



КОНФЕРЕНЦИЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ И СПЕЦИАЛИСТОВ

**Информационные  
ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ**  
**ИТиС'09**

СБОРНИК ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИИ

**ISBN 978-5-901158-11-1**

пос. д/о Бекасово,  
15 – 18 декабря 2009 г.

Информационные технологии и системы (ИТиС'09):  
сборник трудов конференции. – М.: ИППИ РАН, 2009. – 463 с.

Издание содержит труды ежегодной конференции молодых ученых и специалистов «Информационные технологии и системы» (ИТиС'09), традиционно организуемой Советом молодых ученых и специалистов ИППИ РАН.

Основная цель Конференции ИТиС'09 – дать возможность молодым ученым и специалистам различных подразделений ИППИ РАН, а также студентам, аспирантам и молодым ученым других институтов РАН, отраслевых институтов, университетов и вузов, познакомиться с коллегами и обменяться научными достижениями по основным для ИППИ РАН направлениям научной деятельности: теория передачи и защиты информации; математическая теория информации и управления, многокомпонентные случайные системы; информационно-коммуникационные технологии и их применение в сложных системах и сетях; информационные процессы в живых системах и биоинформатика; компьютерная лингвистика и моделирование естественного языка; высшая математика.

Все включенные в данный сборник работы прошли рецензирование и опубликованы в том виде, в котором они были представлены авторами, среди которых молодые ученые и специалисты ИППИ РАН, ИПУ РАН, ИККИ РАН, ИПМ РАН, ИПТМУ РАН, ИМБ РАН, ИОГен РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, МФТИ (ГУ), МАИ, НГУ, СПбГУ ИТМО, ЛГТУ, МПГУ, МТУСИ, РХТУ и др.

Труды Конференции могут представлять интерес для ученых, студентов и аспирантов, специализирующихся в областях науки, связанных с перечисленными выше научными направлениями.

Конференция проведена при финансовой поддержке ИППИ РАН, Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН, Целевой программы Президиума РАН «Поддержка молодых ученых 2009 г.» и РФФИ (грант 09-07-06810моб\_г)



**ISBN 978-5-901158-11-1**

© Коллектив авторов, 2009

© Учреждение Российской академии наук Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, 2009

## Организаторы конференции

Учреждение Российской Академии Наук “Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН”

### Организационный комитет:

- Мацнев Д.Н., к.т.н. - председатель
- Сафонов А.А., к.т.н. - зам. председателя
- Осипов Д.С., к.т.н.
- Чуяшкин М.И.
- Хоров Е.М.
- Коваленко А.В.
- Алимова И.В.

### Программный комитет:

- Кулешов А.П., член-корр. РАН - председатель
- Апресян Ю.Д., академик РАН
- Бастаков В.А., к.б.н.
- Гельфанд М.С., к.ф.-м.н., д.б.н., проф.
- Гитис В.Г., д.т.н.
- Зяблов В.В., д.т.н.
- Иомдин Л.Л., к.фил.н.
- Кабатянский Г.А., д.ф.-м.н.
- Лаконцев Д.В., к.т.н.
- Ляхов А.И., д.т.н.
- Минлос Р.А. д.ф.-м.н.
- Николаев Д.П., к.ф.-м.н.
- Осипов Д.С., к.т.н.
- Переверзев-Орлов В.С., к.т.н.
- Прелов В.В., д.ф.-м.н.
- Сагалович Ю.Л. д.т.н., проф.
- Сафонов А.А., к.т.н.
- Шехтман В.Б. д.ф.-м.н.
- Цфасман М.А., д.ф.-м.н.

## Содержание

<b>Раздел 1: Технологии, стандарты и протоколы сетей передачи данных</b> .....	1
Открытые задачи в области mesh-сетей на базе протокола IEEE 802.11 .....	2
<i>Сафонов А. А.</i>	
Метрика маршрутизации для трафика, чувствительного к задержкам .....	8
<i>Хоров Е.</i>	
Физическая модель интерференции прямых соединений: классификация и анализ возможных случаев.....	15
<i>Красилов А. И.</i>	
Оценка производительности сверхвысокоскоростных беспроводных сетей IEEE 802.11ac (VHT).....	23
<i>Якимов М.</i>	
Анализ эффекта самоинтерференции потоков в mesh-сетях IEEE 802.11s .....	29
<i>Пустогаров И. А.</i>	
Модель протокола маршрутизации AODV в NS-3 .....	35
<i>Бойко П., Бучацкая Е.</i>	
Оценка времени обслуживания пакетов в беспроводной сети под управлением протокола IEEE 802.16.....	42
<i>Ляхов А. И., Лукин Д. В.</i>	
Трафик реального времени в mesh сетях стандартов IEEE 802.11s и FLAME .....	48
<i>Андреев К., Бойко П.</i>	
Передача видеоданных по беспроводной сети с централизованным управлением и коррелированными помехами.....	55
<i>Сидоркин О. С.</i>	
Улучшение качества видеотрансляции с использованием ранжирования пакетов в потоке MPEG.....	61
<i>Титов А.Ю., Никифоров С.А., Коноплев В.В.</i>	
Надежная многоадресная рассылка в беспроводной меш-сети. ....	64
<i>Цыганова А.</i>	
Динамическое распределение спектра между вторичными пользователями в сетях когнитивного радио .....	70
<i>Ошмарин Д. В.</i>	

<b>Раздел 2: Информационные технологии и проблемы управления в сложных системах и сетях .....</b>	<b>76</b>
Применение генетического программирования и верификации моделей для построения автоматов управления системами со сложным поведением .....	77
<i>К.В. Егоров, Ф.Н. Царев</i>	
Задача оптимального управления с управляемыми коэффициентами высокой размерности. Методы последовательного улучшения .....	83
<i>Батурина О.</i>	
Метод разделения движений для синтеза дискретных законов управления динамическими системами .....	85
<i>Рассадин Ю. М.</i>	
Модель адаптивного поведения агентов в мультиагентной системе управления экологической безопасностью .....	90
<i>Доронина Е.Г</i>	
Fluidics in control of flight vehicles .....	94
<i>Kovrygin P.</i>	
Об эффекте самоподобия трафика сервера, предоставляющего данные различного объема .....	104
<i>Цитович И. И., Титов И.</i>	
Оценивание амплитуды установившихся колебаний в релейных системах .....	108
<i>Кочетков С.А.</i>	
Геоинформационная технология исследования динамики взаимодействия геофизических пространственно-временных процессов .....	115
<i>Дерендяев А.Б., Гитис В. Г., Соболев Г. А.</i>	
Неманипулируемые механизмы распределения ресурсов на графовых моделях организационных систем.....	125
<i>Коргин Н. А.</i>	
Проблемы оценки параметра Херста потоков требований мультисервисных сетей .....	128
<i>Цитович И. И., Ноздрачев М.</i>	
Применение различных моделей на основе когнитивных карт для анализа и моделирования сложных проблемных ситуаций .....	134
<i>Авдеева З.К., Максимов В.И.</i>	
Метод нахождения состояний гонки в потоках, работающих на разделяемой памяти .....	140
<i>Кудрин М.Ю., Прокопенко А.С., Тормасов А.Г.</i>	

<b>Раздел 3: Передача, защита и обработка информации</b> .....	144
Сигнально-кодовые конструкции на базе эквидистантных кодов в системе множественного доступа с каскадным кодированием. ....	145
<i>Зяблов В. В., Осипов Д.С.</i>	
Исследование пропускной способности системы множественного асинхронного доступа с пороговым приемом .....	152
<i>Грошев Ф.В., Осипов Д.С.</i>	
Две конструкции сверточных ПМПП-кодов .....	156
<i>Зяблов В. В., Кондрашов К. А.</i>	
Сравнение корректирующей способности МПП-кодов с кодами-компонентами разной избыточности .....	160
<i>Зяблов В. В., Фролов А.А.</i>	
Применение исправления стираний для кодирования МПП-кодов .....	164
<i>Зяблов В. В., Рыбин П.С.</i>	
Декодирование обобщенных кодов с локализацией ошибок. ....	170
<i>Зяблов В.В., Кобозева И. Г.</i>	
Исправление малого числа ошибок и стираний с использованием кодов Рида-Соломона .....	174
<i>Давыдов А. А., Калимуллин Р.</i>	
Многопоточная реализация алгоритмов кодирования и декодирования кодов с малой плотностью проверок .....	177
<i>Зигангиров Д.К., Крещук А. А.</i>	
Автоматическое обнаружение и выделение стабильных изменений в видеопоследовательностях .....	183
<i>Кондратенков И.Б., Рубанов Л.И.</i>	
Impact of the DEM Resolution on the Outdoor RF Propagation Models .....	187
<i>Boyko P., Fakhriev D., Musienko M.</i>	
Реализация и валидация моделей распространения радиосигналов .....	195
<i>Андреев К., Бойко П., Мазо А., Фахриев Д.</i>	
<b>Раздел 4: Компьютерная лингвистика и моделирование естественного языка</b> .....	204
Глубоко аннотированный корпус русских текстов как обучающий электронный ресурс .....	205
<i>Шеманаева О. Ю.</i>	

