На правах рукописи

Кокорев Денис Сергеевич

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ И ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ВПИСЫВАНИЯ МНОГОГРАННЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Специальность 05.13.18 –

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Москва – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН)

Научный руководитель:

Афанасьев Александр Петрович доктор физико-математических наук, профессор, заведующий Центром распределенных вычислений ИППИ РАН

Официальные оппоненты:

Лотов Александр Владимирович доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Иванов Сергей Владимирович кандидат технических наук, доцент Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» (ИТМО)

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской Академии Наук

Защита состоится «15» апреля 2019 г. в 12 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.077.05 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, расположенном по адресу: 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российмкой академии наук (ИППИ РАН) и на сайте http://iitp.ru.

Автореферат разослан «___» __________ 2019 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета,

д. ф.-м. н. Цитович И.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Размещение внутри ограниченного объема одного или нескольких предметов типично при решении многих физических и технических проблем. Полностью аналогична ситуация, когда из какого материала произвольной формы необходимо вырезать один или несколько предметов, заданной формы, обладающих какими-то свойствами. Как правило, такие задачи называют задачами упаковки и раскроя. Возникающим задачам посвящено много исследований, разработан математический аппарат, позволяющий формально описать эти задачи, построены математические модели исследуемых объектов. В диссертационной работе рассматривается случай, когда ограниченный объем описывается невыпуклым многогранником, и в этот многогранник нужно вписать выпуклое тело, заданной формы. Эту задачу можно обобщить до размещения нескольких выпуклых многогранников внутри невыпуклого многогранника. Кроме своей теоретической значимости данная задача имеет широкую область применения: ювелирная промышленность; обработка дорогостоящих материалов; приложения, решающие задачи упаковки и раскроя в трехмерном пространстве; компьютерное моделирование взаимодействия трехмерных объектов; компьютерные игры. Важным фактором является то, что большая часть перечисленных применений требует решения поставленной задачи за ограниченное время.

Наибольшее количество результатов в задачах упаковки трехмерного пространства относятся к случаям, когда одним из объектов является сфера. Например, гипотеза Кеплера, контактное число шаров, задача Таммеса, вписанная и описанная сфера около простейших объектов. Существуют доказанные результаты для простейших случаев взаиморасположения многогранников. Например: Теорема Г. Хадвигера про контактное число плоских, выпуклых фигур; решения задачи Кеплера о максимальной копии правильного многогранника внутри другого правильного многогранника, полученные Холлардом Т. Крофтом и М. Фиршингом. В случае же взаиморасположения произвольных многогранников задача оказывается очень сложной, и не существует теоретических подходов, позволяющих подступиться к этой задаче в общем виде. Это обуславливает актуальность исследований в области взаимодействия трехмерных многогранников широкого класса.

Так как не существует теоретического полиномиального алгоритма для решения этой геометрической задачи, эффективным методом является возможность свести ее к задаче нелинейного программирования и решить с помощью численных методов. Для этого необходимо разработать и исследовать различные математические модели выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник, и выбрать модель, которая может быть наиболее эффективно использована для поиска такого многогранника с помощью численных методов. Подобные исследования очень слабо освещены в литературе. Таким образом, проблема моделирования вписанных многогранных трехмерных объектов является актуальной.

Предметом исследования является задача вписывания трехмерных многогранников и алгоритмы, решающие эту задачу.

Целью работы является создание эффективной математической модели выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник, и разработка алгоритмов и комплекса программ для численного решения прикладных задач поиска многогранника с заданными геометрическими свойствами, вписанного в другой многогранник, на основе созданной модели.

Задачи исследования:

- Построить модифицированные модели выпуклого многогранника, с целью их применения для создания эффективных алгоритмов вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый многогранник, и сравнить различные математические модели выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник.
- Разработать алгоритм вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый на основе решения задачи нелинейного программирования.
- Разработать и исследовать комплекс программ, предназначенный для численного решения прикладных задач вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый многогранник.

Научная новизна заключается в разработке эффективной математической модели выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник, представляющей многогранники в виде набора вершин, граней и плоскостей граней одновременно. Обобщено определение вписывания многогранника в многогранник. Для данной модели разработан алгоритм вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый на основе решения задачи нелинейного программирования.

Практическая ценность и внедрение результатов работы. Разработанные методы моделирования и библиотека для численного решения задачи вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый показали свою эффективность и могут быть применены для решения широкого круга прикладных задач. С их помощью удалось создать программу для поиска оптимальной круглой огранки в алмазе, превосходящую по качеству все существующие подобные коммерческие продукты. В программный комплекс включены несколько уникальных модификаций программы поиска оптимальной огранки в алмазе, имеющих практическую ценность в огранке бриллиантов и не имеющих промышленных аналогов.

Программный комплекс вошел под названием «Automatic Asymmetrical Smart Recut» в коммерческий продукт «HPOxygen» кампании ООО «Октонус Техно» и используется на ограночных фабриках в Индии, России, Бельгии и Китае.

