем найдется такая вершина y^{k-1}_{k-1}, что

$$d_{Y_{k-1}}(\tilde{Y}^1_{k-1}, y^{k-1}_{k-1}) = 3.$$

Положим $\tilde{Y}^2_{k-1} = (\{y^{k-1}_{k-1}\}, \varnothing)$. Так как графы $\tilde{X}^1_{k-2}, \tilde{Y}^1_{k-2}$ являются ослабленно $(k, k-2)$-регулярно эквивалентными в (X_{k-2}, Y_{k-2}), то у них нет

циклических 2-расширений в X_{k-2} и Y_{k-2} соответственно. Поэтому наборы графов $\tilde{X}^1_{k-1}, \tilde{X}^2_{k-1}$ и $\tilde{Y}^1_{k-1}, \tilde{Y}^2_{k-1}$ являются $(k, k-1, 2)$-регулярно эквивалентными в (X_{k-1}, Y_{k-1}). Следовательно, в k-ом раунде Консерватор пользуется стратегией SF.

Если

$$d_{X_{k-1}}(\tilde{X}^1_{k-1}, x^{k-1}_{k-1}) \leq 2,$$

то рассмотрим цепь L_X в X_{k-1} наименьшей длины, соединяющей x^{k-1}_{k-1} с некоторой вершиной графа $\tilde{X}^1_{k-1}$ (причем, с одной из вершин $x^1_{k-1}, \ldots, x^{k-2}_{k-1}$, если такая найдется). В силу свойства 2) графа Y_{k-1} в нем найдется такая вершина y^{k-1}_{k-1}, что

$$d_{Y_{k-1}}(\tilde{Y}^1_{k-1}, y^{k-1}_{k-1}) = d_{X_{k-1}}(\tilde{X}^1_{k-1}, x^{k-1}_{k-1}),$$

существует изоморфизм $L_X \cup \tilde{X}^1_{k-1} \to L_Y \cup \tilde{Y}^1_{k-1}$, переводящий вершины $x^1_{k-1}, \ldots, x^{k-1}_{k-1}$ в $y^1_{k-1}, \ldots, y^{k-1}_{k-1}$ соответственно, и пара $(L_Y \cup \tilde{Y}^1_{k-1}, \tilde{Y}^1_{k-1})$ является циклически 2-максимальной, где L_Y — цепь наименьшей длины, соединяющая вершину y^{k-1}_{k-1} с некоторой вершиной графа $\tilde{Y}^1_{k-1}$ в графе Y_{k-1}. По построению граф Y_{k-1} не содержит циклического 2-расширения графа $\tilde{Y}^1_{k-1}$. Если у графа $L_X \cup \tilde{X}^1_{k-1}$ не существует циклического 2-расширения в X_{k-1}, то $\tilde{X}^1_{k-1} \cup L_X$ и $\tilde{Y}^1_{k-1} \cup L_Y$ являются $(k, k-1, 1)$-регулярно эквивалентными в (X_{k-1}, Y_{k-1}), и далее Консерватор пользуется стратегией SF. Если у графа $L_X \cup \tilde{X}^1_{k-1}$ существует циклическое 2-расширение в X_{k-1}, то по построению

$$d_{X_{k-1}}(x^{k-1}_{k-1}, \tilde{X}^1_{k-1}) = 2.$$

Более того, единственная цепь длины 2, отличная от L_X и соединяющая вершину x^{k-1}_{k-1} с некоторой вершиной графа $\tilde{X}^1_{k-1}$, либо не оканчивается ни на одной из вершин $x^1_{k-1}, \ldots, x^{k-2}_{k-1}$, либо оканчивается на той же вершине, на которой оканчивается и цепь L_X в силу ослабленной $(k, k-2)$-эквивалентности графов $\tilde{X}^1_{k-2}, \tilde{Y}^1_{k-2}$ в (X_{k-2}, Y_{k-2}). Очевидно, в k-ом раунде, если Новатор выбирает вершину в одном из графов $L_X \cup \tilde{X}^1_{k-1}, L_Y \cup \tilde{Y}^1_{k-1}$, то Консерватор победит, выбрав вершину, являющуюся образом при изоморфизме этих графов. Если же Новатор выберит вершину вне этих графов и соединенную с не более чем одной вершиной из $x^1_k, \ldots, x^{k-1}_k$, то Консерватор сможет победить в силу свойства 2) графа Y_k. Вершина x^k_k не может быть соединена ребрами с более чем тремя вершинами из $x^1_k, \ldots, x^{k-1}_k$ по построению. Наконец, если вершина x^k_k соединена ровно с двумя вершинами из $x^1_k, \ldots, x^{k-1}_k$, то Консерватор выберет вершину степени 2, принадлежащую либо цепи L_X, либо цепи

L_Y, и победит.

1.5.5.3 Стратегия S^1_{r+1}. Пусть по окончании раунда с номером r, $r \in \{2, \dots, k-2\}$, существуют графы $\tilde{X}^1_r, \tilde{Y}^1_r$, являющиеся индуцированными подграфами в X_r и Y_r соответственно и обладающие следующими свойствами. Граф $\tilde{Y}^1_r$ является циклически 2^{k-r}-максимальным, $x^1_r, \dots, x^r_r \in V(\tilde{X}^1_r)$, $y^1_r, \dots, y^r_r \in V(\tilde{Y}^1_r)$, существует изоморфизм $\varphi : \tilde{X}^1_r \to \tilde{Y}^1_r$, переводящий вершины $x^1_r, \dots, x^r_r$ в вершины $y^1_r, \dots, y^r_r$ соответственно. Выполнены равенства

$$\tilde{X}^1_r = \tilde{X}^1_{r-1} \cup L_X, \quad \tilde{Y}^1_r = \tilde{Y}^1_{r-1} \cup L_Y,$$

где $\tilde{X}^1_{r-1}, \tilde{Y}^1_{r-1}$ — некоторые графы, имеющие с цепями L_X и L_Y по одной общей вершине соответственно, $\varphi|_{\tilde{X}^1_{r-1}} : \tilde{X}^1_{r-1} \to \tilde{Y}^1_{r-1}$ — изоморфизм, вершины $x^1_r, \dots, x^{r-1}_r$ принадлежат графу $\tilde{X}^1_{r-1}$, вершины x^r_r и y^r_r являются концевыми вершинами цепей L_X и L_Y, не принадлежащими графам $\tilde{X}^1_{r-1}$ и $\tilde{Y}^1_{r-1}$ соответственно. Наконец, существует единственное циклическое 2^{k-r}-расширение $C_X \cup \tilde{X}^r_r$ графа $\tilde{X}^r_r$, где C_X — цепь длины $l \in [2^{k-r-1}, 2^{k-r})$, и соединяющая вершину x^r_r с некоторой вершиной x цепи L_X, отличной от концевых. Более того,

$$l + e(L_X) = 2^{k-r+1}$$

и

$$d_{X_r}(x, x^r_r) + l = 2^{k-r}.$$

В $r+1$-м раунде, $r \in \{1, \dots, k-2\}$, Новатор выбирает некоторую вершину x^{r+1}_{r+1}. Если $X_{r+1} = X_r$, то положим $\tilde{X}^1_{r+1} = \tilde{X}^1_r$, $\tilde{Y}^1_{r+1} = \tilde{Y}^1_r$. Иначе положим $\tilde{X}^1_{r+1} = \tilde{Y}^1_r$, $\tilde{Y}^1_{r+1} = \tilde{X}^1_r$, а также переобозначим $L_X := L_Y$, $L_Y := L_X$.

Если $x^{r+1}_{r+1} \in V(\tilde{X}^1_{r+1})$, то Консерватор выберет вершину $y^{r+1}_{r+1} = \varphi(x^{r+1}_{r+1})$, если $X_{r+1} = X_r$, и вершину $y^{r+1}_{r+1} = \varphi^{-1}(x^{r+1}_{r+1})$, если $X_{r+1} = Y_r$. У графа $\tilde{Y}^1_r$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в Y_r, а у графа $\tilde{X}^1_r$ существует циклическое 2^{k-r-1}-расширение (причем единственное) тогда и только тогда, когда $l = 2^{k-r-1}$. Предположим, что это равенство выполнено.

Если $x^{r+1}_{r+1} \in \tilde{X}_{r+1} \setminus L_X$, то переобозначим $\tilde{X}^1_{r+1} = \tilde{X}^1_{r-1}$, $\tilde{Y}^1_{r+1} = \tilde{Y}^1_{r-1}$, если $X_{r+1} = X_r$, и $\tilde{X}^1_{r+1} = \tilde{Y}^1_{r-1}$, $\tilde{Y}^1_{r+1} = \tilde{Y}^1_{r-1}$ иначе. Положим $\tilde{X}^2_{r+1} = (\{x^{r+1}_{r+1}\}, \varnothing)$, $\tilde{Y}^2_{r+1} = (\{y^{r+1}_{r+1}\}, \varnothing)$. Очевидно,

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}^1_{r+1}, \tilde{X}^2_{r+1}) = d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}^1_{r+1}, \tilde{Y}^2_{r+1}) = 2^{k-r} + 2^{k-r-1} > 2^{k-r-1},$$

и, более того, у графов $\tilde{X}^1_{r+1}, \tilde{X}^2_{r+1}$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в X_{r+1}, у графов $\tilde{Y}^1_{r+1}, \tilde{Y}^2_{r+1}$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в Y_{r+1}.

Если $x_{r+1}^{r+1} \in L_X$, при этом расстояние от x_{r+1}^{r+1} до конца цепи L_X, принадлежащего $\tilde{X}_{r+1}^1$, меньше 2^{k-r}, то обозначим $\tilde{L}_X$ наименьшую цепь, соединяющую x_{r+1}^{r+1} с вершиной, по которой пересекаются L_X и $\tilde{X}_{r+1}^1$. Переобозначим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_{r-1}^1 \cup \tilde{L}_X$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \varphi(\tilde{X}_{r-1}^1 \cup \tilde{L}_X)$, если $X_{r+1} = X_r$, и $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_{r-1}^1 \cup \tilde{L}_X$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \varphi^{-1}(\tilde{Y}_{r-1}^1 \cup L_X)$ иначе. Положим

$$\tilde{X}_{r+1}^2 = (\{x_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing), \quad \tilde{Y}_{r+1}^2 = (\{y_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing).$$

Очевидно,

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2) = d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2) > 2^{k-r-1},$$

и, более того, графы $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ не содержат циклических 2^{k-r-1}-расширений в X_{r+1}, графы $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ не содержат циклических 2^{k-r-1}-расширений в Y_{r+1}.

Если $x_{r+1}^{r+1} \in L_X$, но расстояние d от x_{r+1}^{r+1} до конца цепи L_X, принадлежащего $\tilde{X}_{r+1}^1$, не меньше 2^{k-r}, то обозначим $\tilde{L}_X$ наименьшую цепь, соединяющую x_{r+1}^{r+1} с конечной вершиной цепи L_X отличной от той, по которой пересекаются L_X и $\tilde{X}_{r+1}^1$. Переобозначим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_{r-1}^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = Y_{r-1}^1$ и положим

$$\tilde{X}_{r+1}^2 = \tilde{L}_X, \quad \tilde{Y}_{r+1}^2 = \varphi(\tilde{L}_X),$$

если $X_{r+1} = X_r$, и переобозначим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_{r-1}^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = X_{r-1}^1$ и положим

$$\tilde{X}_{r+1}^2 = \tilde{L}_X, \quad \tilde{Y}_{r+1}^2 = \varphi^{-1}(\tilde{L}_X)$$

иначе. Очевидно,

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2) = d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2) \geq 2^{k-r} > 2^{k-r-1},$$

и, более того, если $d > 2^{k-r}$, то графы $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ не содержат циклических 2^{k-r-1}-расширений в X_{r+1}, графы $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ не содержат циклических 2^{k-r-1}-расширений в Y_{r+1}.

Во всех рассмотренных случаях наборы $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}), поэтому в следующем раунде Консерватор воспользуется стратегией SF.

Если в последнем рассмотренном случае $d = 2^{k-r}$, то рассмотрим $r+2$-ой раунд, в котором Новатор выберет некоторую вершину x_{r+2}^{r+2}, а Консерватор воспользуется стратегией, описанной в подразделе 1.5.5.4, которая позволит ему победить.

Пусть, наконец, $l > 2^{k-r-1}$. В этом случае графы $\tilde{X}_{r+1}^1$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1$ являются $(k, r+1, 1)$-регулярно эквивалентными. Поэтому в $r+2$-ом раунде

Консерватор должен воспользоваться стратегией SF.

Если $x_{r+1}^{r+1} \notin V(\tilde{X}_{r+1}^1)$, но x_{r+1}^{r+1} принадлежит (единственному) циклическому 2^{k-r}-расширению графа $\tilde{X}_{r+1}^1$, то обозначим $\tilde{X}_{r+1}^2$ наименьшую цепь в X_{r+1}, соединяющую вершины x_{r+1}^r и x_{r+1}^{r+1}. Переобозначим $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{X}_{r-1}^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_{r-1}^1$, если $X_{r+1} = X_r$, и $\tilde{X}_{r+1}^1 = \tilde{Y}_{r-1}^1$, $\tilde{Y}_{r+1}^1 = \tilde{X}_{r-1}^1$ иначе. В силу свойства 2) в графе Y_{r+1} существует такая вершина y_{r+1}^{r+1} и цепь $\tilde{Y}_{r+1}^2$, что

$$d_{Y_{r+1}}(y_{r+1}^r, \tilde{Y}_{r+1}^1) = d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^2, \tilde{Y}_{r+1}^1) > 2^{k-r-1},$$

графы $\tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^2$ изоморфны, причем при некотором соответствующем изоморфизме вершина x_{r+1}^{r+1} переходит в вершину y_{r+1}^{r+1}, и у графа $\tilde{Y}_{r+1}^2$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в Y_{r+1}. Если

$$d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^r, x_{r+1}^{r+1}) < 2^{k-r-1},$$

то, очевидно, у графа $\tilde{X}_{r+1}^2$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в X_{r+1}. В этом случае наборы графов $\tilde{X}_{r+1}^1, \tilde{X}_{r+1}^2$ и $\tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^2$ являются $(k, r+1, 2)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}). Поэтому Консерватор в $r+2$-м раунде сможет воспользоваться стратегией SF. Если же

$$d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^r, x_{r+1}^{r+1}) = 2^{k-r-1},$$

то рассмотрим $r+2$-ой раунд, в котором Новатор выберет некоторую вершину x_{r+2}^{r+2}, а Консерватор воспользуется стратегией, описанной в подразделе 1.5.5.4, которая позволит ему победить.

Пусть, наконец, $x_{r+1}^{r+1} \notin V(\tilde{X}_{r+1}^1)$ и x_{r+1}^{r+1} не принадлежит циклическому 2^{k-r}-расширению графа $\tilde{X}_{r+1}^1$. Если

$$d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^{r+1}, \tilde{X}_{r+1}^1) \le 2^{k-r-1},$$

то переобозначим L_X наименьшую цепь, соединяющую вершину x_{r+1}^{r+1} с некоторой вершиной графа $\tilde{X}_{r+1}^1$. По построению у графа $\tilde{X}_{r+1}^1 \cup L_X$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в X_{r+1}. В силу свойства 2) графа Y_{r+1} в нем найдется такая вершина y_{r+1}^{r+1}, что

$$d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^1, y_{r+1}^{r+1}) = d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^1, x_{r+1}^{r+1}),$$

существует изоморфизм $L_X \cup \tilde{X}_{r+1}^1 \to L_Y \cup \tilde{Y}_{r+1}^1$, переводящий вершины $x_{r+1}^1, \ldots, x_{r+1}^{r+1}$ в $y_{r+1}^1, \ldots, y_{r+1}^{r+1}$ соответственно, и пара $(L_Y \cup \tilde{Y}_{r+1}^1, \tilde{Y}_{r+1}^1)$ является циклически 2^{k-r-1}-максимальной, где L_Y — цепь наименьшей

длины, соединяющая вершину y_{r+1}^{r+1} с некоторой вершиной графа $\tilde{Y}_{r+1}^1$ в графе Y_{r+1}. По построению графы

$$\tilde{X}_{r+1}^1 := \tilde{X}_{r+1}^1 \cup L_X, \quad \tilde{Y}_{r+1}^1 := \tilde{Y}_{r+1}^1 \cup L_Y$$

являются $(k, r+1, 1)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}), поэтому в $r+2$-м раунде Консерватор пользуется стратегией SF. Если, наконец,

$$d_{X_{r+1}}(x_{r+1}^{r+1}, \tilde{X}_{r+1}^1) > 2^{k-r-1},$$

то обозначим $\tilde{X}_{r+1}^2$ единственное (если таковое имеется) циклическое 2^{k-r-1}-расширение графа $(\{x_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing)$ (если такого расширения нет, то положим $\tilde{X}_{r+1}^2 = (\{x_{r+1}^{r+1}\}, \varnothing)$). По построению

$$d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+1}^2, \tilde{X}_{r+1}^1) > 2^{k-r-1}.$$

В силу свойства 2) графа Y_{r+1} в нем найдется такая вершина y_{r+1}^{r+1} и граф $\tilde{Y}_{r+1}^2$, что

$$d_{Y_{r+1}}(\tilde{Y}_{r+1}^2, \tilde{Y}_{r+1}^1) = 2^{k-r-1} + 1,$$

существует изоморфизм $\tilde{X}_{r+1}^2 \to \tilde{Y}_{r+1}^2$, переводящий вершину x_{r+1}^{r+1} в вершину y_{r+1}^{r+1}, и у графа $\tilde{Y}_{r+1}^2$ нет циклических 2^{k-r-1}-расширений в графе Y_{r+1}. По построению наборы графов $\tilde{X}_{r+2}^1, \tilde{X}_{r+2}^2$ и $\tilde{Y}_{r+2}^1, \tilde{Y}_{r+2}^2$ являются $(k, r+1, 2)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+1}, Y_{r+1}), поэтому в $r+2$-м раунде Консерватор снова воспользуется стратегией SF.

1.5.5.4 Стратегия для следующего раунда. Если $X_{r+2} = X_{r+1}$, то положим

$$\tilde{X}_{r+2}^1 = \tilde{X}_{r+1}^1,\ \tilde{X}_{r+2}^2 = \tilde{X}_{r+1}^2,\ \tilde{Y}_{r+2}^1 = \tilde{Y}_{r+1}^1,\ \tilde{Y}_{r+2}^2 = \tilde{Y}_{r+1}^2.$$

Иначе положим

$$\tilde{X}_{r+2}^1 = \tilde{Y}_{r+1}^1,\ \tilde{X}_{r+2}^2 = \tilde{Y}_{r+1}^2,\ \tilde{Y}_{r+2}^1 = \tilde{X}_{r+1}^1,\ \tilde{Y}_{r+2}^2 = \tilde{X}_{r+1}^2.$$

Обозначим φ изоморфизм $\tilde{X}_{r+2}^1 \cup \tilde{X}_{r+2}^2 \to \tilde{Y}_{r+2}^1 \cup \tilde{Y}_{r+2}^2$, переводящий вершины $x_{r+2}^1, \ldots, x_{r+2}^{r+1}$ в вершины $y_{r+2}^1, \ldots, y_{r+2}^{r+1}$ соответственно. Если $x_{r+2}^{r+2} \in V(\tilde{X}_{r+2}^1)$, то Консерватор выберет вершину $y_{r+2}^{r+2} = \varphi(x_{r+2}^{r+2})$. Если $r = k-2$, то Консерватор уже победил. Если же $r < k-2$, то по построению у графов $\tilde{X}_{r+2}^1, \tilde{X}_{r+2}^2$ нет циклических 2^{k-r-2}-расширений в X_{r+2}, а у графов $\tilde{Y}_{r+2}^1, \tilde{Y}_{r+2}^2$ нет циклических 2^{k-r-2}-расширений в Y_{r+2}. Поэтому наборы графов $\tilde{X}_{r+2}^1, \tilde{X}_{r+2}^2$ и $\tilde{Y}_{r+2}^1, \tilde{Y}_{r+2}^2$ являются $(k, r+2, 2)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+2}, Y_{r+2}), следовательно, в $r+3$-м раунде Консерватор пользуется стратегией SF.

Если вершина x_{r+2}^{r+2} принадлежит единственному циклическому 2^{k-r-1}-расширению графа $\tilde{X}_{r+2}^2$, то обозначим $\tilde{L}_X$ цепь наименьшей длины, концевыми вершинами которой являются концевые вершины цепи $\tilde{X}_{r+2}^2$, но проходящую через вершину x_{r+2}^{r+2}. Очевидно, существует изоморфизм $\tilde{\varphi} : \tilde{X}_{r+2}^1 \cup L_X \to Y_{r+2}^1 \cup Y_{r+2}^2$, переводящий вершины $x_{r+2}^1, \ldots, x_{r+2}^{r+2}$ в вершины $y_{r+2}^1, \ldots, y_{r+2}^{r+2}$, поэтому если $r = k-2$, то Консерватор уже победил. Если же $r < k-2$, то по построению наборы графов $\tilde{X}_{r+2}^1, \tilde{X}_{r+2}^2 := \tilde{L}_X$ и $\tilde{Y}_{r+2}^1, \tilde{Y}_{r+2}^2$ являются $(k, r+2, 2)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+2}, Y_{r+2}), поэтому в $r+3$-м раунде Консерватор пользуется стратегией SF.

Если вершина x_{r+2}^{r+2} не принадлежит циклическому 2^{k-r-1}-расширению графа $\tilde{X}_{r+2}^2$ и

$$d_{X_{r+2}}(x_{r+2}^{r+2}, \tilde{X}_{r+2}^1 \cup \tilde{X}_{r+2}^2) \leq 2^{k-r-2},$$

то обозначим $\tilde{L}_X$ наименьшую цепь, соединяющую вершину x_{r+2}^{r+2} с некоторой вершиной графа $\tilde{X}_{r+2}^1 \cup \tilde{X}_{r+2}^2$. По построению у графа $\tilde{X}_{r+2}^1 \cup \tilde{X}_{r+2}^2 \cup \tilde{L}_X$ нет циклических 2^{k-r-2}-расширений в X_{r+2}. В силу свойства 2) графа Y_{r+2} в нем найдется такая вершина y_{r+2}^{r+2}, что

$$d_{Y_{r+2}}(\tilde{Y}_{r+2}^1 \cup \tilde{Y}_{r+2}^2, y_{r+2}^{r+2}) = d_{X_{r+1}}(\tilde{X}_{r+2}^1 \cup \tilde{X}_{r+2}^2, x_{r+2}^{r+2}),$$

существует изоморфизм

$$\tilde{L}_X \cup \tilde{X}_{r+2}^1 \cup \tilde{X}_{r+2}^2 \to \tilde{L}_Y \cup \tilde{Y}_{r+2}^1 \cup \tilde{Y}_{r+2}^2,$$

переводящий вершины $x_{r+2}^1, \ldots, x_{r+2}^{r+2}$ в $y_{r+2}^1, \ldots, y_{r+2}^{r+2}$ соответственно, и пара $(\tilde{L}_Y \cup \tilde{Y}_{r+2}^1 \cup \tilde{Y}_{r+2}^2, \tilde{Y}_{r+2}^1 \cup \tilde{Y}_{r+2}^2)$ является циклически 2^{k-r-2}-максимальной, где $\tilde{L}_Y$ — цепь наименьшей длины, соединяющая вершину y_{r+2}^{r+2} с некоторой вершиной графа $\tilde{Y}_{r+2}^1 \cup \tilde{Y}_{r+2}^2$ в графе Y_{r+2}. Если $r = k-2$, то Консерватор уже победил. Если же $r < k-2$, то по построению графы

$$\tilde{X}_{r+2}^1 := \tilde{X}_{r+2}^1 \cup \tilde{X}_{r+2}^2 \cup \tilde{L}_X$$

и

$$\tilde{Y}_{r+2}^1 := \tilde{Y}_{r+2}^1 \cup \tilde{Y}_{r+2}^2 \cup \tilde{L}_Y$$

являются $(k, r+2, 1)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+2}, Y_{r+2}), поэтому в $r+3$-м раунде Консерватор пользуется стратегией SF. Если, наконец, вершина x_{r+2}^{r+2} не принадлежит циклическому 2^{k-r-1}-расширению графа $\tilde{X}_{r+2}^2$ и

$$d_{X_{r+2}}(x_{r+2}^{r+2}, \tilde{X}_{r+2}^1 \cup \tilde{X}_{r+2}^2) > 2^{k-r-2},$$

то обозначим $\tilde{X}_{r+2}^3$ единственное (если таковое имеется) циклическое 2^{k-r-2}-расширение графа $(\{x_{r+2}^{r+2}\}, \varnothing)$ (если такого расширения нет, то

положим $\tilde{X}^3_{r+2} = (\{x^{r+2}_{r+2}\}, \varnothing)$). По построению

$$d_{X_{r+2}}(\tilde{X}^3_{r+2}, \tilde{X}^1_{r+2} \cup \tilde{X}^2_{r+2}) > 2^{k-r-2}.$$

В силу свойства 2) графа Y_{r+2} в нем найдется такая вершина y^{r+2}_{r+2} и граф $\tilde{Y}^3_{r+2}$, что

$$d_{Y_{r+2}}(\tilde{Y}^3_{r+2}, \tilde{Y}^1_{r+2} \cup \tilde{Y}^2_{r+2}) = 2^{k-r-2} + 1,$$

существует изоморфизм $\tilde{X}^3_{r+2} \to \tilde{Y}^3_{r+2}$, переводящий вершину x^{r+2}_{r+2} в вершину y^{r+2}_{r+2}, и у графа $\tilde{Y}^3_{r+2}$ нет циклических 2^{k-r-2}-расширений в графе Y_{r+2}. Если $r = k-2$, то Консерватор уже победил. Если же $r < k-2$, то по построению наборы графов $\tilde{X}^1_{r+2}, \tilde{X}^2_{r+2}, \tilde{X}^3_{r+2}$ и $\tilde{Y}^1_{r+2}, \tilde{Y}^2_{r+2}, Y^3_{r+2}$ являются $(k, r+2, 3)$-регулярно эквивалентными в (X_{r+2}, Y_{r+2}), поэтому в $r+3$-м раунде Консерватор снова сможет воспользоваться стратегией SF.

Глава 2.

Спектры свойств первого порядка

В работе [106] было доказано некоторое усиление теоремы 1.1.2. А именно, для любого свойства первого порядка L и для любого иррационального $\alpha > 0$ существует такое число $\varepsilon > 0$ и число $\delta \in \{0, 1\}$, что для любого $p(n) \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) = \delta. \tag{2.1}$$

Это утверждение вместе с теоремой 1.1.2 мотивируют рассмотрение для каждого свойства первого порядка L двух множеств $S^1(L)$ и $S^2(L)$, которые мы называем спектрами. Первое определение возникает при рассмотрении вероятностей проведения ребра вида $p = n^{-\alpha}$. Множество $S^1(L)$ состоит из всех таких $\alpha \in (0, 1)$, что *не* выполнено следующее свойство:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, n^{-\alpha}) \models L)$$

существует и равен либо нулю, либо единице. Второе определение возникает при рассмотрении более широкого класса вероятностей $p = n^{-\alpha+o(1)}$. Множество $S^2(L)$ состоит из всех таких $\alpha \in (0, 1)$, что *не* выполнено следующее свойство: существуют $\delta \in \{0, 1\}$ и $\varepsilon > 0$, для которых равенство (2.1) справедливо для любого $p(n) \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Обозначим S^1_k и S^2_k объединение множеств $S^1(L)$ и $S^2(L)$ соответственно по всем $L \in \mathcal{L}_k$.

Данная глава посвящена изучению свойств множеств S^1_k, S^2_k. В следующем разделе мы опишем историю задачи, после чего в разделе 2.2 сформулируем новые результаты, а в разделе 2.3 приведем их доказательства.

2.1. История задачи

Как известно из работы [104] для любого рационального числа $\alpha \in (0,1)$ существует строго сбалансированный граф с плотностью $1/\alpha$. Пусть α — произвольное рациональное число, а $L(\alpha)$ — свойство первого порядка содержать некоторый фиксированный строго сбалансированный подграф с плотностью $1/\alpha$. В силу теорем 1.3.1, 1.3.3 точка α является единственным элементом спектра $S^1(L(\alpha))$. Очевидно, для любого конечного набора различных рациональных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ найдется свойство первого порядка L, спектр которого $S^1(L)$ равен $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Действительно, в качестве свойства L можно выбрать, например,

$$(\ldots((L(\alpha_1) \Leftrightarrow L(\alpha_2)) \Leftrightarrow L(\alpha_3))\ldots \Leftrightarrow L(\alpha_m)).$$

Но существует ли свойство первого порядка с бесконечными спектрами?

В работе [111] доказано, что при достаточно больших k множества S_k^1 и S_k^2 бесконечны. Так как множество $\mathcal{L}_k$ конечно для любого натурального k (см., например, [5]), то для любого $j \in \{1,2\}$ и любого натурального k множество S_k^j бесконечно тогда и только тогда, когда существует $L \in \mathcal{L}_k$, для которого $|S^j(L)| = \infty$. Поэтому при доказательстве бесконечности множества S_k^j мы всегда ищем свойство $L \in \mathcal{L}_k$ с бесконечным спектром $S^j(L)$.

Известно также [106], что у любой предельной точки множества S_k^2 (множества S_k^1) существует левая полуокрестность, не содержащая точек множества S_k^2 (множества S_k^1).

В этой главе мы отвечаем на следующие вопросы.

Q1 Каковы наименьший и наибольший элементы множества S_k^2? Наименьший и наибольший элементы множества S_k^1 найдены в главе 1 и равны соответсвенно $\frac{1}{k-2}$ и $1-\frac{1}{2^k-2}$ (см. теоремы 1.1.3, 1.2.1–1.2.3).

Q2 Существуют ли предельные точки множеств S_k^1 и S_k^2 вблизи наименьшей и наибольшей точки спектров? В работе [111] доказано только существование свойства первого порядка, спектр которого содержит предельную точку, равную $\frac{1}{3}$.

Q3 Насколько много элементов спектров S_k^1, S_k^2 в окрестности наибольшей и наименьшей точки? Заметим, что ответ на этот вопрос в случае наибольшей точки множества S_k^1 дан в теоремах 1.2.1, 1.2.2,

1.2.4:

$$\left|S_k^1 \cap \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right)\right| \in (c_1 2^{3k/2}, c_2 2^{2k})$$

для некоторых положительных констант c_1, c_2.

Q4 Для каждого $j \in \{1, 2\}$ каково минимальное значение k, при котором спектр S_k^j бесконечен?

2.2. Новые результаты

Все результаты этого раздела опубликованы в работах [131, 137, 145, 148, 152].

Для любого натурального k мы нашли наименьший и наибольший элементы множества S_k^2 и, тем самым, ответили на вопрос Q1.

Теорема 2.2.1. *Если* $k > 3$, *то* $\min S_k^2 = \frac{1}{k-1}$, $\max S_k^2 = 1 - \frac{1}{2^k - 2}$. *Кроме того,* $S_3^2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\}$.

Таким образом, из этого результата и теорем 1.1.3, 1.2.1–1.2.3 следует, что при $k > 3$ наибольшие элементы во множествах S_k^1 и S_k^2 равны, а наименьшие элементы различны.

Кроме того, мы оценили наименьшие и наибольшие предельные точки множеств S_k^1 и S_k^2 и, тем самым, ответили на вопрос Q2. Для любого $j \in \{1, 2\}$ обозначим $(S_k^j)'$ множество предельных точек в S_k^j. Из приведенного ниже результата следует, что вблизи 0 и 1 есть предельные точки множеств $(S_k^j)'$.

Теорема 2.2.2. *При* $k \geq 15$

$$\min(S_k^1)' \in \left[\frac{1}{k-2}, \frac{1}{k-11}\right],$$

при $k \geq 10$

$$\min(S_k^2)' \in \left[\frac{1}{k-2}, \frac{1}{k-7}\right],$$

при $k \geq 8$

$$\max(S_k^1)' \in \left[1 - \frac{1}{2^{k-5}}, 1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Так как $S_k^2 \supset S_k^1$, то из сформулированной ниже теоремы 2.2.3 следует, что и

$$\max(S_k^2)' \in \left[1 - \frac{1}{2^{k-5}}, 1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

при $k \geq 8$. Заметим, что из теорем 1.1.3, 1.2.1–1.2.3, 2.2.2 следует, что при $j \in \{1, 2\}$

$$\min(S_k^j)' = \left(\min S_k^j\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$1 - \log\max(S_k^j)' = (1 - \log\max S_k^j)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

При ответе на вопрос Q3 мы оценили мощности пересечений

$$\left|S_k^1 \cap \left(0, \frac{1}{k - 2.5}\right)\right|, \quad \left|S_k^2 \cap \left(0, \frac{1}{k - 2.5}\right)\right|, \quad \left|S_k^2 \cap \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right)\right|.$$

Теорема 2.2.3. *Для любого $j \in \{1, 2\}$*

$$\left|S_k^j \cap \left(0, \frac{1}{k - 2.5}\right)\right| = \Omega(k2^k).$$

Кроме того, при всех $k \geq 5$

$$\left|S_k^2 \cap \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right)\right| \in (c_1 2^{3k/2}, c_2 2^{2k})$$

для некоторых положительных констант c_1, c_2. Наконец, если $k > 3$, то

$$S_k^2 \cap \left(0, \frac{1}{k - 2}\right) = \left\{\frac{1}{k - 1}, \frac{1}{k - 1.5}\right\}. \tag{2.2}$$

Мы улучшили верхнюю оценку на наименьшую предельную точку спектра S_k^1 при всех $k \leq 20$ и верхнюю оценку на наименьшую предельную точку спектра S_k^2 при всех $k \leq 12$.

Теорема 2.2.4. *Для любого $k \geq 5$ выполнено $\frac{1}{[k/2]} \in (S_k^1)'$.*

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение, которое отвечает на вопрос Q4.

Следствие 2.2.1. *Наименьшее k, при котором спектр S_k^1 (S_k^2) бесконечен, равно либо 4, либо 5.*

2.3. Доказательства результатов

Доказательству теоремы 2.2.1 посвящен раздел 2.3.1. Доказательству теоремы 2.2.2 — раздел 2.3.2, теоремы 2.2.3 — раздел 2.3.3, а теоремы 2.2.4 — раздел 2.3.4. Тем не менее для нашего удобства равенство (2.2) из утверждения теоремы 2.2.3 будет доказано в разделе 2.3.1.

2.3.1. Доказательство теоремы 2.2.1

Докажем сначала, что для любого $k \geq 3$ числа $\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1.5}$ принадлежат S_k^2.

Рассмотрим свойство первого порядка $L \in \mathcal{L}_k$, записанное с помощью формулы

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1} \exists x_k \ \ (x_k \sim x_1) \wedge \ldots \wedge (x_k \sim x_{k-1}).$$

Пусть ε — произвольное число из интервала $(0, \frac{1}{k-1})$. Из теоремы 1.3.4 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, n^{-1/(k-1)+\varepsilon}) \models L) = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, n^{-1/(k-1)-\varepsilon}) \models L) = 0.$$

Поэтому $\frac{1}{k-1} \in S_k^2$.

Рассмотрим, кроме того, свойство первого порядка $L \in \mathcal{L}_k$, записанное с помощью формулы

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{k-2} \exists x_{k-1} \exists x_k$$
$$(x_{k-1} \sim x_1) \wedge \ldots \wedge (x_{k-1} \sim x_{k-2}) \wedge (x_k \sim x_1) \wedge \ldots \wedge (x_k \sim x_{k-1}).$$

Пусть ε — произвольное число из $(0, \frac{1}{k-1.5})$. В силу теоремы 1.3.4 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, n^{-1/(k-1.5)+\varepsilon}) \models L) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, n^{-1/(k-1.5)-\varepsilon}) \models L) = 0.$$

Следовательно, $\frac{1}{k-1.5} \in S_k^2$, что и требовалось.

Докажем теперь, что

$$\left(0, \frac{1}{k-1}\right) \cup \left(\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1.5}\right) \cup \left(\frac{1}{k-1.5}, \frac{1}{k-2}\right) \cap S_k^2 = \varnothing$$

для всех $k \geq 3$. Из этого, во-первых, последует утверждение теоремы:

$$\min S_k^2 = \frac{1}{k-1}, \quad S_3^2 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\},$$

а, во-вторых второе утверждение теоремы 2.2.3 (равенство (2.2)).

Начнем с интервала $(0, \frac{1}{k-1})$. Пусть

$$\alpha \in (0, \frac{1}{k-1}), \quad \varepsilon \in \left(0, \min\left\{\alpha, \frac{1}{k-1} - \alpha\right\}\right).$$

В статье [155] (см. доказательство теоремы 3) доказано, что для любого $p \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$ с вероятностью, стремящейся к 1, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(n,p(n)), G(m,p(m)), k)$. Поэтому в силу теоремы 1.4.3 имеем $\alpha \notin S_k^2$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in (\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1.5})$, $\alpha_1 < \alpha_2$ и $p \in [n^{-\alpha_2}, n^{-\alpha_1}]$. Более того, пусть $\mathcal{S}_\mathrm{A}$ — множество всех графов Γ, обладающих следующими свойствами.

A1 *Выполнено свойство полного расширения уровня* $k-2$ (см., например, [1]): для любых таких целых неотрицательных чисел a, b, что $a + b \leq k-2$ и любых вершин $v_1, \ldots, v_a, u_1, \ldots, u_b$ графа Γ существует такая вершина $x \in V(\Gamma)$, что

$$x \sim v_1, \ \ldots, \ x \sim v_a, \quad x \nsim u_1, \ \ldots, \ x \nsim u_b.$$

A2 Для любой пары графов (G, H) с $V(H) = \{v_1, \ldots, v_{k-2}\}$, $v(G,H) \leq 2$ и любого такого графа $\tilde{H} \subset \Gamma$, что $v(\tilde{H}) = v(H)$ (положим $V(\tilde{H}) = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{k-2}\}$) существует точное $(G, (v_1, \ldots, v_{k-2}))$-расширение набора $(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{k-2})$ в Γ.

A3 Пусть (K, T) — такая α_1-жесткая пара, что

$$v(T) = k-1, \quad v(K,T) = 1.$$

Тогда для любой пары (G, H) с $V(H) = \{v_1, \ldots, v_{k-2}\}$, $v(G,H) = 1$ и любого графа $\tilde{H} \subset \Gamma$ с $v(\tilde{H}) = v(H)$ (положим $V(\tilde{H}) = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{k-2}\}$) существует такое точное $(G, (v_1, \ldots, v_{k-2}))$-расширение $\tilde{G}$ набора $(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{k-2})$ в Γ, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K,T)-максимальной.

Пусть $A, B \in \mathcal{S}_\mathrm{A}$. В статье [155] было доказано, что у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$. Более того, в той же работе было доказано, что с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $G(n,p)$ обладает свойство A1. Осталось применить следствие 1.3.1 для свойств A2 и A3. Действительно, любая пара графов (G, H) с $v(H) = k-2$, $v(G,H) \leq 2$ является α_2-надежной. Применяя следствие 1.3.1 для любой такой пары (G, H), получаем справедливость свойств A2 и A3 с вероятностью, стремящейся к 1. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{S}_\mathrm{A}) = 1.$$

В силу теоремы 1.4.3 любое $\alpha \in (\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1.5})$ не принадлежит множеству S_k^2.

Наконец, пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in (\frac{1}{k-1.5}, \frac{1}{k-2})$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $p \in [n^{-\alpha_2}, n^{-\alpha_1}]$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{B}}$ — множество всех графов Γ, для которых выполнены следующие свойства.

B1 Свойство полного расширения уровня $k-3$.

B2 Пусть $\mathcal{K} = \{(K_1, T_1), (K_2, T_2)\}$ — множество всех α_1-жестких пар, где $v(T_1) = k-2$, $v(K_1, T_1) = 2$, $v(T_2) = k-1$, $v(K_2, T_2) = 1$. Для любой α_2-надежной пары (G, H) с $v(G) \leq k$ и $V(H) = \{h_1, \ldots, h_m\}$ и любого подграфа $\tilde{H} \subset \Gamma$ с $v(\tilde{H}) = m$ (положим $V(\tilde{H}) = \{\tilde{h}_1, \ldots \tilde{h}_m\}$) существует такое точное $(G, (h_1, \ldots, h_m))$-расширение $\tilde{G}$ набора $(\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_m)$ в Γ, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K_1, T_1)-максимальной и (K_2, T_2)-максимальной.

Пусть $A, B \in \mathcal{S}_{\mathrm{B}}$. Как и в предыдущем случае, применяя утверждения из теоремы 3 из [155], следствие 1.3.1 и теорему 1.4.3 лего доказать справедливость равенства

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{S}_{\mathrm{B}}) = 1$$

Следовательно, любое $\alpha \in (\frac{1}{k-1.5}, \frac{1}{k-2})$ не принадлежит S_k^2.

Мы заканчиваем доказательство рассмотрением $\alpha \in (1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1)$. Если

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + \beta}, \tag{2.3}$$

β — несократимая положительная дробь с числителем $a > 2^{k-1}$, (2.4)

то найдутся натуральные числа $n_1 = n_1(\alpha, k)$, $n_2 = n_2(\alpha, k)$, $n_3 = n_3(k)$ и n_4, которые обладают следующими свойствами. Если графы A, B являются $(n_1, n_2, n_3, n_4, 1/\alpha)$-разреженными (см. раздел 1.5.1), то у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$ (см. раздел 1.5.2).

Докажем, что для любого α, для которого справедливо равенство 2.3, сущетсвует такое число $\varepsilon > 0$, что любое число из интервала $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ также удовлетворяет этому равенству и для любого $p \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$ с вероятностью, стремящейся к 1, граф $G(n,p)$ является $(n_1, n_2, n_3, n_4, 1/\alpha)$-разреженным.

Начнем со свойства 1) $(n_1, n_2, n_3, n_4, 1/\alpha)$-разреженности. Рассмотрим такое множество $\mathcal{G}$ попарно неизоморфных графов с не более n_1 вершинами и максимальной плотностью отличной от $1/\alpha$, что любой граф G с

$v(G) \le n_1$ и $\rho^{\max}(G) \ne 1/\alpha$ изоморфен некоторому графу из множества $\mathcal{G}$. Пусть $\mathcal{G}_1$ — такое множество попарно неизоморфных графов с не более n_1 вершинами и максимальной плотностью, меньшей $1/\alpha$, что любой граф, обладающий этими свойствами, изоморфен некоторому графу из $\mathcal{G}_1$. Очевидно, $|\mathcal{G}_1| \le |\mathcal{G}| < \infty$. Пусть

$$\alpha - \varepsilon > \max_{G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_1} \frac{1}{\rho^{\max}(G)},$$

$$\alpha + \varepsilon < \min_{G \in \mathcal{G}_1} \frac{1}{\rho^{\max}(G)}.$$

Тогда по теореме 1.3.2 для любого $p \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$ выполнены равенства

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\forall G \in \mathcal{G}_1 \; G(n,p) \models L_G) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\exists G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_1 \; G(n,p) \models L_G) = 0.$$

Свойство 1) доказано.

Пусть $\mathcal{H}$ — конечное множество таких α-надежных пар (H_1, H_2), что $v(H_1) \le n_1$, $v(H_2) \le n_2$. Пусть $\mathcal{K}$ — множество таких α-жестких пар (K_1, K_2), что $v(K_1) \le n_3$, $v(K_2) \le n_4$. Пусть

$$\alpha - \varepsilon > \max_{(K_1,K_2) \in \mathcal{K}} \frac{1}{\rho(K_1, K_2)},$$

$$\alpha + \varepsilon < \min_{(H_1,H_2) \in \mathcal{H}} \frac{1}{\rho^{\max}(H_1, H_2)}.$$

Тогда в силу следствия 1.3.1 для любого $p \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$ с вероятностью, стремящейся к 1, для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$

$$\forall \tilde{x}_1 \ldots \forall \tilde{x}_{v(H_2)} \;\; N^{\mathcal{K}}_{(H_1,H_2)}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{v(H_2)}) > 0.$$

Тем самым, свойство 2) доказано. Поэтому по теореме 1.4.3 множество $I(k) \cap S^2_k$ пусто.

Наконец, пусть

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-1} + a/b}, \tag{2.5}$$

$$\frac{a}{b} \text{ — несократимая положительная дробь с числителем} \tag{2.6}$$

$$a \in \{\max\{1, 2^{k-1} - b\}, \ldots, 2^{k-1}\}. \tag{2.7}$$

Рассмотрим множество графов $\mathcal{S}$ из раздела 1.5.5, обладающих свойствами 1)–3).

В разделе 1.5.5 доказано, что если $A, B \in \mathcal{S}$, то у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(A, B, k)$. Докажем, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $p \in (n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon})$ с вероятностью, стремящейся к 1, $G(n,p) \in \mathcal{S}$. Свойства 1) и 2) аналогичны предыдущему случаю (числитель нескоратимой дроби $\frac{a}{b}$ превосходит 2^{k-1}). Единственное отличие состоит в доказательстве свойства 3). Оно очевидным образом вытекает из следствия 1.3.2. Следовательно, $\alpha \notin S_k^2$. Рассмотрев знаменатель $b = 1$, получаем

$$\left\{1 - \frac{1}{2^{k-1}-1}, 1 - \frac{1}{2^k}\right\} \cap S_k^2 = \varnothing.$$

Теорема доказана.