Интерпретация и практическое применение текстовых данных о сочетаемости лексем (на материале прилагательных) .....	210
<i>Фролова Т.</i>	
Определение автора книги статистическими методами .....	215
<i>Орлов Ю. Н., Осминин К. П.</i>	
Построение онтологии для узкой предметной области .....	220
<i>Тимошенко С.П.</i>	
Исследование алгоритмов построения деревьев зависимостей на основе машинного обучения .....	226
<i>Казенников А.О.</i>	
Атрибуты модальности в UNL .....	230
<i>Диконов В.</i>	
Компьютерная система обучения владению языком — — опыт практического применения .....	238
<i>Дяченко П.</i>	
<b>Раздел 5: Информационные процессы в живых системах</b> .....	244
Структурная организация медицинских знаний при дифференциальной диагностике разных форм алалии .....	245
<i>Попова С.М., Перемьякина С.Ю., Лукашевич И.П.</i>	
Мышечные пост-эффекты и поддержание равновесия у здоровых и больных с врожденным слабоумием .....	250
<i>Талис В.Л., Капитонов М.А, Максимова Е.В.</i>	
Роль движений глаз в распознавании лица по фотографии .....	254
<i>Огнивов В., Рожкова Г.</i>	
О механизмах подавления восприятия хемосигналов в вомероназальной системе доменной мыши под действием стресса .....	259
<i>Вознесенская А.Е.</i>	
Офтальмологический комплекс для диагностики и лечения зрения .....	265
<i>Голубцов К.В., Грошев Ф.В., Трунов В.Г., Айду Э. А.</i>	
Способы разделения каналов акустической связи у близких видов Pentatomidae .....	267
<i>Шестаков Л.С.</i>	
Воздействие электромагнитного излучения GSM диапазона на кровь, надпочечники и ц.н.с. крыс .....	272
<i>Дурнева А.</i>	

<b>Раздел 6: Биоинформатика</b> .....	277
Транскрипция генов синтеза пролина у бактерий родов <i>Marinobacter</i> , <i>Pseudomonas</i> и <i>Shewanella</i> регулируется белком семейства <i>tetR</i> .....	278
<i>Лопатовская К.В., Зверков О.А., Селиверстов А.В., Любецкий В.А.</i>	
Capture and release of coding DNA: evolution of bacterial genes by shift of stop codons .....	282
<i>Vakhrusheva A.A., Kazanov M.D., Mironov A.A., Bazykin G.A.</i>	
Predicting novel protein-small molecule interactions using molecular modeling techniques .....	284
<i>Kalinina O. V., Russell R. B.</i>	
Codon usage bias: biological <i>function</i> or neutral marker? .....	285
<i>Vinogradova S., Vinogradov D., Mironov A.A.</i>	
Нитрат-нитритное дыхание протеобактерий: исследование эволюции регуляторных взаимодействий методами биоинформатики .....	287
<i>Равчеев Д. А.</i>	
Prediction and Comparative Analysis of Transcriptional Regulatory Regions in <i>Drosophila</i> Genomes .....	290
<i>Nikulova A.A., Favorov A.V., Sutormin R.A., Mironov A.A.</i>	
Conservative regions of proteins evolve under stronger positive selection .....	292
<i>Bazykin G. A.; Kondrashov A. S.</i>	
Козволюция белков подсемейства <i>FadR</i> и их сайтов связывания .....	297
<i>Суворова И. А., Равчеев Д. А.</i>	
Регуляция SOS-ответа Протеобактерий: анализ коэволюции белка <i>LexA</i> и сайтов его связывания .....	300
<i>М. Э. Борисова, Равчеев Д. А.</i>	
Эволюция химерного белка: исследование <i>AraR</i> зависимой регуляции методами сравнительной геномики .....	303
<i>Лейн С.А., Равчеев Д.А.</i>	
Кислород-зависимая регуляция азотфиксации у Альфапротеобактерий – исследование методами сравнительной геномики .....	305
<i>Климова Е. Ю., Равчеев Д.А.</i>	
Нуклеотидные замены в альтернативно сплайсируемых генах <i>Drosophila</i> .....	308
<i>Ермакова Е., Малько Д.</i>	
Поиск мотивов связывания транскрипционных регуляторов множественной лекарственной устойчивости у бактерий .....	309
<i>Жаров И., Казаков А.</i>	

Анализ последовательности генома макронуклеуса <i>Euplotes crassus</i> .....	315
<i>Цой О., Виноградов Д., Заика А., Гельфанд М.С</i>	
Автоматная интерпретация фрагментов последовательности ДНК .....	318
<i>Епифанов А.С.</i>	
Iterative Statistical Approach for Discovering Evolutionary Conserved Members of Regulon .....	324
<i>Stavrovskaya E.D., Rodionov D.A., Mironov A.A., Dubchak I., Novichkov P. S.</i>	
Автоматический перенос аннотации между геномами близкородственных организмов .....	326
<i>Малько Д.</i>	
Моделирование конкуренции РНК-полимераз: влияние нокаута сигма субъединиц и температуры на экспрессию генов .....	328
<i>Зверков О.А., Селиверстов А.В., Рубанов Л.И., Любецкий В.А.</i>	
Реконструкция эволюции белковых семейств .....	332
<i>Горбунов К.Ю., Любецкая Е.В.</i>	
Антифаговый иммунитет прокариот .....	335
<i>Артамонова И.И.</i>	
CRISPR Polymorphism in natural populations of <i>Escherichia Coli</i> .....	338
<i>Казнадзей А.Д.</i>	
Особенности транскрипции хромосомных перестроек в геноме человека .....	341
<i>Храмеева Е., Мазин П.</i>	
Evolution of signal peptide appearance/disappearance in bacterial genomes .....	345
<i>Вукова Н.А., Мironov А.А.</i>	
Эволюция моделей альтернативного сплайсинга паралогичных генов человека .....	347
<i>Панчин А. Ю., Артамонова И.И.</i>	
Исключительные последовательности в геномах различных организмов .....	351
<i>Митрофанов С. И., Панчин А. Ю., Спиринов С. А., Панчин Ю. В., Алексеевский А. В.</i>	
Species demography and evolution of alternative splicing sites .....	354
<i>Leushkin E. V., Denisov S.V., Gelfand M. S., Popadin K. Yu., Bazykin G. A.</i>	
Свойства компенсаторных замен в белках .....	358
<i>Калинина О., Анашкина А., Мирина А., Раменский В.</i>	
Orthologous genes in mammals: what's about orthologous CpG islands? .....	359
<i>Fridman M., Oparina N., Makeev V.</i>	

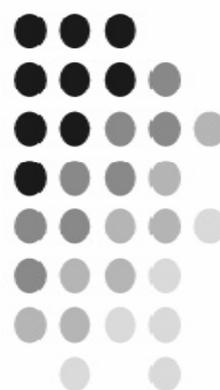
Геномная энциклопедия метаболических путей утилизации сахаров полученная методами сравнительного анализа бактериальных геномов. ....	362
<i>Родионов Д. А.</i>	
Parallel evolutionary trajectories at sites of multiple amino acid replacements in <i>Drosophila</i> evolution .....	364
<i>Terekhanova N., Bazykin G. A.</i>	
High Frequency of Reversals in Evolution of Vertebrates and Insects .....	367
<i>Naumenko S., Kondrashov A., Bazykin G. A.</i>	
Оценка вариабельности протоспейсеров CRISPR-систем фагов, специфичных к <i>Xanthomonas oryzae</i> .....	369
<i>Москвин И.А., Артамонова И. И.</i>	
ЭВОЛЮЦИЯ САЙТОВ СПЛАЙСИНГА: изменения в отдельных позициях и в сайтах в целом.....	372
<i>Денисов С., Фаворов А., Миронов А., Нуртдинов Р., Гельфанд М.</i>	
Developing the UEPHA-MS network database the tool for organizing and accessing the clinical and biological information for patients with multiple sclerosis.....	378
<i>Nurtdinov R.</i>	
Evolution of mitochondrial genome size: large genomes in small mammals and small genomes in large mammals .....	380
<i>Popadin K.</i>	
Higher cryptic variation in rate of transversions than transitions .....	382
<i>Seplarskij V., Bazykin G. A.</i>	
Происходит ли падение приспособленности в результате накопления слабовредных мутаций в малочисленных видах млекопитающих? .....	386
<i>М. Баранова, Попадъин К.</i>	
<b>Раздел 7: Математика: алгебра, логика, теория вероятностей и теория дифференциальных уравнений .....</b>	<b>389</b>
On the Monomial Automorphism Group of $p^s$ -Components in the $q$ -ary Hamming Code .....	390
<i>Gorkunov E.V.</i>	
Изменчивые ключи подписи .....	396
<i>Федюкович В. Е.</i>	
Торическая топология .....	401
<i>Бухштабер В.М., Панов Т.Е.</i>	
Финитная аппроксимируемость обобщенно-транзитивных симметричных модальных логик .....	411
<i>Кудинов А., Шапировский И.</i>	