Методы исследования. В основу решения геометрической задачи вписывания многогранников положена нелинейная оптимизация. При решении вычислительных задач использовались численные методы нелинейной оптимизации. При разработке программного обеспечения использовались языки C++, AMPL. Система оценки производительности основной программы написана на языке Python.

Достоверность результатов исследования обусловлена следующим:

Математическая модель выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник, построена на основе обобщения известных подходов описания многогранников с использованием либо вершин, либо набора плоскостей.

Решение задачи вписывания многогранников основано на использовании известных алгоритмов решения задач нелинейного программирования, программная реализация которых находится в открытом доступе.

Выводы об эффективности алгоритмов получены путем проведения многочисленных воспроизводимых вычислительных экспериментов с применением современных методов и технологий и согласуются с результатами, полученными ранее по этой тематике другими авторами.

Положения, выносимые на защиту:

- Разработанная математическая модель выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник, представляющая многогранники в виде набора вершин, граней и плоскостей граней одновременно, позволяет свести задачу вписывания к задаче нелинейного программирования, обеспечив тем самым существенное ускорение процедуры вписывания.
- Разработанный для данной модели алгоритм позволяет решить задачу вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый на основе решения задачи нелинейного программирования.

- Разработанная библиотека программ, реализующая алгоритм вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый, состоящая из модулей передачи и хранения данных, модуля составления задачи нелинейного программирования, и интерфейса для работы с солвером Ipopt, позволяет решать исходную задачу за контролируемое время.
- Созданный на базе разработанной библиотеки, программный комплекс поиска оптимального круглого бриллианта в алмазе, позволяет находить решение на персональном компьютере за время порядка минуты, что удовлетворяет техническим требованиям производства. Предложенные модель, алгоритм и программный комплекс позволяют увеличить массу бриллианта в среднем на 3,8% по сравнению с другими алгоритмами, используемыми в индустрии.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на: 55 и 56 научных конференциях МФТИ (Долгопрудный, 2012, 2013); на VI сессии научной школы-практикума молодых ученых и специалистов «Технологии высокопроизводительных вычислений и компьютерного моделирования: технологии eScience»(Санкт-Петербург, 2013); на 38-ой конференции школы ИППИ РАН «Информационные технологии и системы» (Нижний Новгород, 2014); на «Национальном Суперкомпьютерном Форуме» (Переславль-Залесский, 2014, 2015); на 7 международной конференции «Распределённые вычисления и Грид-технологии в науке и образовании» (Дубна, 2016); на 5th International Young Scientists Conference in HPC and Simulation (Краков, 2016).

Личный вклад автора. Все результаты диссертации, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно. Постановка задач и обсуждение результатов проводилось совместно с научным руководителем.

В опубликованных работах [К5] и [К8], написанных в соавторстве, соискателю принадлежат основные результаты, относящиеся к тематике диссертационной работы.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ, три из них [К2, К7, К10] в изданиях из списка ВАК и две [К8, К9] в изданиях, индексируемых Scopus.

Структура и объем диссертации. Общий объем диссертации составляет 137 страниц, включая 15 рисунков, 4 таблицы, 1 приложение. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии (75 наименований) и акта о внедрении результатов диссертационной работы.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проведенных в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель и ставятся задачи работы, формулируются научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приведен обзор существующих исследований задач упаковки и раскроя в трехмерном пространстве. Глава состоит из двух разделов и выводов к главе. В разделе 1.1. описаны и проанализированы наиболее значимые достижения науки в области упаковки пространства. Пункт 1.1.1 посвящен 18-ой проблеме Гильберта и достижениям, считающимися ее решениями. Пункт 1.1.2 затрагивает гипотезу Кеплера, историю ее появления и историю развития ее доказательства. Также в пункте упоминаются новейшие результаты Вязовской М.С., которая решила задачу об упаковке шаров в восьмимерном и 24-мерном пространствах. Пункт 1.1.3 касается контактного числа шаров. Контактное число шаров размерности n – это максимальное количество шаров единичного радиуса, которые могут одновременно касаться одного такого же шара в n-мерном евклидовом пространстве, при этом не пересекающиеся друг с другом. В пункте описана история доказательства для трехмерного и четырехмерного пространства, и приведена таблица доказанных верхних и нижних границ для других размерностей. В пункте 1.1.4. кратко рассказано о сферических кодах – современной технологии, используемой при передаче и хранении данных. Сферические коды являются современным применение задачи Таммеса, которой посвящен пункт 1.1.5. В этом пункте описана история появления этой задачи и ее современное состояние с учетом достижений последних лет. В пункте 1.1.6. приведен обзор задач упаковки и раскроя. Упрощенно задачу раскроя можно сформулировать так: разместить определенное количество заготовок определенной формы в кусках материала так, чтобы расход материала был минимальный. А задачу упаковки так: разместить определенное количество грузов определенного размера по набору контейнеров. Если их обобщить, то можно получить следующую формулировку: установите соответствие между двумя группами объектов так, чтобы какие-то свойства этого соответствия были оптимальными. Вписывание многогранника является частным случаем задачи раскроя для одной фигуры. Задачи раскроя и упаковки касаются очень широкого спектра задач, у каждой из которых есть свои нюансы и прикладное значение.