2.3.2. Доказательство теоремы 2.2.2

Докажем неравенство

$$\min(S_k^1)' \leq \frac{1}{k-11}.$$

Пусть $k \geq 15$, $j \in \mathbb{N}$, $m = j(k-10)$,

$$s = \frac{k-11}{k-10} \cdot \frac{4(m^{m+1}-m)}{m-1}, \;\; \alpha = \frac{1}{k-11} + \frac{1}{s}$$

и $p = n^{-\alpha}$. Для произвольных вершин $x_1, \ldots, x_{k-11}, z$ рассмотрим следующие предикаты:

$$T_z(x) = [\exists v\,((v \in N(x_1, \ldots, x_{k-13}, z, x)) \wedge (\forall y \in X\,((y \neq x) \Rightarrow (y \nsim v))))],$$

$$R_z(a,b) = [\exists v\,((v \in N(x_1, \ldots, x_{k-14}, z, a, b)) \wedge$$
$$(\forall y \in X\,(((y \neq a) \wedge (y \neq b)) \Rightarrow (y \nsim v))))],$$

где $X = N(x_1, \ldots, x_{k-11})$ — множество всех общих соседей вершин $x_1, \ldots, x_{k-11}$. Очевидно, оба предиката выразимы на языке первого порядка. Пусть $N_z(x)$ — множество соседей вершины x, где смежностью считается истинность предиката R_z:

$$N_z(x) = \{a : \; R_z(a,x)\};$$

$H_1(z)$ — множество всех вершин, для которых предикат T_z является истинным; $H_2(z)$ — множество всех соседей вершин из $H_1(z)$, где смежностью снова считается истинность предиката R_z.

Пусть $L(x_1,\dots,x_{k-11})$ — свойство вершин $x_1,\dots,x_{k-11}$, определенное следующей формулой первого порядка кванторной глубины 11:

$$\phi = \exists z\,(\varphi_1(z) \wedge \varphi_2(z) \wedge \varphi_3(z) \wedge \varphi_4(z)),$$

где

$$\varphi_1(z) = [\forall u_1 \in X\,\forall u_2 \in X\,(((u_1 \in H_1(z)) \wedge (u_2 \in H_1(z)) \wedge (u_1 \neq u_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((N_z(u_1) \neq^* N_z(u_2)) \wedge (N_z(u_1) \cap N_z(u_2) = \varnothing) \wedge (N_z(u_1) \cap H_1(z) = \varnothing)))],$$

$$\varphi_2(z) = [\forall x \in X\,((x \in H_1(z)) \vee (x \in H_2(z)))],$$

$$\varphi_3(z) = [\forall x \in X\,[((x \in H_1(z)) \wedge$$

$$(\forall y \in X\,((y \in H_1(z)) \Rightarrow (N_z(x) \leq^* N_z(y))))) \Rightarrow (H_1(z) =^* N_z(x))]],$$

$$\varphi_4(z) =$$

$$[\forall x \in X \forall y \in X \forall \tilde{x} \in X\,[((x \in H_1(z)) \wedge (y \in H_1(z)) \wedge (N_z(x) <^* N_z(y)) \wedge$$

$$(\forall \tilde{y} \in X\,(((\tilde{y} \in H_1(z)) \wedge (N_z(x) <^* N_z(\tilde{y})) \wedge (y \neq \tilde{y})) \Rightarrow (N_z(y) <^* N_z(\tilde{y}))))$$

$$\wedge (\tilde{x} \in H_1(z)) \wedge (\forall \tilde{y} \in X\,((\tilde{y} \in H_1(z)) \Rightarrow (N_z(\tilde{x}) \leq^* N_z(\tilde{y})))) \Rightarrow$$

$$(N_z(y) \stackrel{z}{=} N_z(x) \stackrel{z}{\cdot} N_z(\tilde{x}))]].$$

Здесь

$$(N_z(u_1) \cap N_z(u_2) = \varnothing) = (\forall y_1 \forall y_2\,((R_z(u_1, y_1) \wedge R_z(u_2, y_2)) \Rightarrow (y_1 \neq y_2))),$$

$$(N_z(u_1) \cap H_1(z) = \varnothing) = (\forall y\,(R_z(u_1, y) \Rightarrow (\neg T_z(y)))),$$

$$(x \in H_1(z)) = T_z(x),\ \ (x \in H_2(z)) = (\exists y\,(R_z(x, y) \wedge T_z(y))).$$

Формула $(A \leq^* B)$ выражает свойство, из которого следует истинность неравенства $|A| \leq |B|$:

$$(A \leq^* B) = (\exists \tilde{z}\ (\forall x\,[(x \in A \setminus B) \Rightarrow (\exists y\,[(y \in B \setminus A) \wedge R_{\tilde{z}}(x, y)])] \wedge$$

$$\wedge [(x \in B \setminus A) \Rightarrow (\neg(\exists y \exists \tilde{y}\,(y \neq \tilde{y}) \wedge R_{\tilde{z}}(x, y) \wedge R_{\tilde{z}}(x, \tilde{y})))])). \qquad (2.8)$$

Кроме того, мы используем обозначения

$$(A =^* B) = (A \leq^* B) \wedge (B \leq^* A),$$

$$(A <^* B) = ((A \leq^* B) \wedge (\neg(A =^* B))),$$

$$(A \geq^* B) = (B \leq^* A).$$

Наконец, для любых множеств A, B, C формула $(A \stackrel{z}{=} B \stackrel{z}{\cdot} C)$ выражает свойство, из которого следует равенство $|A| = |B||C|$:

$$(A \stackrel{z}{=} B \stackrel{z}{\cdot} C) = ([\forall a \in A\, \exists b \in B\, \exists c \in C$$

$$(R_z(a,b) \wedge R_z(a,c) \wedge (\forall \tilde{b} \in B\, ((b \neq \tilde{b}) \Rightarrow (\neg R_z(a,\tilde{b}))))\wedge$$

$$(\forall \tilde{c} \in C\, ((c \neq \tilde{c}) \Rightarrow (\neg R_z(a,\tilde{c})))))]\wedge$$

$$[\forall b \in B\, \forall c \in C\, \exists a \in A\, (R_z(a,b) \wedge R_z(a,c)\wedge$$

$$(\forall \tilde{a} \in A\, ((\tilde{a} \neq a) \Rightarrow ((\neg R_z(\tilde{a},b)) \vee (\neg R_z(\tilde{a},c))))))]).$$

Формула φ_1 выражает свойство, заключающееся в том, что множества $N_z(u_1)$, $N_z(u_2)$ и $H_1(z)$ попарно не пересекаются для всех различных $u_1, u_2 \in H_1(z) \cap X$. Она также выражает свойство $|N_z(u_1)| \neq |N_z(u_2)|$. Мы упорядочиваем элементы множества $H_1(z)$ в соответствии с этой мощностью:

$$(u_1 < u_2) \Leftrightarrow (|N_z(u_1)| < |N_z(u_2)|).$$

Формула φ_2 выражает свойство, заключающееся в том, что любая вершина из X принадлежит либо множеству $H_1(z)$, либо множеству $H_2(z)$. Формула φ_3 выражает свойство, заключающееся в том, что $|N_z(u)| = |H_1(z)|$, где u — наименьший элемент в $H_1(z)$. Формула φ_4 выражает следующее свойство: если элемент y превосходит элемент x (в смысле упомянутого порядка) и $\tilde{x}$ — наименьший элемент, то

$$|N_z(y)| = |N_z(x)||N_z(\tilde{x})|.$$

Очевидно, ϕ — формула первого порядка.

Рассмотрим свойство $\tilde{L}(x_1, \ldots, x_{k-11})$, выражаемое формулой первого порядка с кванторной глубиной 7

$$\forall y\ ((N(x_1, \ldots, x_{k-11}) \geq^* N(x_1, \ldots, x_{k-12}, y))).$$

Мы собираемся доказать, что свойство первого порядка

существуют такие $x_1, \ldots, x_{k-11}$, что $L(x_1, \ldots, x_{k-11}) \wedge \tilde{L}(x_1, \ldots, x_{k-11})$

(которое выражается формулой первого порядка кванторной глубины k) выполнено с некоторой асимптотической вероятностью из интервала $(0, 1)$.

Будем называть вершины $x_1, \ldots, x_{k-11}$ *экстремальными*, если

$$|N(x_1, \ldots, x_{k-11})| = \max_y |N(x_1, \ldots, x_{k-12}, y)|.$$

Пусть $\tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$ — множество всех графов, обладающих следующими свойствами.

A1 Для любого $r \leq \frac{s}{k-11}$, любых вершин $x_1, \ldots, x_{k-14}$, любых пар (a_1, b_1), $\ldots, (a_r, b_r)$, содержащих различные вершины, и любого множества вершин Γ, содержащего вершины $a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r$ и не содержащего ни одной из вершин $x_1, \ldots, x_{k-14}$, существует такая вершина z, что для любого $i \in \{1, \ldots, r\}$ предикат $R_z(a_i, b_i)$ является истинным и для любой другой пары вершин (a, b) из Γ предикат $R_z(a, b)$ истинным не является.

A2 Для любых вершины $x_1, \ldots, x_{k-12}$ существует такая вершина x_{k-11}, что
$$|N(x_1, \ldots, x_{k-11})| \geq \frac{s}{k-11}.$$

A3 Для любых вершин $x_1, \ldots, x_{k-11}$ выполнено
$$|N(x_1, \ldots, x_{k-11})| \leq s.$$

A4 Не существует подграфов на не более m^{m+1} вершинах и плотностью, превосходящей $1/\alpha$.

В силу теоремы 1.3.2, теоремы 1.3.4 и следствия 1.3.1 выполнено
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in \tilde{\Omega}_n) = 1.$$

Пусть $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$. Из свойств A2, A3 следует, что для любых экстремальных $x_1, \ldots, x_{k-11}$
$$|N(x_1, \ldots, x_{k-11})| \in \left[\frac{s}{k-11}, s\right]. \tag{2.9}$$

Пусть $x_1, \ldots, x_{k-11}$ обладают свойство $L \wedge \tilde{L}$. Тогда $x_1, \ldots, x_{k-11}$ являются экстремальными и
$$|N(x_1, \ldots, x_{k-11})| = \frac{t^{t+1} - t}{t-1} + t$$
для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Если $t < m$, то из (2.9) следует, что
$$\frac{(m-1)^m - m + 1}{m-2} + m - 1 \geq |N(x_1, \ldots, x_{k-11})| \geq$$
$$\frac{4}{k-10} \cdot \frac{m^{m+1} - m}{m-1} \geq \frac{m}{k-10} \cdot \frac{(m-1)^m - m + 1}{m-2}.$$

Следовательно,

$$\frac{(m-1)^m - m + 1}{m-2} \leq \frac{(k-10)(m-1)}{m-k+10}.$$

Мы получили противоречие с равенством $m = j(k-10)$. Если $t > m$, то из (2.9) следует

$$\frac{(m+1)^{m+2} - m - 1}{m} + m + 1 \leq |N(x_1, \ldots, x_{k-11})| \leq$$

$$4\frac{k-10}{k-11} \cdot \frac{m^{m+1} - m}{m-1} \leq \frac{4}{m} \cdot \frac{(m+1)^{m+2} - m - 1}{m}.$$

Снова получили противоречие. Поэтому $t = m$. Заметим, что

$$\frac{m^{m+1} - m}{m-1}$$

ребер R_z в X необходимо для построения множества $H_2(z)$,

$$2\frac{m^{m+1} - m^2}{m-1}$$

ребер R_z в X необходимо для выражения всех предикатов

$$A \overset{z}{=} B \overset{z}{\cdot} C,$$

m предикатов T_z необходимо для построения множества $H_1(z)$. Поэтому в $\mathcal{G}$ существует граф $K(x_1, \ldots, x_{k-11})$ с множествами вершин и ребер, которые содержат все вершины и ребра, выражающие описанные предикаты. Этот граф состоит из

$$k - 11 + \frac{m^{m+1} - m}{m-1} + m + m + 1 + \frac{m^{m+1} - m}{m-1} + 2\frac{m^{m+1} - m^2}{m-1}$$

вершин и

$$(k-11)\left(\frac{m^{m+1} - m}{m-1} + m + m + \frac{m^{m+1} - m}{m-1} + 2\frac{m^{m+1} - m^2}{m-1}\right)$$

ребер. Очевидно, он является строго сбалансированным и его плотность равна $\frac{1}{\alpha}$. Из теоремы 1.3.3 следует, что случайный граф $G(n,p)$ содержит копию этого графа с асимптотической вероятностью c для некоторого $c \in (0,1)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\mathsf{P}(G(n,p) \models (\exists x_1 \ldots \exists x_{k-11}\ (L(x_1, \ldots, x_{k-11}) \wedge \tilde{L}(x_1, \ldots, x_{k-11})))) \leq$$

$$(1+\varepsilon)c.$$

Наконец, если граф $\mathcal{G}$ содержит $K(x_1,\ldots,x_{k-11})$ для некоторых $x_1,\ldots,x_{k-11}$, то из свойства A4 следует, что

$$\max_{y\neq x_{k-11}} |N(x_1,\ldots,x_{k-12},y)| \leq \frac{s}{k-11}$$

и, следовательно,

$$\forall y\ ((|N(x_1,\ldots,x_{k-11})| \geq |N(x_1,\ldots,x_{k-12},y|))).$$

Более того, в силу свойства A1 выполнено $\tilde{L}(x_1,\ldots,x_{k-11})$, потому что для его выполнения необходимо

$$\max_{y\neq x_{k-11}} |N(x_1,\ldots,x_{k-11},y)| \leq \frac{s}{k-11}$$

ребер $R_{\tilde{z}}$. Кроме того, в силу свойства A1 также выполнено $L(x_1,\ldots,x_{k-11})$, потому что для выражения предиката $\leq^*$ необходимо

$$m^{m-1} < \frac{s}{k-11}$$

ребер $R_{\tilde{z}}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\mathsf{P}(G(n,p) \vDash (\exists x_1 \ldots \exists x_{k-11}\ (L(x_1,\ldots,x_{k-11}) \wedge \tilde{L}(x_1,\ldots,x_{k-11})))) \geq$$

$$(1-\varepsilon)c.$$

Наконец,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \vDash (\exists x_1 \ldots \exists x_{k-11}\ (L(x_1,\ldots,x_{k-11}) \wedge \tilde{L}(x_1,\ldots,x_{k-11})))) = c.$$

Первое неравенство доказано.

Докажем, что

$$\min(S_k^2)' \leq \frac{1}{k-7}. \tag{2.10}$$

Пусть $k \geq 10$, $m \in \mathbb{N}$, $s = m(k-7)$ и

$$\frac{1}{k-7} + \frac{1}{s+1} < \alpha < \frac{1}{k-7} + \frac{1}{s},$$

$p = n^{-\alpha}$. Для произвольных вершин $x_1,\ldots,x_{k-9},z$ рассмотрим предикат

$$R_z(a,b) = (\exists v\ ((v \sim x_1) \wedge \ldots \wedge (v \sim x_{k-10}) \wedge (v \sim z) \wedge (v \sim a) \wedge (v \sim b))). \tag{2.11}$$

и свойство "вершины $x_1, \ldots, x_{k-9}$ являются *четно–расширяемыми*", выражаемое предложением

$$\text{число } \left(\min_{x_{k-8}} \max_{x_{k-7}} |N(x_1, \ldots, x_{k-7})| \right) \text{ четное.}$$

Пусть $\tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$ — множество всех графов, обладающих следующими свойствами.

B1 Для любых вершин $x_1, \ldots, x_{k-10}$, любого натурального числа $l \leq m$, любых пар $(a_1, b_1), \ldots, (a_l, b_l)$, содержащих различные вершины и любого множества вершин Γ, содержащего вершины $a_1, b_1, \ldots, a_l, b_l$, но не содержащего ни одну вершину из $x_1, \ldots, x_{k-10}$, найдется такая вершина z, что для любого $t \in \{1, \ldots, l\}$ предикат $R_z(a_t, b_t)$ является истинным и для любой другой пары вершин (a, b) из Γ предикат $R_z(a, b)$ истинным не является.

B2 Для любых вершин $x_1, \ldots, x_{k-8}$ существует такая вершина x_{k-7}, что

$$|N(x_1, \ldots, x_{k-7})| \geq m.$$

B3 Для любых вершин $x_1, \ldots, x_{k-9}$ существует такая вершина x_{k-8}, что

$$\max_{x_{k-7}} |N(x_1, \ldots, x_{k-9}, x_{k-8}, x_{k-7})| = m.$$

В силу теоремы 1.3.4 и следствия 1.3.1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in \tilde{\Omega}_n) = 1.$$

Мы завершим доказательство неравенства (2.10) после того, как докажем следующую лемму.

Лемма 2.3.1. *Существует такое свойство первого порядка L, выражаемое с помощью формулы первого порядка φ кванторной глубины k, что*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathsf{P}(G(n,p) \vDash L) -$$

$\mathsf{P}($*любые вершины* $x_1, \ldots, x_{k-9}$ *графа* $G(n,p)$ *четно–расширяемые*$)) = 0.$

Доказательство. Рассмотрим свойство L, выражаемой формулой $\varphi =$

$$(\forall x_1 \ldots \forall x_{k-9} \exists x_{k-8} \exists x_{k-7} \, (([\forall v \, (N(x_1, \ldots, x_{k-7}) \geq^* N(x_1, \ldots, x_{k-8}, v))] \wedge$$

$$[\forall \tilde{x}_{k-8} \exists \tilde{x}_{k-7} \, (N(x_1, \ldots, x_{k-7}) \leq^* N(x_1, \ldots, x_{k-9}, \tilde{x}_{k-8}, \tilde{x}_{k-7}))]) \Rightarrow$$
$$(N(x_1, \ldots, x_{k-7}) \text{ — четное}))),$$

где предикат $\leq^*$ определен в (2.8), предикат R_z определен в (2.11),

$$(N(x_1, \ldots, x_{k-7}) \text{ — четное}) =$$
$$(\exists z \, \forall x \in N(x_1, \ldots, x_{k-7}) \, \exists y \in N(x_1, \ldots, x_{k-7})$$
$$((x \neq y) \wedge [R_{z,x_1,\ldots,x_{k-10}}(x, y) \wedge (\forall \tilde{y} \in N(x_1, \ldots, x_{k-7}) \, ((y \neq \tilde{y}) \Rightarrow$$
$$(\neg R_{z,x_1,\ldots,x_{k-10}}(x, \tilde{y}))))])). \qquad (2.12)$$

Пусть $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и любые вершины $x_1, \ldots, x_{k-9}$ этого графа являются четно–расширяемыми. Пусть $x_1, \ldots, x_{k-9}$ — произвольные вершины графа $\mathcal{G}$. Рассмотрим вершину x_{k-8}, для которой существует вершина x_{k-7}, обладающая следующим свойством

$$[\forall v \, (|N(x_1, \ldots, x_{k-7})| \geq |N(x_1, \ldots, x_{k-8}, v|))] \wedge$$
$$\wedge [\forall \tilde{x}_{k-8} \exists \tilde{x}_{k-7} \, (|N(x_1, \ldots, x_{k-7})| \leq |N(x_1, \ldots, x_{k-9}, \tilde{x}_{k-8}, \tilde{x}_{k-7})|)].$$

Тогда $|N(x_1, \ldots, x_{k-7})| = m$. Поэтому из определения множества $\tilde{\Omega}_n$ следует, что мы можем заменить последний предикат его аналогом первого порядка

$$[\forall v \, (N(x_1, \ldots, x_{k-7}) \geq N(x_1, \ldots, x_{k-8}, v))] \wedge$$
$$\wedge [\forall \tilde{x}_{k-8} \exists \tilde{x}_{k-7} \, (N(x_1, \ldots, x_{k-7}) \leq N(x_1, \ldots, x_{k-9}, \tilde{x}_{k-8}, \tilde{x}_{k-7}))].$$

Более такого, предикат "$|N(x_1, \ldots, x_{k-7})|$ — четное число" может быть заменен предикатом "$N(x_1, \ldots, x_{k-7})$ — четное" по той же причине. Следовательно, свойство L выполнено.

Очевидно, для любого графа $\mathcal{G} \in \Omega_n$, обладающего свойством L, любые его вершины $x_1, \ldots, x_{k-9}$ являются четно–расширяемыми. Так как

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(G(n, p) \in \tilde{\Omega}_n) = 1,$$

то лемма 2.3.1 доказана. $\square$

Если m — четное число и $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$, то любые вершины $x_1, \ldots, x_{k-9}$ графа $\mathcal{G}$ являются четно–расширяемыми. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(G(n, p) \vDash L) = 1.$$

Если m — нечетное число и $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$, то любые вершины $x_1, \ldots, x_{k-9}$ графа $\mathcal{G}$ не являются четно–расширяемыми. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(G(n, p) \vDash L) = 0.$$

Неравенство (2.10) доказано.

Докажем, наконец, что при $k \geq 8$

$$\max(S_k^1)' \geq 1 - \frac{1}{2^{k-5}}. \tag{2.13}$$

Пусть $m \geq 2$ — натуральное число, $k \geq 8$,

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^{k-5}} + \frac{1}{2^{k-5}m}$$

и $p = n^{-\alpha}$.

Прежде всего введем дополнительные обозначения, которые мы будем использовать и в разделе 2.2.4. Пусть $\mathcal{G}$ — произвольный граф, а r, s — произвольные натуральные числа. Для любых вершин $x_1, \ldots, x_s$ графа $\mathcal{G}$ мы будем обозначать $N_r(x_1, \ldots, x_s)$ множество общих r-соседей вершин $x_1, \ldots, x_s$ в $\mathcal{G}$ (при этом о каком именно графе $\mathcal{G}$ идет речь всегда будет ясно из контекста). Мы называем *r-соседом* вершины x такую вершину y, что наименьшая длина пути, соединяющего вершины x и y, равна r. Положим

$$N(x_1, \ldots, x_s) := N_1(x_1, \ldots, x_s).$$

Рассмотрим множество $\tilde{\Omega}_n$ всех графов $\mathcal{G}$ из Ω_n, обладающих следующими свойствами.

1) Для любой такой строго сбалансированной пары (G, H), что

$$V(H) = \{h_1, \ldots, h_v\}, \quad \rho(G, H) < 1/\alpha,$$

$$v \leq (2^{k-5} - 1)(m - 1) + 2, \quad v(G) \leq 2(2^{k-5} - 1)(m - 1) + 3,$$

у любого v-вершинного набора найдется $(G, (h_1, \ldots, h_v))$-расширение в $\mathcal{G}$.

2) В $\mathcal{G}$ нет копий ни одного графа G, количество вершин которого не превосходит

$$2(2^{k-5} - 1)(m + 1) + 2,$$

а максимальная плотность больше числа $1/\alpha$.

В силу теорем 1.3.2, 1.3.4 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p) \in \tilde{\Omega}_n) = 1.$$

Определим свойство вершин x и y, заключающееся в том, что расстояние между ними равно i, следующей формулой первого порядка:

$$D_i^*(x,y) = D_i(x,y) \wedge \left(\neg \left(\bigvee_{j=1}^{i-1} D_j(x,y) \right) \right),$$

где $D_i(x,y)$ — формула первого порядка кванторной глубины $\lceil \log_2 i \rceil$:

$$D_i(x,y) = \exists v \, (D_{i/2}(x,v) \wedge D_{i/2}(y,v)), \text{ если } i \text{ четно},$$

$$D_i(x,y) = \exists v \, (D_{(i-1)/2}(x,v) \wedge D_{(i+1)/2}(y,v)), \text{ если } i \text{ нечетно},$$

и

$$D_1(x,y) = (x \sim y), \quad D_0(x,y) = (x = y).$$

Положим, кроме того, для сокращения записи

$$D_{i,j}^*(x,y,z) = D_i^*(x,z) \wedge D_j^*(z,y).$$

Пусть L — свойство первого порядка, записываемое с помощью формулы первого порядка $\exists a \exists b \; \varphi(a,b)$ кванторной глубины k, где $\varphi(a,b) =$

$$(S(a,b) \wedge [\forall u \, (D^*_{2^{k-6},2^{k-6}}(a,b,u) \Rightarrow R(a,u))] \wedge$$

$$[\neg(\exists z \; ((z \neq a) \wedge (\forall u \, (D^*_{2^{k-6},2^{k-6}}(a,b,u) \Rightarrow D^*_{2^{k-5}}(u,z)))))]),$$

предикат $S(a,b) =$

$$(D^*_{2^{k-5}}(a,b) \wedge (\neg(\exists u_1 \exists u_2 \exists x \; [(u_1 \neq u_2) \wedge$$

$$D^*_{2^{k-6},2^{k-6}}(u_1,u_2,b) \wedge D^*_{2^{k-6},2^{k-6}}(u_1,u_2,a) \wedge \psi(a,b,u_1,u_2,x)]))),$$

где $\psi(a,b,u_1,u_2,x) =$

$$\left(\left(\bigvee_{s=2^{k-6}}^{2^{k-5}} \bigvee_{i=1}^{s} \bigvee_{j=2^{k-6}-i}^{2^{k-5}-i} (D^*_{i,s-i}(a,u_1,x) \wedge D^*_j(x,u_2)) \right) \vee \right.$$

$$\left. \left(\bigvee_{i=1}^{2^{k-6}} (D^*_{i,2^{k-6}-i}(u_1,b,x) \wedge D^*_i(u_2,x)) \right) \right),$$

исключает возможность существования двух различных пересекающихся путей длины, не превосходящей 2^{k-5}, от вершины a к двум различным вершинам из множества $N_{2^{k-6}}(a,b)$ (оно, в том числе, исключает возможность существования общих соседей у любых двух вершин из $N_{2^{k-6}}(a,b)$) и двух различных пересекающихся путей длины 2^{k-6} от вершины b к

двум различным вершинам из множества $N_{2^{k-6}}(a,b)$; истинность предиката $R(a,u) =$

$$\Big(\exists x_1 \exists x_2 \ \Big[D^*_{2^{k-6},2^{k-6}}(a,u,x_1) \wedge D^*_{2^{k-7},2^{k-7}}(a,u,x_2) \wedge$$

$$(\neg D^*_{2^{k-7}}(x_1,x_2)) \wedge \xi(a,x_1,x_2) \wedge \xi(u,x_1,x_2)]\Big),$$

где

$$\xi(a,x_1,x_2) = \left(\neg\left(\exists y \ \left(\bigvee_{i=1}^{2^{k-7}-1} (D^*_{i,2^{k-6}-i}(a,x_1,y) \wedge D^*_{2^{k-7}-i}(y,x_2))\right)\right)\right),$$

означает существование двух непересекающихся путей длин 2^{k-6} и 2^{k-5}, соединяющих вершины a и u.

Предположим, что граф $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ обладает свойством L. Обозначим a, b вершины, для которых истинна формула $\varphi(a,b)$. Пусть X — объединение всех путей длины 2^{k-5} между вершинами a и b в графе $\mathcal{G}$, χ — количество таких цепей и

$$N_{2^{k-6}}(a,b) = \{x^1, \ldots, x^\chi\}.$$

Докажем, что $\chi \geq m$. Предположим противное: $\chi < m$. В силу определения множества $\tilde{\Omega}_n$ в графе $\mathcal{G}$ найдется такая вершина z, что для каждого $i \in \{1, \ldots, \chi\}$ выполнено свойство $D^*_{2^{k-5}}(x^i, z)$ и существует χ попарно непересекающихся по вершинам (отличным от z) путей $P_1, \ldots, P_\chi$ от вершины z к каждой из вершин $x^1, \ldots, x^\chi$ соответственно. Действительно, в таком случае пара $(X \cup P_1 \cup \ldots \cup P_\chi, X)$ является строго сбалансированной, и ее плотность равна

$$\frac{2^{k-5}\chi}{(2^{k-5}-1)\chi+1} = \frac{1}{1-1/2^{k-5}+1/(\chi 2^{k-5})} < \frac{1}{1-1/2^{k-5}+1/(m2^{k-5})} = \frac{1}{\alpha}.$$

Получили противоречие со свойством L. Следовательно, $\chi \geq m$. Докажем, наконец, что $\chi = m$. Предположим противное: $\chi > m$. Удалим из графа X несколько путей длины 2^{k-5} между вершинами a, b (оставив в графе вершины a, b) так, чтобы осталось $m+1$ путей. Добавим в оставшийся граф путь длины 2^{k-5} из $\mathcal{G}$ между вершиной a и вершинами из $N_{2^{k-6}}(a,b)$ (по одной для каждой вершины), непересекающиеся по вершинам (отличным от a) между собой и непересекающие по неконцевым вершинам цепи из X. Обозначим $\tilde{X}$ полученный граф. Тогда

$$\rho(\tilde{X}) = \frac{2^{k-4}(m+1)}{2(2^{k-5}-1)(m+1)+2} > 1/\alpha,$$

что противоречит свойству 2 определения множества $\tilde{\Omega}_n$.

Итак, $\chi = m$. Пусть z — такая вершина, отличная от a, что предикат $D^*_{2^{k-5}}(\cdot, z)$ является истинным для всех вершин из $N_{2^{k-6}}(a, b)$. Тогда в графе $\mathcal{G}$ найдутся пути $P_1, \ldots, P_m$ длины 2^{k-5}, соединяющие вершину z с вершинами $x^1, \ldots, x^m$ соответственно. Предположим, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ выполнено

$$P_{i+1} \subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_i.$$

Положим

$$P_{i+1} = (\{x^{i+1}, v_1, \ldots, v_{2^{k-5}-1}, z\}, \{\{x^{i+1}, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{2^{k-5}-1}, z\}\}).$$

Тогда для некоторого $j \in \{1, \ldots, i\}$ вершина v_1 принадлежит множеству $V(P_j)$. Очевидно, вершина v_1 отлична от вершины x^j (иначе истинным является предикат $D_{2^{k-5}-1}(x^j, z)$). Докажем, что $v_1 \sim x^j$ в $\mathcal{G}$. Действительно, в противном случае является истинным предикат $D_s(z, v_1)$ для некоторого натурального $s < 2^{k-5} - 1$. Но так как $v_1 \sim x^{i+1}$, то истинным является и предикат $D_{s+1}(x^{i+1}, z)$, что противоречит истинности предиката $D^*_{2^{k-5}}(x^{i+1}, z)$. Таким образом, вершина v_1 является общим соседом вершин x^{i+1} и x^j, что в свою очередь противоречит истинности предиката $S(a, b)$. Окончательно получаем, что для любого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ выполнено

$$P_{i+1} \nsubseteq P_1 \cup \ldots \cup P_i.$$

Добавим в граф X цепи длины 2^{k-5} из $\mathcal{G}$ между вершиной a и вершинами из $N_{2^{k-6}}(a, b)$ (по одной для каждой вершины), непересекающиеся по вершинам (отличным от a) между собой и непересекающие по неконцевым вершинам цепи из X. Полученный граф снова будем обозначать X. Рассмотрим последовательность графов

$$X_0 = X,\ X_1 = X \cup P_1,\ X_2 = X \cup P_1 \cup P_2,\ \ldots,\ X_m = X \cup P_1 \cup \ldots \cup P_m.$$

Положим $Y := X_m$. Для каждого $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ граф X_{i+1} получается из графа X_i добавлением некоторого количества $n_i \leq 2^{k-5} - 1$ вершин и хотя бы $e_i \geq n_i + 1$ ребер. Поэтому

$$1/\rho(Y) \leq \frac{2(2^{k-5} - 1)m + 2 + n_1 + \ldots + n_m + 1}{2^{k-4}m + n_1 + \ldots + n_m + m} \leq \alpha,$$

причем равенства достигаются тогда и только тогда, когда $n_i = 2^{k-5} - 1$ и $e_i = 2^{k-5}$ для всех $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Поэтому в силу определения множества $\tilde{\Omega}_n$ эти равенства верны и

$$1/\rho(Y) = 1/\rho(X) = \alpha.$$

Так как в графе $\mathcal{G}$ не существует вершины z, обладающей упомянутыми выше свойствами, то граф $\mathcal{G}$ не содержит копию графа Y, содержащую граф X.

В оставшейся части доказательства теоремы мы будем использовать именно эти обозначения X и Y для двух полученных графов (первый из которых строго сбалансированный, а второй — сбалансированный, причем пара (Y, X) является строго сбалансированной) с плотностью $1/\alpha$. Обозначим $\tilde{L}$ полученное свойство графа $\mathcal{G}$ (существование копии X, не содержащейся ни в одной копии Y). Мы доказали, что если $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и $\mathcal{G}$ обладает свойством L, то $\mathcal{G}$ обладает и свойством $\tilde{L}$.

Предположим теперь, что $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и $\mathcal{G}$ обладает свойством $\tilde{L}$. Очевидно, в этом случае $\mathcal{G}$ обладает и свойством L.

В силу леммы 1.3.3 существует частичный предел

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}(G(n_i, n_i^{-\alpha}) \models \tilde{L}) = c,$$

отличный от 0 и 1. Более того, по доказанному

$$\mathsf{P}(G(n_i, n_i^{-\alpha}) \models L) \sim \mathsf{P}(G(n_i, n_i^{-\alpha}) \in \tilde{\Omega}_{n_i}, G(n_i, n_i^{-\alpha}) \models L) =$$

$$= \mathsf{P}(G(n_i, n_i^{-\alpha}) \in \tilde{\Omega}_{n_i}, G(n_i, n_i^{-\alpha}) \models \tilde{L}) \sim \mathsf{P}(G(n_i, n_i^{-\alpha}) \models \tilde{L}) = c. \quad (2.14)$$

Так как

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k-5}} + \frac{1}{2^{k-5}m}\right) = 1 - \frac{1}{2^{k-5}},$$

то неравенство (2.13) доказано. Так как $S_k^2 \supset S_k^1$, то это неравенство, очевидно, выполнено и для множества S_k^1. В силу теорем 1.2.1, 1.2.4 множество $S_k^1 \cap (1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1)$ является конечным. Кроме того, как доказано в разделе 2.3.1 любое число α, удовлетворяющее условиям (2.3), (2.4), и любое число α, удовлетворяющее условиям (2.5)–(2.7), не принадлежат множеству S_k^2. Следовательно, в силу того, что множества S_k^1 и S_k^2 являются вполне упорядоченными относительно порядка $>$ (см. раздел 2.1), в интервале $[1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1)$ нет предельных точек множеств S_k^1, S_k^2. Теорема доказана.

2.3.3. Доказательство теоремы 2.2.3

Рассмотрим полный граф H с

$$V(H) = \{v_1, \ldots, v_{k-2}\}.$$

Пусть $\mathcal{S}$ — множество всех подмножеств $V(H)$. Рассмотрим такие пары (K_j, T), $j \in \{0, 1, \ldots, k-2\}$, что

$$V(T) = \{u_1, \ldots, u_{k-2}\},$$

$$V(K_0) = V(T) \sqcup \{u_{k-1}\}, \;\; V(K_j) = V(K_0) \sqcup \{u^1, \ldots, u^j\},$$

$$E(K_0) = E(T) \sqcup \{\{u_1, u_{k-1}\}, \ldots, \{u_{k-2}, u_{k-1}\},$$

$$E(K_j) =$$

$$E(K_0) \sqcup \{\{u_2, u^1\}, \ldots, \{u_{k-1}, u^1\}, \{u_1, u^2\}, \{u_3, u^2\}, \ldots, \{u_{k-1}, u^2\}, \ldots,$$

$$\{u_1, u^j\}, \ldots, \{u_{j-1}, u^j\}, \{u_{j+1}, u^j\}, \ldots, \{u_{k-1}, u^j\}\}.$$

Для каждого множества $S \in \mathcal{S}$ определим граф H_S следующим образом. Пусть $H(S)$ — граф, полученный из H перенумерацией его вершин:

$$(i_1(S), \ldots, i_{k-2}(S)) \to (1, \ldots, k-2),$$

где

$$S = \{v_{i_1(S)}, \ldots, v_{i_{|S|}(S)}\}, \;\; \{v_1, \ldots, v_{k-2}\} \setminus S = \{v_{i_{|S|+1}(S)}, \ldots, v_{i_{k-2}(S)}\}.$$

Граф H_S является точным $(K_{|S|}, (u_1, \ldots, u_{k-2}))$-расширением набора вершин $(i_1(S), \ldots, i_{k-2}(S))$. Пусть $r \in \{1, \ldots, 2^{k-2}\}$. Для любых различных $S_1, \ldots, S_r \in \mathcal{S}$ обозначим

$$H_{S_1,\ldots,S_r} = H_{S_1} \cup \ldots \cup H_{S_r}$$

(мы определяем графы H_S таким образом, что пересечение любых двух $V(H_{S_{i_1}}), V(H_{S_{i_2}})$ равно $\{v_1, \ldots, v_{k-2}\}$). Определим множество плотностей строго сбалансированных графов $H_{S_1,\ldots,S_r}$ по всем $r \in \{(k-2)^2, \ldots, 2^{k-2}-1\}$ и различным $S_1, \ldots, S_r \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$. Очевидно,

$$v(H_{S_1,\ldots,S_r}) = k - 2 + r + |S_1| + \ldots + |S_r|, \tag{2.15}$$

$$e(H_{S_1,\ldots,S_r}) = \frac{(k-2)(k-3)}{2} + (k-2)(r + |S_1| + \ldots + |S_r|). \tag{2.16}$$

Следовательно,

$$1/\rho^{\max}(H_{S_1,\ldots,S_r}) = 1/\rho(H_{S_1,\ldots,S_r}) =$$

$$\frac{1}{k-2} + \frac{k-1}{(k-2)(k-3+2(r+|S_1|+\ldots+|S_r|))}.$$

Очевидно, $r + |S_1| + \ldots + |S_r|$ принимает все натуральные значения из

$$[(k-2)^3, k2^{k-3} - 1],$$

не считая не более 2^{k-2} значений. Следовательно, существует не менее

$$(k-2)2^{k-3} - (k-2)^3$$

различных значений $1/\rho^{\max}(H_{S_1,\ldots,S_r})$.

Докажем далее, что для любого $k \geq 7$, $r \in \{(k-2)^2, \ldots, 2^{k-2}-1\}$ и различных $S_1, \ldots, S_r \in \mathcal{S}$ точка

$$\alpha = \frac{1}{k-2} + \frac{k-1}{(k-2)(k-3+2(r+|S_1|+\ldots+|S_r|))} \tag{2.17}$$

принадлежит множеству S_k^1 и, тем самым, докажем равенство

$$\left| S_k^1 \cap \left(0, \frac{1}{k-2.5}\right) \right| = \Omega(k2^k).$$

Пусть $k \geq 7$, $r \in \{(k-2)^2, \ldots, 2^{k-2}-1\}$, $S_1, \ldots, S_r \in \mathcal{S}$, α определено равенством (2.17) и $p = n^{-\alpha}$. Рассмотрим свойство первого порядка L, определенное следующей формулой:

$$\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_{k-2}\ (x_1 \sim x_2) \wedge \ldots \wedge (x_1 \sim x_{k-2}) \wedge \ldots \wedge (x_{k-3} \sim x_{k-2}) \wedge$$

$$\varphi_{S_1}(x_1, \ldots, x_{k-2}) \wedge \ldots \wedge \varphi_{S_r}(x_1, \ldots, x_{k-2}),$$

где

$$\varphi_S(x_1, \ldots, x_{k-2}) = \exists x_{k-1}\ (x_{k-1} \sim x_1) \wedge \ldots \wedge (x_{k-1} \sim x_{k-2}) \wedge$$

$$\left(\bigwedge_{t \in \{i_1(S), \ldots, i_{|S|}(S)\}} \tilde{\varphi}_t(x_1, \ldots, x_{k-1}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{t \notin \{i_1(S), \ldots, i_{|S|}(S)\}} \hat{\varphi}_t(x_1, \ldots, x_{k-1}) \right),$$

$$\tilde{\varphi}_t(x_1, \ldots, x_{k-1}) =$$

$$\exists x_k\ (x_k \sim x_1) \wedge \ldots \wedge (x_k \sim x_{t-1}) \wedge (x_k \nsim x_t) \wedge (x_k \sim x_{t+1})) \wedge \ldots \wedge (x_k \sim x_{k-1}),$$

$$\hat{\varphi}_t(x_1, \ldots, x_{k-1}) =$$

$$\forall x_k\ (\neg((x_k \sim x_1) \wedge \ldots \wedge (x_k \sim x_{t-1}) \wedge (x_k \sim x_{t+1}) \wedge \ldots \wedge (x_k \sim x_{k-1}))).$$

Кванторные глубины формул $\tilde{\varphi}_t(x_1, \ldots, x_{k-1})$, $\hat{\varphi}_t(x_1, \ldots, x_{k-1})$ равны 1. Следовательно, кванторные глубины формул $\varphi_S(x_1, \ldots, x_{k-2})$ равны 2. Наконец, кванторная глубина формулы φ равна k.

Предположим, что граф $\mathcal{G} \in \Omega_n$ обладает свойством L. Тогда существуют такие вершины $x_1, \ldots, x_{k-2}$, что для любого $S \in \{S_1, \ldots, S_r\}$ в графе $\mathcal{G}$ найдется точное $(H_S, (v_1, \ldots, v_{k-2}))$-расширение $\mathcal{G}_S$ набора

$(x_{i_1(S)}, \ldots, x_{i_{k-2}(S)})$. Обозначим $x_{S_1}, \ldots, x_{S_r}$ вершины графов $\mathcal{G}_{S_1}, \ldots, \mathcal{G}_{S_r}$, соединенные ребрами с каждой из вершин $x_1, \ldots, x_{k-2}$. Так как множества $S_1, \ldots, S_r$ попарно различны, то любые две вершины из $x_{S_1}, \ldots, x_{S_r}$ не совпадают. Более того, для любых различных $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, r\}$ любая вершина

$$x \in V(\mathcal{G}_{S_{i_1}}) \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-2}, x_{S_{i_1}}\}$$

не совпадает с $x_{S_{i_2}}$, так как вершина $x_{S_{i_2}}$ соединена ребрами с каждой из $x_1, \ldots, x_{k-2}$, а вершина x — с ровно $k-3$ из них. Предположим, что для любых различных $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, r\}$, любые вершины x и y из $V(\mathcal{G}_{S_{i_1}}) \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-2}, x_{S_{i_1}}\}$ и $V(\mathcal{G}_{S_{i_2}}) \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-2}, x_{S_{i_2}}\}$ соответственно не совпадают. Обозначим $\mathcal{G}^1$ объединение графов $\mathcal{G}_{S_1}, \ldots, \mathcal{G}_{S_r}$. Если существуют такие различные $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, r\}$, что множества $V(\mathcal{G}_{S_{i_1}}) \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-2}, x_{S_{i_1}}\}$, $V(\mathcal{G}_{S_{i_2}}) \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-2}, x_{S_{i_2}}\}$ имеют общие элементы, то обозначим $\mathcal{G}^2$ объединение графов $\mathcal{G}_{S_1}, \ldots, \mathcal{G}_{S_r}$. Докажем, что выполнено неравенство

$$\rho(\mathcal{G}^1) < \rho(\mathcal{G}^2).$$

Очевидно, количества вершин и ребер графа $\mathcal{G}^1$ определены равенствами (2.15) и (2.16). Кроме того, существует такое натуральное число x, что

$$v(\mathcal{G}^2) = v(\mathcal{G}^1) - x,$$
$$e(\mathcal{G}^2) = e(\mathcal{G}^1) - x(k-2) + x.$$

Очевидно, неравенство

$$\frac{e(\mathcal{G}^1)}{v(\mathcal{G}^1)} < \frac{e(\mathcal{G}^1) - x(k-3)}{v(\mathcal{G}^1) - x}$$

выполнено при $\rho(\mathcal{G}^1) > k-3$. Последнее неравенство следует из

$$1/\rho(\mathcal{G}^1) < \frac{1}{k-2} + \frac{k-1}{(k-2)(k-3+2(k-2)^2)} = \frac{1}{k-2.5},$$

если $r \geq (k-2)^2$. В силу теоремы 1.3.2 с вероятностью, стремящейся к 1, в случайном графе $G(n,p)$ не существует копий графа $\mathcal{G}_2$. Более того, в силу теоремы 1.3.3 существует число $c \in (0,1)$, такое что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \supset \mathcal{G}_1) = c.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models L) \leq c.$$

Заметим, что если $\mathcal{G} \supset \mathcal{G}_1$ и граф $\mathcal{G}_1$ является (K_0, T)-максимальным в $\mathcal{G}$, то граф $\mathcal{G}$ обладает свойством L. В силу теоремы 1.3.2 с вероятностью, стремящейся к 1, любая копия $\mathcal{G}_1$ в $G(n,p)$ является (K_0, T)-максимальной в $G(n,p)$ (так как любое $(K_0, (u_1, \ldots, u_{k-2}))$-расширение его подграфа в объединении с самим графом дает граф с плотностью, превосходящей $1/\rho$). Следовательно,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \vDash L) \geq c.$$

Окончательно получаем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \vDash L) = c.$$

Так как $S_k^2 \supset S_k^1$, то

$$\left| S_k^2 \cap \left(0, \frac{1}{k-2.5}\right) \right| \geq \left| S_k^1 \cap \left(0, \frac{1}{k-2.5}\right) \right| = \Omega(k2^k).$$

Равенство (2.2) мы установили при доказательстве теоремы 2.2.1.

Из доказательства теоремы 2.2.1 следует, что числа вида (2.5) где $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь, $a \geq \max\{1, 2^{k-1} - b\}$, $b \in \mathbb{N}$, не принадлежат спектру S_k^2. Следовательнр,

$$\left| S_k^1 \cap \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right) \right| \leq \left| S_k^2 \cap \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right) \right| \leq 1+2+\ldots+2^{k-1}-2 < 2^{2k}.$$

Наконец, из теоремы 1.2.2 следует, что числа вида (2.5), где

$$a \in \{1, 2, \ldots, 2^{k-1} - (b+1)^2,$$

$$b \in \left\{1, 2, \ldots, \left\lceil \sqrt{2^{k-1}} \right\rceil - 2\right\}$$

принадлежат спектру S_k^1. В этой связи при $k \geq 5$

$$\left| S_k^2 \cap \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right) \right| \geq \left| S_k^1 \cap \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right) \right| \geq$$

$$2^{k-1} - 2^2 + 2^{k-1} - 3^2 + \ldots + 2^{k-1} - \left(\left\lceil \sqrt{2^{k-1}} \right\rceil - 1 \right)^2 \geq$$

$$\left(\left\lceil \sqrt{2^{k-1}} \right\rceil - 2 \right) 2^{k-1} - \frac{1}{3} \left\lceil \sqrt{2^{k-1}} \right\rceil^3 \geq \frac{1}{3\sqrt{2}} 2^{3k/2} - 2^k \geq \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{5} \right) 2^{3k/2}.$$

Теорема доказана.