---

Субоптимальные последовательные правила проверки непараметрических гипотез о распределениях с экспоненциально убывающими хвостами .....	416
<i>Цитович Ф. И.</i>	
О методиках бустинга .....	422
<i>Бурнаев Е., Приходько П.</i>	
Минимаксная задача скорейшего обнаружения разладки для броуновского движения с экспоненциальной функцией штрафа .....	428
<i>Бурнаев Е.</i>	
Адаптивная регуляризация в задаче аппроксимации многомерных зависимостей .....	431
<i>Беляев М, Бурнаев Е.</i>	
Динамическое управление доступом и скоростью обслуживания при активных пользователях .....	436
<i>Миллер А. Б.</i>	
Приводимые семейства Шлезингера и решения систем Гарнье .....	442
<i>Гонцов Р. Р.</i>	
Изомонодромные слияния фуксовых особенностей и особенности уравнения Шлезингера .....	447
<i>Вьюгин И. В.</i>	

# Раздел 1

Технологии, стандарты  
и протоколы  
сетей передачи данных



# Открытые задачи в области mesh-сетей на базе протокола IEEE 802.11

Александр Сафонов  
ИППИ РАН  
safa@iitp.ru

## Аннотация

*В литературе встречается множество определенных mesh-сетей, и это не случайно, так как каждый автор определяет mesh-сеть, исходя из выбранного им сценария применения. В данной работе представлены актуальные для телекоммуникационной индустрии сценарии применения mesh-сетей, выявленные в результате анализа работ, которые были представлены в текущем году на международных конференциях по соответствующей тематике, и дано определение mesh-сетей соответствующее этим сценариям применения. В настоящий момент телекоммуникационными компаниями ведется разработка mesh-технологий на базе нескольких протоколов беспроводного доступа к среде, и в рамках одного из самых успешных проектов в основу положен протокол IEEE 802.11, доказавший свою техническую зрелость и коммерческую привлекательность, завоевав огромную нишу на рынке высокоскоростного широкополосного доступа. В данной работе сделана попытка составить и обосновать набор открытых задач, решение которых необходимо для полноценной реализации всех свойств mesh-сетей, заявленных в их определении.*

## 1. Введение

Беспроводные технологии вытесняют проводные повсюду, где могут обеспечить приемлемые скорость и качество связи. Они прочно вошли в жизнь многих предприятий и миллионов людей, потому что позволяют решать широкий круг задач: от организации персональных и локальных сетей для обмена любительскими фотографиями до построения автономных сетей связи в случаях, когда использование проводных решений затруднено или невозможно. Вряд ли кто-то сомневается, что эта тенденция изменится: настолько удобен мир без проводов.

В последние годы XX века популярность беспроводных широкополосных сетей резко возросла благо-

даря актуальности задачи последней мили, которая заключается в организации доступа конечных пользователей к сервисам, предоставляемым серверами, включенными в уже существующую проводную инфраструктурную сеть.

Задача последней мили придала мощный импульс развитию технологии беспроводных локальных сетей IEEE 802.11 [6], которая сегодня широко известна благодаря миллиону точек беспроводного доступа Wi-Fi, развернутых во всем мире. Для решения задачи последней мили с помощью технологии IEEE 802.11 точка доступа включается в проводную инфраструктурную сеть, соединяя беспроводные клиентские устройства конечных пользователей с проводной сетью. Таким образом, опираясь на проводную сеть, точки доступа предоставляют клиентским станциям различные сервисы, включая самый популярный – выход в глобальную сеть Интернет.

За десятилетие своего существования технология IEEE 802.11 постоянно набирала все большую популярность, и массовое производство оборудования Wi-Fi огромным числом различных производителей обеспечило низкую стоимость этого оборудования, а это, в свою очередь, позволило технологии IEEE 802.11 стать de facto стандартным решением для подключения к проводной сети потребительской электроники: ноутбуков, коммуникаторов, телефонов и т.д. для высокоскоростной передачи данных.

Кроме беспроводного подключения устройств к инфраструктурной сети, технология IEEE 802.11 может быть использована для неопосредованного обмена данными между компьютерами, не подключенными ни к какой инфраструктурной сети, путем создания так называемых сетей ad hoc. Сети ad hoc в рамках технологии IEEE 802.11 являются одноранговыми сетями, в которых каждая станция находится в зоне непосредственного радиоприема всех остальных станций, поэтому обмен данными между станциями может быть организован без создания проводной или беспроводной инфраструктуры.

Благодаря своему коммерческому успеху, начавшемуся с решения задачи последней мили, технология IEEE 802.11 продолжает динамично развиваться

ся и, расширяя свою функциональность, осваивает новые ниши на рынке телекоммуникаций. В частности, в рамках группы IEEE 802.11s [5] делаются попытки применить эту технологию для организации так называемых mesh-сетей. О таких сетях написаны сотни работ, и различные авторы, давая определение mesh-сетей в своих работах, упоминают совершенно различные их качества, желая подчеркнуть применимость mesh-сетей в выбранном автором сценарии. Анализ актуальных сценариев применения mesh-сетей (см. далее) приводит к следующему определению.

Mesh-сеть – это беспроводная самоорганизующаяся сеть передачи информации, не требующая администрирования при изменениях топологии, вызванных передвижением или отказом узлов сети, автоматически адаптирующаяся к условиям радиосреды и способная при необходимости передавать информацию от источника до конечного получателя через промежуточные узлы сети для обеспечения непрерывной связи между любыми, в том числе удаленными друг от друга, узлами сети, пока между ними существует хотя бы один маршрут.

Стоит отметить, что попытки разработать алгоритмы и протоколы, реализующие mesh-функциональность, делаются в рамках многих технологий беспроводных сетей различного типа, включая технологию персональных сетей IEEE 802.15 и технологию городских сетей IEEE 802.16. Однако подобные mesh-технологии не получают заметного распространения, в том числе ввиду весьма ограниченного применения самих технологий IEEE 802.15 и IEEE 802.16. В то же время технология IEEE 802.11 является достаточно зрелой, с одной стороны, и коммерчески успешной, с другой, и поэтому может претендовать на роль базовой при разработке mesh-технологии.

Использование технологии IEEE 802.11 для реализации mesh-функциональности, заявленной в определении, приведенном выше, выходит далеко за пределы применимости этой технологии, на которые она была изначально рассчитана. Это обстоятельство порождает набор нетривиальных задач, решение которых необходимо для полноценной реализации всех указанных свойств mesh-сетей.

Целью данной работы является выявление таких открытых задач в области mesh-сетей на базе технологии IEEE 802.11, актуальных в перспективных сферах применения этих сетей, представляющих интерес для телекоммуникационной индустрии. Для достижения этой цели, в первую очередь, проанализированы работы, которые были представлены как академическими институтами, так и телекоммуникационными компаниями на профильных международных конференциях в 2009г. Результаты этого анализа приведены в разделе 2, за которым следует

описание выявленных задач.

## 2. Области применения mesh-сетей на базе технологии IEEE 802.11

Для определения наиболее перспективных сфер применения mesh-сетей на базе технологии IEEE 802.11 мы провели обзор работ, представленных как академическими институтами, так и телекоммуникационными компаниями на нескольких профильных международных конференциях в 2009г.: IEEE International Symposium on a World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks; IEEE Communications Society Conference on Sensor, Mesh and Ad Hoc Communications and Networks; IEEE Workshop on Wireless Mesh Networks; Workshop on Hot Topics in Mesh Networking; International Conference on Advances in Mesh Networks. В результате были выделены следующие четыре области применения mesh-сетей на основе IEEE 802.11, актуальные с точки зрения телекоммуникационной индустрии и требующие решения содержательных задач с точки зрения академических институтов.

**Домашняя сеть**, которую способен самостоятельно развернуть неподготовленный пользователь, представляет собой гибкий и дешевый способ создания беспроводной зоны доступа в Интернет. Многие сервис-провайдеры предоставляют подключение к Интернет через выделенную проводную линию с помощью технологии Ethernet или телефонную линию с помощью технологии DSL. Разворачиваемая пользователем домашняя сеть может играть роль удобного беспроводного “удлиителя”, позволяющего получать высокоскоростной доступ к Интернет из любой точки дома или лужайки у бассейна, гаража и т.д.