В разделе 1.2. рассмотрены более близкие к диссертации научные результаты, касающиеся взаиморасположения именно многогранников. Пункт 1.2.1. посвящен проблеме Кеплера и Крофта. Эта проблема касается вписывания в правильный многогранник раздутых копий других правильных многогранников. Самое раннее упоминание этой проблемы принадлежит Кеплеру в 1619 году. Он привел описание наибольшего правильного тетраэдра в кубе и наибольшего куба в додекаэдре, но не делал попытки доказать максимальность. Наибольший вклад в решение этой проблемы внес Крофт в 1980. Он привел решение для 14 из 20 случаев. Решения для оставшихся случаев были предложены в статье 2015 года. В этой статье автор сначала получает численное решение, а затем восстанавливает по численному решению точное алгебраическое решение. Также в этом пункте рассмотрены существующие результаты по задаче вписывания правильных многогранников в других размерностях. Пункт 1.2.2. описывает существующие результаты в задачах о контактных числах многогранника. В пункте 1.2.3. приведен обзор достижений в задачах, связанных с многогранниками, вписанными и описанными вокруг выпуклых компактов. Пункт 1.2.4. посвящён алгоритмам, решающим задачу размещения одного многогранника в другой с ограничением, что вписываемый многогранник не может менять свою ориентацию в пространстве.

В разделе 1.3 представлены выводы к главе.

Вторая глава посвящена задаче вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый многогранник и ее решению. В начале главы строится математическая модель выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник. На основе анализа различных определений вписывания многогранников дается типовое определение вписывания многогранника в многогранник:

Определение 3.1. *Вписыванием* многогранника A_0 в многогранник B называют нахождение многогранника A, содержащегося в многограннике B и полученного из многогранника A_0 с помощью преобразования, состоящего из трансляции, поворота и гомотетии, и обладающего максимальным коэффициентом гомотетии среди всех возможных таких преобразований.

Для целей диссертации это определение обобщается:

Определение 3.2. *Вписыванием* многогранника A_0 в многогранник B будем называть нахождение многогранника A, содержащегося в многограннике B, комбинаторно эквивалентного многограннику A_0, и обладающего максимальным заданным функционалом.

На основе Определения 3.2. формулируется исследуемая геометрическая задача вписывания. Даны два многогранника: внешний многогранник и начальное положение внутреннего многогранника с заданными геометрическими свойствами. Внутренний многогранник является выпуклым. Внешний многогранник может быть невыпуклым. Конечные форма и расположение внутреннего многогранника будем называть *решением задачи вписывания*. Если внутри внешнего многогранника содержатся пустоты, то они заданы набором многогранников, которые решение не должно пересекать. Решение должно:

1. Оставаться внутри внешнего многогранника.
2. Получаться из начального расположения деформацией, сохраняющей комбинаторную структуру.
3. Удовлетворять заданным геометрическим свойствам.
4. Иметь максимальный заданный функционал, например, объем.

Формализуем эту задачу в виде **математической модели** выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник, заданной уравнениями. Для этого введем следующие обозначения. Параметры граней внутреннего многогранника обозначим y_{ap}, y_{bp}, y_{cp}, y_{dp}, где p – номер грани внутреннего многогранника. Параметры граней внешнего многогранника будем обозначать A_r, B_r, C_r, D_r, где r - номер грани внешнего многогранника. Параметры граней заданы в виде параметров канонического уравнения плоскостей, в которых лежат грани. Обозначим через x_{ji} координаты вершин внутреннего многогранника, где j – номер вершины, i – ось координат.

Есть несколько основных групп уравнений для данной задачи. Первая группа - ограничения на сохранение комбинаторной структуры внутреннего многогранника:

$$y_{ap}x_{j1} + y_{bp}x_{j2} + y_{cp}x_{j3} + y_{dp} = 0,$$

где p – номер грани внутреннего многогранника, j – номер вершины, индексы $1,2,3$ соответствуют трем осям координат. Рассмотренная группа ограничений записывается для всех пар вершина-грань, для которых верно, что вершина лежит на грани. Перечень всех таких пар получается из комбинаторной структуры начального положения внутреннего многогранника.

Вторая группа - ограничения на выпуклость искомого внутреннего многогранника. Необходимо записать для всех пар вершина-грань внутреннего многогранника, для которых вершина не принадлежит грани:

$$y_{ap}x_{j1} + y_{bp}x_{j2} + y_{cp}x_{j3} + y_{dp} \leq 0.$$

Уравнения имеют такой вид при условии, что точка (0,0,0) лежит внутри внутреннего многогранника, а все нормали граней повернуты наружу. Последняя группа обязательных условий связана с тем, что внутренний многогранник должен остаться вписанным во внешний многогранник. Если многогранник выпуклый, эти условия записываются в следующем виде:

$$A_r x_{j1} + B_r x_{j2} + C_r x_{j3} + D_r \leq 0,$$

где r - номер грани внешнего многогранника, а j – номер вершины внутреннего многогранника. Для случая, когда внешний многогранник является невыпуклым, для каждой грани невыпуклой компоненты многогранника необходимо создать свою разделяющую плоскость, которая отделяет эту грань от внутреннего многогранника. Разделяющая плоскость задается свободными переменными $u_{p1},$ $u_{p2},$ $u_{p3},$ $u_{p4},$ где p – номер грани невыпуклой компоненты внешнего многогранника. На эту разделяющую плоскость накладываются ограничения, что все вершины соответствующей грани невыпуклой компоненты, лежат по одну сторону от нее:

$$u_{p1}X_{j1} + u_{p2}X_{j2} + u_{p3}X_{j3} + u_{p4} \geq 0,$$

где X_{ji} - координаты вершин внешнего многогранника, j – номер вершины, i – ось координат. И все вершины внутреннего многогранника лежат по другую сторону от нее:

$$u_{p1}x_{j1} + u_{p2}x_{j2} + u_{p3}x_{j3} + u_{p4} \leq 0.$$

Существует исключительная ситуация. Если грань невыпуклой компоненты является плоским невыпуклым многоугольником, то для ее отделения нельзя использовать одну разделяющую плоскость. Разделяющая плоскость по сути отделяет не набор точек, а их выпуклую оболочку. В этом случае необходимо разбить невыпуклую грань на выпуклые многоугольники и для каждого из них использовать свою отделяющую плоскость. Доказано следующие утверждение и следствие:

Утверждение (о существовании разбиения многоугольника с разрезами): У любого плоского многоугольника с разрезами P существует разбиение на не больше чем ($2*n + 1$) выпуклый многоугольник, где n – количество вершин, угол многоугольника в которых больше 180 градусов.

Следствие 1. У любого плоского многоугольника с разрезами P всегда существует триангуляция.

Помимо перечисленных ограничений нужно также описать все необходимые геометрические ограничения на форму внутреннего многогранника.

В пункте 2.1.2. предложена альтернативная модель выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник. Рассмотрены ее преимущества и недостатки. Она оказывается менее эффективной при решении задачи вписывания численными методами.

Таким образом, в разделе 2.1. была сформулирована **математическая модель** выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник:

$$y_{ap}x_{j1} + y_{bp}x_{j2} + y_{cp}x_{j3} + y_{dp} = 0,$$

$$y_{ap}x_{j1} + y_{bp}x_{j2} + y_{cp}x_{j3} + y_{dp} \leq 0,$$

$$A_r x_{j1} + B_r x_{j2} + C_r x_{j3} + D_r \leq 0,$$

$$u_{p1}x_{j1} + u_{p2}x_{j2} + u_{p3}x_{j3} + u_{p4} \leq 0,$$

$u_{p1}X_{j1} + u_{p2}X_{j2} + u_{p3}X_{j3} + u_{p4} \geq 0.$

На основе предложенной модели можно составить задачу нелинейного программирования, целевой функцией которой является объем, этому посвящен раздел 2.2. Решив эту задачу нелинейного программирования, мы получим решение задачи вписывания. Переменными задачи будут являться координаты вершин и параметры граней вписываемого многогранника. В то время как, координаты вершин и параметры граней внешнего многогранника являются константами. Ограничениями в задаче выступают описанные в модели уравнения. В пункте 2.2.1. описаны улучшения модели вписывания, чтобы задача нелинейного программирования на ее основе быстрее решалась с помощью численных методов. Желательно, чтобы начальные данные максимально удовлетворяли заданным ограничениям на решение. Необходимо также по возможности минимизировать количество ограничений, задать как можно более узкие допустимые границы на переменные НП-задачи и сократить неопределенность в задаче. Численный метод будет работать дольше, если одно и тоже геометрическое решение может быть получено на разных наборах переменных. Наиболее универсальным советом является добавить ограничения на единичную длину нормали для граней внутреннего многогранника и для разделяющих плоскостей:

$u_{p1}^2 + u_{p2}^2 + u_{p3}^2 = 1,$

$y_{ap}^2 + y_{bp}^2 + y_{cp}^2 = 1.$

В пункте 2.2.2. предложен алгоритм для поиска хорошей стартовой точки с фиксированной формой. В пункте 2.2.3. приведены данные по тестированию производительности различных солверов при решении задачи вписывания выпуклого многогранника в невыпуклых. Лучшее время работы показывает бесплатный солвер Ipopt - открытый программный пакет для решения задач нелинейного программирования большой размерности. Этот солвер предназначен для поиска локального оптимума в задаче нелинейного программирования методом внутренней точки. Хорошее время работы демонстрируют также платные солверы MINOS и SNOPT. Для дальнейших исследований был выбран солвер IPOPT. В своей работе Ipopt использует различные библиотеки для решения систем линейных уравнений и BLAS'ы (библиотеки базовых операций линейной алгебры). На раннем этапе развития алгоритма были проведены эксперименты по запуску задач вписывания многогранников без геометрических ограничений на разных сборках Ipopt, включающих в себя разные комбинации библиотек. Лучше всего себя показали варианты, использующие платную библиотеку MA57 и OPENBLAS.