2.3.4. Доказательство теоремы 2.2.4

Пусть $k \geq 5$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\alpha = \frac{1}{[k/2]} + \frac{1}{[k/2](m + [k/2] - 1)}$$

и $p = n^{-\alpha}$.

Рассмотрим множество $\tilde{\Omega}_n$ всех графов $\mathcal{G}$ из Ω_n, обладающих следующими свойствами.

1) Для любой такой строго сбалансированной пары (G, H), что $V(H) = \{h_1, \ldots, h_v\}$, $\rho(G, H) < 1/\alpha$,

$$v \leq m + [k/2] - 1, \quad v(G) \leq 2(m + [k/2] - 1),$$

у любого v-вершинного набора найдется $(G, (h_1, \ldots, h_v))$-расширение в $\mathcal{G}$.

2) В $\mathcal{G}$ нет копий ни одного графа G, количество вершин которого не превосходит $2(m + [k/2] + 1)$, а максимальная плотность больше числа $1/\alpha$.

В силу теоремы 1.3.2 и теоремы 1.3.4 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p) \in \tilde{\Omega}_n) = 1.$$

Пусть L — свойство первого порядка, записываемое с помощью формулы первого порядка

$$\exists x_1 \ldots \exists x_{[k/2]}\ \varphi(x_1, \ldots, x_{[k/2]})$$

кванторной глубины

$$\max(2[k/2], [k/2] + 3) \leq k,$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_{[k/2]}) =$

$$[K(x_1, \ldots, x_{[k/2]}) \wedge (\exists y_1 \ldots \exists y_{[k/2]}\ [(y_1 \in N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})) \wedge \ldots \wedge$$

$$(y_{[k/2]} \in N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})) \wedge K(y_1, \ldots, y_{[k/2]})])$$

$$\wedge(\neg(\exists z\ [R_z^2 \wedge \ldots \wedge R_z^{[k/2]} \wedge (\forall y\ ((y \in N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})) \Rightarrow R_z^{1,2}(y)))]))],$$

$$K(x_1, \ldots, x_{[k/2]}) =$$

$$((x_1 \sim x_2) \wedge (x_1 \sim x_3) \wedge \ldots \wedge (x_1 \sim x_{[k/2]}) \wedge \ldots \wedge (x_{[k/2]-1} \sim x_{[k/2]})),$$

$$(y \in N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})) = ((y \sim x_1) \wedge \ldots \wedge (y \sim x_{[k/2]})),$$

для любых $1 \leq i < j \leq [k/2]$

$$R_z^{i,j}(a) = (\exists v\ [(v \in N(z, a, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{[k/2]})) \wedge$$

$$(v \nsim x_i) \wedge (v \nsim x_j)]),$$

для любого $2 \leq i \leq [k/2]$

$$R_z^i = (\exists v\ [v \in N(z, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{[k/2]})]).$$

Предположим, что граф $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ обладает свойством L. Обозначим $x_1, \ldots, x_{[k/2]}$ вершины, для которых истинна формула $\varphi(x_1, \ldots, x_{[k/2]})$. Положим

$$X = \mathcal{G}|_{\{x_1, \ldots, x_{[k/2]}\} \cup N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})},$$

$$\chi = |V(X)| - [k/2],$$

где

$$N(x_1, \ldots, x_{[k/2]}) = \{x^1, \ldots, x^\chi\}.$$

Докажем, что $\chi \geq m$. Предположим противное: $\chi < m$. В силу определения множества $\tilde{\Omega}_n$ в графе $\mathcal{G}$ найдется такая вершина z и такие вершины $v_1, \ldots, v_{\chi+[k/2]-1}$, что для каждого $i \in \{1, \ldots, \chi\}$ выполнено

$$v_i \in N(x^i, z, x_3, \ldots, x_{[k/2]}),$$

а для каждого $i \in \{\chi + 1, \ldots, \chi + [k/2] - 1\}$ —

$$v_i \in N(z, x_1, \ldots, x_{i-\chi}, x_{i-\chi+2}, \ldots, x_{[k/2]}).$$

Действительно, в таком случае пара

$$(\mathcal{G}|_{\{x_1, \ldots, x_{[k/2]}, v_1, \ldots, v_{\chi+[k/2]-1}, z\} \cup N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})}, X)$$

является строго сбалансированной, а ее плотность равна

$$\frac{[k/2](\chi + [k/2] - 1)}{\chi + [k/2]} = \frac{1}{1/[k/2] + 1/([k/2](\chi + [k/2] - 1))} < \frac{1}{\alpha}.$$

Получили противоречие со свойством L. Следовательно, $\chi \geq m$. Докажем, наконец, что $\chi = m$. Предположим противное: $\chi > m$. Удалим

из множества $N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})$ несколько вершин так, чтобы в этом множестве осталось $m+1$ вершин. Обозначим $\tilde{X}$ подграф в X индуцированный на полученное множество вершин, объединенное с вершинами $x_1, \ldots, x_{[k/2]}$. Тогда

$$\rho(\tilde{X}) \geq \frac{[k/2](m+1) + [k/2]([k/2]-1)}{m+1+[k/2]} > 1/\alpha,$$

что противоречит свойству 2 определения множества $\tilde{\Omega}_n$.

Итак, $\chi = m$. Пусть z — такая вершина, что предикат $R_z^{1,2}$ является истинным для всех вершин из $N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})$, а для каждого $i \in \{2, \ldots, [k/2]\}$ — предикат R_z^i. Тогда в графе $\mathcal{G}$ найдутся такие вершины $v_1, \ldots, v_j$, что $z \in N(v_1, \ldots, v_j)$ и множество

$$\{x_1, \ldots, x_{[k/2]-1}\} \cup N(x_1, \ldots, x_{[k/2]})$$

можно разбить на j подмножеств $N_1, \ldots, N_j$ следующим образом: для любого $i \in \{1, \ldots, j\}$ и любой вершины $y \in N_i$ выполнено $y \sim v_i$ и v_i соединена с $[k/2]-2$ вершинами из $x_1, \ldots, x_{[k/2]}$, отличными от y. Положим

$$Y = \mathcal{G}|_{\{x_1,\ldots,x_{[k/2]},v_1,\ldots,v_j,z\} \cup N(x_1,\ldots,x_{[k/2]})}.$$

Тогда

$$1/\rho(Y) \leq \frac{[k/2]+j+1+m}{[k/2](m+[k/2]-1)+m+[k/2]-1+j([k/2]-1)}.$$

Заметим, что при $j < m+[k/2]-1$ выполнено неравенство $1/\rho(Y) < \alpha$. Поэтому в силу определения множества $\tilde{\Omega}_n$ имеем $j \geq m+[k/2]-1$. Отсюда в силу определения числа j получаем $j = m+[k/2]-1$. Поэтому

$$1/\rho(Y) \leq \frac{2(m+[k/2])}{2[k/2](m+[k/2]-1)} = \frac{1}{[k/2]} + \frac{1}{[k/2](m+[k/2]-1)} = \alpha,$$

$$1/\rho(X) \leq \frac{m+[k/2]}{[k/2](m+[k/2]-1)} = \alpha.$$

Так как множество $\tilde{\Omega}_n$ обладает свойством 2, то

$$\rho(X) = \rho(Y) = 1/\alpha.$$

Так как в графе $\mathcal{G}$ не существует вершины z, обладающей упомянутыми выше свойствами, то граф $\mathcal{G}$ не содержит копию графа Y, содержащую граф X.

В оставшейся части доказательства теоремы мы будем использовать именно эти обозначения X и Y для двух полученных графов (первый из которых строго сбалансированный, а второй — сбалансированный, причем пара (Y, X) является строго сбалансированной) с плотностью $1/\alpha$. Обозначим, кроме того, $\tilde{L}$ полученное свойство графа $\mathcal{G}$ (существование копии X, не содержащейся ни в одной копии Y). Таким образом, мы доказали, что если $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и $\mathcal{G}$ обладает свойством L, то $\mathcal{G}$ обладает и свойством $\tilde{L}$.

Предположим теперь, что $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и $\mathcal{G}$ обладает свойством $\tilde{L}$. Очевидно, в этом случае $\mathcal{G}$ обладает и свойством L.

В силу леммы 1.3.3 существует частичный предел

$$\lim_{i\to\infty} \mathsf{P}(G(n_i, n_i^{-\alpha}) \models \tilde{L}) = c,$$

отличный от 0 и 1. Более того, по доказанному выполнены соотношения (2.14).

Так как

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{[k/2]} + \frac{1}{[k/2](m + [k/2] - 1)} \right) = \frac{1}{[k/2]},$$

то теорема доказана.

Глава 3.

Универсальный закон нуля или единицы

3.1. Введение

В разделе 1 мы доказали, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы при α близких к нулю и при α близких к единице (см. теоремы 1.1.3, 1.2.1–1.2.4). Тем не менее, поведение вероятностей свойств при $\alpha \in (1/(k-2), 1-2^{1-k})$ остается не исследованным.

Дж. Спенсер [111] доказал, что существуют свойства первого порядка с бесконечным спектром S_k^2 (см. также раздел 2.1). В совместной работе Дж. Спенсер и С. Шелах [106] доказали, что множество критических точек вполне упорядочено относительно порядка $>$. Таким образом, все его предельные точки являются правосторонними пределами. Так как для любого натурального k выполнено $|\mathcal{L}_k| < \infty$ (см., например, [5]), то слева от каждой рациональной точки $t/s \in (0,1)$ существует целый интервал, внутри которого нет ни одной точки спектра S_k^2 (поэтому на этом интервале выполнен k-закон нуля или единицы). Мы нашли явно такой интервал для любых натуральных $k \geq 4$ и рациональных $t/s \in (0,1)$, а также для рациональных чисел t/s с числителем, не превосходящим 2, мы доказали, что логарифм длины найденного нами интервала имеет тот же порядок малости, что и логарифм длины максимального такого интервала.

Итак, целью этой главы является исследование выполнения k-закона нуля или единицы для α, находящихся в малой левой полуокрестности некоторого фиксированного рационального числа. Ранее была доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.1. ([133]) *Если* $\alpha \in (184/277, 2/3)$, *то случайный граф*

$G(n, n^{-\alpha})$ *подчиняется* 4*-закону нуля или единицы.*

Замечание. Данный результат можно улучшить, заменив интервал

$$\left(\frac{184}{277}, \frac{2}{3}\right)$$

на

$$\left(\frac{53}{80}, \frac{2}{3}\right),$$

используя методы, аналогичные примененным в [133].

3.2. Новые результаты

Все результаты этого раздела опубликованы в работе [126].

Теорема 3.1.1 является аналогом следующего более общего факта для $k = 4$, $t/s = 2/3$.

Теорема 3.2.1. *Пусть*

$$\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1), \quad k \geq 4. \tag{3.1}$$

Положим

$$q = \frac{(s+1)^k - 1}{s}. \tag{3.2}$$

Тогда внутри интервала

$$\left(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s}\right) \tag{3.3}$$

нет точек спектра S_k^2.

Так как $S_k^1 \subset S_k^2$, то имеет место следующее очевидное утверждение для законов нуля или единицы.

Следствие 3.2.1. *Пусть выполнены условия (3.1), (3.2). Тогда если* α *принадлежит интервалу (3.3), то случайный граф* $G(n, n^{-\alpha})$ *подчиняется* k*-закону нуля или единицы.*

Теорема 3.1.1 дает больший интервал для α, чем теорема 3.2.1 для $k = 4$, $t/s = 2/3$. Мы показали, что если выполнено условие

$$C_{k-2}^{[s/t]} < s + 1, \tag{3.4}$$

то интервал, полученный в теореме 3.2.1 можно увеличить, используя методы, примененные в доказательстве теоремы 3.1.1. Таким образом, теорему 3.2.1 можно усилить, вследствие чего теорема 3.1.1 будет частным случаем такого усиленного варианта.

Теорема 3.2.2. *Пусть выполнены условия (3.1). Положим*

$$q = \frac{(s+1)^{k-2}(1 + s(C_{k-2}^{[s/t]} + 1)) - 1}{s}. \tag{3.5}$$

Тогда внутри интервала (3.3) нет точек спектра S_k^2.

Так как $S_k^1 \subset S_k^2$, то снова имеет место следствие для законов нуля или единицы.

Следствие 3.2.2. *Пусть выполнены условия (3.1), (3.5). Тогда если α принадлежит интервалу (3.3), то случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.*

Легко видеть, что если выполнено неравенство (3.4), то теорема 3.2.2 дает больший интервал значений α, при которых выполнен k-закон, чем теорема 3.2.1.

Итак, ранее был доказан k-закон нуля или единицы для правой и левой полуокрестности 0 и 1 соответственно. При этом оставался огромный промежуток между $\frac{1}{k-2}$ и $1 - \frac{1}{2^{k-1}}$, внутри которого не было найдено интервалов, для которых выполняется k-закон нуля или единицы. С помощью теоремы 3.2.1 и теоремы 3.2.2 мы можем найти такие интервалы на любом промежутке из интервала $(0, 1)$.

Длина интервала, предъявленного в теореме 3.2.1, равна

$$\frac{t}{s(s+1)^k}.$$

Мы доказали, что для точек вида

$$\frac{t}{s} = \frac{2}{m}, \quad m \geq 2, \tag{3.6}$$

теорема 3.2.1 дает правильный порядок малости оценки логарифма длины максимального интервала с правым концом $\frac{t}{s}$, все точки которого "подчиняются k-закону нуля или единицы". Более формально, для каждого $m \geq 2$, для каждого достаточно большого k мы нашли слева от точки $\frac{2}{m}$ такую точку α, для которой не выполнен k-закон нуля или единицы, причем величина $\frac{2}{m} - \alpha$ уменьшается экспоненциально с ростом k.

Теорема 3.2.3. *Пусть выполнены условия (3.6) , $k \geq 10m-5$. Тогда при*

$$\alpha = \frac{t}{s} - \frac{1}{2^{k-10m+8}m(m-1)}$$

случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы.

3.3. Доказательства

Доказательство теорем будет построено по следующей схеме: в разделе 3.3.1 мы докажем теорему 3.2.1, в разделе 3.3.2 — теорему 3.2.2, а в разделе 3.3.3 — теорему 3.2.3.

3.3.1. Доказательство теоремы 3.2.1.

Пусть $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Положим

$$q = \frac{(s+1)^k - 1}{s}. \tag{3.7}$$

Пусть, кроме того,

$$\alpha \in \left(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s} \right).$$

Возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы отрезок $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ полностью лежал внутри интервала $(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s})$. Пусть $p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}]$. Для каждого $i \in \{0, \ldots, k\}$ положим

$$q_i = q - \frac{(s+1)^{k-i} - 1}{s}. \tag{3.8}$$

Определим $\mathcal{K}_i$, $i \in \{0, \ldots, k\}$, как множество всех таких пар графов (K, T), что

$$f_{\alpha-\varepsilon}(K,T) < 0, \quad v(T) \leq q_i, \quad v(K,T) \leq q - q_i. \tag{3.9}$$

Заметим, что $\mathcal{K}_0$ — множество таких пар $(K, (\varnothing, \varnothing))$, что $\rho(K, T) > 1/(\alpha - \varepsilon)$, а $\mathcal{K}_k = \varnothing$. Теперь определим множество графов $\mathcal{S}$. Граф G принадлежит $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда он обладает следующими свойствами.

1) В графе G нет подграфов, количество вершин которых не превосходит q, а плотность больше, чем $\frac{1}{\alpha-\varepsilon}$.

2) Пусть $\mathcal{H}$ — множество таких $(\alpha + \varepsilon)$-надежных пар (H_1, H_2), что $v(H_1) \leq q$. Тогда для любой пары $(H_1, H_2) \in \mathcal{H}$ (положим $V(H_2) = \{h_1, \ldots, h_v\}$) и для любого подграфа $G_2 \subset G$ на $v(H_2) = v$ вершинах (положим $V(G_2) = \{g_1, \ldots, g_v\}$) в графе G найдется такое точное $(H_1, (h_1, \ldots, h_v))$-расширение G_1 набора $(g_1, \ldots, g_v)$, что пара (G_1, G_2) является (K_1, K_2)-максимальной парой в G для любой пары $(K_1, K_2) \in \mathcal{K}_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$.

В силу теоремы 1.3.2 и следствия 1.3.1 для любого $p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}]$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(G(n,p) \in \mathcal{S}\right) = 1.$$

Следовательно, в силу теоремы 1.4.3 для доказательства теоремы 3.2.1 достаточно найти выигрышную стратегию Консерватора в игре EHR(G, H, k) для всех таких пар графов (G, H), что $G, H \in \mathcal{S}$.

Итак, пусть $G, H \in \mathcal{S}$. Для каждого $h \in \{1, \ldots, k\}$ обозначим X_h, Y_h графы, выбранные в h-ом раунде Новатором и Консерватором соответственно. Положим также $X_0 = G$, $Y_0 = H$. Таким образом, множества $\{X_h, Y_h\}$ и $\{G, H\}$ совпадают для всех $h \in \{0, \ldots, k\}$. Вершины, выбранные в первых h раундах в графе X_h, мы будем обозначать $x_h^1, \ldots, x_h^h$, а в графе Y_h — $y_h^1, \ldots, y_h^h$.

Определим теперь стратегию Консерватора для раундов $1, \ldots, k$. Будем говорить, что *Консерватор выиграл в l-ом раунде*, где $l \in \{0, \ldots, k\}$, если существуют такие подграфы $\tilde{X}_l \subset X_l$ и $\tilde{Y}_l \subset Y_l$, что

$$\left\{x_l^1, \ldots, x_l^l\right\} \in V(\tilde{X}_l), \quad \left\{y_l^1, \ldots, y_l^l\right\} \in V(\tilde{Y}_l), \tag{3.10}$$

и существует изоморфизм графов $\varphi_l : V(\tilde{X}_l) \to V(\tilde{Y}_l)$, такой что

$$\varphi_l(x_l^1) = y_l^1, \ldots, \varphi_l(x_l^l) = y_l^l, \tag{3.11}$$

а также $v(\tilde{X}_l) = v(\tilde{Y}_l) \leq q_l$, и для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$ (положим $V(T) = (t_1, \ldots, t_v)$) графы X_l и Y_l не содержат $(K, (t_1, \ldots, t_v))$-расширений наборов вершин из графов $\tilde{X}_l$ и $\tilde{Y}_l$ соответственно. Заметим,

что определение выигрыша Консерватора в игре $\mathrm{EHR}(G, H, k)$ совпадает с новым определением выигрыша в k-ом раунде. Заметим, кроме того, что для графов $\tilde{X}_0 = (\varnothing, \varnothing)$, $\tilde{Y}_0 = (\varnothing, \varnothing)$ в силу свойства 1) выполнено условие победы Консерватора в раунде с номером 0. Докажем, что если $1 \leq l \leq k$ и Консерватор выиграл в $(l-1)$-ом раунде, то он сможет выиграть и в l-ом раунде (в смысле нашего нового определения выигрыша), и, тем самым, докажем утверждение теоремы.

Итак, пусть было сыграно $l-1$ раундов, причем Консерватор выиграл в $(l-1)$-ом раунде. В l-ом раунде Новатор выбирает некоторую вершину x_l^l. Если $x_l^l \in V(\tilde{X}_{l-1})$ или $x_l^l \in V(\tilde{Y}_{l-1})$, то Консерватор, очевидно, выиграет в l-ом раунде, выбрав вершину y_l^l, являющуюся образом x_l^l при изоморфизме φ_{l-1} или φ_{l-1}^{-1} соответственно.

Пусть $x_l^l \in V(X_{l-1}) \setminus V(\tilde{X}_{l-1})$ (в этом случае положим $\tilde{X}_l = \tilde{X}_{l-1}$, $\tilde{Y}_l = \tilde{Y}_{l-1}$) или $x_l^l \in V(Y_{l-1}) \setminus V(\tilde{Y}_{l-1})$ (в этом случае положим $\tilde{X}_l = \tilde{Y}_{l-1}$, $\tilde{Y}_l = \tilde{X}_{l-1}$).

Определим дополнительную конструкцию, которая нам потребуется в дальнейшем. Пусть $\mathcal{K} = \{(K, T), T \subset K\}$ — некоторое множество пар графов. Пару $(\tilde{K}, \tilde{T})$ будем называть *$\mathcal{K}$-цепью*, если существует такое $r \in \mathbb{N}$ и такой набор графов

$$\tilde{T} = K^0 \subset K^1 \subset \ldots \subset K^r = \tilde{K},$$

что для любого $j \in \{1, \ldots, r\}$ граф K^j является $(K, (t_1, \ldots, t_v))$-расширением набора вершин графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}$, у которой $V(T) = \{t_1, \ldots, t_v\}$.

Пусть пара

$$\left(Z, X_l|_{V(\tilde{X}_l) \cup \{x_l^l\}}\right)$$

для некоторого $Z \subset X_l$ является такой $\mathcal{K}_l$-цепью, что граф X_l не содержит $(K, (t_1, \ldots, t_v))$-расширений наборов вершин графа Z ни при каком $(K, T) \in \mathcal{K}_l$ (где $V(T) = \{t_1, \ldots, t_v\}$). Докажем, что пара $(Z, \tilde{X}_l)$ является $(\alpha + \varepsilon)$-надежной. Пусть

$$X_l|_{V(\tilde{X}_l) \cup \{x_l^l\}} = K^0 \subset K^1 \subset \ldots \subset K^r = Z,$$

где для каждого $j \in \{1, \ldots, r\}$ граф K^j является $(K, (t_1, \ldots, t_v))$-расширением набора вершин графа K^{j-1} для некоторой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$ с $V(T) = \{t_1, \ldots, t_v\}$. Для каждого $j \in \{1, \ldots, r\}$ положим

$$v_j = v(K^j) - v(K^{j-1}), \quad e_j = e(K^j) - e(K^{j-1}).$$

В силу определения множества $\mathcal{K}_l$ для любого $j \in \{1, \ldots, r\}$ выполнено неравенство $f_{\alpha-\varepsilon}(K^j, K^{j-1}) < 0$. Следовательно,

$$e_j > \frac{v_j}{\alpha - \varepsilon} > \frac{sv_j}{t}.$$

Таким образом,

$$e_j \geq \frac{sv_j + 1}{t}.$$

Поэтому если $r \geq s + 1$, то

$$f_{\alpha-\varepsilon}(K^r, \tilde{X}_l) \leq 1 + \sum_{j=1}^{r} v_j - (\alpha - \varepsilon) \sum_{j=1}^{r} e_j \leq$$

$$1 - \frac{(\alpha - \varepsilon)r}{t} + \left(1 - \frac{(\alpha - \varepsilon)s}{t}\right) \sum_{j=1}^{r} v_j < 1 - \frac{rq}{qs+1} + \frac{r(q - q_l)}{qs+1} =$$

$$1 - \frac{rq_l}{qs+1} \leq 1 - \frac{(s+1)q_1}{qs+1} = \frac{s(q-q_1) + 1 - q_1}{qs+1} = \frac{(s+1)^{k-1} - q_1}{qs+1} = 0$$

в силу (3.7) и (3.8). Итак,

$$f_{\alpha-\varepsilon}(K^{s+1}, \tilde{X}_l) < 0.$$

Так как

$$v(K^{s+1}, \tilde{X}_l) \leq 1 + (s+1)(q - q_l) = q - q_{l-1},$$

получаем противоречие с определением графа $\tilde{X}_l$. Следовательно, $r \leq s$. Заметим, что для любого подграфа $\tilde{K}^r \subseteq K^r$, содержащего $\tilde{X}_l$, выполнено неравенство

$$f_{\alpha-\varepsilon}(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \geq 0,$$

иначе аналогично получим противоречие с определением графа $\tilde{X}_l$. Докажем, что выполнено более сильное неравенство

$$f_{\alpha+\varepsilon}(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) > 0.$$

Действительно, иначе

$$\frac{e(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l)}{v(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l)} \in \left[\frac{1}{\alpha + \varepsilon}, \frac{1}{\alpha - \varepsilon}\right] \subset \left(\frac{s}{t}, \frac{sq+1}{tq}\right).$$

При этом $v(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \leq q$, следовательно,

$$e(\tilde{K}^r, \tilde{X}_l) \in \left(\frac{sq}{t}, \frac{sq}{t} + \frac{1}{t}\right).$$

Но данный интервал, очевидно, не содержит целых чисел. Таким образом, пара $(K^r, \tilde{X}_l)$ действительно является $(\alpha+\varepsilon)$-надежной. Так как

$$v(K^r) \leq q_{l-1} + 1 + \sum_{j=1}^{r} v_j \leq q_{l-1} + 1 + s \cdot (q - q_l) = q_l,$$

то по свойству 2) в графе Y_l существует такая вершина y_l^l (которую и выберет Консерватор) и подграф W, являющийся точным $(K^r, \mathbf{x}_l)$-расширением набора $\mathbf{y}_l$ (где $\mathbf{x}_l$ — набор вершин графа $\tilde{X}_l$, $\mathbf{y}_l$ — набор вершин графа $\tilde{Y}_l$), что вершина y_l^l является образом вершины x_l^l при изоморфизме графов $\varphi_l : V(K^r) \to V(W)$, таком что

$$\varphi_l|_{V(\tilde{X}_l)} = \varphi_{l-1} \text{ или } \varphi_l|_{V(\tilde{X}_l)} = \varphi_{l-1}^{-1}.$$

Переобозначим $\tilde{X}_l = K^r$, $\tilde{Y}_l = W$. Итак, Консерватор выиграл в l-ом раунде.

Таким образом, действуя по описанной стратегии, Консерватор выиграет в k-ом раунде. А значит, он выиграет в игре $\mathrm{EHR}\,(G, H, k)$, что и требовалось доказать.

3.3.2. Доказательство теоремы 3.2.2

Пусть $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Положим

$$m = C_{k-2}^{[s/t]} + 1, \quad q = \frac{(s+1)^{k-2}(1+sm) - 1}{s}.$$

Пусть, кроме того,

$$\alpha \in \left(\frac{tq}{sq+1}, \frac{t}{s}\right), \quad p \in [n^{-\alpha-\varepsilon}, n^{-\alpha+\varepsilon}],$$

где число ε выбрано в соответствии с тем же условием, что и в доказательстве теоремы 3.2.1. Введем некоторые дополнительные обозначения. Для каждого $i \in \{0, \ldots, k-2\}$ положим

$$q_i = q - \frac{(s+1)^{k-2-i}(1+sm) - 1}{s}.$$

Как и при доказательстве теоремы 3.2.1 определим $\mathcal{K}_i$ (но теперь для $i \in \{0, \ldots, k-2\}$) как множество всех таких пар (K, T), что выполнены условия (3.9). Кроме того, множество графов, обладающих свойствами

1) и 2), определяется в точности, как и при доказательстве теоремы 3.2.1 (с новыми $\mathcal{K}_i$, где $i \in \{0, \ldots, k-2\}$, и q).

В силу теорем 1.3.2, 1.4.3 и следствия 1.3.1 для доказательства теоремы 3.2.2 достаточно для всех таких пар графов (G, H), что $G, H \in \mathcal{S}$, найти выигрышную стратегию Консерватора в игре $\mathrm{EHR}(G, H, k)$.

Итак, пусть $G, H \in \mathcal{S}$. Как и ранее, для каждого $h \in \{1, \ldots, k\}$ обозначим за X_h, Y_h графы выбранные в h-ом раунде Новатором и Консерватором соответственно. Вершины, выбранные в первых h раундах в графе X_h, мы будем обозначать $x_h^1, \ldots, x_h^h$, а в графе Y_h — $y_h^1, \ldots, y_h^h$.

Стратегия Консерватора для раундов $1, \ldots, k-2$ в точности повторяет стратегию Консерватора для раундов $1, \ldots, k$ в доказательстве теоремы 3.2.1. Как и ранее, мы говорим, что *Консерватор выиграл в l-ом раунде* (но теперь $l \in \{0, \ldots, k-2\}$), если существуют такие подграфы $\tilde{X}_l \subset X_l$ и $\tilde{Y}_l \subset Y_l$, что выполнено (3.10), и существует изоморфизм графов $\varphi_l : V(\tilde{X}_l) \to V(\tilde{Y}_l)$, такой что выполнено (3.11), а также $v(\tilde{X}_l) = v(\tilde{Y}_l) \leq q_l$ и для любой пары $(K, T) \in \mathcal{K}_l$ графы X_l и Y_l не содержат $(K, (t_1, \ldots, t_v))$-расширений наборов вершин графов $\tilde{X}_l$ и $\tilde{Y}_l$ соответственно, где $V(T) = \{t_1, \ldots, t_v\}$. Действуя по описанной в разделе 3.3.1 стратегии, Консерватор выиграет в раунде с номером $k-2$.

Если в $(k-1)$-ом раунде Новатор выбирает вершину x_{k-1}^{k-1} в графе $\tilde{X}_{k-2}$ (в этом случае положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$) или в графе $\tilde{Y}_{k-2}$ (в этом случае положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$), то Консерватор выберет вершину y_{k-1}^{k-1}, являющуюся образом вершины x_{k-1}^{k-1} при изоморфизме φ_{k-2} или φ_{k-2}^{-1} соответственно. Если и в k-ом раунде Новатор выберет вершину либо в графе $\tilde{X}_{k-1}$, либо в графе $\tilde{Y}_{k-1}$, то Консерватор, очевидно, победит, выбрав соответствующую вершину либо в графе $\tilde{Y}_{k-1}$, либо в графе $\tilde{X}_{k-1}$. Если же в k-ом раунде Новатор выберет вершину, не принадлежащую ни графу $\tilde{X}_{k-1}$, ни графу $\tilde{Y}_{k-1}$, то пусть для определенности он выбрал вершину в графе X_{k-1}. Тогда, в силу победы Консерватора в $(k-2)$-ом раунде, пара

$$\left(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup \{x_k^k\}}, \tilde{X}_{k-1}\right)$$

является $(\alpha + \varepsilon)$-надежной. Следовательно, в силу свойства 2), в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_k^k, что граф $Y_{k-1}|_{V(\tilde{Y}_{k-1}) \cup \{y_k^k\}}$ является точным $\left(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1}) \cup \{x_k^k\}}, \mathbf{x}_{k-1}\right)$-расширением набора вершин графа $\tilde{Y}_{k-1}$, где $\mathbf{x}_{k-1}$ — набор вершин графа $\tilde{X}_{k-1}$ (наборы упорядочены таким

образом, что изоморфизм графов $\tilde{X}_{k-1}$, $\tilde{Y}_{k-1}$ сохраняет этот порядок). Следовательно, Консерватор победит, выбрав вершину y_k^k.

Пусть в $(k-1)$-ом раунде Новатор выбирает вершину, принадлежащую либо графу $X_{k-2} \setminus \tilde{X}_{k-2}$ (положим $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$), либо графу $Y_{k-2} \setminus \tilde{Y}_{k-2}$ (положим $\tilde{Y}_{k-1} = \tilde{X}_{k-2}$, $\tilde{X}_{k-1} = \tilde{Y}_{k-2}$). Для каждого $[s/t]$-элементного подмножества множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^{k-2}\}$ выберем в графе $X_{k-1} \setminus \tilde{X}_{k-1}$ ровно одну вершину z (если она существует), соединенную ребром со всеми вершинами из данного $[s/t]$-элементного подмножества и с вершиной x_{k-1}^{k-1}. Объединим все выбранные таким образом вершины вместе с вершиной x_{k-1}^{k-1} в множество V. Так как

$$|V| \leq C_{k-2}^{[s/t]} + 1 = m,$$

то в силу определения графа $\tilde{X}_{k-1}$ пара

$$\left(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1})\cup V}, \tilde{X}_{k-1}\right)$$

является $(\alpha+\varepsilon)$-надежной. Следовательно, в силу свойства 2) (см. раздел 3.3.1) в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_{k-1}^{k-1} и граф W, являющийся точным $\left(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1})\cup V}, \mathbf{x}_{k-1}\right)$-расширением набора вершин графа $\tilde{Y}_{k-1}$ (где $\mathbf{x}_{k-1}$ — набор вершин графа $\tilde{X}_{k-1}$), что при изоморфизме графов $X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1})\cup V}$ и W вершины $x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^{k-1}$ переходят в вершины $y_{k-1}^1, y_{k-1}^2, \ldots, y_{k-1}^{k-1}$ соответственно.

Если в k-ом раунде Новатор выберет вершину либо в графе $\tilde{X}_{k-1}$, либо в графе $\tilde{Y}_{k-1}$, то Консерватор, очевидно, победит, выбрав нужную вершину либо в графе $\tilde{Y}_{k-1}$, либо в графе $\tilde{X}_{k-1}$ соответственно. Если же в k-ом раунде Новатор выберет вершину, не принадлежащую ни графу $\tilde{X}_{k-1}$, ни графу $\tilde{Y}_{k-1}$, то пусть для определенности он выбрал вершину в графе X_{k-1}. Тогда в силу определения графа $\tilde{X}_{k-1}$ вершина x_k^k соединена ребром с не более, чем $[s/t]$ вершинами из графа $\tilde{X}_{k-1}$, следовательно, она соединена ребром либо с не более, чем $[s/t]$ вершинами из множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^{k-1}\}$, либо с вершиной x_{k-1}^{k-1} и с $[s/t]$ вершинами из множества $\{x_{k-1}^1, x_{k-1}^2, \ldots, x_{k-1}^{k-2}\}$ (иначе

$$f_{\alpha-\varepsilon}(X_{k-1}|_{V(\tilde{X}_{k-1})\cup\{x_k^k\}}, \tilde{X}_{k-1}) \leq$$

$$1 - (\alpha-\varepsilon)([s/t]+1) < 1 - \frac{([s/t]+1)tq}{sq+1} \leq 1 - \frac{(s/t+1/t)tq}{sq+1} < 0,$$

что противоречит определению графа $\tilde{X}_{k-1}$). Во втором случае Консерватор сможет выбрать нужную вершину y_k^k и выиграть по постро-

ению. В первом же случае в силу свойства 2) (см. раздел 3.3.1) в графе Y_{k-1} существует такая вершина y_k^k, что подграф $Y_{k-1}|_{\{y_k^1,y_k^2,\ldots,y_k^k\}}$ является точным $\left(X_{k-1}|_{\{x_k^1,x_k^2,\ldots,x_k^k\}},(x_k^1,x_k^2,\ldots,x_k^{k-1})\right)$-расширением набора $(y_k^1,y_k^2,\ldots,y_k^{k-1})$. Следовательно, Консерватор победит, выбрав вершину y_k^k.

3.3.3. Доказательство теоремы 3.2.3

Пусть G — произвольный граф, $u,v\in V(G)$, $u\neq v$. Будем говорить, что G является *m-цепью с концами u и v*, если выполнено следующее условие. Для некоторого $d\in\mathbb{N}$ существуют такие подграфы $W,c_1,\ldots,c_d\subset G$, что W — путь длины d с концами u,v и ребрами $e_1,\ldots,e_d$, для любого $i\in\{1,2,\ldots,d\}$ c_i — клика (полный граф) на m вершинах, содержащая ребро e_i, и, кроме того, $G=c_1\cup\ldots\cup c_d$ и любые две клики c_i,c_j, $i,j\in\{1,\ldots,d\}$, $i\neq j$, пересекаются по не более чем одной вершине. Наименьшее из всех чисел d, для которых выполнены эти условия будем называть *длиной* m-цепи G. Будем называть m-цепь длины d *простой*, если в качестве W можно взять простой путь длины d. Заметим, что если m-цепь длины d является простой, то любая клика c_i, $i\in\{1,\ldots,d\}$, из ее определения имеет общие вершины лишь с "соседними" кликами c_{i-1} и c_{i+1} (здесь и далее мы считаем, что $c_0=c_d$, $c_{d+1}=c_1$). Заметим, наконец, что у любой m-цепи G с концами u,v существует индуцированный подграф, который является простой m-цепью с концами u,v (чтобы доказать существование такого подграфа достаточно в качестве графа W, определяющего этот подграф, выбрать цепь наименьшей длины с концами u,v в G).

Будем говорить, что граф G является *m-циклом*, если выполнено следующее условие. Для некоторого $d\in\mathbb{N}$ существуют такие подграфы $C,c_1,\ldots,c_d\subset G$, что C — простой цикл длины d (*длиной* простого цикла называется количество ребер в нем) с ребрами $e_1,\ldots,e_d$, для любого $i\in\{1,\ldots,d\}$ c_i — клика на m вершинах, содержащая ребро e_i, и, кроме того, $G=c_1\cup\ldots\cup c_d$ и любая клика c_i, $i\in\{1,\ldots,d\}$, пересекается только с "соседними" кликами c_{i-1},c_{i+1} и только по одной вершине (здесь и далее мы считаем, что $c_0=c_d$, $c_{d+1}=c_1$). Число d, для которого выполнены эти условия, будем называть *длиной* m-цикла G. Вершины графа C в определении m-цикла мы будем называеть его *узловыми вершинами*. Заметим, что число вершин в m-цикле длины d есть $d(m-1)$. Мы будем обозначать M_d некоторый граф, являющийся m-циклом длины d.

Обозначим

$$k_1 = k - 10m + 8.$$

Из условия теоремы имеем $k_1 \geq 3$. Пусть $l_1, l_2 \in [4, 2^{k_1}]$ — два натуральных числа. Рассмотрим граф G_{l_1,l_2}, являющийся объединением двух копий M и M' графов M_{l_1}, M_{l_2} соответственно, пересекающихся ровно по одной вершине, которая является узловой вершиной обоих графов. Плотность графа G равна

$$\frac{e(G)}{v(G)} = \frac{(l_1 + l_2) \cdot \frac{m(m-1)}{2}}{(l_1 + l_2)(m-1) - 1} = \frac{1}{\frac{2}{m} - \frac{2}{(l_1+l_2)m(m-1)}} \geq \frac{1}{\alpha},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $l_1 = l_2 = 2^{k_1}$. Докажем, что граф G является строго сбалансированным. Обозначим подграфы $C, c_1, \ldots$ из определения m-циклов M и M' за $C_1, c_1^1, \ldots, c_{l_1}^1$ и $C_2, c_1^2, \ldots, c_{l_2}^2$ соответственно. Предположим, что G не строго сбалансирован. Тогда существует такой подграф $H \subset G$, что $\rho(H) \geq \rho(G)$. Можно считать, что H — связен, так как его плотность не превосходит максимальной из плотностей его компонент связности. Можно также считать, что для каждой из клик c_i^j, $i \in \{1, \ldots, l_j\}$, $j \in \{1, 2\}$, хотя бы одна вершина которой входит в H, либо все ее ребра входят в H, либо все они в H не входят, иначе добавив "недостающие" ребра, получим граф, плотность которого больше, чем $\rho(G)$. Действительно, предположим, что клика c_i^j содержится в H "частично", а именно в H входит v ее вершин и $\frac{v(v-1)}{2}$ ребер, где $v \in [2, m-1]$. Тогда, дополнив граф H оставшейся частью клики c_i^j, мы получим граф с плотностью

$$\frac{e(H) + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{v(v-1)}{2}}{v(H) + (m - v)} > \rho(G),$$

так как

$$\frac{\frac{m(m-1)}{2} - \frac{v(v-1)}{2}}{m - v} = \frac{m + v - 1}{2} \geq \frac{m+1}{2} > \rho(G)$$

при $m \geq 2$. Можно также считать, что если H содержит ровно одну вершину некоторой клики c_i^j, то он содержит не более одной вершины соседних с ней клик c_{i-1}^j и c_{i+1}^j, иначе, удалив соседнюю клику (без одной вершины клики c_i^j), мы уменьшим число вершин на $m-1$, а число ребер на $\frac{m(m-1)}{2}$, следовательно, плотность графа увеличится. Таким образом, можем считать, что H — это один из m-циклов M или M'. Но в таком случае $\rho(H) = \frac{m}{2} < \rho(G)$. Получили противоречие.

Поскольку $G_{2^{k_1},2^{k_1}}$ — строго сбалансированный граф с плотностью $\frac{1}{\alpha}$, по теореме 1.3.3 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(N_G > 0) = 1 - e^{-1/a(G)} \notin \{0,1\}. \tag{3.12}$$

Будем говорить, что два свойства A, B *асимптотически эквивалентны*, если пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models A)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \models B)$ существуют и равны. Далее мы приведем пример свойства A из класса $\mathcal{L}_k$, асимптотически эквивалентного свойству $\{N_G > 0\}$.

Пусть формула $\mathrm{NI}(u_1,\ldots,u_h)$ выражает свойство, заключающееся в том, что вершины $u_1,\ldots,u_h$ попарно различны:

$$\mathrm{NI}(u_1,\ldots,u_h) = \left(\bigwedge_{1\le i<j\le h} (\neg(u_i = u_j)) \right).$$

Определим формулу $\mathrm{K}(x_1,\ldots,x_m)$, выражающую свойство "вершины x_1, $\ldots, x_m$ образуют клику размера m":

$$\mathrm{K}(x_1,\ldots,x_m) = \left(\mathrm{NI}(x_1,\ldots,x_m) \wedge \left(\bigwedge_{1\le i<j\le m} (x_i \sim x_j) \right) \right).$$

Далее рассмотрим формулу $\mathrm{MK}(x_1,\ldots,x_m)$, выражающую свойство "вершины $x_1,\ldots,x_m$ образуют клику размера m, и любая клика графа либо совпадает с этой, либо пересекает ее по не более чем одной вершине":

$$\mathrm{MK}(x_1,\ldots,x_m) = (\mathrm{K}(x_1,\ldots,x_m) \wedge$$

$$[\forall y_1 \ldots \forall y_m \ \ (\mathrm{K}(y_1,\ldots,y_m) \Rightarrow \phi(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m))]),$$

где формула $\phi(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m) =$

$$\left(\left(\bigvee_{\sigma\in\Sigma} \bigwedge_{i=1}^{m} (x_i = y_{\sigma(i)}) \right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{1\le\hat{i}\le m,\, \hat{i}\ne i} \bigwedge_{j=1}^{m} (x_{\hat{i}} \ne y_j) \right) \right)$$

выражает свойство "множества $\{x_1,\ldots,x_m\}$, $\{y_1,\ldots,y_m\}$ либо совпадают, либо пересекаются по не более чем одной вершине" (здесь Σ — множество всех перестановок последовательности $1,\ldots,m$). Определим, наконец, для произвольного натурального числа l формулу $\mathrm{D}_l(x_1,x_2)$, из истинности которой следует существование m-цепи длины l с концами x_1

и x_2, никакая вершина которой не проходит через заданное множество вершин $u_1, \ldots, u_h$: при $l > 1$

$$\mathrm{D}_l(x_1, x_2, u_1, \ldots, u_h) =$$

$$\left(\exists y \ \left(\mathrm{D}_{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}(x_1, y) \wedge \mathrm{D}_{\lceil \frac{l}{2} \rceil}(y, x_2) \wedge \mathrm{NI}(x_1, x_2, y, u_1, \ldots, u_h)\right)\right),$$

$$\mathrm{D}_1(x_1, x_2, u_1, \ldots, u_h) =$$

$$(\exists x_3 \ldots \exists x_m \ (\mathrm{MK}(x_1, \ldots, x_m) \wedge \mathrm{NI}(x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_h))).$$

Заметим, что если в графе существует m-цепь G длины l с концами x_1 и x_2, никакая вершина которой не проходит через заданное множество вершин $u_1, \ldots, u_h$, но не является истинной формула $\mathrm{D}_l(x_1, x_2, u_1, \ldots, u_h)$, то существует клика на m вершинах, пересекающая граф G по хотя бы одному ребру, но не содержащаяся в нем целиком. Из определения формулы $\mathrm{D}_l(x_1, x_2, u_1, \ldots, u_h)$ легко видеть, что ее кванторная глубина равна

$$\lceil \log_2 l \rceil + 2m - 2.$$

Определим, наконец, искомое свойство A. Положим $l = 2^{k_1 - 1} - 2$.

$$A = \Bigg(\exists x \exists y \exists y' \exists v_1^1 \ldots \exists v_1^{m-1} \ldots \exists v_4^1 \ldots \exists v_4^{m-1} \exists u_1^1 \ldots \exists u_1^{m-1} \ldots \exists u_4^1 \ldots \exists u_4^{m-1}$$

$$\Bigg[\left(\mathrm{NI}(x, y, y', v_i^j, u_i^j, \ i \in \{1,2,3,4\}, j \in \{1, \ldots, m-1\})\right) \wedge$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{2} \left(\mathrm{MK}(y, u_i^1, \ldots, u_i^{m-1}) \wedge \mathrm{MK}(y', u_{i+2}^1, \ldots, u_{i+2}^{m-1})\right)\right) \wedge$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{4} \left(\mathrm{MK}(x, v_i^1, \ldots, v_i^{m-1}) \wedge \mathrm{D}_l\left(v_i^{m-1}, u_i^{m-1}, \ x, y, y', v_{\hat{i}}^j, u_{\hat{i}}^j, (\hat{i}, j) \in J\right)\right)\right) \Bigg] \Bigg),$$

где

$$J = (\{1,2,3,4\} \setminus \{i\} \times \{1, \ldots, m-1\}) \cup (\{i\} \times \{1, \ldots, m-2\}).$$

Из определения свойства A легко видеть, что его кванторная глубина равна

$$3 + 8m - 8 + \lceil \log_2(2^{k_1 - 1} - 2) \rceil + 2m - 2 \leq 10m - 7 + k_1 - 1 = k_1 + 10m - 8 = k.$$

Следовательно, $A \in \mathcal{L}_k$.