Многие DSL-модемы уже сегодня содержат модули Wi-Fi, но область беспроводного покрытия единственной точки доступа оказывается весьма ограниченной. Развертывание mesh-сети, подключенной к DSL-модему вместо единственной точки доступа, устраняет этот недостаток. Такие свойства mesh-сети, как ее автоматическая настройка и адаптация к расположению узлов сети и способность сети передавать информацию от узла-источника до узла-конечного получателя через промежуточные узлы дает возможность неподготовленному пользователю самостоятельно устанавливать mesh-устройства и расширять зону покрытия домашней сети по мере необходимости, не заботясь о конфигурации новых и переконфигурации ранее установленных устройств. Простота использования дает возможность производителям оборудования продавать mesh-устройства непосредственно конечному пользователю, минуя телекоммуникационного провайдера, что обуславливает низкую стоимость оборудования.

Кроме удобного доступа к сети Интернет, домашняя сеть может выполнять другие функции, связанные с передачей данных в доме, например, такая сеть может быть использована для надежной беспроводной передачи аудио/видео-трафика к нескольким мониторам/плазменным панелям от одного ресивера, избавляя пользователя от необходимости устанавливать несколько дорогостоящих ресиверов и покупать контракты с провайдером к каждому из них для своих мониторов в разных комнатах.

**Сети VANET** (Vehicle Ad hoc Network) являются разновидностью сетей MANET (Mobile Ad hoc Network). Такие сети предназначены для передачи данных между автомобилями, а также между автомобилями и информационными киосками, установленными вдоль дорог. Высокая мобильность узлов сети в таком сценарии предопределяет невозможность какого-либо оперативного администрирования; напротив, необходима организация распределенной работы сети, ее автоматической настройки и адаптации к изменениям топологии и условиям распространения радиосигнала, поэтому mesh-технология является естественным выбором для построения сетей VANET.

В основе технологии VANET лежит идея о предсказуемости движения узлов сети вдоль дорог. Например, в случае скоростного шоссе движение оказывается одномерным: все автомобили движутся только вдоль шоссе, либо в одном, либо в противоположных направлениях. Предполагается, что использование этой информации при маршрутизации может обеспечить производительность сети, достаточную для реализации различных приложений: от обмена сообщениями о пробках и авариях, до интерактивных игр и скачивания контента с информационных киосков вдоль дорог.

Однако на данный момент технология сетей VANET находится в начальной стадии разработки и законченных протоколов маршрутизации, равно как и других необходимых механизмов такой сети на данный момент не разработано.

**Коммерческая сеть доступа** в Интернет с большой по площади и неравномерной по плотности областью покрытия, построенная на базе mesh-технологии, будет способна развиваться гибко и с минимальными капитальными затратами. Кроме того, минимальные требования к администрированию делают mesh-сети чрезвычайно удобными в использовании для телекоммуникационного оператора.

Во многих странах мира коммерческие сети на базе технологии Wi-Fi пытаются составить конкуренцию традиционным сотовым сетям. Преимуществом сетей Wi-Fi считается высокая скорость передачи, по сравнению с сетями 3G. Недостатками – относительно небольшая зона покрытия и низкая масштабируемость, связанная с необходимостью ад-

министрирования сети. Применение элементов mesh-технологии позволит устранить эти недостатки традиционных сетей Wi-Fi, поэтому успешность коммерческих сетей доступа напрямую зависит от степени использования элементов mesh-технологии.

Оригинальной идеей, представленной в работе [3], является идея построения QoS-ориентированных коммерческих mesh-сети совместно несколькими телекоммуникационными операторами, так что различные узлы сети принадлежат различным телекоммуникационным операторам. Операторы при этом связаны соглашениями и, кооперируясь, предоставляют всем своим клиентам роуминг по всей сети. Однако открытым вопросом остается вопрос бизнес-модели, а также некоторые технические вопросы, связанные с аутентификацией пользователей в сети, управляемой несколькими телекоммуникационными операторами.

**Сети специального назначения**, разворачиваемые, например, в местах техногенных аварий и природных катастроф, могут и, по-видимому, должны строиться с использованием mesh-технологии, так она удовлетворяет всем необходимым требованиям: быстрота развертывания и автоматическая динамическая настройка для обеспечения высокоскоростной передачи информации, в том числе объемных видео-поток. В работе [9] приводятся технические требования к телекоммуникационным сетям, призванным обеспечить надежную связь и высокоскоростную передачу данных в местах катастроф и стихийных бедствий, опубликованные федеральным министерством национальной безопасности США (US Department of Homeland Security). В этой работе, как и во многих других, отмечается, что существующие решения либо опираются на стационарную инфраструктуру, которая может быть разрушена в ходе чрезвычайной ситуации, либо не в состоянии обеспечить достаточную скорость передачи данных и качество обслуживания трафика реального времени. В то же время mesh-технология, будучи реализованная в полном объеме, способна удовлетворить всем требованиям, предъявляемым к сетям, работающим в зоне чрезвычайной ситуации.

### 3. Открытые задачи

Определение mesh-сети, данное во введении, состоит из двух частей. В первой части описываются свойства сети, которые можно охарактеризовать одним словом: “автономность” (англ. self-contained), которая включает в себя самоорганизацию сети в начальный момент времени и ее адаптацию к изменениям условий работы и структуры сети. Вторая часть определения – способность передавать информацию от источника до конечного получателя через промежуточные узлы – характеризует mesh-сеть как

в общем случае многошаговую и обладающую собственными алгоритмами и протоколами динамической маршрутизации и ретрансляции пакетов.

Попытки применить в полном объеме различные протоколы маршрутизации, разработанные для проводных сетей, в беспроводных сетях выявили ограничения в производительности в смысле практически любого критерия, включая пропускную способность сети в целом или отдельных ее соединений и время передачи от источника до конечного получателя. Связано это с тем, что широковещательный характер передачи в беспроводной среде делает соединения чрезвычайно зависимыми друг от друга.

Каков бы ни был критерий эффективности маршрутизации, для того чтобы выбрать оптимальный маршрут, необходимо *разработать метрику маршрутизации*, учитывающую особенности беспроводной передачи. Очевидно, что “идеальная” метрика могла бы учитывать множество величин, таких как качество беспроводного канала и вероятность успешной передачи пакета, загрузка очередей на передающей станции и ее соседях, текущие и планируемые потоки данных и так далее. Однако даже если удастся построить необходимые уравнения, связывающие все эти величины с критерием маршрутизации, еще предстоит *разработать способ оценки или измерения этих компонентов метрики* на основе статистических данных, получаемых с помощью существующих методов оценки канала и дополнительных протоколов обмена служебной информацией между станциями.

Важнейшим сервисом многошаговой сети является рассылка пакетов по всей сети, т.е. всем узлам сети (будем обозначать такие пакеты  $p^*$ ). Естественно для этой цели использовать широковещательные передачи (англ. broadcast), пользуясь тем обстоятельством, что в беспроводной среде любая передача является широковещательной. В данном контексте под широковещательной передачей понимается одношаговая передача с использованием специального широковещательного адреса, заменяющего адрес любого узла, что предопределяет простое правило ретрансляции пакетов  $p^*$  по всей сети: узел, получивший пакет, ретранслирует его далее с тем же широковещательным адресом. При этом узлы могут получить одни и тот же пакет  $p^*$  несколько раз, поэтому пакеты нумеруются, что позволяет узлам отбрасывать дубликаты. Таким образом, каждый узел передает пакет  $p^*$  ровно один раз, и суммарное число передач равно числу  $n$  узлов в сети.

Широковещательная передача ведется без подтверждений, и поэтому может быть ненадежной из-за помех в канале и коллизий с другими передачами, в том числе с передачами того же пакета другими узлами. С другой стороны, как уже было упомянуто, правила ретрансляции допускают доставку одного и

того же широковещательного пакета несколько раз. Результирующая надежность доставки пакетов зависит от множества факторов: помеховой обстановки, загрузки узлов, количества узлов и топологии сети, причем критический размер сети (количество узлов и/или плотность сети), при котором надежность становится неудовлетворительной, зависит от помеховой обстановки и загрузки узлов. Можно предположить, что замена широковещательных передач на индивидуальные (англ. individual) позволяет поддерживать надежность доставки пакетов  $p^*$  на том же предсказуемом уровне, что и надежность доставки одноадресных пакетов. Однако число индивидуальных передач в этом случае может существенно превышать число  $n$  узлов в сети, и в худшем случае, когда все узлы являются соседями друг друга, оно равно  $n^2$ . Очевидно, что увеличение числа передач приводит к росту вероятности коллизий и снижению надежности передачи. Ни для одного из описанных случаев задача оценки надежности передачи не решена.

При проектировании протокола работы mesh-сети необходимо выбрать необходимый уровень надежности, связав его с услугами, которые должна предоставлять сеть, и *разработать масштабируемый протокол рассылки пакетов по всей сети*. Такой протокол необходим, по крайней мере, в двух из четырех сценариев, описанных в разделе 2: коммерческой сети доступа и в сети специального назначения.

Другим сервисом сети, важным в трех сценариях – в домашней сети, в коммерческой сети доступа и в сети специального назначения – является групповая передача, т.е. передача одного и того же потока данных, как правило, мультимедийных, к нескольким узлам сети, которые могут выбраны пользователем произвольным образом. Однако в спецификации IEEE 802.11s решение этой задачи не описывается: предполагается, что организацией групповой передачи занимаются протоколы верхних уровней.