В разделе 2.3. описан **алгоритм** вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый. Он состоит из двух основных этапов: 1) сведение геометрической задачи вписывания к задаче нелинейного программирования, 2) решение задачи нелинейного программирования с помощью выбранного солвера Ipopt. Алгоритм был реализован в клиент-серверном виде в исследовательских целях и локальном виде в коммерческих целях, эти реализации описаны в разделах 2.3.1 и 2.3.2.

В Клиент-серверном приложении задача нелинейного программирования формулируется на языке программирования высокого уровня для описания и решения сложных задач оптимизации и теории расписаний AMPL, после чего она может быть отправлена на удаленный сервер с установленной поддержкой Ipopt'а. Плюсом клиент-серверного подхода является то, что можно одновременно обрабатывать сколько угодно задач при наличии соответствующих ресурсов. Кроме того, лицензия на коммерческое использование AMPL и платных библиотек Ipopt на единый вычислительный сервер выйдет дешевле, чем лицензии на большое количество локальных приложений. Локальное приложение или другими словами коробочная версия программы, которая устанавливается на персональный компьютер, нужна, потому что не всегда есть возможность взаимодействовать с удаленным сервером. AMPL является платным и дорогостоящим для коммерческого использования в локальных приложениях, поэтому был разработан и реализован на языке C++ интерфейс для работы с солвером Ipopt напрямую, без использования AMPL. Были написаны необходимые функции обратного вызова для узкого множества функций ограничений – многочленов третьего порядка; синуса и косинуса.

Схема работы локального приложения представлена на рисунке:

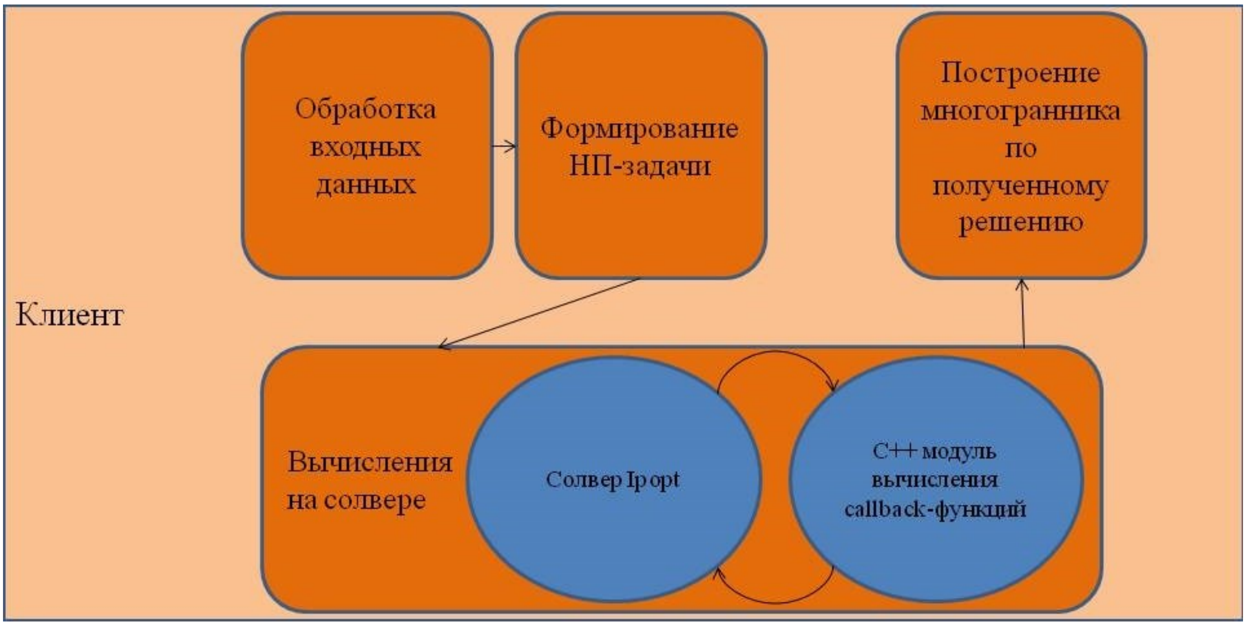

Рис. Схема локального приложения

Входными данными **алгоритма** являются начальное расположение внутреннего многогранника, внешний многогранник и включения - внутренние пустоты внешнего многогранника. Первый этап алгоритма заключается в преобразовании входных данных, которые могут иметь разные форматы, в необходимый для дальнейшего вычисления формат. На втором этапе исходная геометрическая задача формулируется в терминах нелинейного программирования по модели с двойным представлением многогранника. После чего на третьем этапе нелинейный солвер решает поставленную НП-задачу, обращаясь на каждой итерации к функциям обратного вызова. После завершения работы солвер выдает набор переменных, определяющих оптимальное решение, по которым на четвертом этапе строится искомый вписанный многогранник.