Рассмотрим множество $\tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$ всех графов, в которых не существует подграфов H с $v(H) \leq m2^{k_1+1}$ и $\rho(H) > 1/\alpha$. В силу теоремы 1.3.2 имеем $\mathsf{P}(G(n,p) \in \tilde{\Omega}_n) = 1$. Пусть $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и $\mathcal{G}$ содержит подграф X, изоморфный графу $G_{2^{k_1},2^{k_1}}$. Пусть, кроме того, $\mathcal{K}$ — множество всех таких пар (K,T), что K — полный граф на m вершинах, а $v(T) \geq 2$. Для того, чтобы доказать, что граф $\mathcal{G}$ обладает свойством A, достаточно установить, что в $\mathcal{G}$ нет $(K,(t_1,\ldots,t_v))$-расширений наборов вершин из графа X ни для какой пары $(K,T) \in \mathcal{K}$ (здесь мы обозначили $\{t_1,\ldots,t_v\} = V(T)$). Предположим, что хотя бы одно такое расширение Y имеется. Тогда $\rho(Y \cup X) > 1/\alpha$, так как $\rho(X) = 1/\alpha$ и

$$f_\alpha(Y,X) \leq v(Y,X) - \alpha\frac{v(Y,X)(2m - v(Y,X) - 1)}{2} \leq$$

$$v(Y,X)\left(1 - \alpha\frac{m+1}{2}\right) < 0.$$

Кроме того,

$$v(Y) \leq 2(m-1)2^{k_1} - 1 + m - 2 < m2^{k_1+1}.$$

Тем самым, получили противоречие с принадлежностью графа $\mathcal{G}$ множеству $\tilde{\Omega}_n$, и, следовательно, граф $\mathcal{G}$ обладает свойством A.

Предположим теперь, что $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и $\mathcal{G}$ обладает свойством A. Тогда в графе $\mathcal{G}$ найдутся такие попарно различные вершины

$$x, y, y', v_i^j, u_i^j,\ i \in \{1,2,3,4\}, j \in \{1,\ldots,m-1\},$$

что существуют m-цепи C_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, длины l с концами v_i^{m-1}, u_i^{m-1} (обозначим графы $W, c_1, \ldots, c_l$ из определения этих m-цепей $W_i, c_1^i, \ldots, c_l^i$), наборы вершин

$$x, v_i^1, \ldots, v_i^{m-1}, \quad i \in \{1,2,3,4\},$$

а также

$$y, u_i^1, \ldots, u_i^{m-1}, \quad i \in \{1,2\},\ \text{и}\ y', u_i^1, \ldots, u_i^{m-1}, \quad i \in \{3,4\},$$

образуют клики, причем графы C_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, пересекают эти клики только по концевым вершинам цепей W_i. Как было замечено выше, в каждом из графов C_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, содержится подграф $\tilde{C}_i$, являющийся простой m-цепью с концами v_i^{m-1}, u_i^{m-1}. Если $\mathcal{G}$ не содержит подграфа, изоморфного графу X, то либо хотя бы одна из цепей $\tilde{C}_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, имеет длину меньше, чем $2^{k_1-1} - 2$, либо хотя бы два графа из $\tilde{C}_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, пересекаются по вершинам. Очевидно, в обоих

случаях в графе $\mathcal{G}$ существует подграф, изоморфный графу G_{l_1,l_2}, где $l_1, l_2 \in [4, 2^{k_1}]$, причем хотя бы одно из l_1, l_2 строго меньше чем 2^{k_1}. Но

$$\rho(G_{l_1,l_2}) > 1/\alpha, \quad v(G_{l_1,l_2}) < (m-1)2^{k_1+1}.$$

Получили противоречие. Следовательно, граф $\mathcal{G}$ содержит подграф, изоморфный $G_{2^{k_1},2^{k_1}}$.

Таким образом, в силу (3.12)

$$\mathsf{P}(G(n,p) \models A) \sim \mathsf{P}(G(n,p) \in \tilde{\Omega}_n,\, G(n,p) \models A) =$$

$$\mathsf{P}(G(n,p) \in \tilde{\Omega}_n,\, N_G > 0) \sim \mathsf{P}(N_G > 0) \sim 1 - e^{-1/a(G)}.$$

Следовательно, поскольку кванторная глубина свойства A не превосходит k, для

$$\alpha = \frac{2}{m} - \frac{1}{2^{k_1} m(m-1)}$$

случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы.

Глава 4.

Сходимость на границе

Как известно из главы 1, случайный граф $G(n,p)$ не подчиняется закону нуля или единицы при $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha \in (0,1]$ — рациональное число. Возникает естественный вопрос. Для любого ли свойства первого порядка L существует предел вероятности $\mathsf{P}(G(n,p) \models L)$ при упомянутых условиях? Ответ на этот вопрос известен, и мы дадим его в следующем разделе.

4.1. Введение

В теореме 1.1.2 формулируется закон нуля или единицы для иррационального $\alpha > 0$. Более того, как замечено в разделе 1.1 закон нуля или единицы не выполнен при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$. Но что происходит при рациональных $\alpha > 1$? Легко заметить, что при $\alpha > 2$ закон нуля или единицы выполнен, так как в этом случае в случайном графе $G(n, n^{\alpha})$ с вероятностью, стремящейся к 1, нет ребер. Более того, справедлив следующий результат.

Теорема 4.1.1. (Т. Лучак, Дж. Спенсер, 1991, [79]; Дж. Спенсер, С. Шелах, 1988, [106]) *Случайный граф $G(n,p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если выполнено одно из свойств*

- *для некоторого $l \in \mathbb{N}$*

$$n^{-1-1/l} = o(p),\ p = o(n^{-1-1/(l+1)}),$$

- *справедливы равенства*

$$p = n^{-1-o(1)},\ p = o(n^{-1}),$$

- *выполнены соотношения*

$$p = n^{-1+o(1)}, n^{-1} = o(p)$$

и для любой такой пары натуральных чисел r, s, *что* $s \geq r - 1 \geq 0$ *либо*

$$rnp - \ln n - s \ln \ln n \to -\infty,\ n \to \infty,$$

либо

$$rnp - \ln n - s \ln \ln n \to \infty,\ n \to \infty.$$

Кроме того, в той же работе Дж. Спенсер и С. Шелах доказали, что если α — рациональное число из $(0, 1)$, то найдется свойство первого порядка, для которого не существует предела вероятности его выполнения.

Теорема 4.1.2. (Дж. Спенсер, С. Шелах, 1988, [106]) *Пусть* $p = n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ — *рациональное число. Тогда для некоторого свойства первого порядка* $L \in \mathcal{L}$ *не существует предела*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n, p) \models L). \tag{4.1}$$

Наконец, этот результат был дополнен случаем рациональных $\alpha \geq 1$.

Теорема 4.1.3. (Дж. Линч, 1992, [85]) *Пусть*

$$l \in \mathbb{N}, \quad \alpha = \frac{l+1}{l}, \quad p = n^{-\alpha}.$$

Тогда для любого свойства первого порядка L *существует предел (4.1). Если же*

$$p = \frac{c}{n},$$

где c — *произвольное положительное число, то для любого свойства первого порядка* L *предел (4.1) существует и может быть выражен функцией от* c, *использующей в своей записи само число* c, *сложение, умножение, деление и степени числа* e.

Итак, закон нуля или единицы и закон сходимости при $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, исследованы полностью. При иррациональном α выполнен закон нуля или единицы. При $\alpha > 2$ выполнен закон нуля или единицы. При рациональном α из интервала $(1 + \frac{1}{l+1}, 1 + \frac{1}{l})$ для любого натурального числа l также выполнен закон нуля или единицы. При $\alpha = 1 + \frac{1}{l}$ закон нуля или единицы не выполнен, но выполнен *закон сходимости* (для

любого свойства первого порядка существует предел вероятности того, что случайный граф обладает этим свойством). При $\alpha = 1$ также не выполнен закон нуля или единицы, но выполнен закон сходимости. При $\alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ не выполнен даже закон сходимости.

Как утверждает теорема 1.1.3 случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется 3-закону нуля или единицы при всех $\alpha \in (0,1)$. Из теоремы 4.1.3 же следует, что при $\alpha = 1$ выполнен *3-закон сходимости*. Иными словами, для любого свойства $L \in \mathcal{L}_3$ существует предел (4.1). Справедлив ли аналогичный результат для любого $k \geq 3$ на границе интервала $(0, \frac{1}{k-2})$, полученного в теореме 1.1.3? Мы ответили на этот вопрос в работе [153]. Соответствующий результат приведен в следующем разделе.

4.2. Новый результат

Сформулируем основной результат данной главы, опубликованный в работе [153].

Теорема 4.2.1. *Пусть*

$$k \geq 4, \quad p = n^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{k-2}.$$

Тогда для любого свойства первого порядка $L \in \mathcal{L}_k$ существует предел (4.1).

Доказательство теоремы мы приводим в разделе 4.6. Оно опирается на ряд лемм, формулировки которых можно найти в разделе 4.4. Доказаны упомянутые леммы в разделе 4.5. Все необходимые для доказательства лемм конструкции мы вводим в разделе 4.3.

4.3. Дополнительные конструкции

Пусть $\alpha > 0$ — фиксированное число.

Вернемся к понятиям пар графов и расширений, рассмотренных в разделе 1.3. Пусть $H \subset G$. При доказательстве теоремы 4.2.1 мы будем считать, что $k > 3$ — заранее определенное число. Так как в этом случае параметр α задается равенством $\alpha = \frac{1}{k-2}$, то мы будем опускать индекс α в $f_\alpha(G, H)$ всюду в оставшейся части этой главы.

Если любая вершина графа H соединена с некоторой вершиной из $V(G)\setminus V(H)$ и для любого такого графа S, что $H \subset S \subset G$, справедливо неравенство $f(S,H) > 0$, но $f(G,H) = 0$, то пару (G,H) назовем *α-нейтральной*.

В 2010 году [142] мы доказали теорему, которую сформулируем ниже. Пусть $\mathcal{K}$ — конечное множество α-нейтральных пар, (G,H) — α-надежная пара с $v(H) = m$.

Теорема 4.3.1. ([142]) *Для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$ выполнено*

$$\mathsf{E}N^{\mathcal{K}}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) = \Theta\left(n^{f(G,H)}\right),$$

причем эта функция не зависит от выбора вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\forall(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m) \ \left|\frac{N^{\mathcal{K}}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)}{\mathsf{E}N^{\mathcal{K}}_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Ниже мы будем иногда говорить о *(G,H)-расширениях графов $\tilde{H}$*, имея ввиду $(G,(h_1,\dots,h_m))$-расширения наборов $(\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_m)$, где

$$V(H) = \{h_1,\dots,h_m\}, \quad V(\tilde{H}) = \{\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_m\},$$

если либо заранее сказано, как занумерованы вершины графов H и $\tilde{H}$, либо если расширение не зависит от этих нумераций, либо, наконец, если для наших выводов не имеет значения, о каких именно нумерациях идет речь.

Прежде чем обратиться к доказательству теоремы 4.2.1 мы определим некоторые необходимые для доказательства конструкции.

4.3.1. Вспомогательные графы

Введем графы $H_1, H_2, G_1, G_2, G_3^{i_1,\dots,i_t}, G_4, G_4^1, G_4^2$, где $t \in \{1,\dots,k-2\}$,

$$i_1 \in \{1,\dots,k-2\}, \quad i_2 \in \{1,\dots,k-2\}\setminus\{i_1\}, \dots, \tag{4.2}$$

$$i_t \in \{1,\dots,k-2\}\setminus\{i_1,\dots,i_{t-1}\}. \tag{4.3}$$

В дальнейших параграфах мы будем использовать эти графы парами. А именно, нас будут интересовать пары (G_1,H_1), (G_2,H_2), $(G_3^{i_1,\dots,i_t},H_2)$, (G_4^1,H_1), (G_4^2,H_1).

1) Граф G_1 является полным, $V(G_1) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, H_1 — произвольный граф на множестве вершин $V(H_1) = \{x_1, \ldots, x_{k-3}\}$.

2) Пусть

$$V(H_2) = \{x_1, \ldots, x_{k-3}, x_{k-2}\},\ E(H_2) - \text{любое};$$

$$V(G_2) = V(H_2) \cup \{x_{k-1}\},\ E(G_2) = E(H_2) \cup \{\{x_1, x_{k-1}\}, \ldots, \{x_{k-2}, x_{k-1}\}\}.$$

3) Для каждого $t \in \{1, \ldots, k-2\}$ и всех $i_1, i_2, \ldots, i_t$, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3), рассмотрим графы $G_3^{i_1,\ldots,i_t}$, определенные индуктивно в соответствии со следующими равенствами:

$$V(G_3^{i_1}) = V(G_2) \cup \{x_k^{i_1}\},$$

$$E(G_3^{i_1}) = E(G_2) \cup \{\{x_1, x_k^{i_1}\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k^{i}\}\} \setminus \{\{x_{i_1}, x_k^{i_1}\}\};$$

$$V(G_3^{i_1,\ldots,i_t}) = V(G_3^{i_1,\ldots,i_{t-1}}) \cup \{x_k^{i_1,\ldots,i_t}\},$$

$$E(G_3^{i_1,\ldots,i_t}) =$$

$$E(G_3^{i_1,\ldots,i_{t-1}}) \cup \{\{x_1, x_k^{i_1,\ldots,i_t}\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k^{i_1,\ldots,i_t}\}\} \setminus \{\{x_{i_t}, x_k^{i_1,\ldots,i_t}\}\}.$$

4) Пусть

$$V(G_4) = V(H_1) \cup \{x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}\},$$

$$V(G_4^1) = V(G_4) \cup \{x_{k+4}^1\},\ V(G_4^2) = V(G_4) \cup \{x_{k+4}^2, x_{k+5}\};$$

$$E(G_4) = E(H_1) \cup$$

$$\{\{x_1, x_{k+1}\}, \ldots, \{x_{k-4}, x_{k+1}\}, \{x_1, x_{k+2}\}, \ldots, \{x_{k-3}, x_{k+2}\},$$

$$\{x_1, x_{k+3}\}, \ldots, \{x_{k-3}, x_{k+3}\}, \{x_{k+1}, x_{k+2}\}, \{x_{k+1}, x_{k+3}\}, \{x_{k+2}, x_{k+3}\}\};$$

$$E(G_4^1) = E(G_4) \cup$$

$$\{\{x_1, x_{k+4}^1\}, \ldots, \{x_{k-3}, x_{k+4}^1\}, \{x_{k+1}, x_{k+4}^1\}, \{x_{k+3}, x_{k+4}^1\}\};$$

$$E(G_4^2) = E(G_4) \cup$$

$$\{\{x_1, x_{k+4}^2\}, \ldots, \{x_{k-3}, x_{k+4}^2\}, \{x_1, x_{k+5}\}, \ldots, \{x_{k-3}, x_{k+5}\},$$

$$\{x_{k+1}, x_{k+4}^2\}, \{x_{k+1}, x_{k+5}\}, \{x_{k+4}^2, x_{k+5}\}\}.$$

Рассмотрим, наконец, для каждого $t \in \{1, \ldots, k-2\}$ и всех $i_1, i_2, \ldots, i_t$, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3), множество $S^{i_1,\ldots,i_t}$ всех неупорядоченных наборов по $k-2$ вершины графа $G_3^{i_1,\ldots,i_t}$. Для каждого $U \subset S^{i_1,\ldots,i_t}$ рассмотрим граф $G_3^{i_1,\ldots,i_t}(U)$, являющийся объединением графа $G_3^{i_1,\ldots,i_t}$ и (G_2, H_2)-расширений графов $G_3^{i_1,\ldots,i_t}|_{\mathbf{u}}$ по всем наборам $\mathbf{u} \in U$. Заметим, что добавление к некоторому графу его (G_2, H_2)-расширения означает просто присоединение к графу вершины, которая соединена со

всеми $k-2$ его вершинами. Пусть $\mathcal{U}_i^{i_1,\dots,i_t}$ — множество всех подмножеств в $S^{i_1,\dots,i_t}$, мощность которых равна i.

В следующем разделе мы определим понятие замыкания графа.

4.3.2. Построение замыкания $[A]_{\hat{G}}$ графа A в $\hat{G}$

Рассмотрим произвольный набор вершин $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-3}$. Пусть $\hat{G}$ — некоторый граф. Пусть, кроме того, $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-3}$ являются вершинами графа $\hat{G}$. Рассмотрим произвольный граф $A \subset \hat{G}$ на множестве вершин $V(A) = \{a_1,\dots,a_d\}$, $d \geq k-2$.

Прежде чем ввести граф $[A]_{\hat{G}}$, называемый *замыканием* графа A в $\hat{G}$, заметим, что он определяется не единственным образом. Тем не менее все графы, которые являются замыканием A в $\hat{G}$, изоморфны.

Построение графа $[A]_{\hat{G}}$ мы разбили на $k-1$ шагов. Пусть S — множество различных неупорядоченных наборов по $k-2$ вершины из $V(A)$. Положим

$$[A]_{\hat{G}} = A, \quad \hat{G}_1 = \hat{G}.$$

Первый шаг мы разделим на $|S^{1,\dots,k-2}|$ частей. Сначала для каждого графа $A|_{\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\}}$, $\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\} \in S$, и множества

$$U \in \mathcal{U}^{1,\dots,k-2}_{|S^{1,\dots,k-2}|} = \{S^{1,\dots,k-2}\},$$

для которых существует $(G_3^{1,\dots,k-2}(U), H_2)$-расширение $\hat{Q}$ в $\hat{G}_1$, добавим только одно такое расширение к графу $[A]_{\hat{G}}$, а для всех таких расширений удалим расширители из графа $\hat{G}_1$ (если граф X является расширением графа Y, то граф $X \setminus Y$ мы называем *расширителем*).

Пусть первые s частей,

$$s \leq |S^{1,\dots,k-2}| - 1,$$

первого шага построения графов $[A]_{\hat{G}}, \hat{G}_1$ пройдены. Опишем $s+1$-ую часть. Для каждого графа $A|_{\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\}}$, $\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\} \in S$, и множества

$$U \in \mathcal{U}^{1,\dots,k-2}_{|S^{1,\dots,k-2}|-s},$$

для которых существует $(G_3^{1,\dots,k-2}(U), H_2)$-расширение $\hat{Q}$ в $\hat{G}_1$, добавим только одно такое расширение к графу $[A]_{\hat{G}}$, а для всех таких расширений удалим расширители из графа $\hat{G}_1$.

Пусть пройден i-ый шаг, $i \leq k-3$ в построении графов $[A]_{\hat{G}}, \hat{G}_1$. Опишем $i+1$**-ый шаг**. Его разобьем на $|S^{1,\dots,k-2-i}|$ частей.

Сначала для каждого графа $A|_{\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\}}$, $\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\} \in S$, всех упорядоченных наборов различных чисел $i_1,\dots,i_{k-2-i} \in \{1,\dots,k-2\}$ и множества

$$U \in \mathcal{U}^{i_1,\dots,i_{k-2-i}}_{|S^{i_1,\dots,i_{k-2-i}}|},$$

для которых существует $(G_3^{i_1,\dots,i_{k-2-i}}(U), H_2)$-расширение $\hat{Q}$ в $\hat{G}_1$, добавим только одно такое расширение к графу $[A]_{\hat{G}}$, а для всех таких расширений удалим расширители из графа $\hat{G}_1$.

Пусть первые s частей,

$$s \leq |S^{i_1,\dots,i_{k-2-i}}| - 1,$$

$i+1$-ого шага построения графов $[A]_{\hat{G}}, \hat{G}_1$ пройдены. Для каждого графа $A|_{\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\}}$, $\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\} \in S$, всех упорядоченных наборов различных чисел $i_1,\dots,i_{k-2-i} \in \{1,\dots,k-2\}$ и множества

$$U \in \mathcal{U}^{i_1,\dots,i_{k-2-i}}_{|S^{i_1,\dots,i_{k-2-i}}|-s},$$

для которых существует $(G_3^{i_1,\dots,i_{k-2-i}}(U), H_2)$-расширение $\hat{Q}$ в $\hat{G}_1$, добавим только одно такое расширение к графу $[A]_{\hat{G}}$, а для всех таких расширений удалим расширители из графа $\hat{G}_1$.

Опишем последний, $k-1$**-ый шаг**. Для каждого графа $A|_{\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\}}$, $\{a_{i_1},\dots,a_{i_{k-2}}\} \in S$, для которого существует (G_2, H_2)-расширение $\hat{Q}$ в $\hat{G}_1$, добавим только одно такое расширение к графу $[A]_{\hat{G}}$. Граф $[A]_{\hat{G}}$ построен.

В следующих двух параграфах мы построим графы $X^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-3})$, $\hat{X}^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-3})$, где $l \in \{1,2,3,4,5\}$, а также графы $X^l_j(\hat{x}_1)$, $\hat{X}^l_j(\hat{x}_1)$, где $l \in \{1,2,3,4,5\}$, число j выбирается из некоторого множества индексов J. Графы $\hat{X}^l_j(\hat{x}_1)$ являются подграфами некоторых графов $\hat{G}_{i_j}$, которые выбираются таким образом, чтобы эти подграфы были в некотором смысле "различны". Графы $\hat{X}^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-3})$ являются подграфами графа $\hat{G}$ и строятся по очереди с увеличением числа l от 1 до 5. Граф $\hat{X}^l_j(\hat{x}_1)$ является объединением графов $\hat{X}^l_{\hat{G}_{i_j}}(\hat{x}_1,\hat{x}^i_2,\dots,\hat{x}^i_{k-3})$ по некоторым вершинам $\hat{x}^i_2,\dots,\hat{x}^i_{k-3}$ графа $\hat{G}_{i_j}$. Наконец, графы $X^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-3})$, $X^l_j(\hat{x}_1)$ представляют из себя объединения замыканий некоторых подграфов $\hat{X}^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{k-3})$, $\hat{X}^l_j(\hat{x}_1)$ соответственно.

4.3.3. Построение графов $X^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})$, $\hat{X}^l_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})$, $l\in\{1,2,3,4,5\}$

Пусть граф $\hat{G}$, рассмотренный в предыдущем параграфе, не содержит подграфов, количество вершин которых меньше k^3, а плотность превосходит $k-2$. Мы накладываем на граф $\hat{G}$ такое ограничение по следующим соображениям. Конструкции, которые мы строим, должны содержать максимальное количество жестких пар. Если не ограничить плотность подграфов в $\hat{G}$, то таких пар в $\hat{G}$ может быть сколь угодно много. Мы выбрали число $k-2$, так как в соответствии с теоремой 1.3.2 в случайном графе

$$G\left(n, n^{-1/(k-2)}\right)$$

с вероятностью, стремящейся к 1, нет подграфов, размер которых ограничен фиксированным числом, а плотность превосходит $k-2$.

Будем строить подграф $\hat{X}^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})$ графа $\hat{G}$, добавляя к графу $\hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}$ его (G_1,H_1)-расширения в соответствии со следующим правилом. Находим все такие пары (G_1,H_1)-расширений (A,B) графа $\hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}$ в $\hat{G}$, что

$$(E(A)\setminus E(\hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}))\cap(E(B)\setminus E(\hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}))\neq\varnothing.$$

Если такие пары имеются (мы называем расширения, входящие в эти пары, *пересекающимися*), то объединяем их и получаем $\hat{X}^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})$.

Легко показать, что если количество (G_1,H_1)-расширений, для которых существуют пересекающиеся с ними (G_1,H_1)-расширения, превышает число $2(k-3)(k-2)$, то

$$\rho(\hat{X}^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}))>k-2.$$

Пусть на каждом шаге мы добавляем либо одно расширение, пересекающее уже добавленные, либо пересекающуюся пару расширений, не пересекающую добавленные ранее. В обоих случаях при добавлении v вершин количество ребер увеличивается на число, превосходящее $(k-2)v$. Пусть на i-ом шаге добавлено v_i вершин, и всего сделано h шагов. При

$$h>(k-3)(k-2)$$

справедливо неравенство

$$\frac{(k-2)(v_1+\ldots+v_h)+h}{v_1+\ldots+v_h+k-3}>k-2.$$

Следовательно, $\rho(\hat{X}^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})) > k-2$. Таким образом, количество пересекающихся (G_1,H_1)-расширений не превосходит числа $2(k-3)(k-2)$.

Если в графе $\hat{G}$ нет (G_1,H_1)-расширений $\hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}$, пересекающихся по ребрам, то положим

$$\hat{X}^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}) = \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}.$$

Обозначим

$$X^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}) = [\hat{X}^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})]_{\hat{G}}.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$, содержащее все пары $([M]_{\hat{G}}, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})$, где M — (G_1,H_1)-расширение графа $\hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}$ в $\hat{G}$, не имеющее общих вершин с

$$X^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}) \setminus \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}.$$

Выберем из $\mathcal{M}$ такой набор неизоморфных пар $([M_1]_{\hat{G}}, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})$, …, $([M_\tau]_{\hat{G}}, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})$, что число τ максимально, и обозначим

$$X^2_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})$$

граф

$$[M_1]_{\hat{G}} \cup \ldots \cup [M_\tau]_{\hat{G}} \cup X^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}).$$

Мы называем пары графов $(A_1,B_1),(A_2,B_2)$, где

$$V(A_1) = \{a^1_1,\ldots,a^1_n\}, \quad V(A_2) = \{a^2_1,\ldots,a^2_n\},$$

$$V(B_1) = \{a^1_1,\ldots,a^1_m\}, \quad V(B_2) = \{a^2_1,\ldots,a^2_m\},$$

$m < n$, *изоморфными*, если

$$\{a^1_i,a^1_j\} \in E(A_1) \setminus E(B_1) \Leftrightarrow \{a^2_i,a^2_j\} \in E(A_2) \setminus E(B_2).$$

Граф

$$M_1 \cup \ldots \cup M_\tau \cup \hat{X}^1_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})$$

обозначим

$$\hat{X}^2_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}).$$

Найдем все пары имеющих общие вершины расширителей точных (G^1_4,H_1)- и (G^2_4,H_1)-расширений графа $\hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}$ в графе $\hat{G}$. Как и в случае пересекающихся (G_1,H_1)-расширений, количество расширителей у (G^1_4,H_1)- и (G^2_4,H_1)-расширений, для которых существуют такие же

расширители, имеющие с ними общие вершины, не превосходит числа $2(k-3)(k-2)$. Объединим все эти расширения в граф W_1. Положим

$$W_2 = [W_1]_{\hat{G}},$$

$$X^3_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}) = W_2 \cup X^2_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}),$$

$$\hat{X}^3_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}) = W_1 \cup \hat{X}^2_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}).$$

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$, содержащее все пары $([M]_{\hat{G}}, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})$, где M — (G^1_4, H_1)- или (G^2_4, H_1)-расширение графа $\hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}$ в

$$\hat{G} \setminus (W_2 \setminus \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}),$$

не имеющее общих вершин с

$$X^3_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}) \setminus \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}.$$

Выберем из множества $\mathcal{M}$ так неизоморфные пары $([M_1]_{\hat{G}}, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})$, $\ldots$, $([M_\tau]_{\hat{G}}, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})$, чтобы число τ было максимальным, и обозначим

$$X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}) = X^3_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}) \cup [M_1]_{\hat{G}} \cup \ldots \cup [M_\tau]_{\hat{G}},$$

$$\hat{X}^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}) = \hat{X}^3_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}) \cup M_1 \cup \ldots \cup M_\tau.$$

Рассмотрим, наконец, для каждой вершины

$$\hat{x} \in V(\hat{G}) \setminus V(X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3})),$$

соединенной ребрами с не более чем $k-5$ вершинами из $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}$, множество $\Upsilon(\hat{x})$, содержащее $\hat{x}$, а также все вершины

$$\hat{x}^1 \in V(\hat{G}) \setminus V(X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3})),$$

обладающие следующим свойством. Найдется такая вершина

$$\hat{x}^2 \in V(\hat{G}) \setminus V(X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3})),$$

что

$$\hat{x}^1 \sim \hat{x}^2,\ \hat{x}^1 \sim \hat{x},\ \hat{x}^2 \sim \hat{x},\ \hat{x}^1 \sim \hat{x}_i,\ \hat{x}^2 \sim \hat{x}_i, \quad i \in \{1, \ldots, k-3\}.$$

Пусть Υ является объединением множеств $\Upsilon(\hat{x})$ по всем $\hat{x}$ таким, что

$$f(X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3}) \cup \hat{G}|_{\Upsilon(\hat{x})}, X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-3})) < 0.$$

Рассмотрим, кроме того, множество $\mathcal{M}$, содержащее в себе все пары

$$(X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}) \cup [\hat{G}|_{\Upsilon(\hat{x})\cup\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}]_{\hat{G}}, X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})),$$

где

$$f(X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}) \cup \hat{G}|_{\Upsilon(\hat{x})}, X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})) = 0.$$

Выберем из $\mathcal{M}$ так неизоморфные пары $([M_1]_{\hat{G}}, X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}))$, …, $([M_\tau]_{\hat{G}}, X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}))$, чтобы число τ было максимальным, и обозначим

$$X^5_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})$$

граф

$$[M_1]_{\hat{G}} \cup \ldots \cup [M_\tau]_{\hat{G}} \cup X^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}) \cup [\hat{G}|_{\Upsilon\cup\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}]_{\hat{G}}.$$

Граф

$$M_1 \cup \ldots \cup M_\tau \cup \hat{X}^4_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}) \cup \hat{G}|_{\Upsilon\cup\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}$$

обозначим

$$\hat{X}^5_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}).$$

4.3.4. Построение графов $X^l_j(\hat{x}_1)$, $\hat{X}^l_j(\hat{x}_1)$, $l \in \{1,2,3,4,5\}$

Пусть $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \ldots$ — графы, обладающие следующими свойствами:

— выполнено

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} V(\hat{G}_i) \supseteq \{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\};$$

— пары $(\hat{G}_1, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})$, $(\hat{G}_2, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})$, … попарно неизоморфны;

— неравенство

$$\rho(X^5_{\hat{G}_i}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3})) \le k-2$$

справедливо для всех $i \in \mathbb{N}$;

— не существует такого графа $\hat{G}_0$, что графы $\hat{G}_0, \hat{G}_1, \hat{G}_2, \ldots$ обладают первыми тремя свойствами.

Тогда, очевидно, найдется такое конечное множество $\{i_1,\ldots,i_{a(k)}\}$, что пары $(X^5_{\hat{G}_{i_j}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}), \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}))$, $j \in \{1,\ldots,a(k)\}$, попарно неизоморфны. Кроме того, для любого $i \in \mathbb{N}$ найдется такое $j \in \{1,\ldots,a(k)\}$, что пары

$$(X^5_{\hat{G}_i}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}), \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}})) \text{ и } (X^5_{\hat{G}_{i_j}}(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}), \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{k-3}\}}))$$

изоморфны.

Для каждого $j \in \{1, \dots, a(k)\}$, $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ положим

$$X_j^l(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-3}) = X^l_{\hat{G}_{i_j}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-3}),$$

$$\hat{X}_j^l(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-3}) = \hat{X}^l_{\hat{G}_{i_j}}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-3}).$$

В случае $k = 4$ графы $X_j^l(\hat{x}), \hat{X}_j^l(\hat{x})$, $j \in \{1, \dots, a(k)\}$, $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, уже определены.

Пусть $k > 4$. Вернемся к графу $\hat{G}$. Зафиксируем $\xi \in \{1, \dots, k-4\}$. Пусть $Y^1, \dots, Y^t$ — подграфы графа $\hat{G}$, на которые наложены следующие условия.

— Для любого $i \in \{1, \dots, t\}$ найдется такое $j \in \{1, \dots, a(k)\}$ и такие вершины $\hat{x}^i_{\xi+1}, \dots, \hat{x}^i_{k-3}$ графа $\hat{G}$, что

$$Y^i = X_j^5(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\xi, \hat{x}^i_{\xi+1}, \dots, \hat{x}^i_{k-3}).$$

— Зафиксируем два различных числа $i_1, i_2 \in \{1, \dots, t\}$. Пусть для них существует такое $i \in \{\xi + 1, \dots, k-4\}$, что вершины $\hat{x}_i^{i_1}, \hat{x}_i^{i_2}$ не совпадают. Обозначим $\mu \in \{\xi, \dots, k-4\}$ такое число, что для всех $i \in \{\xi + 1, \dots, \mu\}$ вершины $\hat{x}_i^{i_1}, \hat{x}_i^{i_2}$ совпадают, при этом вершины $\hat{x}^{i_1}_{\mu+1}$, $\hat{x}^{i_2}_{\mu+1}$ различны. Тогда выполнено неравенство

$$f\left(\bigcup_{i \in I^{i_1}} Y^i, \bigcap_{i \in I^{i_1}} Y^i\right) \le 0,$$

где

$$I^{i_1} = \{u : \forall i \in \{\xi + 1, \dots, \mu\}\ \hat{x}_i^u = \hat{x}_i^{i_1}, \hat{x}^{i_1}_{\mu+1} \ne \hat{x}^u_{\mu+1}\}.$$

— Для каждого $\mu \in \{\xi, \dots, k-4\}$ и любых таких $i_1, i_2 \in \{1, \dots, t\}$, что $\hat{x}^{i_1}_{\mu+1} \ne \hat{x}^{i_2}_{\mu+1}$, пары

$$\left(\bigcup_{i \in I_1^{i_1}} Y^i, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\xi, \hat{x}^{i_1}_{\xi+1}, \dots, \hat{x}^{i_1}_{\mu}\}}\right),$$

,

$$\left(\bigcup_{i \in I_2^{i_2}} Y^i, \hat{G}|_{\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_\xi, \hat{x}^{i_1}_{\xi+1}, \dots, \hat{x}^{i_1}_{\mu}\}}\right),$$

где

$$I_1^{i_1} = \{u : \forall i \in \{\xi + 1, \dots, \mu + 1\}\ \hat{x}_i^{i_1} = \hat{x}_i^u\},$$

$$I_2^{i_2} = \{u : \forall i \in \{\xi + 1, \dots, \mu\}\ \hat{x}_i^{i_1} = \hat{x}_i^j, \hat{x}^{i_2}_{\mu+1} = \hat{x}^u_{\mu+1}\},$$

неизоморфны.

Обозначим

$$X^5_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_\xi) = Y^1 \cup \dots \cup Y^t,$$

если в графе $\hat{G}$ не существует такого подграфа Y^{t+1}, отличного от $Y^1,\dots,Y^t$, что $Y^1,\dots,Y^{t+1}$ обладают описанными выше тремя свойствами (с заменой t на $t+1$). При $t=0$ положим

$$X^5_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_\xi) = \hat{G}|_{\{\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_\xi\}}.$$

Для вершин графов Y^i, $i \in \{1,\dots,t\}$, мы используем обозначения из определения: $x^i_{\xi+1},\dots,x^i_{k-3}$.

Если графы $Y^1,\dots,Y^t$ обладают также перечисленными ниже свойствами, то граф $X^5_{\hat{G}}(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_\xi)$ назовем $(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_\xi)$-*разверткой в* $\hat{G}$:

P1 для любых $i_1,i_2 \in \{1,\dots,t\}$, $i_1 \neq i_2$, множество $V(Y^1) \cap V(Y^2)$ содержится в

$$\{\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_\xi,\hat{x}^{i_1}_{\xi+1},\dots,\hat{x}^{i_1}_{k-4}\} \cap \{\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_\xi,\hat{x}^{i_2}_{\xi+1},\dots,\hat{x}^{i_2}_{k-4}\};$$

P2 для любых $i_1,i_2 \in \{1,\dots,t\}$, $i_1 \neq i_2$, найдется такое $\mu \in \{\xi,\dots,k-4\}$, что для всех $i \in \{\xi+1,\dots,\mu\}$ (если, конечно, $\mu \neq \xi$) вершины $\hat{x}^{i_1}_i, \hat{x}^{i_2}_i$ совпадают, при этом множества

$$\{\hat{x}^{i_1}_{\mu+1},\dots,\hat{x}^{i_1}_{k-3}\}, \quad \{\hat{x}^{i_2}_{\mu+1},\dots,\hat{x}^{i_2}_{k-3}\}$$

не пересекаются;

P3 для любых $i_1,i_2 \in \{1,\dots,t\}$, $i_1 \neq i_2$, множество

$$E(Y_{i_1} \cup Y_{i_2}) \setminus (E(Y_{i_1}) \cup E(Y_{i_2}))$$

пусто.

Заметим, наконец, что возможна следующая ситуация. Для некоторых графов $\hat{G}^1,\hat{G}^2$ и вершин $\hat{x}^1_1,\dots,\hat{x}^1_\xi,\hat{x}^2_1,\dots,\hat{x}^2_\xi$

— $X^5_{\hat{G}^1}(\hat{x}^1_1,\dots,\hat{x}^1_\xi) = Y^1_1 \cup \dots \cup Y^t_1$, $X^5_{\hat{G}^2}(\hat{x}^2_1,\dots,\hat{x}^2_\xi) = Y^1_2 \cup \dots \cup Y^t_2$;

— для каждого $i \in \{1,\dots,t\}$ найдется такое $j \in \{1,\dots,a(k)\}$, что

$$Y^i_1 = X^5_j(\hat{x}^1_1,\dots,\hat{x}^1_\xi,\hat{x}^{i,1}_{\xi+1},\dots,\hat{x}^{i,1}_{k-3}),$$

$$Y^i_2 = X^5_j(\hat{x}^2_1,\dots,\hat{x}^2_\xi,\hat{x}^{i,2}_{\xi+1},\dots,\hat{x}^{i,2}_{k-3})$$

для некоторых вершин

$$\hat{x}^{i,1}_{\xi+1},\dots,\hat{x}^{i,1}_{k-3},\hat{x}^{i,2}_{\xi+1},\dots,\hat{x}^{i,2}_{k-3};$$

— для любых различных $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, t\}$ найдется такое $\mu \in \{\xi, \ldots, k-4\}$, что

$$\hat{x}^{i_1,1}_{j+1} = \hat{x}^{i_2,1}_{j+1},\ \hat{x}^{i_1,2}_{j+1} = \hat{x}^{i_2,2}_{j+1},\ \ j \in \{\xi, \ldots, \mu - 1\},$$
$$\hat{x}^{i_1,1}_{\mu+1} \neq \hat{x}^{i_2,1}_{\mu+1},\ \hat{x}^{i_1,2}_{\mu+1} \neq \hat{x}^{i_2,2}_{\mu+1},$$

— граф $X^5_{\hat{G}^2}(\hat{x}^2_1, \ldots, \hat{x}^2_\xi)$ является $(\hat{x}^2_1, \ldots, \hat{x}^2_\xi)$-разверткой в $\hat{G}^2$.

В таком случае мы называем $X^5_{\hat{G}^2}(\hat{x}^2_1, \ldots, \hat{x}^2_\xi)$ *развертkой графа* $X^5_{\hat{G}^1}(\hat{x}^1_1, \ldots, \hat{x}^1_\xi)$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, t\}$, $\mu \in \{\xi + 1, \ldots, k - 3\}$ введем обозначение

$$\hat{x}^{i,2}_\mu = \mathrm{NET}_{\hat{G}^1, \hat{G}^2, \hat{x}^1_1, \ldots, \hat{x}^1_\xi, \hat{x}^2_1, \ldots, \hat{x}^2_\xi}(\hat{x}^{i,1}_\mu).$$

Может так случиться, что различным парам индексов (i_1, μ_1),(i_2, μ_2) соответствуют одинаковые вершины

$$\hat{x}^{i_1,1}_{\mu_1} = \hat{x}^{i_2,1}_{\mu_2}$$

(чего не может быть в случае развертки). Тем не менее отображение NET будет принимать разные значения. Поэтому мы считаем, что отображение NET задано на множестве

$$\{\hat{x}^{i,1}_\mu,\ i \in \{1, \ldots, t\}, \mu \in \{\xi + 1, \ldots, k - 3\}\},$$

мощность которого равна

$$t(k - 3 - \xi).$$

Некоторые вершины из этого множества могут совпадать, но *элементы, им соответствующие, различны.*

Очевидно, существует конечное количество различных вариантов (с точностью до изоморфизма), какой может быть $(\hat{x}_1)$-развертка в $\hat{G}$ (в зависимости от выбора графа $\hat{G}$) с максимальной плотностью, не превосходящей $k - 2$. Пусть $X^5_1(\hat{x}_1), \ldots, X^5_{\tilde{m}(k)}(\hat{x}_1)$ — такие развертки, причем для любой развертки $X^5_0(\hat{x}_i)$ в $\hat{G}$ с максимальной плотностью, не превосходящей $k-2$, найдется такое число $j \in \{1, \ldots, \tilde{m}(k)\}$, что отображение $X^5_0(\hat{x}_i) \to X^5_j(\hat{x}_i)$, сохраняющее порядок вершин, является изоморфизмом. Пусть, кроме того, графы $X^5_1(\hat{x}_1), \ldots, X^5_{\tilde{m}(k)}(\hat{x}_1)$ упорядочены таким образом, что максимальные плотности графов $X^5_1(\hat{x}_1), \ldots, X^5_{\hat{m}(k)}(\hat{x}_1)$ равны $k-2$, а плотности графов $X^5_1(\hat{x}_1), \ldots, X^5_{m(k)}(\hat{x}_1)$ равны $k-2$. Для каждого $j \in \{1, \ldots, \tilde{m}(k)\}$ пусть

$$X^5_j(\hat{x}_1) = Y^1_j \cup \ldots \cup Y^{t(j)}_j$$

— разложение, определенное свойствами P1–P3. Обозначим для каждого $j \in \{1, \ldots, \tilde{m}(k)\}$, $s \in \{1, \ldots, t(j)\}$ символом $i^{j,s}$ такое число из $\{1, \ldots, a(k)\}$, что для некоторых вершин $\hat{x}_2^{j,s}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,s}$ справедливо равенство

$$Y_j^s = X_{i^{j,s}}^5(\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,s}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,s}).$$

Для каждого $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ положим

$$X_j^l(\hat{x}_1) = X_{i^{j,1}}^l(\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,1}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,1}) \cup \ldots \cup X_{i^{j,t(j)}}^l(\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,t(j)}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,t(j)}),$$

$$\hat{X}_j^l(\hat{x}_1) = \hat{X}_{i^{j,1}}^l(\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,1}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,1}) \cup \ldots \cup \hat{X}_{i^{j,t(j)}}^l(\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,t(j)}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,t(j)}),$$

$$\hat{X}_j^5(\hat{x}_1) = \hat{X}_{i^{j,1}}^5(\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,1}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,1}) \cup \ldots \cup \hat{X}_{i^{j,t(j)}}^5(\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,t(j)}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,t(j)}).$$

Из определения графов $X_{\hat{G}}^5(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_\xi)$ следует, что для них существует аналогичное разложение, а именно

$$X_{\hat{G}}^5(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_\xi) =$$

$$\bigcup_{i=1}^{t(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_\xi, \hat{G})} X_{\hat{G}}^5(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_\xi, \hat{x}_{\xi+1}^i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_\xi), \ldots, \hat{x}_{k-3}^i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_\xi)).$$

Заметим, что в любом графе G с максимальной плотностью ρ найдутся такие подграфы H_1, H_2, $H_1 \subseteq H_2$, что $\rho(H_1) = \rho(H_2) = \rho$, граф H_1 — строго сбалансированный, пара (H_2, H_1) — $1/\rho$-нейтральная цепь, либо пара (G, H_2) — $1/\rho$-надежная, либо $H_2 = G$. Пару (H_2, H_1) мы называем *α-нейтральной цепью*, если $H_2 \supseteq H_1$, а также найдутся графы $K_1, \ldots, K_r, T_1, \ldots, T_{r-1}$, обладающие следующим свойством:

$$H_1 = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_r = H_2, \quad T_i \subset K_i, \quad i \in \{1, \ldots, r-1\},$$

пары $((K_i \setminus K_{i-1}) \cup T_{i-1}, T_{i-1})$, $i \in \{2, \ldots, r\}$, являются α-нейтральными, для каждого $i \in \{2, \ldots, r\}$ между вершинами графа $K_i \setminus K_{i-1}$ и графа $K_{i-1} \setminus T_{i-1}$ нет ребер.

Итак, обозначим $X_j^*(\hat{x}_1)$, $X_j^{**}(\hat{x}_1)$ соответствующие подграфы графа $X_j^5(\hat{x}_1)$ для каждого $j \in \{1, \ldots, \tilde{m}(k)\}$. Таким образом, граф $X_j^*(\hat{x}_1)$ — строго сбалансированный с плотностью $\rho^{\max}(X_j^5(\hat{x}_1))$, пара $(X_j^{**}(\hat{x}_1), X_j^*(\hat{x}_1))$ является $1/\rho^{\max}(X_j^5(\hat{x}_1))$-нейтральной цепью. Заметим, что при $j \in \{1, \ldots, \hat{m}(k)\}$ графы $X_j^{**}(\hat{x}_1)$ и $X_j^5(\hat{x}_1)$ совпадают.

Докажем, что граф $X_j^*(\hat{x}_1)$ при $j \in \{1, \ldots, \hat{m}(k)\}$ содержит вершину $\hat{x}_1$. Заметим сначала, что в графе $X_j^*(\hat{x}_1)$ найдется не менее $k-1$ вершин,

для каждой $\hat{x}^0$ из которых при некотором $l \in \{1, \ldots, t(j)\}$ вершины $\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,l}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,l}$ соединены ребрами с $\hat{x}^0$ в графе $X_j^5(\hat{x}_1)$ и

$$\hat{x}^0 \in V(X_{ij,l}^5(\hat{x}_1, \hat{x}_2^{j,l}, \ldots, \hat{x}_{k-3}^{j,l})).$$

Действительно, если это не так, то для некоторых таких натуральных чисел $v, y_1, \ldots, y_v$, что $y_1 + \ldots + y_v = k-2$, справедливы неравенства

$$\frac{C_{y_1}^2 + \ldots + C_{y_v}^2 + v(k-4) + (k-2) + (k-2)(k-3) + C_{k-3}^2}{2k-5+v} \geq k-2,$$

$$y_1^2 + \ldots + y_v^2 - 4v + (k-2) + 2(k-2)(k-3) + (k-3)(k-4) \geq 2(k-2)(2k-5).$$

Функция

$$\phi(y_1, \ldots, y_{k-2}) = y_1^2 + \ldots + y_{k-2}^2 - 4|\{i : \, y_i \neq 0\}|$$

достигает своего максимума на множестве

$$\mathbb{Z}_+^{k-2} \cap \{y_1 + \ldots + y_{k-2} = k-2\}$$

в точке $(k-2, 0, \ldots, 0)$. Поэтому

$$(k-2)^2 - 4 + (k-2) + 2(k-2)(k-3) + (k-3)(k-4) \geq 2(k-2)(2k-5).$$

Получили противоречие. Итак, вершина $\hat{x}_1$ соединена с не менее, чем $k-1$ вершиной графа $X_j^*(\hat{x}_1)$. Если бы она ему не принадлежала, то плотность графа

$$X_j^1(\hat{x}_1)|_{V(X_j^*(\hat{x}_1)) \cup \{\hat{x}_1\}}$$

была бы больше, чем плотность графа $X_j^*(\hat{x}_1)$.