Основной частью задачи групповой передачи является построение на графе, в который отображается mesh-сеть, дерева рассылки, оптимального в смысле выбранного критерия. Известным решением для случая проводной сети является построение дерева Штейнера: дерева минимального веса, покрывающего узел-источник и всех узлов-получателей. Задача построения дерева Штейнера является NP-полной [8], однако в настоящее время известны приближенные алгоритмы, в том числе для случая направленного графа [4] (заметим, что ввиду асимметричности соединений между узлами граф, в который отображается сеть, в общем случае является направленным).

Однако решение задачи групповой передачи с помощью построения дерева Штейнера обладает

недостатком, который обусловлен использованием **единственной** метрики, в которой взвешивают звенья графа для построения на нем дерева минимального веса. Метрика должна быть аддитивной и следовать из критерия эффективности маршрутизации, принятого для рассматриваемой сети. Разумными критериями в разных ситуациях могут быть признаны минимальное время занятия среды, необходимое для доставки пакета; минимальное время доставки всех пакетов в сети; максимальная суммарная пропускная способность сети. Но ни один из этих критериев не отражает собственно качество предоставления услуг сети: одноадресной и многоадресной передачи данных, голосовых и видео потоков.

Международный союз электросвязи ITU рекомендует оценивать качество передачи голоса по специальному критерию MOS [7], вычисляемому исходя из таких характеристик как время доставки пакета, вариация этого времени (англ. jitter) и доля потерянных пакетов. Однако метрика, построенная на основе этого критерия, неаддитивна, поэтому с ее помощью можно оценить вес отдельных звеньев, но не дерева рассылки целиком. Таким образом, *вопрос построения оптимального дерева рассылки* является открытым. В данном случае “оптимальным” считается решение, удовлетворяющее базовому критерию, принятому в сети, в классе решений, способных обеспечивать качество предоставления услуг сети на заданном уровне, который считается приемлемым.

Краеугольным камнем при решении задачи групповой передачи в общем случае является решение частного случая, когда все узлы-получатели являются соседями узла-источника. Способ одношаговой передачи – индивидуальный или широковещательный – в этом случае определяет надежность и полное (с учетом переповторов, если они предусмотрены) время передачи, являющиеся компонентами MOS. В случае индивидуальной передачи ее надежность определяется так же, как и для одноадресной передачи; в случае же широковещательной передачи ее надежность всецело зависит от механизма подтверждений, и можно с уверенностью сказать, что, чем больше доля узлов-получателей, подтверждающих прием пакета, от общего числа узлов-получателей, тем выше надежность передачи. Детальному анализу этого вопроса в предположении, что ошибки при получении пакета на каждом из узлов-приемников некоррелированы, посвящена, например, работа [2], в которой проводится оценка вероятности успешной доставки пакета. *Оценка других компонент MOS – времени доставки пакета и ее вариации – при широковещательной передаче с различными политиками подтверждений*, по-прежнему, является открытым вопросом.

Ряд исследований, проводимых в ИППИ РАН в настоящее время, показывает, что без решения задач

одноадресной и многоадресной маршрутизации и ретрансляции пакетов, в том виде, в каком они сформулированы выше, обеспечить качества mesh-сети, заявленные в ее определении, практически невозможно. Более того, эти исследования заставляют предположить, что решения одних только этих задач может оказаться недостаточно: унаследованные из технологии IEEE 802.11 *методы доступа к среде и снижения интерференции требуют глубокой модернизации*.

Метод доступа к среде EDCA, построенный на базе случайного доступа CSMA/CA с использованием нескольких очередей для дифференцированного качества обслуживания трафика в зависимости от его приоритета (основной метод доступа в mesh-сети IEEE 802.11s), основан на прослушивании среды для определения занятости канала. В многошаговой сети занятость беспроводного канала, общего для всех узлов в смысле рабочей частоты, существенно зависит от точки в пространстве, в которой происходит прослушивание, поэтому различные узлы оценивают канал по-разному. Это обстоятельство приводит к резкому росту числа коллизий, вызванных интерференцией одновременных передач несколькими станциями, по сравнению со случаем одношаговой сети. Масштаб потерь в производительности в смысле вероятности успешной передачи, пропускной способности, полного времени передачи с учетом переповторов и т.д. зависит от конкретной ситуации; анализ некоторых из них приведен в [1]. В целом же можно сказать, что самые предварительные результаты проводимых исследований ставят под сомнение возможность организации работы большой сети – уже с несколькими десятками узлов – даже в случае низкой нагрузки. Таким образом, подвергается сомнению возможность использования для доступа к среде исключительно метода случайного доступа, и назревает вопрос о *разработке метода координации узлов*, проводимой распределенным образом, для эффективного снижения вероятности коллизий при случайном доступе к среде. Подтверждением этого тезиса служит следующий факт: хотя группа IEEE 802.11s ставит своей целью создание спецификации mesh-сети с поддержкой одновременной работы до 32 узлов, что не так уж и много, в группе уже предпринята попытка модернизации метода доступа к среде: предложен метод МССА, предполагающий возможность гибкого резервирования канала. Однако предложенное решение носит половинчатый характер и требует существенной доработки.

В случае, если удастся решить эту задачу, удастся снизить интерференцию одновременных передач, упорядочив доступ к среде скрытых (англ. hidden) узлов и улучшив тем самым условия приема для засвеченных (англ. exposed) узлов. Эффективность решения определит емкость сети, остальные же пере-

дачи, “не помещающиеся” в выработанное распределенно расписание доступа к среде, сеть обслужить не сможет. В этой связи, *необходимо разработать технологию увеличения емкости сети* до необходимой. Такая технология могла бы опираться на многоканальную работу многоинтерфейсных устройств. Стоит отметить, что *использование в сети нескольких ортогональных каналов* в пределах одного коллизийного домена снижает конкуренцию за канал, что, в свою очередь, само по себе помогает снизить уровень интерференции.

В связи с необходимостью модернизации метода доступа к среде вновь приобретает актуальность вопрос адаптивного выбора сигнально-кодовой конструкции (СКК), используемой для исправления ошибок при приеме кадра. СКК определяет скорость передачи, поэтому данная задача часто именуется задачей выбора скорости (англ. rate adaptation). “Идеальный” выбор СКК должен быть продиктован исключительно уровнем случайных помех в канале, определяющим вероятность PER искажения пакета при передаче (англ. packet error rate), и в идеальном канале (в отсутствии помех) скорость передачи всегда должна быть максимальной. Коллизии, как правило, не могут быть исправлены выбором более устойчивой СКК, поэтому их вероятность контролируется методом доступа к среде, а точнее алгоритмом выбора конкурентного окна (англ. contention window). К сожалению, технология IEEE 802.11 не позволяет распознать причину ошибки при приеме пакета напрямую, поэтому в случае такой ошибки запускаются оба алгоритма сразу: выбирается новое (большее) конкурентное окно и более устойчивая СКК (более низкая скорость передачи). Если ошибка при приеме кадра случилась из-за помех, то необоснованное увеличение конкурентного окна снижает пропускную способность узла. Если же причиной ошибки была коллизия, то выбор более устойчивой СКК не только приводит к необоснованному понижению скорости передачи, но и приводит к росту длительности передаваемых кадров, что, в свою очередь, ведет к повышению вероятности коллизии. В было указано выше, коллизии в mesh-сетях явление значительно более частое, чем в сетях Wi-Fi. Исходя из этого, следует ожидать, что скорость работы соединений сети всегда ниже, чем позволяет уровень помех. Таким образом, организация взаимозависимой работы алгоритмов выбора конкурентного окна и СКК является еще одним открытым вопросом при проектировании протокола работы mesh-сетей на основе технологии IEEE 802.11.

#### 4. Заключение

По-видимому, список открытых задач, составленный в данной работе, мог бы быть намного ши-

ре и включать в себя разработку множества методов, повышающих производительность mesh-сетей в особенно сложных сценариях, или призванных обеспечить поддержку конкретных приложений, например, передачу видео трафика, сжатого с помощью MPEG-4. Однако ввиду ограниченного объема работы основное внимание было уделено вопросам, которые касаются собственно mesh-сервисов сети и таких фундаментальных ее свойств как самоорганизация и адаптация к изменениям топологии, вызванных передвижением или отказом узлов сети, и условий радиосреды, и необходимой для этого масштабируемости алгоритмов и протоколов mesh-сети.

В заключении, автор хотел бы поблагодарить своих коллег, многочисленные беседы с которыми во многом способствовали написанию данной работы.