В разделе 2.4 описаны приемы эффективного задания геометрических свойств внутреннего многогранника, чтобы численные методы быстрее справлялись с задачей. Сложность составления ограничений заключается в том, что понятная геометрическая величина не всегда тривиальным образом представляется в виде уравнений. Зачастую для вычисления величины нужны условные операторы или циклы, поэтому иногда приходится прибегать к аппроксимации или нетривиальному представлению. Иногда численный метод решения позволяет задавать вычисление каких-то величин нестандартным методом, что часто приводит к ускорению оптимизации. Численные методы позволяют программисту задавать не то, как надо вычислять величину, а то, каким свойствам эта величина должна удовлетворять в итоге. Человек, решающий геометрическую задачу, мог никогда не работать с солверами. Поэтому был разработан некоторый набор эффективных приемов работы с солвером для пользователя. Часть из них общеизвестная. В то время как, например, вычисление максимума по множеству, записанного в виде уравнений второго порядка, в литературе не встречается.

В разделе 2.5 представлены выводы к главе

В **третьей главе** приведено описание реализации библиотеки программ для численного решения задачи вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый многогранник. Библиотека реализована на языке программирования C++. Общая длина кода около 15000 строк. Код разбит на отдельные модули, которые могут быть использованы по отдельности или вместе. Результатом работы библиотеки является либо решение, полученное на солвере Ipopt, установленном на компьютере, либо файл с описанием задачи на языке AMPL, который может быть запущен на удаленном солвере, поддерживающем работу с AMPL'ом. На вход библиотеке необходимо дать начальное расположение внутреннего многогранника, внешний многогранник и включения - внутренние невыпуклости внешнего многогранника. Для чтения из файлов и записи в файлы многогранников разработан модуль *CConvector*, отвечающий за операции экспорта и импорта данных в стандартные бинарный и текстовый форматы. Внутри библиотеки многогранники являются элементами класса *ClPolyhedron,* для работы с которым разработан модуль *CPolyhedron.* В пунктах 3.1.1 и 3.1.2. более подробно описано содержание этих двух модулей. В пункте 3.1.3. описан модуль *IpoptStarter,* отвечающий за обработку и проверку входных данных. В нем также задаются настройки солвера при локальной реализации и организована система параллельных запусков задач на одном компьютере в отдельных процессах. В разделе 3.2 представлена программная реализация интерфейса для работы с солвером Ipopt напрямую на персональном компьютере. В нем реализованы необходимые для работы Ipopt функции обратного вызова. В разделе 3.3. описан модуль представления геометрической задачи в виде задачи нелинейного программирования на основе разработанной в диссертации модели. Все функции этого модуля можно разделить на три группы. К первой группе относятся функции для вписывания многогранника с фиксированной комбинаторной структурой без дополнительных геометрических ограничений. Эти функции создают уравнения, описанные в математической модели с двойным представлением многогранника. Вторая группа функций – это шаблоны, позволяющие быстро записывать в НП-задачу универсальные геометрические ограничения, часть из которых описана в разделе диссертации 2.4. К третьей группе функций относятся функции для вычислений понятий и метрик, относящихся к конкретной области применения данной библиотеки. На базе представленных инструментов пользователь может задать любые необходимые ему ограничения.

В разделе 3.4 представлены выводы к главе.

Четвертая глава посвящена вопросам применения разработанных методов и построенной на их основе библиотеки программ в ювелирной и других промышленностях. Задача поиска оптимального бриллианта в алмазе с математической точки зрения является задачей нахождения в невыпуклом многограннике произвольной формы объекта, обладающего заданными геометрическими свойствами и имеющего максимальный объем. Большая часть огранок драгоценных камней является выпуклыми многогранниками. В начале главы описаны критерии оценки качества бриллиантов. Объяснено, какие из этих критериев могут учитываться в алгоритмах планирования, и как могут быть улучшены современные алгоритмы планирования.

Реализованная библиотека для численного решения задачи вписывания многогранников позволяет улучшить результаты (увеличить объем бриллианта) за счет допустимой асимметрии бриллианта в регулируемых, заданных пользователем, границах. Кроме того, оптимизационный подход позволяет найти исключительные случаи, когда критерии качества формально соблюдены, но бриллиант является плохим, некрасивым с точки зрения оптической или 3D-симметрии. Эти случаи позволяют формализовать новые критерии оценки качества бриллиантов и внедрять их в международные стандарты.

В разделе 4.1 кратко описано, как устроены основные используемые алгоритмы планирования, и приведены их недостатки. Главным недостатком является то, что все они работают с конечным набором жестко симметричных форм, поэтому не способны найти оптимальную массу, которая достигается на асимметричных решениях.

В разделе 4.2. описана программа планирования для круглой огранки. Круглая огранка выбрана первой для реализации, потому что именно эта огранка занимает 90% рынка, благодаря своим хорошим оптическим свойствам, обеспечивающим высокий уровень блеска бриллианта. Кроме того, только для круглой огранки существуют мировые стандарты качества в формализованном математическом виде. Если рассматривать задачу нахождения оптимального бриллианта в терминах разработанной библиотеки, то огранка – это внутренний многогранник, камень-алмаз – внешний многогранник, а дефекты алмаза – это включения. Общих разработанных методов для решения задачи вписывания многогранника достаточно, чтобы обеспечить нахождение огранки внутри камня, исключив пересечения с заданным набором дефектов. Для обеспечения качества искомой огранки был разработан набор параметров – геометрических ограничений. Параметры делятся на два типа:

- Cut – параметры, отвечающие за относительные размеры элементов огранки
- Symmetry – параметры, отвечающие за разброс значений в группах одинаковых элементов. Или, другими словами, параметры, не позволяющие сильно нарушать осевые симметрии огранки

Группа Cut состоит из 14 параметров. Группа Symmetry состоит из 40 параметров. Изначально были реализованы всего 23 типа дополнительных ограничений, которые были взяты из международного стандарта оценки качества бриллиантов GIA. Но оказалось, что система ограничений не полна для работы с несимметричными бриллиантами. У бриллианта кроме трехмерной симметрии есть еще оптическая симметрия - насколько он хорошо и симметрично блестит.