4.4. Вспомогательные утверждения

Пусть

$$k > 3, \quad \alpha = \frac{1}{k-2}, \quad p = n^{-\alpha}.$$

Пусть, кроме того,

$$\mathcal{G} \in \Omega_n, \quad \tilde{x} \in V_n, \quad \mathcal{G} \supset Y \supset \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}\}}.$$

Будем называть пару $(Y, \tilde{x})$ *j-максимальной в $\mathcal{G}$*, где $j \in \{1, \ldots, \hat{m}(k)\}$, если

$$Y = X_j^5(\tilde{x}) = X_{\mathcal{G}}^5(\tilde{x}).$$

Пусть $\mathcal{L}_j^k(n) \subset \Omega_n$ — множество графов $\mathcal{G}$, у которых существуют такие вершина $\tilde{x}$ и подграф Y, что пара $(Y, \tilde{x})$ является j-максимальной в $\mathcal{G}$.

Положим

$$\mathcal{L}_{\hat{m}(k)+1}^k(n) = \Omega_n \setminus \mathcal{L}_1^k(n) \cup \ldots \cup \mathcal{L}_{\hat{m}(k)}^k(n),$$

для различных $j_1, \ldots, j_t \in \{1, \ldots, \hat{m}(k)+1\}$

$$\mathcal{A}_{j_1 \ldots j_t}^k(n) = \left(\bigcap_{i=1}^{t} \mathcal{L}_{j_i}^k \right) \bigcap \left(\Omega_n \setminus \left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,\hat{m}(k)\} \setminus \{j_1,\ldots,j_t\}} \mathcal{L}_i^k(n) \right) \right).$$

Сформулируем лемму о том, для каких пар графов у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре Эренфойхта с k раундами.

Лемма 4.4.1. *Для любого набора*

$$\{j_1, \ldots, j_t\} \subset \{1, \ldots, \hat{m}(k)+1\}$$

выполнено

$$\lim_{n,m \to \infty} \mathsf{P}(\textit{у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре}$$

$$\mathrm{EHR}(G(n, p(n)), G(m, p(m)), k)|$$
$$G(n, p(n)) \in \mathcal{A}_{j_1 \ldots j_t}^k(n), G(m, p(m)) \in \mathcal{A}_{j_1 \ldots j_t}^k(m)) = 1.$$

В следующей лемме описывается асимптотическое поведение вероятностей множеств $\mathcal{A}_{j_1 \ldots j_t}^k(n)$.

Лемма 4.4.2. *Для любых различных*

$$j_1, \ldots, j_t \in \{1, \ldots, \hat{m}(k)+1\}$$

найдутся такие константы $0 \leq \xi_{j_1 \ldots j_t} \leq 1$, *что*

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(G(n,p) \in \mathcal{A}_{j_1 \ldots j_t}^k(n)\right) = \xi_{j_1 \ldots j_t}.$$

Для доказательства лемм 4.4.1 и 4.4.2 нам потребуются еще два утверждения, сформулированные ниже.

Лемма 4.4.3. *Пусть $l \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того,*

$$j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, \hat{m}(k)\}$$

— не обязательно различные числа, для любого $i_1 \in \{1, \ldots, l\}$ существует такое $i_2 \in \{1, \ldots, l\} \setminus \{i_1\}$, что графы $X^{**}_{j_{i_1}}(\tilde{x}^{i_1}), X^{**}_{j_{i_2}}(\tilde{x}^{i_2})$ имеют общую вершину. Тогда

$$\rho(X^{**}_{j_1}(\tilde{x}^1) \cup \ldots \cup X^{**}_{j_l}(\tilde{x}^l)) = k - 2$$

в том и только том случае, когда множества $V(X^{*}_{j_i}(\tilde{x}^i))$ совпадают для всех $i \in \{1, \ldots, l\}$. Если не все множества совпадают, то

$$\rho(X^{**}_{j_1}(\tilde{x}^1) \cup \ldots \cup X^{**}_{j_l}(\tilde{x}^l)) > k - 2.$$

Как и при доказательстве следствия 1.3.2, для произвольного графа G положим

$$f(G) = v(G) - \alpha \cdot e(G).$$

Лемма 4.4.4. *Пусть граф G — строго сбалансированный, $\rho(G) < k - 2$. Тогда количество (K, T)-максимальных копий графа G для всех α-нейтральных пар (K, T) с $v(T) \leq k^3$, $v(K, T) \leq k^3$ в $G(n, p)$ стремится по вероятности к бесконечности, а отношение этого количества к его математическому ожиданию, которое равно $\Theta(n^{f(G)})$, стремится по вероятности к 1.*

Доказательства всех лемм мы приводим в разделе 4.5.

4.5. Доказательства лемм

Доказательство леммы 4.4.4 мы в этой работе не приводим, потому что оно является упрощенной версией доказательства теоремы 4.2.1, доказанной нами в статье [142] (так же как и доказательство следствия 1.3.2 аналогично доказательству следствия 1.3.1). Доказательство леммы 4.4.2 опирается на лемму 4.4.3. Доказательство леммы 4.4.1 опирается на лемму 4.4.2. Поэтому сначала мы докажем лемму 4.4.3, а затем леммы 4.4.1 и 4.4.2.

4.5.1. Доказательство леммы 4.4.3

Рассмотрим некоторую α-нейтральную цепь (G, H), а также графы $K_1, \ldots, K_r$, $T_1, \ldots, T_{r-1}$ такие, что

$$H = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_r = G, \quad T_i \subset K_i, \quad i \in \{1, \ldots, r-1\},$$

пары $((K_i \setminus K_{i-1}) \cup T_{i-1}, T_{i-1})$, $i \in \{2, \ldots, r\}$, являются α-нейтральными, для каждого $i \in \{2, \ldots, r\}$ между вершинами графа $K_i \setminus K_{i-1}$ и графа $K_{i-1} \setminus T_{i-1}$ нет ребер.

Предположим, что H — строго сбалансированный граф с $\rho(H) = 1/\alpha$. Докажем, что граф G — сбалансированный.

Пусть F — некоторый собственный подграф графа G,

$$F_1 = F \cap H, \quad F_i = F \cap (K_i \setminus K_{i-1}), \quad i \in \{2, \ldots, r\}.$$

Тогда в силу определения α-нейтральной пары

$$f(F_i \cup T_{i-1}, T_{i-1}) \geq 0, \ i \in \{2, \ldots, r\}.$$

Очевидно,

$$e(F_i \cup \ldots \cup F_1, F_{i-1} \cup \ldots \cup F_1) \leq e(F_i \cup T_{i-1}, T_{i-1}), \ i \in \{2, \ldots, r\},$$

$$v(F_i \cup \ldots \cup F_1, F_{i-1} \cup \ldots \cup F_1) = v(F_i \cup T_{i-1}, T_{i-1}), \ i \in \{2, \ldots, r\}.$$

Следовательно,

$$f(F_i \cup \ldots \cup F_1, F_{i-1} \cup \ldots \cup F_1) \geq 0, \ i \in \{2, \ldots, r\}.$$

Кроме того,

$$f(F_1) \geq f(H) = 0,$$

так как граф H — строго сбалансированный. Знак в последнем неравенстве строгий тогда и только тогда, когда $F_1 \neq \varnothing$. Окончательно получаем

$$\rho(F) = (k-2) - \frac{(k-2)f(F)}{v(F)} =$$

$$= (k-2) - \frac{(k-2)(f(F_1) + \sum_{i=2}^{r} f(F_i \cup \ldots \cup F_1, F_{i-1} \cup \ldots \cup F_1))}{v(F)} \leq$$

$$k - 2 = \rho(G).$$

Следовательно, граф G сбалансированный.

Обозначим Y_i граф $X^{**}_{j_i}(\tilde{x}_i)$ для каждого $i \in \{1, \ldots, l\}$. Утверждение будем доказывать по индукции. Начнем со случая $l = 2$. Положим $Y_{1,2} = Y_1 \cap Y_2$. Рассмотрим три случая:

1) множество

$$V(X^{*}_{j_1}(\tilde{x}^1)) \cap V(Y_{1,2})$$

не пусто и граф $X^{*}_{j_1}(\tilde{x}^1) \cap Y_{1,2}$ — собственный подграф графа $X^{*}_{j_1}(\tilde{x}^1)$;

2) множество

$$V(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)) \cap V(Y_{1,2})$$

пусто;

3) справедливо равенство

$$X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cap Y_{1,2} = X^*_{j_1}(\tilde{x}^1).$$

Так как граф $X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)$ — строго сбалансированный с плотностью $k-2$, а $(Y_1, X^*_{j_1}(\tilde{x}^1))$ — $1/(k-2)$-нейтральная цепь, то по доказанному граф Y_1 сбалансированный, поэтому в первом случае выполнены соотношения

$$f(Y_1, X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cup Y_{1,2}) \le 0, \quad f(Y_2) = 0.$$

С другой стороны, граф $X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)$ строго сбалансированный,

$$f(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)) = 0,$$

поэтому

$$\frac{e(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)) - e(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1), Y_{1,2} \cap X^*_{j_1}(\tilde{x}^1))}{v(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)) - v(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1), Y_{1,2} \cap X^*_{j_1}(\tilde{x}^1))} = \frac{e(Y_{1,2} \cap X^*_{j_1}(\tilde{x}^1))}{v(Y_{1,2} \cap X^*_{j_1}(\tilde{x}^1))} < k-2.$$

Следовательно,

$$f(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cup Y_{1,2}, Y_{1,2}) \le f(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1), Y_{1,2} \cap X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)) < 0. \qquad (4.4)$$

Таким образом, имеем

$$e(Y_1 \cup Y_2) \ge e(Y_2) + e(Y_1, X^*_{j_1} \cup Y_{1,2}) + e(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cup Y_{1,2}, Y_{1,2}) > (k-2)v(Y_1 \cup Y_2).$$

Последнее неравенство строгое благодаря (4.4). Итак,

$$\rho(Y_1 \cup Y_2) > k-2.$$

Рассмотрим второй случай ($X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cap Y_{1,2} = \varnothing$). Из определения α-нейтральной цепи вытекает неравенство $f(Y_{1,2}) > 0$. Следовательно,

$$e(Y_1 \cup Y_2) \ge e(Y_2) + e(Y_1, Y_{1,2}) = e(Y_2) + e(Y_1) - e(Y_{1,2}) >$$

$$> (k-2)(v(Y_2) + v(Y_1) - v(Y_{1,2})) = (k-2)v(Y_1 \cup Y_2),$$

то есть снова $\rho(Y_1 \cup Y_2) > k-2$.

Пусть, наконец, $Y_{1,2} \supseteq X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)$. Тогда

$$X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) = X^*_{j_2}(\tilde{x}^2).$$

Действительно, если

$$X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cap X^*_{j_2}(\tilde{x}^2) \notin \{X^*_{j_1}(\tilde{x}^1), X^*_{j_2}(\tilde{x}^2), \varnothing\},$$

то из строгой сбалансированности графа $X^*_{j_2}(\tilde{x}^2)$ следует α-жесткость пары $(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cup X^*_{j_2}(\tilde{x}^2), X^*_{j_1}(\tilde{x}^1))$, что противоречит сбалансированности графа Y_2, так как

$$X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cup X^*_{j_2}(\tilde{x}^2) \subseteq Y_2, \quad \rho(Y_2) = \rho(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)).$$

Если

$$X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \subset X^*_{j_2}(\tilde{x}^2) \text{ или } X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \subset X^*_{j_2}(\tilde{x}^2),$$

то снова получаем жесткую пару и приходим к противоречию. Если же

$$X^*_{j_1}(\tilde{x}^1) \cap X^*_{j_2}(\tilde{x}^2) = \varnothing,$$

то в графе $Y_2 \setminus X^*_{j_2}(\tilde{x}^2)$ содержится подграф $X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)$ плотности $k-2$, а это противоречит тому, что $(Y_2, X^*_{j_2}(\tilde{x}^2))$ — α-нейтральная цепь.

Рассмотрим теперь $l \geq 3$ наборов $(Y_i, \tilde{x}^i)$. Пусть

$$V(Y_1) \cap V(Y_2) \neq \varnothing, \quad V(X^*_{j_1}(\tilde{x}^1)) \neq V(X^*_{j_2}(\tilde{x}^2))$$

и неравенство

$$\rho(Y_1 \cup \ldots \cup Y_{l-1}) > k-2$$

уже доказано. Граф

$$\bigcup_{i=1}^{l-1} Y_i \cap Y_l$$

является подграфом графа Y_l. Мы доказали, что граф Y_l — сбалансированный. Следовательно,

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^{l-1} Y_i \cap Y_l\right) \leq k-2.$$

Поэтому

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^{l} Y_i\right) = \frac{e\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l} Y_i\right)}{v\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l} Y_i\right)} \geq \frac{e\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l-1} Y_i\right) + e(Y_l) - e\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l-1} Y_i \cap Y_l\right)}{v\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l-1} Y_i\right) + v(Y_l) - v\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l-1} Y_i \cap Y_l\right)} > k-2.$$

Таким образом, плотность равна $k-2$ в том и только том случае, когда для любых любых графов Y_{i_1}, Y_{i_2}, имеющих общие вершины,

$$X^*_{j_{i_1}}(\tilde{x}^{i_1}) = X^*_{j_{i_2}}(\tilde{x}^{i_2}).$$

Так как для любого $i_1 \in \{1,\dots,l\}$ существует такое $i_2 \in \{1,\dots,l\}\setminus\{i_1\}$, что графы Y_{i_1}, Y_{i_2} имеют общую вершину, то необходимым и достаточным условием равенства плотности $k-2$ является совпадение множеств $V(X^*_{j_i}(\tilde{x}^i))$ для всех $i \in \{1,\dots,l\}$. Лемма доказана.

4.5.2. Доказательство леммы 4.4.2

Начнем с доказательства сходимости вероятности $\mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{L}^k_j(n))$ при $n \to \infty$ к некоторому числу ξ_j для каждого $j \in \{1,\dots,m(k)\}$. Мы будем опираться на три утверждения, одно из которых мы уже доказали (лемма 4.4.3), второе сформулировано и доказано в статье [155], аналог третьего сформулирован и доказан в той же статье. Введем сначала некоторые необходимые обозначения.

Пусть $j \in \{1,\dots,m(k)\}$ и в графе $X^5_j(\hat{x}_1)$ количество вершин равно v_j, а количество ребер — e_j. Пусть, кроме того, a_j — количество автоморфизмов графа $X^5_j(\hat{x}_1)$, сохраняющих вершину $\hat{x}_1$. Рассмотрим все упорядоченные наборы по v_j вершин из множества V_n. Определим подмножество M_j множества всех таких наборов.

- В M_j содержатся все различные неупорядоченные наборы.
- Пусть $\left(\tilde{x}_{i_1},\dots,\tilde{x}_{i_{v_j}}\right) \in M_j$ и $\tilde{Y}$ — граф на множестве всех вершин из этого набора, являющийся точным $\left(X^5_j(\hat{x}_1), \hat{G}|_{\{\hat{x}_1\}}\right)$-расширением графа $\tilde{Y}|_{\{\tilde{x}_{i_1}\}}$. Тогда если граф, полученный из $\tilde{Y}$ перестановкой его вершин
$$\begin{pmatrix} i_2 & \dots & i_{v_j} \\ t_2 & \dots & t_{v_j} \end{pmatrix},$$
является точным $\left(X^5_j(\hat{x}_1), \hat{G}|_{\{\hat{x}_1\}}\right)$-расширением графа $\tilde{Y}|_{\{\tilde{x}_{i_1}\}}$, то M_j не содержит набор $(\tilde{x}_{i_1}, \tilde{x}_{t_2},\dots,\tilde{x}_{t_v})$. В противном случае этот набор содержится в M_j.
- В M_j нет никаких наборов, помимо описанных.

Положим $m_j = |M_j|$. Пронумеруем наборы из множества M_j числами $1, \ldots, m_j$. Рассмотрим события $\mathcal{B}_1^j, \ldots, \mathcal{B}_{m_j}^j$. Событие $\mathcal{B}_i^j$ заключается в том, что подграф $\tilde{Y}_i$ на i-ом наборе из M_j вместе с первой вершиной этого набора образуют j-максимальную пару. Пусть A_i^j — индикатор события $\mathcal{B}_i^j$. Рассмотрим случайную величину

$$A_j = \sum_{i=1}^{m_j} A_i^j,$$

равную количеству всех j-максимальных пар. Справедливо равенство

$$\mathsf{P}(A_j = 0) = 1 - \sum_{i=1}^{m_j} \mathsf{P}(\mathcal{B}_i^j) + \sum_{i_1,i_2=1}^{m_j} \mathsf{P}(\mathcal{B}_{i_1}^j \cap \mathcal{B}_{i_2}^j) + \ldots +$$

$$+(-1)^N \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_N=1}^{m_j} \mathsf{P}(\mathcal{B}_{i_1}^j \cap \mathcal{B}_{i_2}^j \cap \ldots \cap \mathcal{B}_{i_N}^j) + \ldots \qquad (4.5)$$

В этом равенстве суммирования ведутся по всем различным наборам, в которых все числа попарно различны. Мы хотим доказать, что существует число ξ_j, для которого выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{L}_j^k(n)) = \lim_{n\to\infty} (1 - \mathsf{P}(A_j = 0)) = \xi_j.$$

Мы покажем, что для некоторого ξ_j

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_j = 0) = 1 - \xi_j.$$

Пусть $\phi_1^j(n)$ — вероятность того, что пара $(\tilde{Y}, \tilde{x}_{i_1})$, где $\tilde{Y}$ — граф, индуцированный на конкретный набор $\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{v_j}}$, является j-максимальной при условии, что граф $\tilde{Y}$ является точным $(X_j^5(\hat{x}_1), \hat{G}|_{\{\hat{x}_1\}})$-расширением графа $\tilde{Y}|_{\{\tilde{x}_1\}}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m_j} \mathsf{P}(\mathcal{B}_i^j) = \mathsf{E}A_j = nC_{n-1}^{v_j-1} \frac{(v_j-1)!}{a_j} \phi_1^j(n) p^{e_j} \sim \frac{\phi_1^j(n)}{a_j}. \qquad (4.6)$$

Положим

$$a_N^j(n) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_N=1}^{m_j} \mathsf{P}(\mathcal{B}_{i_1}^j \cap \mathcal{B}_{i_2}^j \cap \ldots \cap \mathcal{B}_{i_N}^j).$$

Мы пишем $i_1 \sim i_2$, если $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m_j\}$, $i_1 \neq i_2$ и наборы из M_j с номерами i_1, i_2 имеют общие вершины. Обозначим сумму с пересекающимися наборами вершин $r_j(N,n)$. Иными словами,

$$a_N^j(n) - \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_N:\ \forall t_1 \neq t_2 \in \{1,\ldots,N\}\ i_{t_1} \neq i_{t_2}, i_{t_1} \nsim i_{t_2}} \mathsf{P}(\mathcal{B}_{i_1}^j \cap \mathcal{B}_{i_2}^j \cap \ldots \cap \mathcal{B}_{i_N}^j) = r_j(N,n).$$

Пусть $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_N$ — некоторые попарно не пересекающиеся наборы из V_n, мощность каждого из которых равна v_j, $\tilde{x}_t^i$ — вершина с номером t в i-ом наборе, $i \in \{1, \ldots, N\}$, $t \in \{1, \ldots, v_j\}$. Пусть, кроме того, $\mathcal{Y}_N^j(n)$ — множество всех таких графов $\mathcal{G}$ из Ω_n, что для каждого $i \in \{1, \ldots, N\}$ набор $\left(\mathcal{G}|_{\mathbf{Y}_i}, \tilde{x}_1^i\right)$ является j-максимальным в $\mathcal{G}$. Обозначим $\mathcal{X}_N^j(n)$ множество всех таких графов $\mathcal{G}$ из Ω_n, что подграфы $\mathcal{G}|_{\mathbf{Y}_1}, \ldots, \mathcal{G}|_{\mathbf{Y}_N}$ являются точными $\left(X_j^5(\hat{x}_1), \hat{G}|_{\{\hat{x}_1\}}\right)$-расширениями графов $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1^1\}}, \ldots, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1^N\}}$ соответственно. Пусть

$$\phi_N^j(n) = \mathsf{P}(\mathcal{Y}_N^j(n) | \mathcal{X}_N^j(n)).$$

Легко заметить, что $\phi_N^j(n)$ не зависит от выбора множеств $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_N$. По аналогии с (4.6) справедливы соотношения

$$a_N^j(n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_N = 1}^{m_j} \mathsf{P}(\mathcal{B}_{i_1}^j \cap \mathcal{B}_{i_2}^j \cap \ldots \cap \mathcal{B}_{i_N}^j) =$$

$$\phi_N^j(n) \sum_{\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_N \in M_j} \mathsf{P}(\mathcal{X}_N^j(n)) + r_j(N, n)$$

$$\sim \left(\frac{n^{v_j} p^{e_j}}{a_j}\right)^N \frac{\phi_N^j(n)}{N!} + r_j(N, n) = \frac{\phi_N^j(n)}{N!} \left(\frac{1}{a_j}\right)^N + r_j(N, n).$$

Процитируем утверждение, которое доказано в [155] (Statement 3).

Утверждение 4.5.1. *Пусть $\{a_N(n)\}_{N \in \mathbb{N}}$ — такая последовательность функций, что существует последовательность чисел $\{b_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, для которой справедливо соотношение*

$$a_N(n) \to b_N, \quad n \to \infty,$$

для каждого $N \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} b_N$$

сходится к некоторому числу b. Если для каждого $N \in \mathbb{N}$ ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} a_N(n)$$

сходится и для всяких $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$\sum_{N=1}^{2s-1} a_N(n) \leq \sum_{N=1}^{\infty} a_N(n) \leq \sum_{N=1}^{2s} a_N(n),$$

то

$$\sum_{N=1}^{\infty} a_N(n) \to b, \quad n \to \infty.$$

Так как для любых $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ выполнено

$$a_N^j(n) \geq a_{N+1}^j(n),$$

то в силу утверждения 4.5.1 для доказательства сходимости

$$\mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{L}_j^k(n)) \to \xi_j$$

осталось обосновать, что при каждом $N \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} (a_N^j(n) - r_j(N,n)) = b_j(N), \tag{4.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_j(N,n) = r_j(N), \tag{4.8}$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N (b_j(N) + r_j(N)) < \infty. \tag{4.9}$$

Соотношение (4.7) является прямым следствием утверждения, доказательство которого мы не приводим, потому что оно слово в слово повторяет доказательство утверждения из статьи [155] (см. Statement 2).

Утверждение 4.5.2. *Существует такое число* $0 < \zeta_j < 1$, *что*

$$\phi_1^j(n) \sim \zeta_j, \;\; \phi_N^j(n) \sim \zeta_j^N.$$

Поэтому

$$b_j(N) = \frac{\zeta_j^N}{a_j^N N!}.$$

Осталось обосновать справедливость равенства (4.8) и неравенства

$$\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^N r_j(N) < \infty.$$

Пусть x — некоторая вершина. Определим множества $\mathcal{Q}_1^N(x)$, $\mathcal{Q}_2^N(x)$ пар (Q,x) (где Q — граф) следующим образом:

$$(Q,x) \in \mathcal{Q}_1^N \Leftrightarrow$$

$$((v_j < v(Q) < Nv_j) \wedge (\rho(Q) = k-2) \wedge (\exists \hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_N\, (\forall i \in \{1, \ldots, N\}$$
$$((\hat{Y}_i, x) \cong (X_j^5(\hat{x}), \hat{x})) \wedge$$
$$(\forall i_1, i_2 \in \{1, \ldots, N\}\ (\hat{Y}_{i_1} \cap \hat{Y}_{i_2} \supset X_j^*(x))) \wedge (Q = \hat{Y}_1 \cup \ldots \cup \hat{Y}_N))),$$
$$(Q, x) \in \mathcal{Q}_2^n \Leftrightarrow ((v_j < v(Q) < Nv_j) \wedge (\rho(Q) > k-2) \wedge (\exists \hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_N$$
$$\forall i_1 \in \{1, \ldots, N\}\ ((\hat{Y}_{i_1} \cong X_j^5(\hat{x})) \wedge$$
$$(\exists i_2 \in \{1, \ldots, N\}\, (\hat{Y}_{i_1} \cap \hat{Y}_{i_2} \neq \varnothing))) \wedge (Q = \hat{Y}_1 \cup \ldots \cup \hat{Y}_N))).$$

Пусть

$$(Q_1, x) \in \mathcal{Q}_{i_1}^{r_1}, \ldots, (Q_t, x) \in \mathcal{Q}_{i_t}^{r_t}, \quad i_1, \ldots, i_t \in \{1, 2\},$$
$$r_1, \ldots, r_t \in \mathbb{N}, \quad r_1 + \ldots + r_t = N$$

и $\hat{Y}_1^l \cup \ldots \cup \hat{Y}_{r_l}^l$ — разложение Q_l, $l \in \{1, \ldots, t\}$ на графы, изоморфные $X_j^5(\hat{x})$. Введем по аналогии с M^j различные наборы вершин из V_n для графов Q_l, $l \in \{1, \ldots, t\}$ (фиксируя первую вершину, если $(Q_l, x) \in \mathcal{Q}_1^{r_l}$, и не фиксируя ее, если $(Q_l, x) \in \mathcal{Q}_2^{r_l}$). Для каждого $l \in \{1, \ldots, t\}$ рассмотрим события $\mathcal{B}_i(Q_l)$, заключающиеся либо в том, что граф, индуцированный на i-ый набор, изоморфен Q_l, если $(Q_l, x) \in \mathcal{Q}_2^{r_l}$, либо в том, что граф, индуцированный на i-ый набор является точным $(Q_l, \{x\})$-расширением первой вершины этого набора и вместе с этой вершиной образует j-максимальную пару, если $(Q_l, x) \in \mathcal{Q}_1^{r_l}$. В силу леммы 4.4.3 для всяких $Q_i \in \mathcal{Q}_{l_i}^{r_i}$, $i \in \{1, \ldots, t\}$, найдутся такие положительные числа $q(Q_1, \ldots, Q_t)$, что справедливы соотношения

$$\sum_{r_1+\ldots+r_t=N} \sum_{i=1}^{t} \sum_{(Q_i,x)\in\mathcal{Q}_1^{r_i}} q(Q_1, \ldots, Q_t) \sum_{i_1,\ldots,i_t} \mathsf{P}(\mathcal{B}_{i_1}(Q_1) \cap \ldots \cap \mathcal{B}_{i_t}(Q_t)) \leq r_j(N, n)$$

$$\leq \sum_{r_1+\ldots+r_t=N} \sum_{i=1}^{t} \sum_{l_i=1}^{2} \sum_{(Q_i,x)\in\mathcal{Q}_{l_i}^{r_i}} q(Q_1, \ldots, Q_t) \sum_{i_1,\ldots,i_t} \mathsf{P}(\mathcal{B}_{i_1}(Q_1) \cap \ldots \cap \mathcal{B}_{i_t}(Q_t)), \tag{4.10}$$

суммирования ведутся по таким индексам $i_1, \ldots, i_t$, которым соответствуют непересекающиеся наборы.

Пусть $r_1, \ldots, r_t \in \mathbb{N}$, $r_1 + \ldots + r_t = N$. Рассмотрим такой вектор $(l_1, \ldots, l_t) \in \{1, 2\}^t$, что хотя бы одно из чисел $l_1, \ldots, l_t$ равно 2. Пусть $(Q_i, x) \in \mathcal{Q}_{l_i}^{r_i}$. Рассмотрим графы $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_t$, обладающие следующими свойствами.

— Любая пара графов среди $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_t$ не имеет общих вершин.

— Найдутся такие вершины $x_1, \ldots, x_t$, что для каждого $i \in \{1, \ldots, t\}$ имеем $(\hat{Q}_i, x_i) \cong (Q_i, x)$.

Положим

$$V(G) = V(\hat{Q}_1) \cup \ldots \cup V(\hat{Q}_t), \quad E(G) = E(\hat{Q}_1) \cup \ldots \cup E(\hat{Q}_t).$$

Пусть N_G — количество копий графа G в случайном графе $G(n,p)$. Очевидно, существуют такие положительные константы $C(G), \mu(G)$, для которых

$$\mathsf{E}N_G < C(G)n^{f(G)} < C(G)n^{-\mu(G)}.$$

Следовательно, разность между верхней и нижней оценкой в (4.10) равна $o(1)$. Поэтому для того, чтобы доказать существование $\lim\limits_{n\to\infty} r_j(N,n)$, осталось показать, что нижняя оценка в (4.10) сходится к некоторому числу $r_j(N)$ при $n \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что сходится условная вероятность $\varphi(Q_1, \ldots, Q_t)$ того, что графы, индуцированные на фиксированные t наборов, вместе с первыми вершинами этих наборов образуют j-максимальные пары при условии, что для каждого $l \in \{1, \ldots, t\}$ граф, индуцированный на l-ый набор, является точным (Q_l, x)-расширением первой вершины этого набора. Доказательство этого факта аналогично доказательству утверждения 4.5.2, и мы его здесь не приводим.

Докажем, наконец, что $\sum_{N=1}^{\infty}(-1)^N r_j(N) < \infty$. Легко заметить, что

$$\sum_{r_1+\ldots+r_t=N} \sum_{i=1}^{t} \sum_{(Q_i,x)\in\mathcal{Q}_1^{r_i}} q(Q_1,\ldots,Q_t) \sum_{i_1,\ldots,i_t} \mathsf{P}(\mathcal{B}_{i_1}(Q_1) \cap \ldots \cap \mathcal{B}_{i_t}(Q_t))$$

$$\leq (C_n^{v_j})^N \left(\frac{v_j!}{a_j}\right)^N \frac{1}{N!} p^{e(Q_1)+\ldots+e(Q_t)} \varphi(Q_1,\ldots,Q_t) \leq \frac{1}{a_j^N N!} = o(1).$$

Тем самым, утверждение для случая одного свойства доказано.

Перейдем к пересечениям свойств. Легко понять, что для доказательства утверждения достаточно показать, что для любых $j_1, \ldots, j_t \in \{1, \ldots, m(k)\}$ сходится последовательность

$$\{\mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{L}_{j_1}^k(n) \cap \ldots \cap \mathcal{L}_{j_t}^k(n))\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Действительно, для любых свойств A, C справедливо равенство

$$\mathsf{P}(\overline{A} \cap C) = \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A \cap C).$$

Если предположить, что вероятность

$$\mathsf{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap C)$$

представима в виде

$$\sum_{s \in S} \sum_{\{i_1,\ldots,i_s\} \in I_s} (-1)^{\sigma_s(i_1,\ldots,i_s)} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s} \cap C)$$

для некоторых $S \subseteq \{1, \ldots, k-1\}$, $I_s \subset C^s_{\{1,\ldots,k-1\}}$, $\sigma_s : \mathbb{N}^s \to \{0,1\}$, то

$$\mathsf{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_k} \cap C) = \mathsf{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap C) - \mathsf{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap (A_k \cap C)) =$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{\{i_1,\ldots,i_s\} \in I_s} (-1)^{\sigma(i_1,\ldots,i_s)} (\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s} \cap C) - \mathsf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_s} \cap A_k \cap C)),$$

то есть вероятность $\mathsf{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_k} \cap C)$ представляется в виде конечной суммы вероятностей пересечений событий, среди которых нет отрицаний. Поэтому если существует предельное значение вероятности каждого такого пересечения, то существует предел и для $\mathsf{P}(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_k} \cap C)$.

Итак, пусть $j_1, \ldots, j_t \in \{1, \ldots, m(k)\}$. Доказательство существования предела

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{L}^k_{j_1}(n) \cap \ldots \cap \mathcal{L}^k_{j_t})(n)$$

дословно повторяет доказательство существования предела вероятности одного свойства. Заметим теперь, что если пересечение $\{j_1, \ldots, j_t\}$ со множеством $\{m(k)+1, \ldots, \hat{m}(k)\}$ не пусто, то сходимость вероятности существования подграфов $X^{**}_{j_i}(\tilde{x}_i)$ доказывается по аналогии со случаем $j_1, \ldots, j_t \in \{1, \ldots, m(k)\}$, после чего остается воспользоваться теоремой 4. Наконец, сходимость $\mathsf{P}(G(n,p) \in \mathcal{L}^k_{\hat{m}(k)+1}(n))$ следует из равенства

$$\mathcal{L}^k_{\hat{m}(k)+1}(n) = \Omega_n \setminus \mathcal{L}^k_1(n) \cup \ldots \cup \mathcal{L}^k_{\hat{m}(k)}(n),$$

Утверждение доказано.

4.5.3. Доказательство леммы 4.4.1

Пусть $\mathcal{S}$ — множество, состоящее из всех таких α-жестких и α-нейтральных пар (K,T), что $v(T) \leq k^3, v(K,T) \leq k^3$.

Из следствия 1.3.1, следствия 1.3.2, теоремы 1.3.2, теоремы 4.3.1 и леммы 4.4.4 следует существование такого множества $\tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(G(n,p) \in \Omega_n \setminus \tilde{\Omega}_n) = 0,$$

что для любого графа $\mathcal{G} \in \tilde{\Omega}_n$ и для любых вершин $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r$, $r \leq k$, найдутся всевозможные неизоморфные (K,T)-максимальные α-надежные пары $(W, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_r\}})$, $v(W) \leq k^3$, для всех $(K,T) \in \mathcal{S}$ в графе $\mathcal{G}$, найдутся всевозможные неизоморфные (K,T)-максимальные в $\mathcal{G}$ строго сбалансированные графы W с $\rho(W) < \alpha$, $v(W) \leq k^3$, для всех $(K,T) \in \mathcal{S}$, а также нет ни одной копии на $r \leq k^3$ вершинах графа с плотностью, большей α.

При описании стратегий в ситуациях, в которых ход рассуждения не меняется в зависимости от того, в каком графе из $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ Новатор выбирает вершину, мы будем считать, что он выбирает вершину в графе $\mathcal{G}$.

Докажем, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ и для любой пары графов

$$(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \in (\mathcal{A}_{j_1\ldots j_t}(n) \cap \tilde{\Omega}_n) \times (\mathcal{A}_{j_1\ldots j_t}(m) \cap \tilde{\Omega}_m)$$

у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(\mathcal{G}, \mathcal{H}, k)$.

Пусть Новатор на первом ходу выбирает вершину $\tilde{x}_1$ в графе $\mathcal{G}$. Рассмотрим граф $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1)$. Если

$$\rho^{\max}(X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1)) = k - 2$$

и $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1)$ — $(\tilde{x}_1)$-развертка в $\mathcal{G}$, то так как $\mathcal{H} \in \mathcal{A}_{j_1\ldots j_t}(M)$, в графе $\mathcal{H}$ найдется такая вершина $\tilde{y}_1$, что граф $X^5_{\mathcal{H}}(\tilde{y}_1)$ является разверткой графа $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1)$ (в данном случае графы $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1), X^5_{\mathcal{H}}(\tilde{y}_1)$ будут изоморфны). Если

$$\rho^{\max}(X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1)) = k - 2$$

и $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1)$ не является $(\tilde{x}_1)$-разверткой в $\mathcal{G}$ или же

$$\rho^{\max}(X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1)) < k - 2,$$

то так как $\mathcal{H} \in \tilde{\Omega}_M$, в графе $\mathcal{H}$ найдется такая вершина $\tilde{y}_1$, что граф $X^5_{\mathcal{H}}(\tilde{y}_1)$ является разверткой графа $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1)$. Консерватор в первом раунде выбирает вершину $\tilde{y}_1$.

Пусть Новатор в ξ-ом раунде, $\xi \in \{2, \ldots, k-3\}$, выбирает, скажем, вершину $\tilde{x}_\xi \in \mathcal{G}$. Если для некоторых

$$i \in \{1, \ldots, t(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\xi-1}, \mathcal{G})\}, \quad \mu \in \{\xi, \ldots, k-3\}$$

вершина $\tilde{x}_\xi$ совпадает с $\tilde{x}^i_\mu(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\xi-1})$, то Консерватор выберет вершину

$$\tilde{y}_\xi = \mathrm{NET}_{\mathcal{G},\mathcal{H},\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{\xi-1},\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{\xi-1}}(\tilde{x}^i_\mu(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\xi-1})).$$

Предположим, что подходящих

$$i \in \{1, t(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\xi-1}, \mathcal{G})\}, \quad \mu \in \{\xi, \ldots, k-3\}$$

не найдется. В силу определения графов $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\xi-1})$, $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_\xi)$ и так как $\mathcal{H} \in \Omega_M$, в графе $\mathcal{H}$ найдется такая вершина $\tilde{y}_\xi$, что граф $X^5_{\mathcal{H}}(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_\xi)$ является разверткой графа $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_\xi)$. Действительно, интересующий нас граф $X^5_{\mathcal{H}}(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_\xi)$ таков, что пара $(X^5_{\mathcal{H}}(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_\xi), \mathcal{H}|_{\{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{\xi-1}\}})$ является α-надежной. Консерватор выберет вершину $\tilde{y}_\xi$.

Пусть в раунде с номером $k-3$ выбраны вершины $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3} \in \mathcal{G}$, $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{k-3} \in \mathcal{H}$. По построению графы $X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}), X^5_{\mathcal{H}}(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{k-3})$ изоморфны. Пусть

$$\varphi : X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}) \to X^5_{\mathcal{H}}(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{k-3})$$

— изоморфизм.

Остальную часть доказательства разобьем на несколько случаев. Большинство случаев разбирается похожим образом, поэтому мы приведем детальное доказательство лишь для основных, а остальные просто перечислим.

1. В $k-2$-ом раунде Новатор выбирает вершину $\tilde{x}_{k-2}$, соединенную ребрами с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}$. Если в графе $\mathcal{G}$ найдутся вершины $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$, соединенные ребрами с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, то вершина $\tilde{x}_{k-2}$ принадлежит множеству $V(\hat{X}^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}))$. Консерватор выбирает вершину

$$\tilde{y}_{k-2} = \varphi(\tilde{x}_{k-2}). \tag{4.11}$$

Если в раунде с номером $k-1$ Новатор выбирает вершину из множестваа $V(\hat{X}^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}))$, то Консерватор снова выбирает вершину

$$\tilde{y}_{k-1} = \varphi(\tilde{x}_{k-1}) \tag{4.12}$$

и, очевидно, выигрывает в k-ом раунде. Если же Новатор выбирает вершину $\tilde{x}_{k-1}$, соединенную с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, но для нее не существует вершины $\tilde{x}$, соединенной с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, то без ограничения общности можно считать, что $\tilde{x}_{k-1} \in X^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})$. Консерватор выбирает вершину $\tilde{y}_{k-1}$, определенную в (4.12). Если в k-ом раунде Новатор выбирает вершину $\tilde{x}_k$, соединенную ребрами с $k-2$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, то в графе $X^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})$ найдется вершина $\tilde{x}$, соединенная ребрами с теми же из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, что и вершина $\tilde{x}_k$. Консерватор выберет вершину

$$\tilde{y}_k = \varphi(\tilde{x}_k)$$

и победит. Если, наконец, вершина $\tilde{x}_k$ соединена с не более, чем $k-3$ из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, то пара $(\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_k\}}, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k-1}\}})$ является α-надежной. Так как $\mathcal{H} \in \tilde{\Omega}_M$, в графе $\mathcal{H}$ найдется такая вершина $\tilde{y}_k$, что граф $\mathcal{H}|_{\{\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_k\}}$ является точным $(\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_k\}}, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k-1}}\})$-расширением графа $\mathcal{H}|_{\{\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{k-1}\}}$. Консерватор выберет вершину $\tilde{y}_k$ и победит. Если вершина $\tilde{x}_{k-1}$ соединена ребрами с не более чем $k-4$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, то найдем все такие вершины $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^s$ графа $\mathcal{G}$, соединенные ребрами с хотя бы $k-2$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, что все пары $(\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k-1},\tilde{x}^i\}}, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k-1}\}})$, $i \in \{1, \ldots, s\}$ неизоморфны. Рассмотрим подграф A в $\mathcal{G}$, содержащий только вершины $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^s$. Пара $(A, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k-2}\}})$ является α-надежной. Так как $\mathcal{H} \in \tilde{\Omega}_M$, в графе $\mathcal{H}$ найдется точное $(A, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k-2}\}})$-расширение B графа $\mathcal{H}|_{\{\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{k-3}\}}$. При изоморфизме, соответствующем этому расширению, вершина $\tilde{x}_{k-1}$ перейдет в вершину $\tilde{y}_{k-1}$, которую и выберет Консерватор, после чего, очевидно, сможет победить. Пусть, наконец, вершина $\tilde{x}_{k-1}$ соединена ребрами с $k-3$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$. Если найдется вершина $\tilde{x}$, соединенная с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, то без ограничения общности можно считать, что вершины $\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}$ принадлежат графу $X^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})$. Консерватор выберет вершину $\tilde{y}_{k-1}$, определенную равенством (4.12). Далее если Новатор выбирает вершину, соединенную с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, то Консерватор выберет вершину $\varphi(\tilde{x})$. Если Новатор выберет вершину, соединенную ребрами с $k-2$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, то снова без ограничения общности можно считать, что эта вершина принадлежит графу $X^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})$, и Консерватор, тем самым, сможет победить.

Если же вершина $\tilde{x}_{k-2}$ не принадлежит $V(\hat{X}^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}))$, то найдем все такие вершины $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^s$ графа $\mathcal{G}$, что выполнены следующие свойства. Каждая из вершин $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$ соединена ребром с каждой из вершин $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^s$. Множества наборов по $k-3$ вершины из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, для которых в графе $\mathcal{G}$ найдется вершина, соединенная с ними и с $\tilde{x}^i$, различны для всех $i \in \{1, \ldots, s\}$. Рассмотрим подграф A в $\mathcal{G}$, содержащий вершины $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^s$, а также по одному (G_2, H_2) расширению каждого подграфа на $k-3$ вершинах из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$ и одной из $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^s$. Тогда пара $(A, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k-3}\}})$ является α-надежной. Так как $\mathcal{H} \in \tilde{\Omega}_M$, в графе $\mathcal{H}$ найдется точное $(A, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{k-3}\}})$-расширение B графа $\mathcal{H}|_{\{\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{k-3}\}}$. При изоморфизме, соответствующему этому расширению, вершина $\tilde{x}_{k-2}$ перейдет

в вершину $\tilde{y}_{k-2}$, которую и выберет Консерватор. Легко заметить, что если в $k-1$-ом раунде Новатор выбирает вершину $\tilde{x}_{k-1}$, соединенную с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, то Консерватор победит, выбрав в $k-1$-ом раунде нужную вершину из графа B. Если Новатор выберет вершину $\tilde{x}_{k-1}$, соединенную ребрами с не более чем $k-4$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, то дальнейшая стратегия Консерватора также очевидна. Пусть, наконец, вершина $\tilde{x}_{k-1}$ соединена ребрами с $k-3$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$. Если найдется вершина $\tilde{x}$, соединенная с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-1}$, то без ограничения общности можно считать, что вершины $\tilde{x}_{k-1}, \tilde{x}$ принадлежат $V(A)$. Но тогда Консерватор найдет вершину $\tilde{y}_{k-1}$, соответствующую вершине $\tilde{x}_{k-1}$, в графе B и вновь сможет победить.

2. В $k-2$-ом раунде Новатор выбирает вершину $\tilde{x}_{k-2}$, соединенную ребрами с $k-4$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}$. Если в графе $\mathcal{G}$ найдутся вершины $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$, соединенные ребрами с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, то вершины $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$ принадлежат либо множеству

$$V(\hat{X}^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})),$$

либо множеству

$$V(\hat{X}^4_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})) \setminus V(\hat{X}^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})).$$

То есть вершина $\tilde{x}_{k-2}$ принадлежит множеству $V(X^4_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}))$. Консерватор выбирает вершину $\tilde{y}_{k-2}$, определенную в (4.11). Дальнейшая стратегия Консерватора аналогична случаям, разобранным в 1.

Если не существует двух вершин, соединенных между собой и с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, то дальнейшие рассуждения повторяют случаи из 1., в которых использовались надежные пары.

3. В $k-2$-ом раунде Новатор выбирает вершину $\tilde{x}_{k-2}$, соединенную ребрами с не более чем $k-5$ вершинами из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3}$. Если в графе $\mathcal{G}$ найдутся вершины $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$, соединенные ребрами с каждой из $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-2}$, то вершины $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$ принадлежат либо множеству

$$V(\hat{X}^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})),$$

либо множеству

$$V(\hat{X}^4_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})) \setminus V(\hat{X}^2_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{k-3})).$$

либо множеству

$$V(\hat{X}^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{k-3}))\setminus V(\hat{X}^4_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{k-3})).$$

В любом случае без ограничения общности можно считать, что вершина $\tilde{x}_{k-2}$ принадлежит множеству $V(X^5_{\mathcal{G}}(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{k-3}))$. Консерватор выбирает вершину $\tilde{y}_{k-2}$, определенную равенством (4.11) Дальнейшая стратегия Консерватора, опять же, аналогична случаям, разобранным в 1.

Если не существует двух вершин, соединенных между собой и с каждой из $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{k-2}$, то дальнейшие рассуждения повторяют случаи из 1, в которых использовались надежные пары.

Лемма доказана.