#### Список литературы

- [1] А.И. Ляхов, И.А. Пустогаров, А.С. Гудилов. Проблема неравномерного распределения пропускной способности канала в сетях IEEE 802.11. *Информационные процессы*, 8(3):149–167, 2008.
- [2] М.Ю. Якимов, А.В. Сафонов. Поддержка надежной многоадресной передачи в беспроводном протоколе IEEE 802.11. In *Информационные технологии и системы (ИТиС)*, 2007.
- [3] L. Buttyan. An authentication scheme for qos-aware multi-operator maintained wireless mesh networks. In *HotMesh*, 2009.
- [4] M. Charikar, C. Chekuri, T. yat Cheung, Z. Dai, A. Goel, S. Guha, and M. Li. Approximation algorithms for directed steiner problems. *Journal of Algorithms*, pages 73–91, 1998.
- [5] *IEEE P802.11s/D3.0. Draft STANDARD for Information Technology – Telecommunications and information exchange between systems – Local and metropolitan area networks – Specific requirements – Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications Amendment: Mesh Networking [Electronic resource]*, 2009.
- [6] *IEEE Standard for Information technology – Telecommunications and information exchange between systems – Local and metropolitan area networks – Specific requirements – Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*, 2007.
- [7] ITU-T. Recommendation G.107 The E-Model - A Computational Model In Use In Transmission Planning. Technical report, March 2005.
- [8] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, 1972.
- [9] A. Yarali, B. Ahsant, and S. Rahman. Wireless mesh networking: A key solution for emergency & rural applications. In *Second International Conference on Advances in Mesh Networks*, 2009.

# Метрика маршрутизации для трафика, чувствительного к задержкам

Евгений Хоров  
ИППИ РАН  
khorov@iitp.ru

## Аннотация

*При передаче голосового и видео трафика в mesh-сетях огромное значение при субъективной оценке качества сервиса имеет время доставки пакетов, которое должно влиять на выбор маршрута для данных категорий трафика. Принятая в качестве основной метрики стандарта IEEE 802.11s, описывающего работу сетей WiFi Mesh, Airtime Link Metric учитывает только непосредственное время занятости среды, в то время как на задержку пакета на каждом звене влияют также время ожидания в очереди и длительности слотов отсрочки, которые отсчитываются станцией прежде, чем та начнет передачу. В работе предлагается метрика маршрутизации, позволяющая оценить время доставки пакетов от источника до получателя с учетом этих факторов. Кроме того, описываются способы получения значения метрики на основании статистических данных по переданным пакетам и оценки этого значения в случае, если пакеты не передавались.*

## 1. Введение

Беспроводные сети имеют много преимуществ перед традиционными проводными: дешевизна развертывания, легкость при использовании, отсутствие проводов, мобильность и т. п., чем обуславливается их широкое распространение. Огромный интерес представляют mesh-сети – самоорганизующиеся беспроводные сети, узлы которых (mesh-станции) реализуют функцию динамической адаптивной маршрутизации.

Наибольшее развитие и популярность получила технология Wifi Mesh на базе IEEE 802.11s [1] – черновой версии дополнения к стандарту IEEE 802.11 [2]. В спецификации описывается весь набор протоколов, необходимых для построения и поддержки многошаговой беспро-

водной сети с распределенным управлением. В то же время она дает рамочное описание работы mesh-устройств в сети в той или иной ситуации, но не описывает конкретных алгоритмов их работы. С одной стороны, это позволяет использовать единый стандарт для mesh-сетей различного назначения, но, с другой стороны, не позволяет создать законченное mesh-устройство, руководствуясь лишь стандартом IEEE 802.11s. В частности, остаются открытыми вопросы, касающиеся маршрутизации трафика, чувствительного к задержкам: например, голосового и видео потока. Хотя стандарт [2] вводит дифференциацию категорий доступа к каналу для пакетов с различными требованиями к качеству обслуживания, дополнение [1] описывает методы построения маршрутов и метрику маршрутизации, единые для всех типов трафика. В данной работе предлагается и исследуется метрика маршрутизации, которую можно использовать для выбора маршрута передачи данных, чувствительных к задержкам.

Дальнейшее изложение построено следующим образом: раздел 2 посвящен обзору существующих метрик, наиболее часто используемых в mesh-сетях; в разделе 3 представлено описание оригинальной метрики Delay, включая способы ее измерения и оценки, когда измерение невозможно; сравнение результатов использования этой метрики и метрики, описанной в спецификации [1], представлено в разделе 4.

## 2. Обзор существующих метрик

При решении задачи маршрутизации – поиска пути для доставки пакетов от отправителя до получателя – необходимо отобразить реальную сеть во взвешенный граф, т.е. задать функцию “стоимости” пересылки пакета по звену на множестве значений физических характеристик звена сети. Эту функцию называют *метрикой звена*. Метрики, такие что метрика пути  $L(Route)$  равна арифметической сумме

метрик звеньев  $l(r)$ , из которых этот путь состоит, т.е.:

$$L(Route) = \sum_{r \in Route} l(r), \quad (1)$$

называются аддитивными. Данный класс метрик может использоваться большим количеством протоколов маршрутизации: фактически любым протоколом, построенном на основе распределенных алгоритмов Беллмана-Форда и Дейкстры.

Для выбора метрики звена необходимо задаться критерием оптимальности маршрута, который позволит оценить “качество” выполнения маршрутизации. Выбирать критерий следует исходя из требований к сети и требований к качеству обслуживания трафика, причем для каждой категории качества обслуживания критерий может быть свой.

Согласно методам оценки (MOS, E-model [3]), принятым Международным союзом электросвязи (ITU), существенное влияние на качество передачи голоса оказывают

- время доставки – в работе рассматривается время доставки пакета на MAC уровне, т. е. время, прошедшее с момента прихода пакета с сетевого уровня на MAC уровень станции-источника до момента получения пакета сетевым уровнем на станции-получателе;
- джиттер (англ. – jitter) – вариация интервалов времени между двумя подряд пришедшими пакетами;
- доля потерянных пакетов.

Это в равной степени относится и к передаче видеотрафика.

Будем считать, что в mesh-сети используется механизм поддержания звеньев с соседями, описанный в спецификации [1], при котором данные по звену могут передаваться, только если открыто соединение между станциями, инцидентными данному звену. Естественно предположить, что в случае большой доли потерянных пакетов, соединение будет закрыто. Это позволит считать вероятность доставки пакета по открытым звеньям близкой к 1 и не учитывать долю потерянных пакетов. Также не будем учитывать джиттер, поскольку уменьшить джиттер можно, используя буферизацию на уровне приложения; следствием этого, правда, станет увеличение времени доставки на этом уровне.

Таким образом, наибольшее значение имеет время доставки, и в качестве критерия оптимального маршрута выступает условие мини-

мального времени доставки пакетов от источника до конечного получателя среди всех возможных маршрутов.

Ниже представлен обзор метрик, наиболее часто встречающихся в литературе и используемых в mesh-сетях, а также приводится оценка их соответствия сформулированному выше критерию.

Большинство существующих сегодня протоколов маршрутизации (OLSR [4], AODV [5], ZRP [6]) предполагают использование простейшей метрики: количество звеньев (англ. – hop count). Длина пути по этой метрике численно равна количеству звеньев, из которых этот путь состоит. Однако данная метрика является неэффективной в беспроводных сетях, поскольку не учитывает качество звеньев: номинальную скорость передачи, количество повторов передачи пакета, долю отброшенных пакетов, загруженность передатчика и т. п.

Используемая в [1] метрика Airtime Link Metric (далее ATL) учитывает номинальную скорость передачи по звену и количество попыток передач. Значение метрики звена  $(i, j)$  определяется формулой:

$$\alpha_{ij} = \left( O + \frac{P}{r_{ij}} \right) \eta_{ij}, \quad (2)$$

где  $\eta_{ij} = \frac{1}{1 - (e_f)_{ij}}$ .

$O$  – константа, которая определяет вклад в занятость среды, не зависящий от номинальной скорости передачи, значение  $P$  равно стандартному размеру пакета (в битах),  $r_{ij}$  – номинальная битовая скорость передачи по звену  $(i, j)$ ,  $\eta_{ij}$  отражает среднее количество попыток, которое надо совершить, чтобы передать пакет стандартного размера,  $(e_f)_{ij}$  – вероятность того, что попытка передачи пакета будет неуспешной. Попытка могла оказаться неуспешной, например, вследствие коллизии – одновременных передач пакетов двумя или более станциями, находящимися в области слышимости приемника пакета.

Спецификация определяет  $r_{ij}$  как скорость, на которой будет передаваться пакет стандартного размера в соответствии с используемым модулем адаптивного управления скоростью передачи и текущей статистикой по посланным пакетам. Спецификация не оговаривает, как оценивать  $(e_f)_{ij}$ . Одним из рассматриваемых способов является посылка пробных пакетов стандартного размера, однако данное решение приводит к огромным накладным расходам, и в силу того, что поддерживать актуальность значения метрики звена надо постоянно, такие пакеты придется слать часто, что

негативно скажется на общей производительности сети. Таким образом, при использовании этой метрики необходимо предусмотреть способ оценки значения ее без посылки пробных пакетов.