На стандартном наборе ограничений у решений всегда получается плохая оптическая симметрия. Поэтому в итоге был разработан комплекс из 54 ограничений, которые позволяют получать решения с хорошей оптической симметрией, и могут регулироваться пользователями. Дополнительные ограничения добавлялись постепенно на основании обратной связи с промышленных предприятий. С сентября 2016 года было добавлено всего 2 новых ограничения, из чего можно сделать вывод, что ограночные предприятия устраивает качество получаемых решений.

Программа используется в фабричном производстве. Это накладывает на него ограничения временного и качественного характера, так как, пока работает программа, производственный процесс по конкретному камню останавливается. Для любого драгоценного камня за ограниченное время должно быть получено решение. На практике получается, что какие бы фиксированные настройки не были выбраны, найдутся камни, для которых Ipopt работает дольше отведенного времени. Поэтому сделаны распараллеленные запуски. Делается 8 одновременных запусков для одного и того же драгоценного камня на разных настройках параметров. Распараллеливание сделано в отдельных процессах. Каждый процесс имеет заданное время завершения. Если Ipopt не успел решить задачу за это время, то процесс закрывается и возвращает начальное решение. Такое распараллеливание гарантирует получение результата за отведенное время, а также позволяет получать камни разного качества. Камни разного качества нужны, потому что в ювелирной промышленности стоимость ограненного камня зависит не только от массы. Иногда выгоднее сделать более большой бриллиант худшего качества, а иногда бриллиант меньшего размера, но с идеальным качеством. Различные настройки параллельных запусков сделаны так, чтобы получался спектр решений от максимальной массы, удовлетворяющей только стандарту GIA, до решений с хорошей оптической симметрией.

Разработанные в диссертации методы, примененные при создании программы планирования круглой огранки, оказались эффективными для решения геометрических оптимизационных задач. Благодаря этому, на базе программы планирования для круглой огранки, удалось создать ее модификации, которые полезны огранщикам и не имеют других промышленных аналогов.

Первая из таких модификаций описана в пункте 4.2.1. В процессе огранки от бриллианта может отколоться кусок. Это приводит к появлению дополнительных граней. Существование таких граней в конечном бриллианте не желательно, но, если такая грань достаточно маленькая и расположена около пояса бриллианта со стороны павильона, то ее можно оставить, так как она не видна, когда камень вставлен в оправу. Иначе пришлось бы сточить существенную часть бриллианта. Раньше не существовало программ, которые могли бы планировать решения с такими гранями. Огранщикам приходилось вручную моделировать решение в 3D-редакторах. Модификация моей программы умеет планировать решения с такими гранями и показывает пользователю, как и в каких случаях можно оставить такую грань.

Запуск программы планирования происходит многократно на протяжении огранки бриллианта. Огранщик проводит какую-то часть работ, снова сканирует камень и заново создает план огранки. Это необходимо, чтобы подтвердить, что старый план огранки не поврежден и всё еще доступен. Огранщику необходимо, чтобы уже завершенная часть бриллианта не менялась при новом запуске программы планирования. Существующие алгоритмы планирования плохо справляются с этой задачей, особенно если старый план нарушен, так как работают с фиксированными формами. Модификация моей программы, описанная в пункте 4.2.2., умеет фиксировать уже выточенные части бриллианта. И даже если план нарушен, то найденное решение требует минимального изменения в уже выточенной части бриллианта.

Раздел 4.3 посвящен программе планирования овальной огранки. У овальной огранки есть несколько принципиальных сложностей: 1) Не существует международных стандартов качества, поэтому весь комплекс ограничений пришлось изобретать полностью самостоятельно. 2) У овальной огранки только две оси симметрии, поэтому ограничения должны в явном виде работать с этими осями, а не просто ограничивать разброс значений параметров в разных частях решения. 3) Отдельную сложность представляют ограничения на овальный профиль пояса бриллианта. 4) У овальной огранки нет универсальной комбинаторной структуры. Поэтому многие ограночные фабрики изобретают свои комбинаторные структуры, что позволяет на некоторых камнях получать лучшую массу. Необходимо было разработать набор ограничений, которые не привязаны к заранее известной комбинаторной структуре.

В разделе 4.4. описана распределенная система для проведения вычислительных экспериментов. Развитие программы требует постоянного тестирования на большом количестве примеров и с различными настройками. Чтобы принять решение о введении новой идеи, необходимо запустить многочисленные тесты, которые позволят выявить слабые места (то есть ситуации, когда новая идея приводит к замедлению программы или ухудшению качества результата).