4.6. Доказательство теоремы 4.2.1

Легко заметить, что с помощью леммы 4.4.1 можно так разбить некоторое подмножество $\tilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$, $\mathsf{P}(G(n,p)\in\tilde{\Omega}_n)\to 1$, $n\to\infty$, на классы эквивалентности $\Omega^1_n,\dots,\Omega^{s(k)}_n$, что для пар графов из классов с одним и тем же номером у Консерватора есть выигрышная стратегия. Иными словами, для любых $n,m\in\mathbb{N}$, для любого $i\in\{1,\dots,s(k)\}$, для любых графов $\mathcal{G}\in\Omega^i_n$, $\mathcal{H}\in\Omega^i_m$ у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(\mathcal{G},\mathcal{H},k)$. Каждый такой класс эквивалентности есть пересечение множества $\mathcal{A}^k_{j_1,\dots,j_t}(n)$ для некоторых

$$j_1,\dots,j_t\in\{1,\dots,\hat{m}(k)+1\}$$

с $\tilde{\Omega}_n\subset\Omega_n$. Пусть L — некоторое свойство первого порядка, выражаемое формулой первого порядка глубины не выше k. В силу теоремы 1.4.1 для каждого $i\in\{1,\dots,s(k)\}$ его истинность одинакова на всех графах из

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega^i_n.$$

Из леммы 4.4.2 следует, что мера каждого класса Ω^i_n, $i\in\{1,\dots,s(k)\}$, сходится при $n\to\infty$. Подмножество в $\tilde{\Omega}_n$ графов, для которых истинно свойство L, есть объединение классов Ω^i_n, $i\in I$, для некоторого $I\subseteq\{1,\dots,s(k)\}$, поэтому мера такого подмножества также сходится. Теорема доказана.

Глава 5.

Перемены кванторов формул первого порядка с бесконечным спектром

Пусть ϕ — формула первого порядка, а $S(\phi)$ — множество всех таких $\alpha \in (0,1)$, что вероятность $\mathsf{P}(G(n,n^{-\alpha}) \models \phi)$ не сходится ни к 0, ни к 1 при $n \to \infty$. Как мы выяснили в главе 2 (см. следствие 2.2.1), наименьшая глубина формулы с бесконечным *спектром* $S(\phi)$, равна либо 4, либо 5. В этой главе мы ответим на вопрос, чему равно наименьшее число перемен кванторов такой формулы.

Всюду в этой главе мы пишем $G \models \phi$, когда формула ϕ истинна на графе G.

Все результаты этой главы опубликованы в работах [125, 143, 146].

5.1. Введение и новый результат

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(m+1)}$ и $p = n^{-\alpha}$. В главе 2 мы доказали следующее. Вероятность того, что формула

$$\phi = \exists x_1 \exists x_2 \left[\left(\exists x_3 \exists x_4 \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le 4} (x_i \sim x_j) \right) \right) \wedge (\varphi(x_1, x_2)) \right],$$

где $\varphi(x_1, x_2) =$

$$\forall y_1 \left([y_1 \sim x_1] \vee [y_1 \sim x_2] \vee [\forall y_2 ([\neg(y_2 \sim x_1)] \vee [\neg(y_2 \sim y_1)])] \vee [\exists z \, (z \sim x_1) \wedge \right.$$

$$\left. (z \sim x_2) \wedge (\forall u \, [([\neg(u \sim z)] \vee [\neg(u \sim y_1)]) \vee (u \sim x_1) \vee (u \sim x_2)])] \right),$$

истинна на $G(n,p)$, не стремится ни к 0, ни к 1. Заметим, что максимальное число перемен кванторов среди всех последовательностей вложенных кванторов формулы ϕ равно $\mathrm{ch}(\phi) = 3$ (здесь существенно, что

отрицания в формуле ϕ ставятся только перед атомарными формулами). Величина $\mathrm{ch}(\phi)$ называется *числом перемен кванторов формулы* ϕ. Возникает естественный вопрос: чему равно минимальное число перемен кванторов замкнутой формулы с бесконечным спектром? Ответ на этот вопрос сформулирован в утверждении ниже, которое является основным результатом настоящей главы.

Теорема 5.1.1. *Минимальное k, для которого существует замкнутая формула первого порядка с бесконечным спектром и числом перемен кванторов k, равно* 3.

Изучению спектров формул первого порядка с малым числом перемен кванторов $(0, 1, 2)$ посвящены некоторые работы П. Эрдеша, А. Реньи, Б. Боллобаша, А. Ручинского, А. Винса, Дж. Спенсера и других (см., например, [28, 44, 103, 113, 142]). В этих работах для формул с малым числом перемен кванторов специального вида спектр был полностью изучен (о некоторых таких результатах мы подробнее поговорим в следующем разделе). В частности, все такие спектры конечны. Как видно из теоремы 5.1.1, нам удалось обобщить эти результаты и доказать, что спектры всех формул первого порядка с числом перемен кванторов $0, 1, 2$ конечны.

5.2. Формулы существования и расширения

Замкнутая формула ϕ в предваренной нормальной форме называется *формулой существования*, если в этой формуле присутствуют только кванторы существования. Замкнутая формула ϕ в предваренной нормальной форме называется *формулой расширения*, если последовательность кванторов этой формулы равна $\forall \ldots \forall \exists \ldots \exists$. Асимптотическое поведение вероятностей истинности таких формул для случайного графа $G(n, p)$ было изучено в [28, 44, 103, 113]. Мы резюмируем основные результаты ниже в этом разделе.

Можно показать, что теоремы 1.3.2, 1.3.4 влекут конечность спектра любой формулы существования и любой формулы расширения (строгое доказательство этого факта приведено в разделе 5.4).

Рассмотрим теперь замкнутые формулы, находящиеся в предваренной нормальной форме, с числом перемен кванторов 3. Будем называть

такую формулу ϕ *формулой двойного расширения*, если последовательность кванторов в ней имеет вид $\forall \ldots \forall \exists \ldots \exists \forall \ldots \forall$. Асимптотические поведение вероятностей истинности формул двойного расширения для случайного графа $G(n,p)$ было изучено в [1, 135].

Пусть $G \supset H$, $V(H) = \{a_1, \ldots, a_s\}$, $V(G) \setminus V(H) = \{b_1, \ldots, b_m\}$, $m \geq 1$, но $s \geq 0$ (s может быть равно 0). Рассмотрим некоторое конечное множество графов $\mathcal{W}$, удовлетворяющих следующему свойству. Для любого $W \in \mathcal{W}$ выполнено $G \subset W$, $V(W) \setminus V(G) = \{c_1, \ldots, c_r\}$, $r = r(W) \geq 1$, ребра в W проведены между каждой связной компонентой графа $W|_{\{c_1,\ldots,c_r\}}$ и графом $W|_{\{b_1,\ldots,b_m\}}$. Будем говорить, что граф обладает *свойством* $(\mathcal{W}, G, H)$*-двойного расширения*, если для любых его различных вершин $y_1, \ldots, y_s$ существуют такие различные вершины $x_1, \ldots, x_m$, что для любого $W \in \mathcal{W}$ и любых различных вершин $z_1, \ldots, z_{r(W)}$

- для любых $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено $y_i \neq x_j$, и истинность предиката $a_i \sim b_j$ влечет истинность предиката $y_i \sim x_j$,
- для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ истинность предиката $b_i \sim b_j$ влечет истинность предиката $x_i \sim x_j$,
- либо существуют такие $h \in \{1, \ldots, r(W)\}$ и $i \in \{1, \ldots, s\}$, что $[z_h = y_i] \vee [(z_h \nsim y_i) \wedge (c_h \sim a_i)]$,

  либо существуют такие $h \in \{1, \ldots, r(W)\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$, что $[z_h = x_j] \vee [(z_h \nsim x_j) \wedge (c_h \sim b_j)]$.

В [1] (см. главу 10.7) доказано следующее утверждение.

Теорема 5.2.1. *Пусть $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Пусть, кроме того, для любого $W \in \mathcal{W}$ выполнено $\rho(W,G) > \rho(G,H) > 0$ и $n^{-1/\rho(W,G)} \gg p \gg n^{-1/\rho(G,H)}$. Тогда а.п.н. $G(n,p)$ обладает свойством $(\mathcal{W}, G, H)$-двойного расширения.*

В разделе 5.4 мы покажем, что теоремы 1.3.2, 1.3.4, 5.2.1 влекут конечность спектров всех формул двойного расширения, и, таким образом, докажем теорему 5.1.1.

5.3. Вспомогательные конструкции

Напомним, что *укорененным деревом* T_R называется дерево с выделенной вершиной R, которая называется *корнем*. *Укорененный лес* — дизъ-

юнктное объединение укорененных деревьев, все корни этих деревьев являются *корнями укорененного леса*. Если $R, \ldots, x, y$ — простой путь в укорененном дереве T_R, то x называется *родителем* y, а y — *сыном* x. Отношение *наследствования* является транзитивным и рефлективным замыканием отношения "быть сыном". Если $v \in V(T_R)$, то $T_R[v]$ будем обозначать подграф в T_R, индуцированный на множество всех наследников v. Очевидно, $T_R[v]$ является лесом, сыновья v являются его корнями.

Формулы первого порядка $\phi_1(x_1, \ldots, x_s), \phi_2(y_1, \ldots, y_s)$ $(s \in \{0, 1, 2, \ldots\})$ называются *(асимптотически) эквивалентными* $(\varphi_1 \cong \varphi_2)$, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для любого графа G с $v(G) \geq n$ и любых его вершин $v_1, \ldots, v_s$ либо

$$G \models (\phi_1(v_1, \ldots, v_s)) \wedge (\phi_2(v_1, \ldots, v_s)),$$

либо

$$G \models (\neg(\phi_1(v_1, \ldots, v_s)) \wedge (\neg(\phi_2(v_1, \ldots, v_s))).$$

Будем называть множество графов C *(асимптотическим) свойством графов первого порядка*, если существуют такие замкнутая формула первого порядка ϕ и натуральное число n, что $v(G) \geq n$ и $G \in C$ тогда и только тогда, когда $G \models \phi$ и $v(G) \geq n$ (формула ϕ *выражает* свойство C).

5.3.1. Язык $\mathcal{F}$

Легко заметить, что любая формула первого порядка (необязательно замкнутая) эквивалентна (даже не в асимптотическом смысле) некоторой формуле, в записи которой участвуют символы переменных, предикатные символы $\sim, =, \nsim, \neq$, конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$ (но нет символа отрицания) и кванторы $\forall, \exists$. Будем обозначать множество всех формул, записанных на таком языке $\mathcal{F}$.

Сформулируем очевидное наблюдение о формулах из $\mathcal{F}$.

Лемма 5.3.1. *Пусть* $Z \in \{\wedge, \vee\}$, $z_1, z_2 \in \{\forall, \exists\}$. *Тогда для любых формул* $\varphi_1(x_1, \ldots, x_s), \varphi_2(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{F}$ *(с не менее чем* s *и* m *свободными переменными соответственно)*

$$[z_1 x_1 \ldots z_1 x_s \, (\varphi_1(x_1, \ldots, x_s))] Z [z_2 x_1 \ldots z_2 x_m \, (\varphi_2(x_1, \ldots, x_m))] \cong$$

$$z_1 x_1 \ldots z_1 x_s z_2 x_{s+1} \ldots z_2 x_{s+m} \, ([\varphi_1(x_1, \ldots, x_s)] Z [\varphi_2(x_{s+1}, \ldots, x_{s+m})]).$$

С целью упрощения некоторых определений и доказательств мы для произвольной формулы $\phi \in \mathcal{F}$ определим укорененный лес $F(\phi)$ и будем называть его *графом вложенности формулы* ϕ.

- Если ϕ — атомарная формула, то $F(\phi)$ — пустой граф.
- Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{F}$ — некоторая формула с хотя бы одной свободной переменной x. Если $F(\varphi(x))$ — пустой граф, то граф вложенности формулы $\phi = \exists x\,(\varphi(x))$ (формулы $\phi = \forall x\,(\varphi(x))$) — это изолированная вершина, помеченная квантором $\exists$ (квантором $\forall$). Эта вершина является тривиальным деревом, укорененным в этой вершине. Если же граф $F(\varphi(x))$ не является пустым и $F(\varphi(x)) = T^1_{t_1} \sqcup \ldots \sqcup T^m_{t_m}$, где $T^1_{t_1}, \ldots, T^m_{t_m}$ — укорененные деревья с корнями $t_1, \ldots, t_m$ соответственно, то граф вложенности формулы $\phi = \exists x\,(\varphi(x))$ (формулы $\phi = \forall x\,(\varphi(x))$) является укорененным деревом, полученным добавлением к графу $F(\varphi(x))$ вершины t, помеченной квантором $\exists$ (квантором $\forall$), и ребер между t и вершинами $t_1, \ldots, t_m$, с корнем t.
- Если $\phi = (\varphi_1) \wedge (\varphi_2)$ (или $\phi = (\varphi_1) \vee (\varphi_2)$), то $F(\phi)$ является дизъюнктным объединением графов $F(\varphi_1)$, $F(\varphi_2)$.

Заметим, что кванторная глубина формулыϕ — это длина самого длинного пути $F(\phi)$, начинающегося в некотором его корне. Очевидно, $\mathrm{ch}(\phi)$ совпадает с максимальным числом перемен кванторов, которыми помечены вершины путей, начинающихся в корнях $F(\phi)$.

5.3.2. Предваренные нормальные формы

Формула $\phi \in \mathcal{F}$ находится в *предваренной нормальной форме* (PNF) (мы также будем говорить, что ϕ — PNF-*формула*), если $F(\phi)$ — простой путь (все кванторы находятся в начале формулы). Для произвольной формулы $\phi \in \mathcal{F}$ мы будем называть ее PNF-*версией* PNF-формулу $\hat{\phi} \in \mathcal{F}$, если $\hat{\phi} \cong \phi$. Как известно [5], у любой формулы первого порядка (необязательно из $\mathcal{F}$) существует эквивалентная ей (даже не в асимптотическом смысле) формула первого порядка, находящаяся в предваренной нормальной форме. Из этого очевидным образом следует, что у любой $\phi \in \mathcal{F}$ есть PNF-версия.

Будем говорить, что ϕ — NEPNF-*формула*, если ϕ — замкнутая PNF-формула, построенная следующим образом. Рассмотрим произвольную последовательность символов $z = (z_1, \ldots, z_m)$ из $\{\forall, \exists\}$. Пусть формула $\phi_1(x_1, \ldots, x_m)$ из $\mathcal{F}$ не содержит кванторов и предикатных символов $=$

и $\neq$. Для каждого $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ формула $\phi_{j+1}(x_1, \ldots, x_m)$ получена из формулы $\phi_j(x_1, \ldots, x_m)$ следующим образом:

$$\phi_{j+1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_{j+1} \neq x_j) \wedge \ldots \wedge (x_{j+1} \neq x_1) \wedge (\phi_j(x_1, \ldots, x_m)),$$

если $z_{j+1} = \exists$;

$$\phi_{j+1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_{j+1} = x_j) \vee \ldots \vee (x_{j+1} = x_1) \vee (\phi_j(x_1, \ldots, x_m)),$$

если $z_{j+1} = \forall$.

Наконец, $\phi = z_1 x_1 \ldots z_m x_m \, (\phi_m(x_1, \ldots, x_m))$. Будем называть NE-*базисом* формулы ϕ пару $(\phi_1(x_1, \ldots, x_m), z)$.

Лемма 5.3.2. *Для любой замкнутой* PNF*-формулы* $\phi \in \mathcal{F}$ *существует такая* NEPNF*-формула* $\hat{\phi} \in \mathcal{F}$ *с той же последовательностью кванторов, что* $\phi \cong \hat{\phi}$.

Доказательство. Пусть $\phi = z_1 x_1 \ldots z_m x_m \, (\varphi(x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{F}$ — замкнутая PNF-формула, где $z_1, \ldots, z_m$ — некоторая последовательность кванторов. Положим $\hat{\phi}_1(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$. Для любого $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ получим формулу $\hat{\phi}_{j+1}(x_1, \ldots, x_m)$ с помощью построенной на предыдущем шаге формулы $\hat{\phi}_j(x_1, \ldots, x_m)$ следующим образом.

1) Формула $\hat{\phi}^0_{j+1}(x_1, \ldots, x_m)$ получена из формулы $\hat{\phi}_j(x_1, \ldots, x_m)$ с помощью предположения, что все предикаты

$$x_1 = x_{j+1}, \ldots, x_j = x_{j+1}$$

являются ложными, а все предикаты

$$x_1 \neq x_{j+1}, \ldots, x_j \neq x_{j+1}$$

являются истинными.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, j+1\}$ формула $\hat{\phi}^i_j(x_1, \ldots, x_m)$ получена из формулы $\hat{\phi}_j(x_1, \ldots, x_m)$ с помощью предположения, что все предикаты

$$x_1 = x_{j+1}, \ldots, x_{i-1} = x_{j+1}, x_i \neq x_{j+1}, x_{i+1} = x_{j+1}, \ldots, x_j = x_{j+1}$$

являются ложными, а все предикаты

$$x_1 \neq x_{j+1}, \ldots, x_{i-1} \neq x_{j+1}, x_i = x_{j+1}, x_{i+1} \neq x_{j+1}, \ldots, x_j \neq x_{j+1}$$

являются истинными.

2) Если $z_{j+1} = \exists$, то $\hat{\phi}_{j+1}(x_1, \ldots, x_m) =$

$$\hat{\phi}_j^0(x_1, \ldots, x_m) \vee \left[\bigvee_{i=1}^{j} (\hat{\phi}_j^i(x_1, \ldots, x_j, x_i, x_{j+2}, \ldots, x_m))\right].$$

В противном случае $\hat{\phi}_{j+1}(x_1, \ldots, x_m) =$

$$\hat{\phi}_j^0(x_1, \ldots, x_m) \wedge \left[\bigwedge_{i=1}^{j} (\hat{\phi}_j^i(x_1, \ldots, x_j, x_i, x_{j+2}, \ldots, x_m))\right].$$

Пусть $\hat{\phi}$ — NEPNF-формула с NE-базисом $(\hat{\phi}_m(x_1, \ldots, x_m), (z_1, \ldots, z_m))$. Заметим, что $\phi \cong \hat{\phi}$, причем обе формулы имеют одну и ту же последовательность кванторов $z_1, \ldots, z_m$. $\square$

При доказательстве теоремы 5.1.1 мы будем использовать сформулированное ниже следствие из леммы 5.3.2.

Лемма 5.3.3. *Пусть $\phi = \exists x\,(\varphi(x)) \in \mathcal{F}$ — замкнутая формула. Тогда существует такая* NEPNF*-формула $\hat{\phi} = \exists x\,(\hat{\varphi}(x)) \in \mathcal{F}$, что $\phi \cong \hat{\phi}$ и $\mathrm{ch}(\phi) = \mathrm{ch}(\hat{\phi})$.*

Доказательство. Пусть F — граф вложенности некоторой формулы с кванторной глубиной q, который является укорененным деревом. Обозначим корень такого дерева $t(F)$, а $t_1^r(F), \ldots, t_{a(r,F)}^r(F)$ — все вершины F, находящиеся на расстоянии $r-1$ от $t(F)$, где r — произвольное число из $\{1, \ldots, q\}$, $a(r, F)$ — некоторое число из $\{1, 2, \ldots\}$. Разумеется, $a(1, F) = 1$, $a(r, F) \geq 1$ для всех $r \in \{2, \ldots, q\}$. Рассмотрим первый номер r такой, что $a(r, F) > 1$ (если такого номера не существует, то положим $r = q + 1$). Обозначим

$$\mu[F] := q + 1 - r.$$

Заметим, что если F — простой путь, начинающийся в корне, то $\mu[F] = 0$.

Итак, пусть $\phi = \exists x\,(\varphi(x)) \in \mathcal{F}$ — замкнутая формула и $\mathrm{ch}(\phi) = k$. В силу леммы 5.3.2 достаточно доказать, что существует такая PNF-формула $\hat{\phi} = \exists x\,(\hat{\varphi}(x)) \in \mathcal{F}$, что $\phi \cong \hat{\phi}$ и $\mathrm{ch}(\hat{\phi}) = k$. Если $\mu[F(\phi)] = 0$, то лемма уже доказана ($\hat{\phi} = \phi$). Предположим, что $\mu[F(\phi)] = m \in \mathbb{N}$, а существование эквивалентной PNF-формулы с тем же числом перемен кванторов и начинающейся с того же квантора уже доказано для

любой необязательно замкнутой и начинающейся с произвольного квантора (либо $\exists$, либо $\forall$) формулы ζ с $\mu[F(\zeta)] < m$.

Пусть $\phi = z_1 x_1 \dots z_s x_s\,(\varphi(x_1, \dots, x_s))$, где $s = q - \mu[F(\phi)]$, $z_1 = \exists$, $z_2, \dots, z_s \in \{\forall, \exists\}$, а формула $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ не начинается с квантора. Тогда формула $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ является логической комбинацией (в качестве связок выступают дизъюнкции и конъюнкции) формул

$$\exists x\,(\hat{\varphi}_i(x_1, \dots, x_s, x)), \quad \forall x\,(\hat{\varphi}^j(x_1, \dots, x_s, x)).$$

Пусть $I = \{1, \dots, |I|\}$ — множество всех таких индексов i, $J = \{1, \dots, |J|\}$ — множество всех таких индексов j. Очевидно, для всех $i \in I$, $j \in J$ справедливы неравенства

$$\mu[F(\hat{\varphi}_i(x_1, \dots, x_s, x))] < m, \quad \mu[F(\hat{\varphi}^j(x_1, \dots, x_s, x))] < m.$$

По предположению индукции для всех $i \in I$, $j \in J$ существуют такие PNF-формулы

$$\exists x\,(\tilde{\varphi}_i(x_1, \dots, x_s, x)) \cong \exists x\,(\hat{\varphi}_i(x_1, \dots, x_s, x)),$$
$$\forall x\,(\tilde{\varphi}^j(x_1, \dots, x_s, x)) \cong \forall x\,(\hat{\varphi}^j(x_1, \dots, x_s, x)),$$

что

$$\mathrm{ch}(\exists x\,(\tilde{\varphi}_i(x_1, \dots, x_s, x))) = \mathrm{ch}(\exists x\,(\hat{\varphi}_i(x_1, \dots, x_s, x))),$$
$$\mathrm{ch}(\forall x\,(\tilde{\varphi}^j(x_1, \dots, x_s, x))) = \mathrm{ch}(\forall x\,(\hat{\varphi}^j(x_1, \dots, x_s, x))).$$

Пусть формула $\tilde{\psi}(x_1, \dots, x_s)$ получена точно такой же логической комбинацией построенных формул $\exists x\,(\tilde{\varphi}_i(x_1, \dots, x_s, x))$, $\forall x\,(\tilde{\varphi}^j(x_1, \dots, x_s, x))$, что и формула $\varphi(x_1, \dots, x_s)$. Таким образом, формула

$$\psi = z_1 x_1 \dots z_s x_s\,(\tilde{\psi}(x_1, \dots, x_s))$$

эквивалентна формуле ϕ, имеет то же число перемен кванторов, и $F(\psi)$ представляет из себя дерево с ровно одной вершиной степени более 2. Эта вершина находится на расстоянии $s-1$ от корня $t(F(\psi))$. Пусть расстояние от этой вершины до самой удаленной от корня вершины равно r. Докажем, что можно построить такую формулу $\psi^0 \cong \psi$, что $\mathrm{ch}(\psi^0) = \mathrm{ch}(\psi)$, $F(\psi^0)$ — дерево с не более чем одной вершиной степени более 2, но расстояние от этой вершины (если она существует) до самой удаленной от корня вершины дерева меньше чем r. Очевидно, что, применив такую конструкцию не более чем r раз, мы получим искомую формулу $\hat{\phi}$.

Итак, опишем построение формулы ψ^0. Для всех $i \in I$, $j \in J$ найдем такие натуральные числа d_i, d^j, что

$$\exists x^1\,(\tilde{\varphi}_i(x_1, \dots, x_s, x^1)) = \exists x^1 \dots \exists x^{d_i}\,(\tilde{\psi}_i(x_1, \dots, x_s, x^1, \dots, x^{d_i})),$$

$$\forall x^1\,(\tilde{\varphi}^j(x_1,\dots,x_s,x^1)) = \forall x^1\dots\forall x^{d^j}\,(\tilde{\psi}^j(x_1,\dots,x_s,x^1,\dots,x^{d^j})),$$

где формулы $\tilde{\psi}_i(x_1,\dots,x_s,x^1,\dots,x^{d_i})$, $\tilde{\psi}^j(x_1,\dots,x_s,x^1,\dots,x^{d^j})$ либо не содержат кванторов, либо начинаются с кванторов $\forall,\exists$ соответственно. Положим $D_I = \sum_{i\in I} d_i$, $D_J = \sum_{j\in J} d^j$. Без ограничения общности будем считать, что $z_s = \exists$.

По лемме 5.3.1 существует такая формула (если $z_s = \forall$, то в этой формуле сначала будут идти кванторы $\forall$)

$$\tilde{\psi}^0(x_1,\dots,x_s) =$$

$$\exists x_{s+1}\dots\exists x_{s+D_I}\forall x_{s+D_I+1}\dots\forall x_{s+D_I+D_J}\,(\hat{\psi}(x_1,\dots,x_{s+D_I+D_J}))$$
$$\cong \tilde{\psi}(x_1,\dots,x_s),$$

что

$$\mathrm{ch}(z_1x_1\dots z_sx_s\,(\tilde{\psi}^0(x_1,\dots,x_s))) = \mathrm{ch}(z_1x_1\dots z_sx_s\,(\tilde{\psi}(x_1,\dots,x_s))).$$

Более того, $F(z_1x_1\dots z_sx_s\,(\tilde{\psi}^0(x_1,\dots,x_s)))$ — дерево с ровно одной вершиной степени более 2, и расстояние от этой вершины до самой удаленной от корня вершины дерева меньше чем r. Осталось положить

$$\psi^0 = z_1x_1\dots z_sx_s\,(\tilde{\psi}^0(x_1,\dots,x_s)). \quad \square$$

5.4. Доказательство теоремы 5.1.1

Прежде чем обратиться к доказательству теоремы, сформулируем необходимое нам простое наблюдение о том, что нам достаточно рассматривать NEPNF-формулы.

Лемма 5.4.1. *Если $\phi\in\mathcal{F}$ — замкнутая формула и $\alpha\in S(\phi)$, то существует такая* NEPNF*-формула $\hat{\phi}$, что $\mathrm{ch}(\phi) = \mathrm{ch}(\hat{\phi})$ и $\alpha\in S(\hat{\phi})$.*

Доказательство. В силу леммы 5.3.3 достаточно доказать, что существует такая замкнутая формула $\hat{\phi} = \exists x\,(\varphi(x)) \in \mathcal{F}$, что число α принадлежит ее спектру.

Так как $\alpha\in S(\phi)$, то существует $\varepsilon > 0$ и такие последовательности n_i, m_i, что для любого $i\in\mathbb{N}$

$$\min\left\{\mathsf{P}\left(G(n_i,n_i^{-\alpha})\models\phi\right),\mathsf{P}\left(G(m_i,m_i^{-\alpha})\models\neg(\phi)\right)\right\} > \varepsilon.$$

Пусть $i\in\mathbb{N}$. Пусть, кроме того, G, H — такие графы на n_i, m_i вершинах соответственно, что $G\models\phi$, $H\models\neg(\phi)$. Формула ϕ является логической

комбинацией (в качестве связок выступают дизъюнкции и конъюнкции) формул

$$\exists x\,(\varphi_j(x)), \quad \forall x\,(\varphi^j(x)).$$

Пусть N — число формул в этой комбинации. Очевидно, существует такое число j, что $G \models \exists x\,(\varphi_j(x))$, $H \models \neg(\exists x\,(\varphi_j(x)))$, или такое число j, что $G \models \forall x\,(\varphi^j(x))$, $H \models \neg(\forall x\,(\varphi^j(x)))$. Следовательно, существует такая формула $\varphi(x) = \varphi(x,i) \in \mathcal{F}$, что $\mathrm{ch}(\exists x\,(\varphi(x))) \leq \mathrm{ch}(\phi)$, кванторная глубина формулы $\exists x\,(\varphi(x))$ не превосходит кванторной глубины формулы ϕ и

$$\min\left\{\mathsf{P}\left(G(n_i, n_i^{-\alpha}) \models \exists x\,(\varphi(x))\right), \mathsf{P}\left(G(m_i, m_i^{-\alpha}) \models \neg(\exists x\,(\varphi(x)))\right)\right\} > \varepsilon/N.$$

Положим $\hat{\phi}_i = \exists x\,(\varphi(x,i))$. Так как существует лишь конечное число представителей различных классов $\cong$-эквивалентности замкнутых формул в $\mathcal{F}$ с фиксированной кванторной глубиной (см., например, [5]), то и конечно число представителей различных классов $\cong$-эквивалентности в $\{\hat{\phi}_i, i \in \mathbb{N}\}$. Поэтому существует формула $\hat{\phi} = \exists x\,(\varphi(x)) \in \{\hat{\phi}_i, i \in \mathbb{N}\}$ и такая последовательность i_j, что для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\min\left\{\mathsf{P}\left(G(n_{i_j}, n_{i_j}^{-\alpha}) \models \hat{\phi}\right), \mathsf{P}\left(G(m_{i_j}, m_{i_j}^{-\alpha}) \models \neg(\hat{\phi})\right)\right\} > \varepsilon/N.$$

Следовательно, $\alpha \in S(\hat{\phi})$. $\square$

Утверждение теоремы 5.1.1 является очевидным следствием следующего результата.

Теорема 5.4.1. *Наименьшее k, для которого существует формула $\phi \in \mathcal{F}$ с бесконечным спектром и $\mathrm{ch}(\phi) = k$, равно 3.*

Доказательство. В силу леммы 5.4.1 достаточно доказать, что для любого $k \in \{0,1,2\}$ и любой NEPNF-формулы $\phi = \exists x\,(\varphi(x)) \in \mathcal{F}$ с $\mathrm{ch}(\phi) = k$ множество $S(\phi)$ конечно. Заметим, что $S(\phi) = S(\neg(\phi))$. В этой связи для некоторых k мы будем доказывать, что спектры формул $\forall x\,(\varphi(x))$ конечны. Очевидно, случаи $k \in \{0,1\}$ являются частными случаями $k = 2$. Тем не менее мы докажем утверждение отдельно и в случаях $k = 0$, $k = 1$, чтобы проиллюстрировать, как наш метод работает для этих более простых случаев, и, тем самым, облегчить понимание доказательства в случае $k = 2$.

Обозначим $\phi_H \in \mathcal{F}$ формулу расширения, выражающую свойство содержать индуцированный подграф, изоморфный H.

5.4.1. Ноль перемен кванторов

Пусть $\mathrm{ch}(\phi) = 0$, где $\phi = \exists x\,(\varphi(x)) \in \mathcal{F}$ — некоторая NEPNF-формула. Очевидно, существует такое конечное множество графов $\mathcal{G}$, что $G \models \phi$ тогда и только тогда, когда в G существует индуцированный подграф изоморфный некоторому $H \in \mathcal{G}$. Иными словами,

$$\phi \cong \bigvee_{H \in \mathcal{G}} (\phi_H).$$

По теореме 1.3.2 либо $\rho := \min_{H\in\mathcal{G}}\{\rho^{\max}(H)\} > 0$ и $S(\phi) \subset \{1/\rho\}$, либо $\rho = 0$ и $S(\phi) = \varnothing$.

5.4.2. Одна перемена кванторов

Пусть $\mathrm{ch}(\phi) = 1$, где формула

$$\phi = \forall y_1 \ldots \forall y_s \exists x_1 \ldots \exists x_m\,(\varphi(y_1, \ldots, y_s, x_1, \ldots, x_m)) \in \mathcal{F}$$

имеет кванторную глубину $s+m$. Очевидно, существует конечное множество графов $\mathcal{G}$ на некотором множестве вершин $\{a_1, \ldots, a_s\}$ и для каждого $A \in \mathcal{G}$ существует конечное множество графов $\mathcal{H}(A)$ на некотором множестве вершин $\{a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_m\}$ с перечисленными ниже свойствами:

- для любых $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{H}(A)$ выполнено $A = B|_{\{a_1,\ldots,a_s\}}$,
- $G \models \phi$ тогда и только тогда, когда для любых попарно различных вершин $y_1, \ldots, y_s \in V(G)$ существуют попарно различные вершины $x_1, \ldots, x_m \in V(G)$ $(x_j \neq y_i)$ и такие графы $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{H}(A)$, что отображение $f : B \to G|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m\}}$, сохраняющее номера вершин $(f(a_i) = y_i,\ f(b_j) = x_j)$, — изоморфизм.

Пусть все графы $A_1, \ldots, A_M$ из множества $\mathcal{G}$ упорядочены таким образом, что

$$\rho_1 := \rho^{\max}(A_1) \geq \ldots \geq \rho^{\max}(A_M) =: \rho_M. \tag{5.1}$$

Для каждого $i \in \{1, \ldots, M\}$ положим $\rho^i = \min\{\rho^{\max}(B, A_i), B \in \mathcal{H}(A_i)\}$.

Предположим, что $1/\alpha$ не равно ни одному числу из ρ_i, ρ^i, где $i \in \{1, \ldots, M\}$. Если существует граф на множестве вершин $\{a_1, \ldots, a_s\}$, не принадлежащий $\mathcal{G}$, с максимальной плотностью меньшей чем $1/\alpha$, то по теореме 1.3.2 а.п.н. $G(n,p) \models \neg(\phi)$. Предположим, что такого графа не существует. Тогда $\rho_M = 0$. Положим $\rho_0 = \infty$, $1/\rho_0 = 0$ и $1/\rho_M = \infty$. Пусть число $i_0 \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$ выбрано таким образом, что $1/\rho_{i_0} < \alpha < 1/\rho_{i_0+1}$. Если для некоторого $i \in \{i_0+1, \ldots, M\}$ выполнено неравенство $\rho^i > 1/\alpha$, то по теореме 1.3.4 а.п.н. $G(n,p) \models \neg(\phi)$. В противном случае, а.п.н. $G(n,p) \models \phi$. Следовательно, $S(\phi) \subseteq \{1/\rho_1, \ldots, 1/\rho_M, 1/\rho^1, \ldots, 1/\rho^M\}$, и поэтому $|S(\phi)| < \infty$.

5.4.3. Две перемены кванторов

В этом случае недостаточно просто перейти к некоторым множествам графов, определяемым рассматриваемой формулой, как это сделано в предыдущих двух. Мы разбили доказательство на несколько этапов. Только первый этап "переход к множествам графов" идейно повторяет доказательство в случае не более одной перемены кванторов.

Переход к множествам графов

Пусть кванторная глубина формулы $\phi =$

$$\forall y_1 \ldots \forall y_s \exists x_1 \ldots \exists x_m \forall w_1 \ldots \forall w_r \, (\varphi(y_1, \ldots, y_s, x_1, \ldots, x_m, w_1, \ldots, w_r)) \in \mathcal{F}$$

равна $s+m+r$. Очевидно, существует множество вершин $\Sigma = \Sigma_a \sqcup \Sigma_b \sqcup \Sigma_c$, где $\Sigma_a = \{a_1, \ldots, a_s\}$, $\Sigma_b = \{b_1, \ldots, b_m\}$, $\Sigma_c = \{c_1, \ldots, c_r\}$, а также

— конечное множество графов $\mathcal{G}$ на множестве вершин Σ_a,

— конечное множество графов $\mathcal{H}(A)$ на множестве вершин $\Sigma_a \sqcup \Sigma_b$ для каждого графа $A \in \mathcal{G}$,

— конечное множество графов $\mathcal{K}(B)$ на множестве вершин Σ для каждого графа $A \in \mathcal{G}$ и $B \in \mathcal{H}(A)$,

для которых выполнены перечисленные ниже свойства:

- для любых $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{H}(A)$, $C \in \mathcal{K}(B)$ справедливы равенства $A = B|_{\Sigma_a}$, $B = C|_{\Sigma_a \sqcup \Sigma_b}$;

- $G \models \phi$ тогда и только тогда, когда для любых попарно различных вершин $y_1, \ldots, y_s$ из $V(G)$ существуют такие попарно различные $x_1, \ldots, x_m$ из $V(G) \setminus \{y_1, \ldots, y_s\}$, что для любых попарно различных $w_1, \ldots, w_r$ из $V(G) \setminus \{y_1, \ldots, y_s, x_1, \ldots, x_m\}$ существуют графы $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{H}(A)$, $C \in \mathcal{K}(B)$ со следующим свойством: отображение

$$f : C \to G|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m,w_1,\ldots,w_r\}},$$

сохраняющее подрядок вершин ($f(a_i) = y_i$, $f(b_j) = x_j$, $f(c_h) = w_h$), является изоморфизмом.

По теореме 1.1.3, если $\alpha < \frac{1}{s+m+r-2}$, то $\alpha \notin S(\phi)$. Кроме того, по теореме 1.1.2, если α — иррациональное число, то $\alpha \notin S(\phi)$. В этой связи множество чисел в $S(\phi)$ с ограниченным фиксированным числом числителем конечно. Таким образом, при доказательстве того, что $\alpha \notin S(\phi)$ мы будем считать, что α — рациональное число с достаточно большим числителем. Как и в случае одной перемены кванторов, мы предполагаем, что на множестве вершин Σ_a не существует графа с максимальной плотностью меньшей чем $1/\alpha$, не принадлежащего $\mathcal{G}$.

Построение плотной окрестности и определение ее структуры

Пусть Γ — некоторый фиксированный граф на некотором множестве вершин V, причем существует $A \in \mathcal{G}$ и попарно различные вершины $y_1, \ldots, y_s \in V$, для которых отображение $A \to \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s\}}$, сохраняющее порядок вершин, является изоморфизмом.

Пусть $Y_0 = \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s\}}$. Для каждого $i \geq 0$ опишем процесс построения индуцированного подграфа Y_{i+1} графа Γ, полученного добавлением некоторых вершин к графу Y_i (на некотором шаге $\tilde{i}$ этот процесс остановится, и тогда положим $Y = Y_{\tilde{i}}$). Для шага i процесс *не останавливается*, если существует такой подграф $W \subset \Gamma$, что $W \supset Y_i$, $v(W) - v(Y_i) \leq r$ и $\rho^{\max}(W, Y_i) > 1/\alpha$. В таком случае для нашедшегося графа W, обладающего упомянутым выше свойством, положим $Y_{i+1} = W$.

Граф $Y = Y(\Gamma; y_1, \ldots, y_s)$ *построен.* Прежде чем перейти к следующему этапу доказательства, введем некоторые обозначения.

- Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A) = \{B_1, \ldots, B_\beta\}$ — множество всех таких графов B на множестве вершин $\Sigma_a \cup \Sigma_b$, что $B|_{\Sigma_a} = A$. Разумеется, $\beta = 2^{C_m^2 + sm}$.

- Пусть $x_1^0, \ldots, x_m^0$ — произвольные вершины, не принадлежащие множеству $V(Y)$ (и даже необязательно принадлежащие множеству V).

- Пусть $\ell \in \{1, \ldots, \beta\}$, $\tilde{m} \in \{0, \ldots, m\}$. Рассмотрим множество $\mathcal{X}_{\ell,\tilde{m}}$ таких наборов вершин $x_1, \ldots, x_{\tilde{m}} \in V(Y) \setminus \{y_1, \ldots, y_s\}$, что существует граф W на множестве вершин $V(Y) \cup \{x^0_{\tilde{m}+1}, \ldots, x^0_m\}$ и изоморфизм
$$f : B_\ell \to W|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_{\tilde{m}},x^0_{\tilde{m}+1},\ldots,x^0_m\}},$$
сохраняющий порядок вершин ($f(a_i) = y_i$, $f(b_j) \in \{x_j, x^0_j\}$).

- Для каждого $\ell \in \{1, \ldots, \beta\}$, $\tilde{m} \in \{0, \ldots, m\}$, $(x_1, \ldots, x_{\tilde{m}}) \in \mathcal{X}_{\ell,\tilde{m}}$ рассмотрим множество $\mathcal{S}_\ell(x_1, \ldots, x_{\tilde{m}})$ всевозможных графов W на множестве вершин $V(Y) \cup \{x^0_{\tilde{m}+1}, \ldots, x^0_m\}$ таких, что $W|_{V(Y)} = Y$, $\rho^{\max}(W, Y) < 1/\alpha$ и существует изоморфизм
$$f : B_\ell \to W|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_{\tilde{m}},x^0_{\tilde{m}+1},\ldots,x^0_m\}},$$
сохраняющий порядок вершин ($f(a_i) = y_i$, $f(b_j) \in \{x_j, x^0_j\}$). Кроме того, для каждого $W \in \mathcal{S}_\ell(x_1, \ldots, x_{\tilde{m}})$ рассмотрим множество $\mathcal{N}_\ell(W; x_1, \ldots, x_{\tilde{m}})$ таких графов C на множествах вершин $\Sigma_a \cup \Sigma_b \cup \{c_1, \ldots, c_{\tilde{r}}\}$, где $\tilde{r} \le r$, что существуют подграф $Z \subset W$, содержащий вершины $y_1, \ldots, y_s$, $x_1, \ldots, x_{\tilde{m}}$, $x^0_{\tilde{m}+1}, \ldots, x^0_m$, а также некоторые вершины $w_1, \ldots, w_{\tilde{r}} \in V(Y)$, и изоморфизм $f : C \to Z$, сохраняющий порядок вершин ($f(a_i) = y_i$, $f(b_j) \in \{x_j, x^0_j\}$, $f(c_h) = w_h$), и выполнено неравенство
$$\rho^{\max}\left(Z, Z|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_{\tilde{m}},x^0_{\tilde{m}+1},\ldots,x^0_m\}}\right) > 1/\alpha.$$

- Пусть для каждого $\ell \in \{1, \ldots, \beta\}$ $(\mathcal{N})_\ell[Y; y_1, \ldots, y_s]$ — максимальное множество попарно различных множеств среди $\mathcal{N}_\ell(W; x_1, \ldots, x_{\tilde{m}})$, $W \in \mathcal{S}_\ell$.

Вектор $\mathbf{N} = ((\mathcal{N})_1[Y; y_1, \ldots, y_s], \ldots, (\mathcal{N})_\beta[Y; y_1, \ldots, y_s])$ определяет *сруктуру* графа Y.

Выделение ограниченного подграфа с той же структурой

Зафиксируем множество вершин $\{y_1, \ldots, y_s\}$ и $A \in \mathcal{G}$. Для каждого графа Γ, содержащего вершины $y_1, \ldots, y_s$, для которого отображение $A \to \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s\}}$, сохраняющее порядок вершин, является изоморфизмом, и $\ell \in \{1, \ldots, \beta\}$ (где β — количество элементов во множестве $\mathcal{U}(A) = \{B_1, \ldots, B_\beta\}$) найдем $(\mathcal{N})_\ell := (\mathcal{N})_\ell[Y(\Gamma; y_1, \ldots, y_s); y_1, \ldots, y_s]$.

Пусть $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\Gamma; y_1, \ldots, y_s)$ — множество всех графов Y, содержащих $\Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s\}}$ как индуцированный подграф, для которых выполнено $(\mathcal{N})_\ell =$

$(\mathcal{N})_\ell[Y; y_1, \dots, y_s]$ для всех $\ell \in \{1, \dots, \beta\}$. Пусть граф $Y_{\min}(\mathbf{Y}; y_1, \dots, y_s)$ имеет наименьшее число вершин среди графов во множестве

$$\{Y \in \mathbf{Y} : \quad \forall \tilde{Y} \in \mathbf{Y}\,(\rho^{\max}(\tilde{Y}) \geq \rho^{\max}(Y))\}.$$

Так как множество $\mathbf{Y}(\Gamma; y_1, \dots, y_s)$ однозначно определяется лишь вектором $\mathbf{N} = ((\mathcal{N})_1, \dots, (\mathcal{N})_\beta)$, то для заданных вершин $y_1, \dots, y_s$ существует лишь конечное число различных множеств $\mathbf{Y}(\cdot; y_1, \dots, y_s)$. В этой связи существует лишь конечное число различных графов $Y_{\min}(\cdot; y_1, \dots, y_s)$. Пусть

$$Y^1_{\min}(y_1, \dots, y_s), \dots, Y^\theta_{\min}(y_1, \dots, y_s)$$

— все такие графы.

Доказательство конечности спектра

Итак, перейдем к заключительной части доказательства. Как было замечено в разделе 5.4.3, мы можем считать, что α — рациональное число с достаточно большим числителем. А именно, пусть числитель R несократимой дроби $\alpha = \frac{R}{P}$ больше чем $\max\{s + m + r, N\}$, где

$$N := \max\left\{v(Y^1_{\min}(y_1, \dots, y_s)), \dots, v(Y^\theta_{\min}(y_1, \dots, y_s))\right\}.$$

Заметим, что N не зависит от выбора вершин $y_1, \dots, y_s$.

В силу теорем 1.3.2, 1.3.4, 5.2.1 с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ обладает следующими свойствами:

- G1 для любого H с $\rho^{\max}(H) > 1/\alpha$ и $v(H) \leq s + r(sP + 1)$ не существует подграфа, изоморфного H;
- G2 для любых $H \subset G$ с $v(G) \leq s + m + r$ и $\rho^{\max}(G, H) < 1/\alpha$ выполнено свойство (G, H)-расширения;
- G3 для любых $H \subset G$ с $v(G) \leq \max\{N, m + s + rsP\}$ и $\rho^{\max}(G, H) < 1/\alpha$ и множества $\mathcal{W}$ графов W на фиксированном множестве вершин, удовлетворяющих условиям
  - $G \subset W$, $1 \leq v(W) - v(G) \leq r + m$, $\rho^{\max}(W, G) > 1/\alpha$,
  - $W \setminus G$ связен,
  - существуют ребра между $W \setminus G$ и G в W,

  выполнено свойство двойного $(\mathcal{W}, G, H)$-расширения.

Докажем, что если графы Γ, Υ обладают свойствами G1, G2 и G3, то либо для обоих истинна формула ϕ, либо для обоих ложна, и, тем самым, завершим доказательство теоремы.