Схожа с АТЛ метрика ЕТТ [7], отличающаяся лишь тем, что  $O = 0$ .

Метрика АТЛ обладает прозрачным физическим смыслом: время занятости канала при передаче одного стандартного пакета по звену  $(i, j)$ . Часто (например, в ненагруженной сети или малонагруженной сети с равномерной плотностью устройств) выбор маршрута согласно этой метрике будет также оптимальным с точки зрения озвученного выше критерия, однако, очевидно, что для неоднородной загруженной сети это не верно: на задержку будет сильно влиять время ожидания в устройстве перед передачей (подробно см. в разделе 3).

Также следует отметить, что изменения времени занятости канала на одну и ту же величину в различных участках сети не являются равнозначными: например, если в одной области среда была свободной, а в другой передавался насыщенный трафик. Во втором случае маршрутизация нового потока приведет к увеличению коллизий, кроме того, в результате деления канала (среды) пропускная способность для уже существующих потоков уменьшится, а для нового трафика будет небольшой.

Существуют несколько эмпирических метрик, стремящихся учесть этот эффект. Например, одна из них, метрика IRU [8], учитывает количество станций в окрестностях звена (в зоне слышимости как источника  $i$ , так и приемника  $j$ ). Значение метрики звена задается формулой

$$IRU_{ij} = \alpha_{ij}N, \text{ где } N = |N(i) \cup N(j)|, \quad (3)$$

а  $N(x)$  – количество станций, находящихся в области слышимости станции  $x$ . Естественно, что эта эмпирика не является точной, поскольку степень негативного влияния на качество передачи по звену  $(i, j)$  (коллизии, занятость канала) со стороны каждой из этих  $N$  станций не одинакова.

Существуют метрики, вносящие поправки, учитывающие явление самоинтерференции потока пакетов, т. е. явление конкуренции за канал двух или более станций при передаче ими кадров, относящихся к одному и тому же потоку. Самоинтерференция возникает (вносит значительный вклад во время передачи пакета), когда несколько соседних станций, участвующих в передаче пакетов одного и того же потока работают на одном частотном канале, а сам поток достаточно насыщен.

При передаче голосового трафика, а также видеотрафика малой интенсивности самоинтерференция не возникает, поэтому не будем останавливаться на учете этого явления подробно. Однако заметим, что методы введения поправок, учитывающих самоинтерференцию и превращающих ЕТТ, например, в метрику WSETT [7], а IRU – в MIC [9], применимы и к описываемой ниже метрике Delay.

### 3. Метрика Delay

Описанные в разделе 2 метрики, в том числе метрика АТЛ, используемая по умолчанию в стандарте [1], не позволяют осуществлять маршрутизацию согласно выбранному критерию, поэтому необходимо разработать новую метрику. Поскольку время доставки состоит из задержки на звене, естественно использовать аддитивную метрику Delay, значение которой на звене отражает среднюю задержку пакета стандартного размера при передаче на нем. Эта задержка состоит из времени ожидания в очереди и времени обслуживания.

Чтобы отправить пакет соседней станции  $j$ , станция  $i$  помещает его в очередь, соответствующую категории требований к качеству обслуживания. В предположении, что потоки квазистационарные, среднее время ожидания *waiting*; в очереди не зависит от приемника пакета. По прошествии этого времени пакет *начнет обслуживаться*. Для этого значение счетчика слотов отсрочки будет проинициализировано в соответствии с [2] случайным целым числом из определенного диапазона – конкурентного окна  $[0, CW]$ . Пока среда остается пустой, счетчик уменьшается на 1 через каждые  $\sigma$  мкс (происходит отсчет слотов); когда среда занята, значение счетчика не меняется; при освобождении среды счетчик уменьшается на 1. Как только значение счетчика обнуляется, устройство приступает к попытке передачи. Если она была успешной, то станция  $i$  получит подтверждение от станции  $j$  – короткий пакет АСК; иначе станция  $i$  должна будет повторить попытку, предварительно заново установив счетчик на новое случайное число из конкурентного окна, которое увеличивается в 2 раза с каждой попыткой, пока не достигнет максимально возможного значения. Значения начального и максимально возможного конкурентных окон устанавливаются свои для каждой категории трафика. Если спустя определенное число попыток передача не удалась (например, из-за постоянных коллизий на приемнике), то пакет отбрасывается. Среднюю суммарную длительность интервалов, в течение которых отсчитывались

слоты при осуществлении всех необходимых попыток передачи, обозначим  $backoff_{ij}$ . Среднее значение суммарной длительности интервалов, в течение которых среда была занята при выполнении всех попыток передачи одного пакета, соответствует значению  $\alpha_{ij}$  метрики АТЛ, описанной в разделе 2.

Таким образом, средняя задержка на звене будет определяться формулой:

$$D_{ij} = waiting_i + B_{ij}, \text{ где } B_{ij} = \alpha_{ij} + backoff_{ij}, \quad (4)$$

$B_{ij}$  – время обслуживания. Здесь и далее мы пренебрегаем временем, в течение которого драйвер устройства выполняет различные вычислительные процедуры. Учет этого времени приводит к появлению в формуле (4) дополнительного слагаемого, зависящего от типа устройства и производительности его процессора.

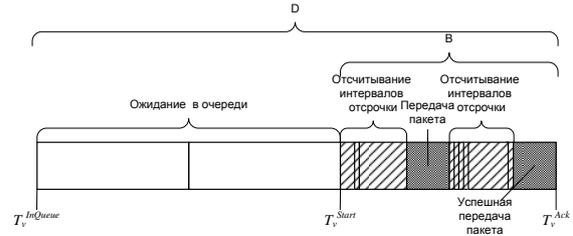
Введем некоторые обозначения. Для каждого передаваемого пакета  $v$  устройство может определить (см. рис. 1):

- момент  $T_v^{InQueue}$  постановки пакета в очередь: определяется напрямую драйвером устройства по запомненному при постановки пакета в очередь значению таймера устройства;
- момент  $T_v^{Ack}$  получения подтверждения о доставке пакета (или момент окончания последней попытки, если она была так же, как и предыдущие, неудачной): определяется напрямую драйвером;
- момент  $T_v^{Start}$  начала обслуживания пакета (первой установки счетчика отсрочки): если пакет был помещен в пустую очередь, то  $T_v^{Start} = T_v^{InQueue}$ ; иначе  $T_v^{Start} = T_{v-1}^{Ack}$ ;
- суммарную длительность  $\alpha_v$  интервалов времени, в течение которых среда была занята при передаче этого пакета:  $\alpha_v$  определяется по формуле (2), в которую в качестве параметров  $P$ ,  $r_{ij}$  и  $\eta_{ij}$  подставляются соответственно фактические значения размера пакета  $P_v$ , скорости передачи  $r_v$  и количества попыток передачи  $\eta_v$   $v$ -того пакета.

Значение метрики Delay на звене оценивается по-разному в зависимости от того, передавались пакеты по звену или нет.

**А)** Случай наличия трафика. Пусть по звену  $(i, j)$  был передан пакет  $v$ . Задержка для него на устройстве  $i$  равна

$$D_v = T_v^{End} - T_v^{InQueue}. \quad (5)$$



**Рис. 1.** Задержка при передаче пакета по звену.

Для оценки значения метрики звена необходимо выполнить усреднение по переданным пакетам. При усреднении  $D_v$  учтем, что пакеты могли иметь различную длину  $P_v$ , а метрика должна быть рассчитана на длину  $P$  стандартного пакета. Далее будем считать, что длина пакета не влияет на количество попыток передачи (номинальная скорость выбрана такой, что соответствующая ей сигнально-кодовая конструкция обеспечивает высокую вероятность успешного декодирования пакета, и ошибки передачи определяются, в основном, коллизиями). Тогда необходимо лишь пересчитать суммарную длительность интервалов занятости канала при передаче  $v$ -го пакета. Пусть  $v$ -ый пакет передавался на скорости  $r_v$ , причем всего было  $\eta_v$  попыток, размер пакета –  $P_v$ . Тогда значение  $D_v$ , пересчитанное для пакета стандартной длины, определяется следующим образом.

$$D_v^{st} = D_v + \frac{P-P_v}{r_v} \eta_v. \quad (6)$$

Кроме того, при усреднении целесообразно ввести весовую функцию  $weight_P(P_v)$  с максимумом  $weight_P(P) = 1$ . В качестве такой функции может, например, выступать  $weight_P(P_v) = e^{-(P-P_v)^2}$ . Введение такой весовой функции призвано учесть неточность, которая была внесена выше предположением об отсутствии зависимости между длиной пакета и вероятностью его успешного приема.