В разделе 4.5. приведены основные критерии оценки работы программ планирования для круглой и овальной огранок. Данные, полученные на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i7-2600 CPU @ 3.40 GHz, представлены в таблице:

Таблица. Результаты работы программы SmartRecut

Программа	SR Round convex	SR Round nonconvex	SR Oval convex	SR Oval nonconvex
Количество переменных НП-задачи	~3000	~5000	~2500	~7500
Количество ограничений НП-задачи	~11000	~20000	~10000	~45000
Средний прирост массы	2.95%	4.63%	5.95%	5.35%
Средний прирост массы с норм. опт. симметрией	2.55%	3.60%		
Среднее время работы	18.44 с.	28.73 с.	33.71 с.	110.57 с.

Программный комплекс вошел под названием «Automatic Asymmetrical Smart Recut» в коммерческий продукт «HPOxygen» кампании ООО «Октонус Техно» и уже используется на ограночных фабриках в Индии, России, Бельгии и Китае.

В разделе 4.6. предложено применение разработанной библиотеки при распиле дерева и камня. В разделе 4.7. представлены выводы к главе.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

- Обобщено определение вписывания многогранника в многогранник.
- Разработана математическая модель выпуклого многогранника, вписанного в невыпуклый многогранник, представляющая многогранники в виде набора вершин, граней и плоскостей граней одновременно, что позволяет свести задачу вписывания к задаче нелинейного программирования, обеспечив тем самым существенное ускорение процедуры вписывания.
- Для данной модели создан алгоритм вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый на основе решения задачи нелинейного программирования.
- Разработана библиотека программ, реализующая алгоритм вписывания выпуклого многогранника в невыпуклый; состоящая из модулей передачи и хранения данных, модуля составления задачи нелинейного программирования, и интерфейса для работы с солвером Ipopt; позволяющая решать исходную задачу за контролируемое время.
- На базе разработанной библиотеки создан программный комплекс поиска оптимального круглого бриллианта в алмазе, позволяющий находить решение на персональном компьютере за время порядка минуты, что удовлетворяет техническим требованиям производства. Предложенные модель, алгоритм и программный комплекс позволяют увеличить массу бриллианта в среднем на 3,8% по сравнению с другими алгоритмами, используемыми в индустрии.
- Программный комплекс вошел под названием «Automatic Asymmetrical Smart Recut» в коммерческий продукт «HPOxygen» кампании ООО «Октонус Техно» и уже используется на ограночных фабриках в Индии, России, Бельгии и Китае.

Публикации автора по теме диссертации:

К1. Кокорев Д.С. Разработка алгоритма нахождения наибольшей сферической области в многограннике, заданном набором вершин // Труды 55-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». – М.: МФТИ. – 2012. – с. 35-36.

К2. Кокорев Д.С. Алгоритм поиска выпуклого многогранника максимального объема, вписанного в другой многогранник // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2013. – №3. – с. 27-31.

К3. Кокорев Д.С. Алгоритм поиска выпуклого многогранника максимального объема с заданной комбинаторной структурой, вписанного в другой многогранник // Труды 56-й научной конференции МФТИ «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе». – М.: МФТИ. – 2013. – с. 88-90.

К4. Кокорев Д.С. Алгоритмы вписывания выпуклых многогранников, использующие численные методы оптимизации // Сборник трудов 38-ой конференции-школы ИППИ РАН «Информационные технологии и системы». – Нижний Новгород, Россия. – 2014. – с. 297-301.

К5. Кокорев Д.С., Тарасов А.С. Тестирование алгоритма, максимизирующего объем вписанного многогранника, в среде высокопроизводительных вычислений // Сборник тезисов докладов НСКФ’2014. – URL: http://2014.nscf.ru/TesisAll/7_Reshenie_zadach_optimizatsii/09_161_KokorevDS.pdf

К6. Кокорев Д.С. Тестирование алгоритма, максимизирующего объем вписанного многогранника, в среде высокопроизводительных вычислений // Сборник тезисов докладов НСКФ’2015. – URL: http://2015.nscf.ru/TesisAll/4_Reshenie_zadach_optimizatsii/08_467_KokorevDS.pdf

К7. Кокорев Д.С. Оптимизационный алгоритм поиска вписанного многогранника максимального объема // Программные продукты и системы. – 2016. – №1. – с. 90-95.

К8. Kokorev D., Piskovatskii N. Applied problems of polyhedron inscribing task solving // Procedia Computer Science. – 2016. – Vol. 101. – pp. 227-232.

К9. Kokorev D.S. Прикладные проблемы решения задачи вписывания многогранников // Selected Papers of the 7th International Conference Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education (GRID 2016). – Dubna, Russia. – 2016. – с. 295-301. – URL: http://ceur-ws.org/Vol-1787/295-301-paper-50.pdf

К10. Kokorev D.S. An algorithm for determining the optimal variant of a cut gem with maximal mass and specified symmetry deviations // Business Informatics. – 2017. – Vol. 40. – № 2. – pp. 40–46. – DOI: 10.17323/1998-0663.2017.2.40.46