Предположим противное: $\Gamma \models \neg(\phi)$, $\Upsilon \models \phi$. В силу свойства G1 любой подграф графа Γ на s вершинах имеет максимальную плотность, меньшую $1/\alpha$. Как было замечено в разделе 5.4.3 все графы на множестве вершин Σ_a с максимальной плотностью, меньшей $1/\alpha$, принадлежат $\mathcal{G}$. Поэтому существует $A \in \mathcal{G}$ и попарно различные вершины $y_1, \ldots, y_s \in V(\Gamma)$, для которых отображение $A \to \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s\}}$, сохраняющее порядок вершин, является изоморфизмом, а также *не выполнено* свойство (EXT), определенное ниже.

(EXT): *существуют такие попарно различные* $x_1, \ldots, x_m \in V(\Gamma) \setminus \{y_1, \ldots, y_s\}$, *что для любых попарно различных вершин* $w_1, \ldots, w_r \in V(\Gamma) \setminus \{y_1, \ldots, y_s, x_1, \ldots, x_m\}$ *существуют графы* $B \in \mathcal{H}(A)$, $C \in \mathcal{K}(B)$ *и изоморфизм* $f : C \to \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m,w_1,\ldots,w_r\}}$, *сохраняющий порядок вершин* ($f(a_i) = y_i$, $f(b_j) = x_j$, $f(c_h) = w_h$).

Построим граф $Y = Y(\Gamma; y_1, \ldots, y_s)$, как это было сделано в разделе 5.4.3. Докажем, что $v(Y) \leq s + rsP$. Предположим противное. Тогда в силу построения графа Y в нем найдется подграф X на не более $s + r(sP + 1)$ вершинах и такие $v_1, \ldots, v_{sP+1} \in \{1, \ldots, r\}$, что

$$\rho^{\max}(X) \geq \frac{(1/\alpha)v_1 + \ldots + (1/\alpha)v_{sP+1} + \frac{sP+1}{R}}{s + v_1 + \ldots + v_{sP+1}} =$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{R(s + v_1 + \ldots + v_{sP+1})} > \frac{1}{\alpha}.$$

Получили противоречие со свойством G1. Но тогда $v(Y) \leq s + rsP$ и, следовательно, $\rho^{\max}(Y) \leq 1/\alpha$.

Рассмотрим граф $Y_{\min} = Y_{\min}(\mathbf{Y}(\Gamma; y_1, \ldots, y_s); y_1, \ldots, y_s)$. По его определению $\rho^{\max}(Y_{\min}) \leq \rho^{\max}(Y) \leq 1/\alpha$. Так как $v(Y_{\min}) \leq N < R$, то равенство $\rho^{\max}(Y_{\min}) = 1/\alpha$ невозможно, а, следовательно, $\rho^{\max}(Y_{\min}) < 1/\alpha$.

В силу свойства G3 в графе Υ найдется такой индуцированный подграф Y^{Υ}, изоморфный $Y_{\min}$, что в Υ не существует подграфа $W \supset Y^{\Upsilon}$ с $v(W) - v(Y^{\Upsilon}) \leq r + m$ и $\rho^{\max}(W, Y^{\Upsilon}) > 1/\alpha$. Пусть $f : Y_{\min} \to Y^{\Upsilon}$ изоморфизм, переводящий вершины $y_1, \ldots, y_s$ в некоторые вершины $y_1^{\Upsilon}, \ldots, y_s^{\Upsilon}$ соответственно. Так как $\Upsilon \models \phi$, то для вершин $y_1^{\Upsilon}, \ldots, y_s^{\Upsilon}$ выполнено свойство (EXT). Пусть $x_1^{\Upsilon}, \ldots, x_m^{\Upsilon}$ — такие вершины из $V(\Upsilon) \setminus$

$\{y_1^\Upsilon, \dots, y_s^\Upsilon\}$, а $B \in \mathcal{H}(A)$ — такой граф, что для любых попарно различных вершин $w_1^\Upsilon, \dots, w_r^\Upsilon \in V(\Upsilon) \setminus \{y_1^\Upsilon, \dots, y_s^\Upsilon, x_1^\Upsilon, \dots, x_m^\Upsilon\}$ существует граф $C \in \mathcal{K}(B)$ и изоморфизм $g : C \to \Upsilon|_{\{y_1^\Upsilon,\dots,y_s^\Upsilon,x_1^\Upsilon,\dots,x_m^\Upsilon,w_1^\Upsilon,\dots,w_r^\Upsilon\}}$, сохраняющий порядок вершин ($g(a_i) = y_i^\Upsilon$, $g(b_j) = x_j^\Upsilon$, $g(c_h) = w_h^\Upsilon$).

По построению и свойству G1

$$\rho^{\max}\left(\Upsilon|_{V(Y^\Upsilon)\cup\{x_1^\Upsilon,\dots,x_m^\Upsilon\}}, Y^\Upsilon\right) < 1/\alpha$$

(если хотя бы одна из вершин $x_1^\Upsilon, \dots, x_m^\Upsilon$ не принадлежит Y^Υ). Действительно, равенство невозможно, так как $v\left(\Upsilon|_{V(Y^\Upsilon)\cup\{x_1^\Upsilon,\dots,x_m^\Upsilon\}}\right) - v\left(Y^\Upsilon\right) \le m$. Пусть $x_1, \dots, x_{\tilde{m}} \in Y^\Upsilon$, $x_{\tilde{m}+1}, \dots, x_m \in V(\Upsilon) \setminus V(Y^\Upsilon)$, где $\tilde{m} \in \{0, 1, \dots, m\}$. В силу свойства G3, определения графа Y и определения графа $Y_{\min}$ в графе Γ найдутся такие вершины $x_1, \dots, x_{\tilde{m}} \in V(Y)$, $x_{\tilde{m}+1}, \dots, x_m \in V(\Gamma) \setminus V(Y)$, что выполнены свойства Q1, Q2 и Q3, сформулированные ниже.

Q1 Существует изоморфизм $f : B \to \Gamma|_{\{y_1,\dots,y_s,x_1,\dots,x_m\}}$, сохраняющий порядок вершин ($f(a_i) = y_i$, $f(b_j) = x_j$).

Q2 Не существуют такого графа $W \subset \Gamma$, содержащего как подграф $\Gamma|_{V(Y)\cup\{x_1,\dots,x_m\}}$, что

$$v(W) - v\left(\Gamma|_{V(Y)\cup\{x_1,\dots,x_m\}}\right) \le r \quad \text{и} \quad \rho^{\max}\left(W, \Gamma|_{V(Y)\cup\{x_1,\dots,x_m\}}\right) > 1/\alpha.$$

Q3 Пусть C — граф на множестве вершин $\{a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_{\tilde{r}}\}$ (где $\tilde{r} \le r$) такой, что существуют подграф $Z \subseteq \Gamma$, содержащий вершины $y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_m$, а также некоторые вершины $w_1, \dots, w_{\tilde{r}} \in V(Y)$, и изоморфизм $f : C \to Z$, сохраняющий порядок вершин ($f(a_i) = y_i$, $f(b_j) = x_j$, $f(c_h) = w_h$), и выполнено неравенство

$$\rho^{\max}\left(Z, Z|_{\{y_1,\dots,y_s,x_1,\dots,x_m\}}\right) > 1/\alpha.$$

Тогда и в графе Υ существуют подграф Z^Υ, содержащий вершины $y_1^\Upsilon, \dots, y_s^\Upsilon$, $x_1^\Upsilon, \dots, x_m^\Upsilon$, а также некоторые вершины $w_1^\Upsilon, \dots, w_{\tilde{r}}^\Upsilon \in V(Y^\Upsilon)$, и изоморфизм $f : C \to Z^\Upsilon$, сохраняющий порядок вершин ($f(a_i) = y_i^\Upsilon$, $f(b_j) = x_j^\Upsilon$, $f(c_h) = w_h^\Upsilon$).

По нашему предположению найдутся такие вершины $w_1, \dots, w_r \in V(\Gamma) \setminus \{y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_m\}$, что ни для какого графа $C \in \mathcal{K}(B)$ не существует изоморфизма $f : C \to \Gamma|_{\{y_1,\dots,y_s,x_1,\dots,x_m,w_1,\dots,w_r\}}$, сохраняющего порядок вершин ($f(a_i) = y_i$, $f(b_j) = x_j$, $f(c_h) = w_h$). Если

$$\rho^{\max}\left(\Gamma|_{\{y_1,\dots,y_s,x_1,\dots,x_m,w_1,\dots,w_r\}}, \Gamma|_{\{y_1,\dots,y_s,x_1,\dots,x_m\}}\right) < 1/\alpha, \qquad (5.2)$$

то по свойству G2 в графе Υ найдутся такие вершины $w_1^\Upsilon, \ldots, w_r^\Upsilon$, что отображение

$$f : \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m,w_1,\ldots,w_r\}} \to \Upsilon|_{\{y_1^\Upsilon,\ldots,y_s^\Upsilon,x_1^\Upsilon,\ldots,x_m^\Upsilon,w_1^\Upsilon,\ldots,w_r^\Upsilon\}}, \tag{5.3}$$

сохраняющее порядок вершин ($f(y_i) = y_i^\Upsilon$, $f(x_j) = x_j^\Upsilon$, $f(w_h) = w_h^\Upsilon$), является изоморфизмом. Получили противоречие.

Если $w_1, \ldots, w_r \in V(\Gamma)\backslash V(Y)$, то выполнено неравенство (5.2) (равенство невозможно, так как $v\left(\Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m,w_1,\ldots,w_r\}}\right) - v\left(\Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m\}}\right) = r < R$).

Если $w_1, \ldots, w_r \in V(Y)$ и

$$\rho^{\max}\left(\Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m,w_1,\ldots,w_r\}}, \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m\}}\right) > 1/\alpha,$$

то по построению в графе Y^Υ найдутся такие вершины $w_1^\Upsilon, \ldots, w_r^\Upsilon$, что отображение (5.3), сохраняющее порядок вершин, является изоморфизмом. Снова получили противоречие.

Наконец, если некоторые (не все) из вершин $w_1, \ldots, w_r$ принадлежат $V(Y)$, то пусть, скажем $w_1 \ldots, w_{\tilde{r}} \in V(Y)$, $w_{\tilde{r}+1}, \ldots, w_r \in V(\Gamma) \setminus V(Y)$. По построению в графе Y^Υ найдутся такие вершины $w_1^\Upsilon, \ldots, w_{\tilde{r}}^\Upsilon$, что отображение $f : \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m,w_1,\ldots,w_{\tilde{r}}\}} \to \Upsilon|_{\{y_1^\Upsilon,\ldots,y_s^\Upsilon,x_1^\Upsilon,\ldots,x_m^\Upsilon,w_1^\Upsilon,\ldots,w_{\tilde{r}}^\Upsilon\}}$, сохраняющее порядок вершин, является изоморфизмом. Кроме того, разумеется,

$$\rho^{\max}\left(\Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m,w_1,\ldots,w_r\}}, \Gamma|_{\{y_1,\ldots,y_s,x_1,\ldots,x_m,w_1,\ldots,w_{\tilde{r}}\}}\right) < 1/\alpha.$$

По свойству G2 в графе Υ найдутся такие вершины $w_{\tilde{r}+1}^\Upsilon, \ldots, w_r^\Upsilon$, что отображение (5.3), сохраняющее порядок вершин, является изоморфизмом. Получили противоречие. $\square$

Замечание. Вопрос о том, чему равна минимальная кванторная глубина замкнутой формулы с бесконечным спектром, остается открытым. Тем не менее из теоремы 5.1.1 следует, что если существует замкнутая формула ϕ с кванторной глубиной 4 и бесконечным спектром, то среди ее последовательностей вложенных кванторов есть либо последовательность $\exists\forall\exists\forall$, либо последовательность $\forall\exists\forall\exists$. Возможно, более глубокий анализ последовательностей вложенных кванторов замкнутых формул с кванторной глубиной 4 позволит опровергнуть гипотезу о том, что минимальная глубина замкнутой формулы с бесконечным спектром равна 4.

Глава 6.

Законы нуля или единицы для сильно разреженного случайного графа

В прежних главах речь шла о законах нуля или единицы для случайного "разреженного" графа $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha \in (0, 1]$. В настоящей главе мы рассматриваем "сильно разреженный" случайный граф, т.е. $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha > 1$.

Все результаты этой главы опубликованы в работах [128, 129, 147].

6.1. Введение

Разумеется, при $\alpha > 2$ с асимптотической вероятностью 1 в случайном графе нет ребер, а, следовательно, он подчиняется k-закону нуля или единицы (это следует, например, из теоремы 1.4.2). В 1988 С. Шелах и Дж. Спенсер [106] доказали, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы при всех $\alpha > 1$, не принадлежащих множеству $\{1 + \frac{1}{l}, l \in \mathbb{N}\}$. При $\alpha = 1 + \frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$, закон нарушается.

Напомним, что *монадическое формулы второго порядка* [53, 121], как и формулы первого порядка, строятся с помощью символов отношений $\sim$ и $=$, логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$, переменных $x, y, x_1, \ldots$ (выражающих вершины графа), кванторов $\forall, \exists$, но еще и с помощью переменных $X, Y, X_1, \ldots$, выражающих унарные предикаты. Как и в случае формул первого порядка, мы называем кванторной глубиной формулы максимальную длину цепи вложенных кванторов. Например, монадическая формула

$$(\forall X([\exists x_1 \exists x_2 (X(x_1) \wedge (\neg(X(x_2))))] \Rightarrow [\exists y \exists z (X(y) \wedge (\neg(X(z))) \wedge (y \sim z))]))$$

имеет глубину 3 и выражает свойство связности графа. Как известно,

это свойство нельзя записать на языке первого порядка (см., например, [130]).

Случайный граф $G(n,p)$ подчиняется монадическому (k-) закону нуля или единицы, если для любой монадической формулы (с кванторной глубиной не более k) либо с асимптотической вероятностью 1 эта формула истинна, либо с асимптотической вероятностью 0 — ложна. Разумеется, если не выполнен (k-) закон нуля или единицы, то не выполнен и монадический (k-) закон нуля или единицы. В 1993 г. [121] было доказано, что случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется монадическому закону нуля или единицы даже для иррациональных $\alpha \in (0,1)$. Для $\alpha > 1$, отличного от $1+1/l$, монадический закон выполнен. Этот результат следует из известных утверждений теории логической эквивалентности. Об этом результате, вероятно, известно, но ранее, насколько нам известно, он нигде не публиковался. Во введении к настоящей диссертации мы приводим схему доказательства этого факта. Ниже мы формулируем общий результат о монадическом законе нуля или единицы для рассматриваемого случайного графа.

Теорема 6.1.1. (Дж. Тишкиевич, 1993, [121]) *Пусть $\alpha > 0$. Тогда случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется монадическому закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда либо $\alpha \in (0,1]$, либо $\alpha = 1+1/l$ для некоторого натурального l.*

6.2. Новые k-законы для случайного сильно разреженного графа

Из теоремы 6.1.1 следует, что случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ подчиняется как k-закону, так и монадическому k-закону, если $\alpha \neq 1+1/l$ для любого натурального l. В разделах 6.4.4, 6.4.5 мы докажем сформулированную ниже теорему. Пусть $T(s)$ — башня из s двоек: $T(s) = 2^{T(s-1)}$, $T(1) = 2$, а $\log^*(s)$ — обратная функция: $\log^*(s) = \min\{i : T(i) \geq s\}$.

Теорема 6.2.1. *Пусть l — натуральное число, $\alpha = 1+1/l$.*

- *Если $k \geq 4$ и $l \geq T(k+\log^*(k+1)+3)$, то случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ подчиняется монадическому k-закону нуля или единицы.*
- *Если $k \geq 7$ и $l \leq 2T(k-4)$, то случайный граф $G(n,n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы (даже для формул первого порядка).*

Доказательство этой теоремы опирается как на известные результаты о классах элементарной эквивалентности для языка первого порядка, так и на доказанные нами утверждения о классах элементарной эквивалентности для монадических формул второго порядка (см. раздел 6.3). Эти результаты интересны сами по себе, и мы приводим их в следующем разделе, а их доказательства содержатся в разделах 6.4.2, 6.4.3.

6.3. Элементарная эквивалентность

Для графов G и H и натурального числа k мы пишем $G \equiv_k^{\mathrm{FO;\,graphs}} H$, если любая формулы первого порядка ϕ с кванторной глубиной не более k либо истинна для графов G и H, либо ложна для обоих. Аналогичным образом для монадических формул определяется отношение эквивалентности $\equiv_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}}$. Для фиксированного k будем обозначать множества классов эквивалентностей $\mathcal{R}_k^{\mathrm{FO;\,graphs}}$ и $\mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}}$ для языка первого порядка и монадического языка второго порядка соответственно. Как известно, для любого k количества классов эквивалентности обоих типов конечны (см., например, [39]). Кроме того, известна верхняя оценка на это количество $r_k^{\mathrm{FO;\,graphs}} = |\mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}}|$.

Теорема 6.3.1. (О. Пихурко, Дж. Спенсер, О. Вербицкий, 2006, [97])

$$r_k^{\mathrm{FO;\,graphs}} \leq T(k + 2 + \log^*(k)) + O(1).$$

Для $r_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}} = |\mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}}|$ мы доказали аналогичный результат (доказательство приведено в разделе 6.4.2).

Теорема 6.3.2. *Для любого натурального числа k*

$$r_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}} \leq T(k + 2 + \log^*(k)).$$

Заметим, что полученный результат сильнее теоремы 6.3.1.

Для того, чтобы доказать теорему 6.2.1, нам понадобится сформулировать и доказать аналогичные результаты для укорененных деревьев. Напомним, что *укорененное дерево* T_R — это дерево с выделенной вершиной (*корнем*) R. Если $R \ldots xy$ — простой путь в T_R, то x называется *отцом* y, а y — *сыном* x. Язык первого порядка в случае укорененных

деревьев содержит константный символ R (для корня) и отношение "отец – сын" $P(x, y)$ (монадический язык содержит, как и в случае графов, еще и символы переменных унарных предикатов). Для любого натурального числа k для укорененных деревьев аналогичным образом (как и в случае графов) вводятся отношения эквивалентностей $\equiv_k^{\mathrm{FO;\,trees}}$, $T_R \equiv_k^{\mathrm{FO;\,trees}} T'_{R'}$, а также множества $\mathcal{R}_k^{\mathrm{FO;\,trees}}$, $\mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,trees}}$ и их мощности $r_k^{\mathrm{FO;\,trees}}$, $r_k^{\mathrm{MSO;\,trees}}$ соответственно. В [97] доказан следующий результат.

Теорема 6.3.3. (О. Пихурко, Дж. Спенсер, О. Вербицкий, 2006, [97])

$$r_k^{\mathrm{FO;\,trees}} \leq T(k + 2 + \log^*(k)) + O(1).$$

Кроме того, для любого $A \in \mathcal{R}_k^{\mathrm{FO;\,trees}}$

$$\min_{T_R \in A} |V(T_R)| \leq T(k + 4 + \log^*(k)) + O(1).$$

Мы получили похожий результат для $\equiv_k^{\mathrm{MSO;\,trees}}$-эквивалентности (доказательство приведено в разделе 6.4.3).

Теорема 6.3.4. *Пусть* $k \geq 4$ *— натуральное число. Тогда*

$$r_k^{\mathrm{MSO;\,trees}} \leq T(k + 2 + \log^*(k)). \tag{6.1}$$

Кроме того, для любого $A \in \mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;\,trees}}$

$$\min_{T_R \in A} |V(T_R)| \leq T(k + 3 + \log^*(k + 1)).$$

Заметим, что этот результат сильнее теоремы 6.3.3.

6.4. Доказательства

Теорема 6.2.1 доказана в разделах 6.4.4, 6.4.5. Доказательство основывается на теоремах 6.3.2, 6.3.4, которые доказаны в разделах 6.4.2, 6.4.3 соответственно. Прежде чем перейти к этим доказательствам, мы в следующем разделе опишем необходимые для них конструкции и сформулируем требуемые утверждения.

6.4.1. Вспомогательные конструкции и утверждения

При доказательстве теорем мы будем использовать следующие понятия теории графов. *Расстоянием* $d(u, v)$ между вершинами u и v, принадлежащими одной компоненте связности графа, называется минимальное число ребер в простом пути, соединяющем вершины u и v. Для

вершин из разных компонент связности положим $d(u,v) = \infty$. *Эксцентриситетом* вершины v называется $e(v) = \max_{u \in V(G)} d(v,u)$. *Диаметром* и *радиусом* графа G называются величины $d(G) = \max_{v \in V(G)} e(v)$ и $r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v)$ соответственно. Вершина v называется *центральной*, если $e(v) = r(G)$. Эксцентриситет корня в укорененном дереве мы будем называть *глубиной этого дерева*. Для вершины v укорененного дерева T_R будем обозначать $T_R(v)$ дерево, укорененное в вершине v, и являющееся подграфом дерева T_R, содержащим вершину v, всех сыновей v, всех сыновей всех сыновей v, и так далее.

6.4.1.1 Структура сильно разреженного случайного графа

Опишем структуру случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$. Из теорем 1.3.2 и 1.3.3 следует, что для любого натурального числа l и любого $1+1/(l+1) < \alpha < 1 + 1/l$ выполнено следующие свойства.

T1 С асимптотической вероятностью 1 случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ является лесом.

T2 С асимптотической вероятностью 1 в любой компоненте случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ не более $l + 1$ вершин.

T3 Для любого натурального K и любого дерева, содержащего не более $l+1$ вершины, с асимптотической вероятностью 1 в случайном графе $G(n, n^{-\alpha})$ хотя бы K компонент изоморфны T.

Кроме того, свойства T1 и T2 выполнены и для $\alpha = 1 + 1/l$. А третье свойство изменится следующим образом:

T4 Для любого дерева T на $l + 1$ вершине вероятность того, что случайный граф $G(n, n^{-1-1/l})$ содержит T стремится к $1 - e^{-1/a(T)}$, где $a(T)$ — количество автоморфизмов дерева T.

6.4.1.2 Теорема Эренфойхта

Так как мы будем использовать теорему Эренфойхта не только для графов (как в первых четырех главах), но и для укорененных деревьев, мы сформулируем ее аналог для произвольных конечных структур.

Рассмотрим язык, содержащий произвольные символы предикатов $P_1, \ldots, P_m$ арностей $a_1, \ldots, a_m$ соответственно и константные символы

$R_1, \ldots, R_s$. Игра $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO}}(A, B, k)$ происходит на структурах A (с выделенными элементами $R_1^A, \ldots, R_s^A$) и B (с выделенными элементами $R_1^B, \ldots, R_s^B$) из рассматриваемого языка. В игре k раундов, участвуют два игрока — Новатор и Консреватор. В ν-ом раунде ($1 \leq \nu \leq k$) Новатор выбирает либо элемент x_ν структуры A, либо элемент y_ν стурктуры B. Консерватор выбирает элемент из другой структуры. В случае монадического языка второго порядка игроки также выбирают подмножества. В ν-ом раунде игры $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO}}(A, B, k)$ Новатор, как и в предыдущем случае, выбирает либо структуру A, либо структуру B. Предположим, что выбрана структура A. Тогда Новатор в этой структуре выбирает либо элемент x_ν, либо множество элементов X_ν. Если выбран элемент, Консерватор должен выбрать элемент в B. Если выбрано множество, Консерватор должен выбрать множество элементов из A.

В игре $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO}}$ к концу игры выбраны элементы $x_1, ..., x_k$ в A и $y_1, ..., y_k$ в B. Обозначим $x_{k+1} = R_1^A, y_{k+1} = R_1^B, \ldots, x_{k+s} = R_s^A, y_{k+s} = R_s^B$. Консерватор выигрывает тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие.

- Для любых $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $\nu_1, \ldots, \nu_{a_i} \in \{1, \ldots, k+s\}$ выполнено $P_i(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_a}) \Leftrightarrow P_i(y_{\nu_1}, \ldots, y_{\nu_a})$.

В игре $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO}}$ к концу игры выбраны элементы $x_{i_1}, ..., x_{i_t}$ в A, $y_{i_1}, ..., y_{i_t}$ в B и множества $X_{j_1}, ..., X_{j_{k-t}}$ элементов из A, $Y_{j_1}, ..., Y_{j_{k-t}}$ элементов из B. Консерватор выигрывает тогда и только тогда, когда соблюдены следующие условия.

- Для любых $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $\nu_1, \ldots, \nu_{a_i} \in \{i_1, \ldots, i_t, k+1, \ldots, k+s\}$ выполнено $P_i(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_a}) \Leftrightarrow P_i(y_{\nu_1}, \ldots, y_{\nu_a})$.
- Для любых $\nu \in \{i_1, \ldots, i_t, k+1, \ldots, k+s\}$ и $\mu \in \{j_1, \ldots, j_{k-t}\}$ выполнено $x_\nu \in X_\mu \Leftrightarrow y_\nu \in Y_\mu$.

Пусть t, l — неотрицательные целые числа, причем $t + l \leq k$. Рассмотрим структуры A и B с выбранными элементами $u_1, \ldots, u_t$ в A, $v_1, \ldots, v_t$ в B и множествами $U_1, \ldots, U_l$ элементов из A, $V_1, \ldots, V_l$ элементов из B. Пусть элементы $u_1, \ldots, u_t, v_1, \ldots, v_t$ выбраны в первых t раундах игры $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO}}(A, B, k)$, в множества $U_1, \ldots, U_l, V_1, \ldots, V_l$ — в последующих l раундах. Предположим, что Консерватор победил в сыгранной игре $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO}}(A, B, t + l)$. Обозначим $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_t)$, $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_t)$, $\overline{U} = (U_1, \ldots, U_l)$, $\overline{V} = (V_1, \ldots, V_l)$. Будем писать $(A, \overline{u}, \overline{U}) \equiv_k^{\mathrm{MSO}} (B, \overline{v}, \overline{V})$, если у Консерватора есть выигрышная стратегия в оставшихся $k - t - l$

раундах. Очевидно, $\equiv_k^{\mathrm{MSO}}$ — отношение эквивалентности (отношение эквивалентности $\equiv_k^{\mathrm{FO}}$ определяется аналогичным образом для языка первого порядка, см. [97]). *k-Эренфойхт значением* тройки $(A, \overline{u}, \overline{U})$ будем называть класс $\equiv_k^{\mathrm{MSO}}$-эквивалентности, которому она принадлежит. Обозначим $\mathrm{EHR}(k,t,l)$ множество всех k-Эренфойхт значений для структур с выделенными s элементами и m множествами. Положим $\mathrm{EHR}(k) = \mathrm{EHR}(k,0,0)$.

Наши доказательства теорем 6.3.2, 6.3.4 (которые мы приводим в разделах 6.4.2, 6.4.3 соответственно) основаны на обобщении леммы 3.2 из [97] на монадический язык второго порядка, которое мы формулируем ниже.

Лемма 6.4.1. *Рассмотрим два случая.*

· *Если $t+l=k$, то*

$$|\mathrm{EHR}(k,t,l)| \leq 2^{\sum_{i=1}^{m} a_i! \binom{s+t}{a_i} 2^{(s+t)l}}. \tag{6.2}$$

· *Если $t+l<k$, то*

$$|\mathrm{EHR}(k,t,l)| \leq 2^{|\mathrm{EHR}(k,t+1,l)|+|\mathrm{EHR}(k,t,l+1)|}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Пусть $t+l=k$. Тогда класс $\equiv_k^{\mathrm{MSO}}$-эквивалентности структуры A с выбранными $\overline{u}, \overline{U}$ определяется вхождением элементов $u_1, \ldots, u_t, R_1, \ldots, R_s$ в множества $U_1, \ldots, U_l$, и структурой $A|_{\{u_1,\ldots,u_t,R_1,\ldots,R_s\}}$. Из этого следует (6.2).

Если $t+l<k$, то $(A, \overline{u}, \overline{U}) \equiv_k^{\mathrm{MSO}} (B, \overline{v}, \overline{V})$ тогда и только тогда, когда

$$\forall u \in A \exists v \in B \quad (A, (u_1, \ldots, u_t, u), \overline{U}) \equiv_k^{\mathrm{MSO}} (B, (v_1, \ldots, v_t, v), \overline{V}), \tag{6.4}$$

$$\forall U \subset A \exists V \subset B \quad (A, \overline{u}, (U_1, \ldots, U_l, U)) \equiv_k^{\mathrm{MSO}} (B, \overline{v}, (V_1, \ldots, V_l, V)), \tag{6.5}$$

и наоборот. Очевидно, (6.4), (6.5) выполнены тогда и только тогда, когда

· множество k-Эренфойхт значений структуры A с выбранными элементами $u_1, \ldots, u_t, u$ и множествами $U_1, \ldots, U_l$ по всем $u \in A$ и множество k-Эренфойхт значений структуры B с выбранными элементами $v_1, \ldots, v_t, v$ и множествами $V_1, \ldots, V_l$ по всем $v \in B$ совпадают;

· множество k-Эренфойхт значений структуры A с выбранными элементами $u_1, \ldots, u_t$ и множествами $U_1, \ldots, U_l, U$ по всем $U \subset A$ и множество k-Эренфойхт значений структуры B с выбранными элементами $v_1, \ldots, v_t$ и множествами $V_1, \ldots, V_l, V$ по всем $V \subset B$ совпадают.

Поэтому k-Эренфойхт значение структуры A с выбранными элементами $u_1, \ldots, u_t$ и множествами $U_1, \ldots, U_l$ определяется множеством k-Эренфойхт значений структуры A с выбранными элементами $u_1, \ldots, u_t, u$ и множествами $U_1, \ldots, U_l$ по всем $u \in A$ и множеством k-Эренфойхт значений структуры A с выбранными элементами $u_1, \ldots, u_t$ и множествами $U_1, \ldots, U_l, U$ по всем $U \subset A$. Из этого следует (6.3). Лемма доказана.

Для графов (в языке два предикатных символа $\sim, =$ и ни одного константного символа) и укорененных деревьев (в языке два предикатных символа $P, =$ и один константный символ R) оценка (6.2) может быть усилена следующим образом.

Лемма 6.4.2. *Пусть $t+l=k$. Для графов $\log_2 |\mathrm{EHR}(k,t,l)| \le k^2-k$. Для укорененных деревьев при $k \ge 5$ выполнено $\log_2 |\mathrm{EHR}(k,t,l)| \le 2^k-2$, а при $k=4$ — $|\mathrm{EHR}(4,t,l)| \le 3 \cdot 2^{13}$.*

Доказательство. Так как отношения $\sim, =$ симметричны, то для графов

$$|\mathrm{EHR}(k,t,l)| \le 2^{2\binom{t}{2}+tl} = 2^{t(k-1)} \le 2^{k(k-1)}.$$

В случае укорененных деревьев рассмотрим две ситуации: в первой вершины $u_1, \ldots, u_t, R$ попарно различны, а во второй — нет. Заметим, что существует не более $(t+1)^{t-1}3^t$ ориентированных лесов на $t+1$ пронумерованных вершинах (всего $(t+1)^{t-1}$ деревьев, при этом каждое ребро может быть либо удалено, либо проведено в одном из двух направлений). Поэтому в первой ситуации (для различных $u_1, \ldots, u_t, R$) количество k-Эренфойхт значений $(A, \overline{u}, \overline{U})$ не превосходит

$$(t+1)^{t-1}3^t 2^{(t+1)l} = 2^{(t-1)\log_2(t+1)+t\log_2 3+(t+1)l} \le 2^{g_1(k)},$$

где

$$g_1(k) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + (k-1)\log_2(k+1) + k\log_2 3.$$

Так как количество способов определить отношение равенства на $u_1, \ldots, u_t, R$ не превосходит $2^{\binom{t+1}{2}}$, то во второй ситуации ($u_1, \ldots, u_t, R$ не являются попарно различными) количество k-Эренфойхт значений меньше чем

$$2^{\binom{t+1}{2}} t^{t-2} 3^{t-1} 2^{tl} \le 2^{\binom{t+1}{2}+(t-2)\log_2 t+(t-1)\log_2 3+tl} \le 2^{g_2(k)},$$

где

$$g_2(k) = \frac{(k+1)k}{2} + (k-2)\log_2 k + (k-1)\log_2 3.$$

Таким образом, для $k \geq 5$ получаем следующую оценку:

$$|\mathrm{EHR}(k,t,l)| \leq 2^{g_1(k)} + 2^{g_2(k)} < 2^{2^k-2}.$$

Последнее неравенство выполнено так как, во-первых, для $k = 5$, обе величины $g_1(k), g_2(k)$ меньше чем $2^k - 3$, во-вторых, $2^k - 3$ растет быстрее $g_1(k)$ и $g_2(k)$ при $k > 5$.

Пусть $k = 4$. В первой ситуации (при различных $u_1, \ldots, u_t, R$) количество k-Эренфойхт значений $(A, \overline{u}, \overline{U})$ не превосходит

$$\max_{t \in \{0,1,2,3,4\}} (t+1)^{t-1} 3^t 2^{(t+1)(4-t)} = 3^4 5^3.$$

Существует ровно $F(t) = 1, 3, 19, 201$ ориентированных лесов на $t = 1, 2, 3, 4$ пронумерованных вершинах соответственно. Более того, для $t = 1, 2, 3, 4$ количество способов определения отношения равенства на элементах $u_1, \ldots, u_t, R$ таким образом, что эти вершины не являются попарно различными, равно $E(t) = 1, 4, 14, 51$ соответственно. Наконец, если $u_1, \ldots, u_t, R$ не являются попарно различными, то для $t = 1, 2, 3, 4$ число способов определить принадлежность элементов $u_1, \ldots, u_t, R$ множествам $U_1, \ldots, U_{4-t}$ не превосходит $M(t) = 8, 16, 8, 1$ соответственно. Поэтому во второй ситуации ($u_1, \ldots, u_t, R$ не являются попарно различными) количество k-Эренфойхт значений не превосходит

$$\max_{t \in \{0,1,2,3,4\}} F(t)E(t)M(t) = 201 \cdot 51.$$

Следовательно,

$$|\mathrm{EHR}(4,t,l)| \leq 3^4 5^3 + 201 \cdot 51 = 20376 < 3 \cdot 2^{13}.$$

Лемма доказана. □

Для графов будем использовать обозначения $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO};\,\mathrm{graphs}}(G,H,k)$, $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO};\,\mathrm{graphs}}(G,H,k)$ для игр $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO}}(G,H,k)$, $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO}}(G,H,k)$ соответственно. Теорема 1.4.1 допускает следующее обобщение.

Теорема 6.4.3. (А. Эренфойхт, 1960, [40]) *Для любого натурального числа k и любых графов G, H*

$G \equiv_k^{\mathrm{MSO};\,\mathrm{graphs}} H$ тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}^{MSO;\,\mathrm{graphs}}(G,H,k)$.

Нам потребуется следующее известное следствие из этой теоремы, которое является обобщением теоремы 1.4.2 (см., например, [57, 53, 112,

130]).

Теорема 6.4.4. *Пусть k — произвольное натуральное число. Случайный граф $G(n,p)$ подчиняется монадическому k-закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда с асимптотической вероятностью 1 в игре* $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO;\,graphs}}(G(n,p), G(m,p), k)$ *у Консерватора есть выигрышная стратегия при $n, m \to \infty$.*

В наших доказательствах мы будем использовать два известных утверждения о $\equiv_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}}$-эквивалентности, сформулированные ниже. Они следуют из теорем 1.4.1, 5.4.3 (доказательства привдены в [33], см. теоремы 2.2 и 2.3).

Лемма 6.4.5. *Пусть k — натуральное число. Если $H_1 \equiv_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}} H_2$, $G_1 \equiv_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}} G_2$, то $H_1 \sqcup G_1 \equiv_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}} H_2 \sqcup G_2$. То же самое верно и для $\equiv_k^{\mathrm{FO;\,graphs}}$-эквивалентности.*

Обозначим aG дизъюнктное объединение a копий графа G.

Лемма 6.4.6. *Для любого натурального числа k существует такое натуральное число a, что для любого натурального числа $b \geq a$ и любого графа G выполнено $bG \equiv_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}} aG$.*

Мы также будем использовать игру Эренфойхта на укорененных деревьях. Обозначим $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO;\,trees}}(T_R, T'_{R'}, k)$, $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO;\,trees}}(T_R, T'_{R'}, k)$ для укорененны деревьев $T_R, T'_{R'}$ игры $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO}}(T_R, T'_{R'}, k)$, $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO}}(T_R, T'_{R'}, k)$ соответственно. Теорема Эренфойхта в этом случае формулируется следующим образом.

Теорема 6.4.7. (А. Эренфойхт, 1960, [40]) *Для любого натурального числа k и любых укорененных деревьев $T_R, T'_{R'}$*

$T_R \equiv_k^{\mathrm{FO;\,trees}} T'_{R'}$ тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}^{FO;\,\mathrm{trees}}(T_R, T'_{R'}, k)$*;*

$T_R \equiv_k^{\mathrm{MSO;\,trees}} T'_{R'}$ тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}^{MSO;\,\mathrm{trees}}(T_R, T'_{R'}, k)$.

6.4.2. Доказательство теоремы 6.3.2

Зафиксируем натуральное число $k \geq 2$. Положим

$$\tilde{T}(1) = 2^{k^2-k}, \quad \tilde{T}(i) = 2^{2^{\tilde{T}(i-1)}}, \quad \hat{T}(1) = 2^{2^k}, \quad \hat{T}(i) = 2^{\hat{T}(i-1)}.$$

Так как $2^k \geq k^2$ и для любого положительного числа x выполнено неравенство $1+2^x < 2^x+2^x = 2^{x+1}$, то выполнены и неравенства $\tilde{T}(i) \leq \hat{T}(i)$, $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Более того,

$$\hat{T}(1) \leq 2^{2^{T(\log^*(k))}} = T(2 + \log^*(k)).$$

Для любого целого неотрицательного числа β такого, что $\beta \leq k$, положим $f(k, \beta) = \max_{t \in \{0,1,\ldots,\beta\}} |\mathrm{EHR}(k, t, \beta - t)|$. По леммам 6.4.1, 6.4.2

$$|\mathrm{EHR}(k)| \leq 2^{2f(k,1)} \leq 2^{2 \cdot 2^{2f(k,2)}} \leq \ldots \leq \tilde{T}(k+1) \leq T(k + 2 + \log^*(k)).$$

Наконец, по теореме теореме 6.4.3 получаем

$$r_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}} = |\mathrm{EHR}(k)| \leq T(k + 2 + \log^*(k)).$$

6.4.3. Доказательство теоремы 6.3.4

Зафиксируем натуральное число $k \geq 5$. Положим

$$\tilde{T}(1) = 2^{2^k-2}, \quad \tilde{T}(i) = 2^{2^{\tilde{T}(i-1)}}, \quad \hat{T}(1) = k - 1 + 2^{2^k-1}, \quad \hat{T}(i) = 2^{\hat{T}(i-1)}.$$

Как и в предыдущем разделе, для любого $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ выполнено неравенство $\tilde{T}(i) \leq \hat{T}(i)$. Более того,

$$\hat{T}(1) < 2^{2^k} \leq 2^{2^{T(\log^* k)}} = T(2 + \log^*(k)).$$

Следовательно, по леммам 6.4.1, 6.4.2

$$|\mathrm{EHR}(k)| \leq \tilde{T}(k+1) \leq \hat{T}(k+1) < T(k + 2 + \log^*(k)).$$

Пусть $k = 4$. По леммам 6.4.1, 6.4.2

$$\log_2 \log_2 |\mathrm{EHR}(k)| \leq 1 + 2^{1+2^{1+6 \cdot 2^{13}}} < 2^{2^{3+6 \cdot 2^{13}}} < 2^{2^{2^{16}}} = T(6) = T(k + \log^*(k)).$$

В силу теоремы 6.4.7 для любого $k \geq 4$ выполнено равенство $r_k^{\mathrm{MSO;\,trees}} = |\mathrm{EHR}(k)| \leq T(k + 2 + \log^*(k))$.

Второе утверждение теоремы 6.3.4 следует из обобщения лемм 8.6, 8.7 из [97] о представителях рассматриваемых классов эквивалентностей на случай монадического языка второго порядка. Положим $z =$

$2^k f(k,1)\dots f(k,k)$ (см. обозначения в разделе 6.4.2).

Лемма 6.4.8. *Пусть k — натуральное число, $A \in \mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO;trees}}$. Пусть, кроме того, $T_R \in A$ — укорененное дерево минимального размера в A. Тогда*

- *любая вершина в T_R имеет не более $zf(k,0)$ сыновей;*
- *глубина T_R не превосходит $f(k,0)$.*

Доказательство. Будем говорить, что класс $\equiv_k^{\mathrm{MSO}}$-эквивалентности имеет *тип* m, если либой его представитель содержит $t+l=m$ вершин и множеств (см. раздел 6.4.1.2). Для всех $m \in \{0,1,\dots,k\}$ положим $z(k,m)=1$. Более того, для всех $i \in \{1,\dots,k\}$, $m \in \{0,1,\dots,i\}$ положим

$$z(i-1,m) = z(i,m) + z(i,m+1)f(k,m+1). \tag{6.6}$$

Очевидно, для всех $i \in \{0,1,\dots,k-1\}$, $m \in \{0,1,\dots,i\}$ выполнено неравенство

$$z(i,m) \le 2^{k-i} f(k,m+1)\dots f(k,k).$$

Следовательно, $z(0,0) \le z$.

Рассмотрим произвольную вершину y укорененного дерева T_R. Пусть $w_1,\dots,w_s$ — сыновья y. Пусть, кроме того, k-Эренфойхт значения деревьев $T_R(w_1),\dots,T_R(w_s)$ равны $a_1,\dots,a_s$ соответственно. Предположим, что для некоторого $i \in \{1,\dots,s\}$ (скажем, для $i=1$) более z классов $a_1,\dots,a_s$ равны a_i. Пусть $w_1,\dots,w_{z'}$ — все такие сыновья y, что k-Эренфойхт значения деревьев $T_R(w_1),\dots,T_R(w_{z'})$ равны a_1. Рассмотрим укорененное дерево T_R^-, полученное из T_R удалением всех (кроме z штук) поддеревьев укорененных в сыновьях y, таких что их k-Эренфойхт значения равны a_1 (будем обозначать удаленные поддеревья $T_R(w_{z+1}),\dots,T_R(w_{z'})$).

Докажем, что $T_R \equiv_k^{\mathrm{MSO;\,trees}} T_R^-$. По теореме 6.4.7 деревья эквивалентны тогда и только тогда, когда у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO;\,trees}}(T_R, T_R^-, k)$. Мы не рассматриваем выборы Новатором вершин и подмножеств в

$$V(T_R) \setminus V(T_R(w_1) \cup \dots \cup T_R(w_{z'})),$$

потому что для таких выборов стратегия Консерватора тривиальна. Положим

$$\mathcal{C}_0(0) = \{T_R(w_1),\dots,T_R(w_{z'})\}, \quad \mathcal{C}_0^-(0) = \{T_R^-(w_1),\dots,T_R^-(w_z)\}.$$

Рассмотрим первый раунд игры $\mathrm{EHR}^{\mathrm{MSO;\,trees}}(T_R, T_R^-, k)$. Если Новатор выбирает вершину $u \neq y$ (скажем, в дереве $T_R(w_i)$), то Консерватор выбирает вершину v такую, что $(T_R(w_i), u) \equiv_k^{\mathrm{MSO}} (T_R^-(w_j), v)$ (скажем, в дереве $T_R^-(w_j)$). Он может это сделать, так как все деревья из $\mathcal{C}_0^-(0)$ и $\mathcal{C}_0(0)$ обладают одним и тем же k-Эренфойхт значением. Положим

$$\mathcal{C}_{1;1}(1) = \{(T_R(w_i), u)\}, \quad \mathcal{C}_{1;1}(0) = \{T_R(w_1), \ldots, T_R(w_{z'})\} \setminus \{T_R(w_i)\},$$

$$\mathcal{C}_{1;1}^-(1) = \{(T_R^-(w_j), v)\}, \quad \mathcal{C}_{1;1}^-(0) = \{T_R^-(w_1), \ldots, T_R^-(w_z)\} \setminus \{T_R^-(w_j)\},$$

$$\gamma_1(0) = 1, \gamma_1(1) = 1.$$

Наконец, если Новатор выбирает множество вершин U (скажем, $U = U_1 \cup \ldots \cup U_{z'}$, U_i — (возможно, пустое) подмножество $V(T_R(w_i))$), то $\mathcal{C}_{1;\cdot}(1)$ являются классами $\equiv_k^{\mathrm{MSO}}$-эквивалентности на парах $(T_R(w_i), U_i)$ таких, что U_i не пусты, и $\mathcal{C}_{1;\cdot}(0)$ являются классами $\equiv_k^{\mathrm{MSO}}$-эквивалентности (возможно, пустыми) на деревьях $T_R(w_i)$ таких, что U_i пусты. Очевидно, число классов эквивалентности $\mathcal{C}_{1;\cdot}(1)$ равно $\gamma_1(1) \leq f(k, 1)$, число классов эквивалентности $\mathcal{C}_{1;\cdot}(0)$ равно $\gamma_1(0) \leq 1$. Консерватор строит множество вершин V следующим образом. Для каждого $m \in \{0, 1\}$ и каждого j от 1 до $\gamma_1(m)$ если $|\mathcal{C}_{1;j}(m)| \leq z(1, m)$, то Консерватор рассматривает следующие $|\mathcal{C}_{1;j}(m)|$ деревьев из $T_R^-(w_1), \ldots, T_R^-(w_z)$ и выбирает такие множества их вершин (пустые при $m = 0$), что каждое дерево с соответствующим подмножеством находится в том же классе $\equiv_k^{\mathrm{MSO}}$-эквивалентности, что и любой представитель из $\mathcal{C}_{1;j}(m)$. Если $|\mathcal{C}_{1;j}(m)| > z(1, m)$, то Консерватор рассматривается следующие хотя бы $z(1, m)$ деревьев и выбирает их подмножества таким же образом. Так как

$$z' > z \geq z(0, 0) = z(1, 0) + z(1, 1)f(k, 1),$$

то описанное множество V существует.

Рассмотрим теперь i-ый раунд, $i \in \{2, \ldots, k\}$. Предположим, что после предыдущего раунда выбраны неотрицательные целые числа $\gamma_{i-1}(0)$, $\ldots$, $\gamma_{i-1}(i-1)$ и классы $\equiv_k^{\mathrm{MSO}}$-эквивалентности $\mathcal{C}_{i-1;j}(m)$, $\mathcal{C}_{i-1;j}^-(m)$, $m \in \{0, \ldots, i-1\}$, $j \in \{1, \ldots, \gamma_{i-1}(j)\}$ (каждый класс состоит из укорененных деревьев из $\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{C}_0^-$ соответственно с выбранными в ними m вершинами и множествами вершин). Для любого $m \in \{0, \ldots, i-1\}$ и любого $j \in \{1, \ldots, \gamma_{i-1}(m)\}$ все элементы классов $\mathcal{C}_{i-1;j}^-(m)$ и $\mathcal{C}_{i-1;j}(m)$ имеют одно и то же k-Эренфойхт значение. Наконец, для любого $m \in \{0, \ldots, i-1\}$ и любого $j \in \{1, \ldots, \gamma_{i-1}(m)\}$

$$\text{либо } |\mathcal{C}_{i-1;j}^-(m)| = |\mathcal{C}_{i-1;j}(m)|,$$

$$\text{либо } \min\{|\mathcal{C}^-_{i-1;j}(m)|, |\mathcal{C}_{i-1;j}(m)|\} \geq z(i-1,m). \qquad (6.7)$$

Если Новатор выбирает вершину $u \neq y$ (скажем, в дереве $T_R(w_i)$ с выбранными $\hat{m}$ вершинами $\overline{u}$ и множествами $\overline{U}$, $(T_R(w_i), \overline{u}, \overline{U}) \in \mathcal{C}_{i-1;1}(\hat{m})$), то Консерватор выбирают любую такую вершину v, что

$$(T_R(w_i), \overline{u}, u, \overline{U}) \equiv^{\text{MSO}}_k (T^-_R(w_{\tilde{i}}), \overline{v}, v, \overline{V})$$

(где $(T^-_R(w_{\tilde{i}}), \overline{v}, \overline{V})$ принадлежит классу $\mathcal{C}^-_{i-1;1}(\hat{m})$). Положим

$$\mathcal{C}_{i;1}(\hat{m}) = \mathcal{C}_{i-1;1}(\hat{m}) \setminus \{(T_R(w_i), \overline{u}, \overline{U})\},$$

$$\mathcal{C}_{i;j}(\hat{m}) = \mathcal{C}_{i-1;j}(\hat{m}), \quad j \in \{2, \ldots, \gamma_{i-1}(\hat{m})\},$$

$$\mathcal{C}_{i;1}(\hat{m}+1) = \{(T_R(w_i), \overline{u}, u, \overline{U})\},$$

$$\mathcal{C}_{i;j+1}(\hat{m}+1) = \mathcal{C}_{i-1;j}(\hat{m}+1), \quad j \in \{1, \ldots, \gamma_{i-1}(\hat{m}+1)\},$$

$$\mathcal{C}_{i;j}(m) = \mathcal{C}_{i-1;j}(m), \quad m \in \{0, \ldots, i-1\} \setminus \{\hat{m}, \hat{m}+1\}, \quad j \in \{2, \ldots, \gamma_{i-1}(m)\}.$$

Аналогичным образом определяются классы $\mathcal{C}^-_{i;j}(m)$. Более того, $\gamma_i(m) = \gamma_{i-1}(m)$ для всех $m \in \{0, \ldots, i\} \setminus \{\hat{m}+1\}$ и $\gamma_i(\hat{m}+1) = \gamma_{i-1}(\hat{m}+1) + 1$ (здесь мы предполагаем, что $\gamma_{i-1}(i) = 0$). Наконец, если Новатор выбирает множество U (пусть $U = U_1 \cup \ldots \cup U_{z'}$, где U_l — (возможно, пустое) подмножество $V(T_R(w_l))$), то классы $\mathcal{C}_{i;\cdot}(m+1)$ получаются с помощью разбиения каждого класса $\mathcal{C}_{i-1;j}(m)$ на не более чем $f(k, m+1)$ классов $\equiv^{\text{MSO}}_k$-эквивалентности в соответствии с непустыми множествами U_l. Элементы класса $\mathcal{C}_{i-1;j}(m)$ с пустыми множествами U_l образуют не более одного класса такого же типа m. Консерватор строит множество V следующим образом. Для каждого m от 0 до i и каждого j от 1 до $\gamma_i(m)$ он находит класс $\mathcal{C}_{i-1;\tilde{j}}(\hat{m}) \supset \mathcal{C}_{i;j}(m)$. Если $|\mathcal{C}_{i;j}(m)| \leq z(i,m)$, то Консерватор рассматривает следующие $|\mathcal{C}_{i;j}(m)|$ элементов класса $\mathcal{C}^-_{i-1;\tilde{j}}(\hat{m})$ и выбирает такие (возможно, пустые) множества вершин в соответствующих укорененных деревьях , что каждое дерево с выбранными множествами (возможно, учитывая новое пустое) и вершинами принадлежит тому же классу $\equiv^{\text{MSO}}_k$-эквивалентности, что и любой представитель класса $\mathcal{C}_{i;j}(m)$. Если $|\mathcal{C}_{i;j}(m)| > z(i,m)$, то Консерватор рассматривает следующие хотя бы $z(i,m)$ элементов класса $\mathcal{C}^-_{i-1;\tilde{j}}(\hat{m})$ аналогичным образом. Множество V существует, так как выполнены соотношения (6.6) при $m = \hat{m}$ и (6.7).

Очевидно, такая стратегия Консерватора является выигрышной. Поэтому $T^-_R \in A$ и $|V(T^-_R)| < |V(T_R)|$, что противоречит нашему предположению. Так как количество различных классов среди $a_1, \ldots, a_s$ не превосходит $f(k,0)$, то первое утверждение леммы 6.4.8 доказано.

Предположим, что существует такая вершина $y \in V(T_R)$, что $d(R,y) > f(k,0)$. Рассмотрим путь $R \ldots y$. По определению $f(k,0)$ в этом пути найдутся такие различные некорневые вершины w_1, w_2, что $T_R(w_1) \equiv_k^{\mathrm{MSO}} T_R(w_2)$. Пусть $d(R,w_1) < d(R,w_2)$. Рассмотрим укорененное в R дерево T_R^-, полученное из T_R в результате замены $T_R(w_1)$ на $T_R(w_2)$ (корень w_1 заменим корнем w_2). Легко заметить, что $T_R \equiv_k^{\mathrm{MSO}} T_R^-$. По теореме 6.4.7 $T_R \equiv_k^{\mathrm{MSO;\,trees}} T_R^-$. Следовательно, $T_R^- \in A$ и $|V(T_R^-)| < |V(T_R)|$, что противоречит нашему предположению. Лемма доказана. $\square$

Пусть $A \in \mathcal{R}_k^{\mathrm{MSO}}$. По лемме 6.4.8 и первому утверждению теоремы 6.3.4 получаем

$$\min_{T_R \in A} |V(T_R)| \leq \sum_{i=0}^{f(k,0)} z f(k,0)^i < (z f(k,0))^{f(k,0)+1} \leq T(k+3+\log^*(k+1)).$$

Теорема доказана.

6.4.4. Доказательство теоремы 6.2.1: монадический k-закон

Пусть $k \geq 4$, $l \geq T(k+\log^*(k+1)+3)$, $\alpha = 1 + \frac{1}{l}$, $p = n^{-\alpha}$. Рассмотрим $a = a(k)$ из леммы 6.4.6. Пусть $\mathcal{T}$ — множество всех попарно неизоморфных деревьев на не более l вершинах и $\mathcal{T}^+$ — множество всех попарно неизоморфных деревьев на $l+1$ вершинах. Рассмотрим лес

$$T_0 = \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} aT.$$

Из свойств T1, T2, T3 следует, что для любого $C > 0$ с асимптотической вероятностью 1 существуют такие K_T для $T \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^+$, что

$$G(n,p) = \bigsqcup_{T \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^+} K_T T$$

и $K_T > C$ для любого $T \in \mathcal{T}$.

Для любого $T \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^+$ выберем произвольное целое неотрицательное число K_T таким образом, что $K_T \geq a$ для всех $T \in \mathcal{T}$. Рассмотрим лес

$$F = \bigsqcup_{T \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^+} K_T T.$$

По теореме 6.3.4 для любого дерева $\hat{T} \in \mathcal{T}^+$ существует такое дерево $T(\hat{T}) \in \mathcal{T}$, что $T(\hat{T}) \equiv_k^{\mathrm{MSO;\,graphs}} \hat{T}$. Обозначим $\mathcal{T}(\mathcal{T}^+)$ множество всех деревьев $T \in \mathcal{T}$ таких, что существует $\hat{T} \in \mathcal{T}^+$ с $T = T(\hat{T})$. Для каждого

дерева $T \in \mathcal{T}(\mathcal{T}^+)$ обозначим $\mathcal{T}^+(T)$ множество деревьев $\hat{T}$ из $\mathcal{T}^+$, для которых $T = T(\hat{T})$. Кроме того, для каждого $T \in \mathcal{T}(\mathcal{T}^+)$ положим $\tilde{K}_T = K_T + \sum_{\hat{T} \in \mathcal{T}^+(T)} \min\{K_{\hat{T}}, a\}$. Для всех остальных $T \in \mathcal{T}$ положим $\tilde{K}_T = K_T$.

По лемме 6.4.6 выполнено $\tilde{K}_T T \equiv_k^{\text{MSO; graphs}} aT$ для любого $T \in \mathcal{T}$, а также $\min\{K_{\hat{T}}, a\}T \equiv_k^{\text{MSO; graphs}} K_{\hat{T}}T$ для любого $T \in \mathcal{T}(\mathcal{T}^+)$ и $\hat{T} \in \mathcal{T}^+(T)$. Следовательно, по лемме 6.4.5

$$T_0 \equiv_k^{\text{MSO; graphs}} \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} \tilde{K}_T T =$$

$$\left(\bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} K_T T\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{T}^+)} \left(\sum_{\hat{T} \in \mathcal{T}^+(T)} \min\{K_{\hat{T}}, a\}\right) T\right) \equiv_k^{\text{MSO; graphs}}$$

$$\left(\bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} K_T T\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{T}^+)} \bigsqcup_{\hat{T} \in \mathcal{T}^+(T)} K_{\hat{T}} T\right) \equiv_k^{\text{MSO; graphs}}$$

$$\left(\bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} K_T T\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(\mathcal{T}^+)} \bigsqcup_{\hat{T} \in \mathcal{T}^+(T)} K_{\hat{T}} \hat{T}\right) =$$

$$\left(\bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} K_T T\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{\hat{T} \in \mathcal{T}^+} K_{\hat{T}} \hat{T}\right) = F.$$

Поэтому с асимптотической вероятностью 1 $G(n,p) \equiv_k^{\text{MSO; graphs}} T_0$. Тогда с вероятностью стремящейся к 1, для любой монадической формулы второго порядка с кванторной глубиной k истинность этой формулы для случайного графа $G(n,p)$ с асимптотической вероятностью 1 равносильна ее истинности для T_0. Следовательно, $G(n,p)$ подчиняется монадическому k-закону нуля или единицы.

6.4.5. Доказательство теоремы 6.2.1: k-закон для формул первого порядка

Будем называть укорененные деревья T_R and $T'_{R'}$ *изоморфными*, если существует изоморфизм $T \to T'$, переводящий R в R'. Если w — сын вершины u в укорененном дереве T_R, то будем называть укорененное дерево $T_R(w)$ *u-ветвью* дерева T_R. Укорененное дерево T_R будем называть *расходящимся*, если для любой его вершины u все его u-ветви попарно

неизоморфны (как укорененные деревья). Будем называть неукорененное дерево *расходящимся*, если для любой его центральной вершины v укорененное дерево T_v является расходящимся.

В дальнейшем мы будем использовать лемму 6.13 из [97], для удобства приведем ее формулировку ниже.

Лемма 6.4.9. (О. Пихурко, Дж. Спенсер, О. Вербицкий, 2006, [97]) *Пусть $i \geq 3$. Для любого такого n, что $2i + 2 \leq n \leq 2T(i-1) + 1$, существует расходящееся дерево размера n и радиуса $i + 1$.*

Для каждого $l \in \{1, \ldots, 8\}$ с помощью свойств T1 и T4 легко построить формулу первого порядка кванторной глубины не более 7, истинную для случайного графа $G(n, n^{-1-1/l})$ с асимптотической вероятностью, принадлежащей интервалу $(0, 1)$. Поэтому будем считать, что $l \geq 9$.

Зафиксируем произвольное $k \geq 7$ и l такое, что $2T(k-4) \geq l \geq 2k-5$. Положим $p = n^{-\alpha}$, $\alpha = 1 + 1/l$. По лемме 6.4.9 существует расходящееся дерево S размера $l + 1$, радиус которого равен $k - 2$. По свойствам T1, T2 и T4 с асимптотической вероятностью $c \in (0, 1)$ в $G(n, p)$ существует компонента, изоморфная S. Более того, с асимптотической вероятностью $1 - c$ в $G(n, p)$ не найдется копии S.

Рассмотрим два таких леса A и B, что в A существует компонента S^A изоморфная S, а в B не существует копии S. Докажем, что у Новатора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}^{\mathrm{FO;\,graphs}}(A, B, k)$. В первом раунде Новатор выберет центральную вершину x_1 в S^A. Консерватор выберет вершину y_1 из некоторой компоненты S^B графа B.

Предположим, что $d(S^A) < d(S^B)$ (если $d(S^A) > d(S^B)$, то Новатор применяет аналогичную стратегию). В последующих двух раундах Новатор выбирает такие вершины y_2 и y_3 (необязательно отличные от y) в S^B, что $d(y_2, y_3) = d(S^A) + 1$ и $d(y_1, y_2) \leq d(S^A)$. Консерватор выберет некоторые вершины x_2, x_3. Если $x_2 \notin V(S^A)$, то существует выигрышная стратегия Новатора в следующих

$$\lceil \log_2(d(S^A)) \rceil \leq \lceil \log_2(2r(S^A)) \rceil = 1 + \log_2(k-2) \leq k - 3$$

раундах (см., например, [97], лемма 6.4). Если $x_2 \in V(S_A)$, то $d_{S_A}(x_2, x_3) \neq d(y_2, y_3) = d(S^A) + 1$. Следовательно, существует выигрышная стратегия Новатора в следующих

$$\lceil \log_2(d(S^A) + 1) \rceil \leq \lceil \log_2(2k-3) \rceil \leq k - 3$$

раундах.

Пусть $d(S^A) = d(S^B)$. Далее мы применяем стратегию Новатора из лемм 6.7, 6.8 в [97]. Заметим, что эта стратегия является выигрышной на двух деревьях. Тем не менее, в основной части стратегии Новатор в каждом раунде выбирает вершину соединенную с одной из вершин, выбранных в предыдущих раундах. Поэтому Консерватор не может "менять" компоненту связности (т.е. эта стратегия является выигрышной также в случае двух лесов). Для удобства мы описываем эту стратегию в следующем абзаце.

Если вершина y_1 не является центральной вершиной в S^B, то, как и в предыдущих случаях, у Новатора есть выигрышная стратегия в не более чем $1 + \lceil r(S^A) \rceil < k - 1$ следующих раундах. Пусть y_1 — центральная вершина S^B. Предположим теперь, что дерево S^B является расходящимся. Докажем, что у Новатора существует такая стратегия, что для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ либо он уже выигрывает в i-ом раунде, либо выбранные вершины $x_1, x_2, \ldots, x_i$ и $y_1, y_2, \ldots, y_i$ образуют простые пути и укорененные деревья $S^A_{x_1}(x_i)$ и $S^B_{y_1}(y_i)$ не являются изоморфными. Для первого раунда такая стратегия уже построена. Предположим, что она построена и вплоть до некоторого раунда $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Рассмотрим $i+1$-ый раунд. Если только одна вершина из x_i, y_i является листом, то Новатор побеждает в $i+1$-ом раунде. Пусть x_i, y_i — не листья. Так как укорененные деревья $S^A_{x_1}$ и $S^B_{y_1}$ являются расходящимися, то x_i-ветви дерева $S^A_{x_1}$ попарно неизоморфны (y_i-ветви дерева $S^B_{y_1}$ также попарно неизоморфны). Без ограничения общности у x_i существует такой сын x_{i+1}, что ни одна из y_i-ветвей не изоморфна $S^A_{x_{i+1}}$. Новатор выбирает вершину x_{i+1}, стратегия построена. Следовательно, Новатор побеждает не более чем в $r(S^A) + 1 = k - 1$ раундах. Если дерево S^B не является расходящимся, то рассмотрим такую вершину t этого дерева, что $S^B_{y_1}(t)$ — не расходящееся дерево, но все его t-ветви являются расходящимися. Пусть две изоморфные t-ветви укоренены в z_1, z_2. Новатор выбирает последовательно вершины простого пути $y_1, y_2, \ldots, t, z_1$, а Консерватор — некоторые вершины $x_1, x_2, \ldots, x_i$, которые тоже должны образовывать простой путь. Если глубины деревьев $S^B_{y_1}(z_1)$ и $S^A_{x_1}(x_i)$ различны, то Новатор продолжает путь, соответствующий дереву с меньшей глубиной, и побеждает не более чем в $r(S^A) + 1 \leq k - 1$ раундах. Если глубины совпадают и $S^B_{y_1}(z_1), S^A_{x_1}(x_i)$ не изоморфны, то выигрышная стратегия Новатора в $r(S^A) + 1$ раундах приведена выше. Наконец, если $S^B_{y_1}(z_1), S^A_{x_1}(x_i)$ изоморфны, то в $i+1$-ом раунде Новатор выбирает вершину z_2, а Консерватор — некоторую вершину x_{i+1}, являющуюся сыном x_{i-1}. Так как

$S^A_{x_1}(x_{i-1})$ — расходящееся дерево, то деревья $S^A_{x_1}(x_{i+1})$ и $S^B_{y_1}(z_2)$ не изоморфны, а, следовательно, Новатор побеждает в $r(S^A) + 2 \leq k$ раундах с помощью стратегии, описанной в предыдущем случае.

Итак,

$$\liminf_{n,m\to\infty} \mathsf{P}(\text{у Новатора есть выигрышная стратегия}$$

$$\text{в игре } \mathrm{EHR}(G(n, p(n)), G(m, p(m)), k)) \geq c(1-c).$$

По теореме 6.4.4 k-закон нарушается при $2k-5 \leq l \leq 2T(k-4)$ и $k \geq 7$. Следовательно, он нарушается и при всех $l \in \{9, \ldots, 2k-6\}$. Теорема доказана.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

1) Найдено наибольшее значение $\alpha \in (0, 1)$, при котором случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ не подчиняется k-закону нуля или единицы, а также исследованы другие значения α (в контексте k-закона нуля или единицы), близкие к найденному наибольшему значению.

2) Доказано, что случайный граф $G(n, n^{-1/(k-2)})$ подчиняется k-закону сходимости.

3) При всех натуральных $k \geq 3$ найдены наименьшие и наибольшие точки спектров свойств первого порядка, а при достаточно больших k получены оценки на наименьшую и наибольшую предельные точки спектров. Нижняя оценка асимптотически (по k) точна, логарифм разности между единицей и верхней оценкой также является асимптотически точным.

4) Доказано, что наименьшая кванторная глубина формулы первого порядка, выражающей свойство с бесконечным спектром, принадлежит множеству $\{4, 5\}$.

5) Для любых взаимно простых $t < s$ явно найдено такое число ε, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы для всех $\alpha \in (t/s - \varepsilon, t/s)$. Кроме того, для $t \in \{1, 2\}$ мы получили оценку на наибольшее такое ε (при этом логарифмы верхней и нижней оценок имеют один и тот же порядок роста).

6) Доказано, что наименьшее число перемен кванторов формулы первого порядка, выражающей свойство с бесконечным спектром, равно 3.

7) Получены верхняя и нижняя оценка на наименьшее натуральное m, при котором случайный граф $G(n, n^{-1-1/m})$ подчиняется k-закону нуля или единицы.

Предложенные автором подходы могут найти дальнейшее применение в изучении асимптотического поведения вероятностей свойств, выраженных формулами первого порядка с кванторной глубиной k, случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ для значений параметра α, не расссмотренных в настоящей работе, а также при исследовании выразимости тех или иных свойств формулами первого порядка кванторной глубины не выше k.

В качестве перспектив дальнейшей разработки темы диссертации можно предложить изучение следующих вопросов.

1) Получение (или опровержение) k-законов нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha = 1 + \frac{1}{l}$, $l \in \mathbb{N}$.

2) Получение точного значения наименьшей кванторной глубины формулы, выражающей свойство с бесконечным спектром (для обоих опредений спектров).

3) Нахождение точных значений наименьшей и наибольшей предельных точек спектров S_k^1 и S_k^2.

4) Доказательство (или опровержение) k-закона сходимости для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$, где $\alpha = 1 - \frac{1}{2^k - 2}$.

5) Для любых взаимно простых $t < s$ оценивание сверху наибольшего ε такого, что случайный граф $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется k-закону нуля или единицы для всех $\alpha \in (t/s - \varepsilon, t/s)$.

6) Получение и опровержение k-законов нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha \in \left(\frac{1}{k-2}, 1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$, а также при α, принадлежащих (конечному) подмножеству $\left[1 - \frac{1}{2^{k-1}}, 1\right)$, не рассмотренному в работе.

7) Доказательство или опровержение монадического k-закона нуля или единицы для случайного графа $G(n, n^{-\alpha})$ при $\alpha \in (0, 1)$.

Список литературы

[1] Алон Н., Спенсер Дж. *Вероятностный метод*. Москва. БИНОМ. Лаборатория знаний. 2007.

[2] Булинский А. В., Ширяев А. Н. *Теория случайных процессов*. Физматлит. Москва. 2005.

[3] Боголюбский Л. И., Гусев А. С., Пядеркин М. М., Райгородский А. М. Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 457. — № 4. — С. 383–387.

[4] Боголюбский Л. И., Гусев А. С., Пядеркин М. М., Райгородский А. М. Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов // Математический сборник. — 2015. — Т. 206. — № 10. — С. 3–36.

[5] Верещагин Н. К., Шень А. *Языки и исчисления*. Москва. МЦНМО. 2000.

[6] Глебский Ю. В., Коган Д. И., Лиогонький М. И., Таланов В. А. Объем и доля выполнимости формул узкого исчисления предикатов // Кибернетика. — 1969. — Т. 2. — С. 17–26.

[7] Гончаров В. Л. О распределении циклов в перестановках // Доклады АН СССР. — 1942. — Т. 35. — № 9. — С. 299–301.

[8] Карпов Д. В. Нижние оценки количества листьев в остовных деревьях // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 450. — С. 62–73.

[9] Карпов Д. В. Остовные деревья с большим количеством висячих вершин: нижние оценки через количество вершин степеней 1, 3 и не менее 4 // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2012. — Т. 406. — С. 67–94.

[10] Колчин В. Ф. *Случайные графы*. 2-е издание. Физматлит. Москва. 2004.

[11] Кузюрин Н. Н. Вероятностные приближенные алгоритмы в дискретной оптимизации // Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 2. — 2002. — Т. 9. — № 2. — С. 97–114.

[12] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. *Теория кодов, исправляющих ошибки.* Москва. «Связь». 1979.

[13] Мищенко А. А., Ремесленников В. Н., Трейер А. В. Генерические теории серий конечных абелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — Т. 53. — № 6. — С. 722–734.

[14] Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Генерические теории как метод аппроксимации элементарных теорий // Алгебра и логика. — 2014. — Т. 53. — № 6. — С. 779–789.

[15] Попова С. Н. Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ // Проблемы передачи информации. — 2014. — Т. 50. — № 1. — С. 79–101.

[16] Попова С. Н. Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\mathbb{Z}^n$ // Математический сборник. — 2014. — Т. 207. № 3. С. 153–174.

[17] Райгородский А. М. *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике.* МЦНМО. Москва. 2007.

[18] Райгородский А. М. *Модели случайных графов.* МЦНМО. Москва. 2011.

[19] Райгородский А. М. *Модели интернета.* Интеллект. Долгопрудный. 2013.

[20] Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи математических наук. — 2001. — Т. 56. — № 1. — С. 107–146.

[21] Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. *Вводный курс математической логики.* МГУ. Физматлит. Москва. 1997.

[22] Ширяев А. Н. *Вероятность.* том 1. 4-е издание. МЦНМО. Москва. 2007.

[23] Agarwal P. K., Pach J. *Combinatorial geometry.* John Wiley and Sons Inc. New York. 1995.

[24] Bassalygo L., Cohen G., Zémor G. Codes with forbidden distances // Discrete Mathematics. — 2000. — Vol. 213. — P. 3–11.

[25] Blass A., Exoo G., Harary F. Paley graphs satisfy all first-order adjacency axioms // J. Graph Th. — 1981. — Vol. 5. — no. 4. — P. 435–439.

[26] Blass A., Gurevich Y., Kozen D. A zero-one law for logic with a fixed point operator // Inform. and Control. — 1985. — Vol. 67. — P. 70–90.

[27] Bollobás B. *Random Graphs*. 2nd Edition. Cambridge University Press. 2001.

[28] Bollobás B. Threshold functions for small subgraphs // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1981. — Vol. 90. — P. 197–206.

[29] Bollobás B., Narayanan B. P., Raigorodskii A. M. On the stability of the Erdős–Ko–Rado theorem // J. Comb. Th., Ser. A. — 2016. — Vol. 137. — P. 64–78.

[30] Bollobás B., Wierman J. C. Subgraph Counts and Containment Probabilities of Balanced and Unbalanced Subgraphs in a Large Random Graph // Annals of the New York Academy of Sciences. — 1989. — Vol. 576. — P. 63–70.

[31] Bollobás B., Thomason A. Threshold functions // Combinatorica. — 1987. — Vol. 7. — P. 35–38.

[32] Brass P., Moser W. O. J., Pach J. *Research problems in discrete geometry*. Springer. 2005.

[33] Compton K. J. $0-1$ laws in logic and combinatorics // Proc. NATO Advanced Study Institute on Algorithms and Order (I. Rival, ed.), Reidel, Dordrecht. — 1988. — P. 353–383.

[34] Compton K. J. A logical approach to asymptotic combinatorics. II. Monadic second-order properties // J. Comb. Th., Ser. A. — 1989. — Vol. 50. — no. 1. — P. 110–131.

[35] Courcelle B. The monadic second-order logic of graphs I. Recognizable sets of finite graphs // Inf. Comput. — 1990. — Vol. 85. — no. 1. — P. 12–75.

[36] Dawar A., Kopczyński E. Logical properties of random graphs from small addable classes // preprint. — https://arxiv.org/abs/1707.02081. — 2017.

[37] Diestel R. *Graph Theory*. 5th edition. Springer-Verlag. 2017.

[38] Dorogovtsev S. *Lectures on Complex Networks*. Oxford University Press. 2010.

[39] Ebbinghaus H.-D., Flum J. *Finite model theory*. 2nd Edition. Springer. 1999.

[40] Ehrenfeucht A. An application of games to the completness problem for formalized theories // Warszawa Fund. Math. — 1960. — Vol. 49. — P. 121–149.

[41] Erdős P. Graph theory and probability // Cand. J. Math. — 1959. — Vol. 11. — P. 34–38.

[42] Erdős P., Rényi A. On random graphs I // Publ. Math. Debrecen. — 1959. — Vol. 6. — P. 290–297.

[43] Erdős P., Rényi A. On the evolution of random graphs // Bull. Inst. Int. Statist. Tokyo. — 1961. — Vol. 38. — P. 343–347.

[44] Erdős P., Rényi A. On the evolution of random graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. — 1960. — Vol. 5. — P. 17–61.

[45] Erdős P., Spencer J. *Probabilistic Methods in Combinatorics*. Academic Press Inc. 1974.

[46] Fagin R. Probabilities in finite models // J. Symbolic Logic. — 1976. — Vol. 41. — P. 50–58.

[47] Frankl P., Wilson R. Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. — 1981. — Vol. 1. — P. 357–368.

[48] Gilman R.H., Gurevich Y., Miasnikov A. A geometric zero-one law // J. Symbolic Logic. — 2009. — Vol. 74. — no. 3. — P. 929–938.

[49] Gurevich Y. Chapter *Zero-one laws* // Book*Current trends in theoretical computer science*. — edited by G. Rozenberg and A. Salomaa. World Scientific Series in Computer Science. — 1993. — Vol. 40.

[50] Haber S., Krivelevich M. The logic of random regular graphs // 2010. — J. Comb. — Vol. 1. — no. 3-4. — P. 389–440.

[51] Harary F. *Graph Theory*. Addison–Wesley. 1969.

[52] Haxell P. E., Kohayakawa Y., Łuczak T. Turán's extremal problem in random graphs: forbidding even cycles // J. Comb. Th., Ser. B. — 1995. — Vol. 64. — P. 273–287.

[53] Heinig P., Müller T., Noy M., Taraz A. Logical limit laws for minor-closed classes of graphs // J. Comb. Th., Ser. B. — 2018. — Vol. 130. — P. 158–206.

[54] Holroyd A. E., Levy A., Podder M., Spencer J. Second order logic on random rooted trees // preprint. — https://arxiv.org/pdf/1706.06192.pdf. — 2017.

[55] Immerman N. *Descriptive Complexity*. Springer. Berlin. 1999.

[56] Immerman N. Languages that capture complexity classes // SIAM Journal on Computing. — 1987. — Vol. 16. — no. 4. — P. 760–778.

[57] Janson S., Łuczak T., Ruciński A. *Random Graphs*. New York. Wiley. 2000.

[58] Kahn J., Kalai G. A counterexample to Borsuk's conjecture // Bulletin (new series) of the AMS. — 1993. — Vol. 29. — no. 1. — P. 60–62.

[59] Kaufmann M. Counterexample to the 0–1 law for existential monadic second-order logic // Technical Report, CLI Internal Note 32, Computational Logic Inc. — 1987.

[60] Kaufmann M., Shelah S. On random models of finite power and monadic logic // Discrete Mathematics. — 1985. — Vol. 54. — no. 3. — P. 285–293.

[61] Klee V., Wagon S. *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*. Math. Association of America. 1991.

[62] Kleinberg R. D., Kleinberg J. M. Isomorphism and embedding problems for infinite limits of scale-free graphs // Proc. Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (SODA '05). — 2005. — P. 277–286.

[63] Kolaitis P. G., Prömel H. J., Rothschild B. L. K_{l+1}-free graphs: asymptotic structure and a $0-1$ law // Trans. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 303. — no. 2. — P. 637-671.

[64] Kolaitis P. G., Vardi M. Y. Infinitary logics and $0-1$ laws // Inform. and Computation. — 1992. — Vol. 98. — P. 258–294.

[65] Kolaitis P. G., Vardi M. Y. The decision problem for the probabilities of higher-order properties // In Proceedings of the nineteenth annual ACM symposium on Theory of computing. — 1987. — P. 425–435.

[66] Kolaitis P. G., Vardi M. Y. 0-1 laws and decision problems for fragments of second-order logic // Information and Computation. — 1990. — Vol. 87. — no. 1-2. — P. 302–338.

[67] Koponen V. A Limit Law of Almost l-partite Graphs // J. Symb. Logic. — 2013. — Vol. 78. — no. 3. — P. 911–936.

[68] Koponen V. Asymptotic probabilities of extension properties and random l-colourable structures // Annals of Pure and Applied Logic. — 2012. — Vol. 163. — P. 391–438.

[69] Koponen V. Random graphs with bounded maximum degree: asymptotic structure and a logical limit law // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 2012. — Vol. 14. — no. 2. — P. 229–254.

[70] Kreuter B. Threshold functions for asymmetric Ramsey properties with repect to vertex colorings // Random Structures and Algorithms. — 1996. — Vol. 9. — P. 335–348.

[71] Kupavskii A.B. On random subgraphs of Kneser and Schrijver graphs // J. Comb. Th., Ser. A. — 2016. — Vol. 141. — P. 8–15.

[72] Le Bars J.-M. Fragments of existential second-order logic without 0-1 laws // Logic in Computer Science. — 1998. — P. 525–536.

[73] Le Bars J.-M. Counterexamples of the 0-1 law for fragments of existential second-order logic: an overview // Bulletin of Symbolic Logic. — 2000. — Vol. 6. — no. 0-1. — P. 67–82.

[74] Le Bars J.-M. The 0-1 law fails for monadic existential second-order logic on undirected graphs // Information processing letters. — 2001. — Vol. 77. — no. 1. — P. 43–48.

[75] Lewis H. R. Complexity results for classes of quantificational formulas // Journal of Computer and System Sciences. — 1980. — Vol. 21. — no. 3. — P. 317–353.

[76] Libkin L. *Elements of finite model theory*. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2004.

[77] Lovász L. Large Networks and Graph Limits // AMS Colloquium Publications. — 2012.

[78] Łuczak T., Shelah S. Convergence in homogeneous random graphs // Random Structures and Algorithms. — 1995. — Vol. 6. — P. 371–392.

[79] Łuczak T., Spencer J.H. When does the zero-one law hold? // J. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 4. — P. 451–468.

[80] Lynch J. An extension of 0-1 laws // Random Structures and Algorithms. — 1994. — Vol. 5. — P. 155–172.

[81] Lynch J. Infinitary logics and very sparse random graphs // Proc. 8th IEEE Symp. on Logic in Computer Science. IEEE Computer Society Press. Los Alamitos. — 1993. — P. 191–198.

[82] Lynch J. Convergence law for random graphs with specific degree sequence // ACM Trans. Comput. Log. — 2005. — Vol. 6. — no. 4. — P. 727–748.

[83] Lynch J. Convergence laws for random graphs // Logic Colloquium '95: Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association of Symbolic Logic. Haifa. 1995. — Springer. — 1998. — P. 115–133

[84] Lynch J. Probabilities of first-order sentences about unary functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 287. — P. 543–568.

[85] Lynch J. Properties of sentences about very sparse random graphs // Random Structures and Algorithms. — 1992. — Vol. 3. — P. 33–54.

[86] Lynch J., Tyszkiewicz J. The infinitary logic of sparse random graphs // Logic in Computer Science. — 1995. — P. 46–53.

[87] McArthur M. The asymptotic behavior of $L^k_{\infty,\omega}$ on sparse random graphs // Logic and Random Structures. — 1997. — Vol. 33. — P. 53–63.

[88] McColm G. L. First order zero–one laws for random graphs on the circle // Random Structures & Algorithms. — 1999. — Vol. 14. — no. 3. — P. 239–266.

[89] McColm G. L. MSO zero-one laws on random labelled acyclic graphs // Discrete Mathematics. — 2002. — Vol. 254. — P. 331–347.

[90] Mubayi D., Terry C. Discrete metric spaces: structure, enumeration, and 0-1 laws // J. Symb. Logic, accepted (33 pages), preprint: arXiv:1502.01212. — 2015.

[91] Müller T., Noy M. The first order convergence law fails for random perfect graphs // preprint. — https://arxiv.org/pdf/1711.10975.pdf. — 2017.

[92] Newman M. *Networks: An Introduction.* Oxford University Press. 2010.

[93] Nešetřil J., Poljak S. On the complexity of the subgraph problem // Commentat. Math. Univ. Carol. — 1985. — Vol. 26. — P. 415–419.

[94] Olariu S. Paw-free graphs // Inf. Process. Lett. — 1988. — Vol. 28. — P. 53–54.

[95] Pacholski L., Szwast W. // A counterexample to the 0-1 law for the class of existential second-order minimal Gödel sentences with equality. — Information and Computation. — 1993. — Vol. 107. — no. 1. — P. 91–103.

[96] Penrose M. *Random Geometric Graphs.* Oxford University Press. 2003.

[97] Pikhurko O., Spencer J. H., Verbitsky O. Succinct definitions in the first order theory of graphs // Annals of Pure and Applied Logic. — 2006. — Vol. 139. — P. 74–109.

[98] Podder M., Spencer J. Galton-Watson Probability Contraction // Electronic Communications in Probability. — 2017. — Vol. 22. — no. 20. — 16 pp.

[99] Rado R. Universal graphs and universal functions // Acta Arith. — 1964. — Vol 9. — P. 331–340.

[100] Raigorodskii A. M. Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics. — 2014. — Vol. 625. — P. 93–109.

[101] Raigorodskii A. M. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed. — Springer. — 2013. — P. 429–460.

[102] Rödl V. On a packing and covering problem // European J. Combin. — 1985. — Vol. 6. — P. 69–78.

[103] Ruciński A., Vince A. Balanced graphs and the problem of subgraphs of a random graph // Congressus Numerantim. — 1985. — Vol. 49. — P. 181–190.

[104] Ruciński A., Vince A. Strongly balanced graphs and random graphs // J. Graph Th. — 1986. — Vol. 10. — P. 251–264.

[105] Shelah S., Spencer J.H. Random sparse unary predicates // Random Structures and Algorithms. — 1994. — Vol. 5. — P. 375–394.

[106] Shelah S., Spencer J. H. Zero-one laws for sparse random graphs // J. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 1. — P. 97–115.

[107] Shwentick T. On Winning Ehrenfeucht Games and Monadic NP // Ann. Pure Appl. Logic. — 1996. — Vol. 79. — no. 1. — P. 61–92.

[108] Soifer A. *The Mathematical Coloring Book*. Springer. 2009.

[109] Spencer J. H. Countable sparse random graphs // Random Structures and Algorithms. — 1990. — no. 1. — P. 205–214.

[110] Spencer J. H. Counting extensions // J. Comb. Th., Ser. A. — 1990. — Vol. 55. — P. 247–255.

[111] Spencer J. H. Infinite spectra in the first order theory of graphs // Combinatorica. — 1990. — Vol. 10. — no. 1. — P. 95–102.

[112] Spencer J. H. *The Strange Logic of Random Graphs*. Number 22 in Algorithms and Combinatorics. Springer-Verlag. Berlin. 2001.

[113] Spencer J. H. Threshold functions for extension statements // J. of Comb. Th., Ser A. — 1990. — Vol. 53. — P. 286–305.

[114] Spencer J. H. Threshold spectra via the Ehrenfeucht game // Discrete Applied Math. — 1991. — Vol. 30. — P. 235–252.

[115] Spencer J. H. Zero-one laws with variable probability // J. Symbolic Logic. — 1993. — Vol. 58. — P. 1–14.

[116] Spencer J. H., Tardos G. Ups and downs of first order sentences on random graphs // Combinatorica. — 2000. — Vol. 20. — P. 263–280.

[117] Spencer J. H., Thoma L. On the limit values of probabilities for the first order properties of graphs // Contemporary Trends in Discrete Mathematics, DIMACS Series, Amer. Math. Soc., R. Graham et. al., eds. — 1999. — Vol. 49 — P. 317–336.

[118] Székely L. A. Erdős on unit distances and the Szemerédi – Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer. — 2002. — Vol. 11. — P. 649–666.

[119] Szele T. Kombinatorikai vizsgálatok az irányitott teljes gráffal kapcsolatban // Mat. Fiz. Lapok. — 1943. — Vol. 50. — P. 223–256.

[120] Telcs A., Wormald N. Branching and tree indexed random walks on fractals // J. Appl. Probab. — 1999. — Vol. 36. — P. 999–1011.

[121] Tyszkiewicz J. On Asymptotic Probabilities of Monadic Second Order Properties // Lecture Notes in Computer Science. — 1993. — Vol. 702. — P. 425–439.

[122] Tyszkiewicz J. Infinitary queries and their asymptotic probabilities. I. Properties definable in transitive closure logic // E. Börger et. al., eds., Proc. Computer Science Logic'91, Lecture Notes in Computer Science. — 1991. — Vol. 626. — P. 396–410.

[123] Tyszkiewicz J. Infinitary queries and their asymptotic probabilities. II. Properties definable in least fixed point logic // Random Structures & Algorithms. — 1994. — Vol. 5. — no. 1. — P. 215–234.

[124] Winkler P. Random structures and zero-one laws // Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic, N.W. Sauer, R.E. Woodrow and B. Sands, eds., NATO Advanced Science Institute Series, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. — 1993. — P. 399–420.

[125] Жуковский М. Е., Матушкин А. Д. Спектры формул первого порядка с малой кванторной глубиной и малым числом перемен кванторов // Доклады Академии Наук. — 2017. — Т. 475. — № 2. — С. 127–129.

[126] Жуковский М. Е., Матушкин А. Д. Универсальный k–закон нуля или единицы // Математические заметки. — 2016. — Т. 99. — № 4. — С. 511–525.

[127] Жуковский М. Е., Медведева А. Е. О наибольших критических точках в k-законе нуля или единицы // Математические заметки. — 2016. — Т. 99. — № 3. — С. 342–349.

[128] Жуковский М. Е., Островский Л. Б. Свойства первого порядка и монадические свойства сильно разреженных случайных графов // Доклады Академии Наук. — 2016. — Т. 470. — № 5. — С. 499–501.

[129] Жуковский М. Е., Островский Л. Б. Свойства первого порядка ограниченной кванторной глубины сильно разреженных случайных графов // Изв. РАН. Сер. матем. — 2017. — Т. 81. — № 6. — С. 100–113.

[130] Жуковский М. Е., Райгородский А. М. Случайные графы: модели и предельные характеристики // Успехи математических наук. — 2015. — Т. 70. — № 1. — С. 35–88.

[131] Жуковский М. Е., Спенсер Дж. О спектрах в языке первого порядка для случайного графа Эрдеша–Реньи // Доклады Академии Наук. — 2015. — Т. 463. — № 6. — С. 642–645.

[132] Жуковский М. Е. Законы нуля или единицы для формул первого порядка с ограниченной кванторной глубиной // Доклады Академии Наук. — 2011. — Т. 436. — № 1. — С. 14–18.

[133] Жуковский М. Е. О 4-законе нуля или единицы для случайного графа Эрдеша–Реньи // Математические заметки. — 2015. — Т. 97. — № 2. — С. 203–216.

[134] Жуковский М. Е. О вероятности вхождения копии фиксированного графа в случайный дистанционный граф // Математические заметки. — 2012. — Т. 92. — № 6. — С. 844–855.

[135] Жуковский М. Е. О наибольшей критической точке в k-законе нуля или единицы // Математический сборник. — 2015. — Т. 206. — № 4. — С. 13–34.

[136] Жуковский М. Е. О последовательности случайных дистанционных графов, подчиняющейся закону нуля или единицы // Проблемы передачи информации. — 2011. — Т. 47. — № 3. — С. 39–57.

[137] Жуковский М. Е. О предельных точках спектров свойств первого порядка случайного графа // Доклады Академии Наук. — 2015. — Т. 465. — № 4. — С. 403–406.

[138] Жуковский М. Е. Ослабленный закон нуля или единицы для последовательностей случайных дистанционных графов // Математический сборник. — 2012. — Т. 203. — № 7. — С. 95–128.

[139] Жуковский М. Е. Ослабленные законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов // Теория вероятностей и ее применения. — 2010. — Т. 55. — С. 344–350.

[140] Жуковский М. Е. Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов // Доклады Академии Наук. — 2010. — Т. 430. — № 3. — С. 314–317.

[141] Жуковский М. Е. Ослабленный закон «нуля или единицы» для случайных дистанционных графов // Вестник РУДН. — 2010. — Т. 2. — № 1. — С. 11–25.

[142] Жуковский М. Е. Оценка количества максимальных расширений в случайном графе // Дискретная математика. — 2012. — Т. 24. — № 1. — С. 79–107.

[143] Жуковский М. Е. Перемены кванторов в формулах первого порядка с бесконечным спектром // Проблемы передачи информации. — 2017. — Т. 53. — № 4. — С. 93–106.

[144] Жуковский М. Е. Расширение k-закона нуля или единицы // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 454. — № 1. — С. 23–26.

[145] Жуковский М. Е. Спектры формул первого порядка малой кванторной глубины // Успехи математических наук. — 2015. — Т. 70. — № 6 (426). — С. 209–210.

[146] Matushkin A. D., Zhukovskii M. E. First order sentences about random graphs: small number of alternations // Discrete Applied Mathematics. — 2018. — Vol. 236. — P. 329–346.

[147] Ostrovsky L. B., Zhukovskii M. E. Monadic second-order properties of very sparse random graphs // Annals of pure and applied logic. — 2017. — Vol. 168. — no.11. — P. 2087–2101.

[148] Spencer J. H., Zhukovskii M. E. Bounded Quantifier Depth Spectra for Random Graphs // Discrete Mathematics. — 2016. — Vol. 339. — no. 6. — P. 1651–1664.

[149] Verbitsky O., Zhukovskii M. On the First-Order Complexity of Induced Subgraph Isomorphism // Leibniz International Proceedings in Informatics, 26th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic. — 2017. — Vol. 40. — P. 1–16.

[150] Verbitsky O., Zhukovskii M. The Descriptive Complexity of Subgraph Isomorphism Without Numerics // Lecture Notes in Computer Science, International Computer Science Symposium in Russia. — 2017. — P. 308–322.

[151] Zhukovskii M.E. Extension of the Zero-one k-law // Electronic Notes in Discrete Mathematics. — 2013. — Vol. 43. — P. 263–269.

[152] Zhukovskii M.E. On infinite spectra of first order properties of random graphs // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2016. — Vol. 6. — no. 4. — P. 73–102.

[153] Zhukovskii M. E. On the convergence of probabilities of the random graph properties expressed by first-order formulae with a bounded quantifier depth // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2014. — Vol. 4. — no. 2. — P. 119–155.

[154] Zhukovskii M. E. On the zero-one k-law extensions // European Journal of Combinatorics. — 2017. — Vol. 60. — P. 66-81.

[155] Zhukovskii M.E. Zero-one k-law // Discrete Mathematics. — 2012. — Vol. 312. — P. 1670–1688.