Уменьшим разброс значений метрики, используя экспоненциально взвешенное усреднение. При окончании передачи каждого пакета (в момент  $T_v^{Ack}$ ) метрика Delay пересчитывается по формуле

$$(D_{ij})_A = \frac{(D_{ij})_{last} \exp_{\eta_v} + D_v^{st} \exp_{\eta_v} weight_P(P_v)}{\exp_{\eta_v} + weight_P(P_v)}, \quad (7)$$

где  $D_{last}$  – прошлое значение метрики,  $\exp_{\eta_v} = e^{T_v^{Ack} - T_{v-1}^{Ack} + \Delta_+}$ ;  $\Delta_+$  – коэффициент, отвечающий за устаревание информации; значения  $T_v^{Ack}$ ,  $T_{v-1}^{Ack}$ ,  $\Delta_+$  подставляются в формулу, выраженными в секундах. Пусть  $\Delta_+ = 3$  и в течение

3 секунд пакеты не передавались. Тогда компонента  $D_v^s$  в (6), подсчитанная для одного пакета, переданного спустя эти 3 секунды по звену  $(i, j)$ , при усреднении будет иметь тот же вес, что и прошлое значение метрики  $D_{last}$ , посчитанное 3 секунды назад.

**В)** Случай отсутствия трафика. Пусть за некоторый промежуток времени  $\Delta t$ , пакеты по звену  $(i, j)$  не передавались, но могли передаваться станцией  $i$  по другим звеньям. Тогда метрика  $D_{ij}$  оценивается по формуле

$$(D_{ij})_B = B_{ij} + \langle T_v^{Start} - T_v^{InQueue} \rangle_{v \in V_i(\Delta t)}, \quad (8)$$

где усреднение  $\langle T_v^{Start} - T_v^{InQueue} \rangle_{v \in V_i(\Delta t)}$  берется по всему множеству  $V_i(\Delta t)$  переданных станцией  $i$  за исследуемый интервал  $\Delta t$ , причем, если пакеты вообще не передавались станцией  $i$ , то очередь была пустой, и, следовательно,  $\langle T_v^{Start} - T_v^{InQueue} \rangle_{v \in V_i(\Delta t)} = 0$ . При усреднении  $\langle T_v^{Start} - T_v^{InQueue} \rangle_{v \in V_i(\Delta t)}$  применяется экспоненциальное среднее, аналогично (7).

Оценим значение  $B_{ij}$  (см. 4). Значение  $\alpha_{ij}$  можно оценить, исходя из значения ожидаемой скорости передачи, полученной из модуля выбора скорости (как при использовании ATL), и ожидаемого количества попыток передачи, которое можно принять равным среднему значению количества попыток передачи для последних посланных пакетов по звену  $(i, j)$  (включая пакеты, посланные из других очередей); если данные не передавались, то этими пакетами станут кадры, посланные при открытии соединения. Этот метод достаточно прост при реализации, однако его недостатками являются, во-первых, возможная флуктуация значения скорости, вызванная тем, что при расчете учитывается мгновенное значение, а не среднее; во-вторых, использование устаревшей информации по среднему количеству попыток, необходимых для передачи пакета.

Можно применить и другой подход, требующий, однако, передачи (например, в периодически посылаемых пакетах – биконах) станцией  $j$  станции  $i$  некоторой информации. Он основывается на том, что в отсутствии коллизий можно оценить максимальную скорость, которая обеспечит приемлемую (90%) вероятность успешной передачи [10]. Эта скорость определяется отношением  $SNR_{ij}$  уровня сигнала от станции  $i$  на станции  $j$  к уровню шума по таблице 1.

При передаче на скорости, выбранной в соответствии с таблицей 1, повторные попытки в mesh-сети будут обуславливаться главным образом коллизиями со скрытыми станциями – т.

Диапазон $SNR_{ij}$ , дБ	Скорость $r_{ij}$ , Мбит/с
... 3.5	6
3.5 ... 3.8	9
3.8 ... 6.5	12
6.5 ... 8.8	18
8.8 ... 12.3	24
12.3 ... 16.8	36
16.8 ... 19.0	48
19.0 ...	54

**Таблица 1. Максимальная скорость, обеспечивающая вероятность успешной попытки передачи не ниже 90%, при различных значениях SNR**

е. соседями приемника, находящимися вне области слышимости источника. Вред от коллизий со скрытыми станциями можно оценить по доле потерянных биконов: учитывая, что станции  $j$  известен период рассылки биконов станцией  $i$ ,  $j$  может определить долю потерянных биконов  $\chi_{ij}$ .

По значению  $\chi_{ij}$  оценим снизу  $\eta_{ij}$ :  $\eta_{ij} = \frac{1}{1-\chi_{ij}}$ . Усреднять  $\eta_{ij}$  можно, используя экспоненциальное среднее, аналогично формуле 7.

Таким образом, станция  $j$  определяет значение  $\alpha_{ij}$ , которое можно сообщать станции  $i$  в биконах.

Значение  $backoff_{ij}$  определяется средним значением произведения количества  $b_{ij}$  виртуальных слотов, которые станции отсчитывает в течение всех попыток передачи пакета, и промежутка времени  $T^{slot}$  между двумя последовательными отсчетами слотов:

$$backoff_{ij} = \langle bT^{slot} \rangle. \quad (9)$$

Пусть  $k$  – номер попытки. Поскольку количество слотов отсрочки выбирается равновероятно из конкурентного окна – диапазона целых чисел от 0 до  $CW_k$ , то среднее значение суммарного количества слотов при  $\eta$  попыток будет определяться формулой:

$$b(\eta) = \sum_{k=1}^{\eta} \frac{CW_k}{2}. \quad (10)$$

Пусть при передаче по звену  $(i, j)$  одного пакета вероятность неудачной попытки –  $(e_f)_{ij}$ , тогда среднее значение  $b_{ij}$  суммарного количества слотов, отсчитываемых при передаче по звену  $(i, j)$  пакета стандартного размера определяется по формуле:

$$b_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{\eta} CW_k (e_f)_{ij}^{k-1}}{2}. \quad (11)$$

$\langle T^{slot} \rangle$  очень удобно (и просто) измерять аппаратно, однако современные устройства не об-

ладают соответствующей функциональностью. Поэтому, чтобы получить значение этой величины, можно поступить, например, следующим способом: станция  $l$ , передающая пакеты, определяет  $\langle T_l^{slot} \rangle = \langle \frac{T_v^{End} - T_v^{Start} - \alpha_v}{b(\eta_v)} \rangle_{v \in V_l(\Delta t)}$ , а затем рассылает это значение, например, в биконах; в свою очередь станция  $i$  может использовать в качестве  $T_i^{slot}$  среднее значение принятых  $\langle T_l^{slot} \rangle_l$  от своих соседей.

Таким образом, значение метрики Delay можно оценить и в случае отсутствия трафика без отправки пробных пакетов.

Когда устройству требуется значение метрики, то в качестве него используется величина

$$D = \frac{D_A e^{T_{last}^{Ack} - Now + \Delta_{tot}} + D_B}{1 + e^{T_{last}^{Ack} - Now + \Delta_{tot}}}, \quad (12)$$

где коэффициент  $\Delta_{tot}$  задает степень устаревания значения метрики, определенной по переданным по звену  $(i, k)$  пакетам,  $T_{last}^{Ack}$  – время получения последнего кадра-подтверждения АСК (если пакеты не передавались, то  $T_{last}^{Ack} = -\infty$ ), а  $D_A$  и  $D_B$  – значения метрик, определенные согласно способам, изложенным в пунктах А) и В). При вычислении  $D_B$  можно положить  $\Delta t = 1$  сек. Поскольку значение метрики, полученное по способу В), имеет большую погрешность, целесообразно выставить  $\Delta_{tot}$  большим, например  $\Delta_{tot} = 10$ .

#### 4. Сравнение эффективности метрики Delay с АТЛ

Рассмотрим эффективность предлагаемой метрики на следующем примере. Пусть станции расположены в вершинах правильного 8-миугольника, как показано на рис. 2.

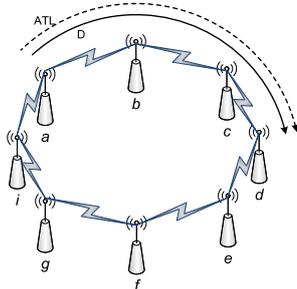


Рис. 2. Маршрутизация при отсутствии трафика в сети

Сторона многоугольника выбрана так, что только станции в соседних вершинах находятся в зоне слышимости друг друга. Пусть необходимо осуществить передачу голосового трафика

ка от станции  $a$  до станции  $d$ . При отсутствии других передач в сети обе метрики (АТЛ и D) всех звеньев одинаковы: кратчайший по метрике АТЛ маршрут от  $a$  до  $d$  пройдет через станции  $b$  и  $c$ . Этот маршрут будет также и самым коротким в метрике Delay.

Пусть теперь от станции  $b$  к станции  $c$  идет насыщенный поток пакетов, в результате которого, среднее число пакетов в очереди на станции  $b$  существенно отлично от нуля; при этом значение метрики АТЛ звена  $(b, c)$  не изменится. Из-за этого возникает значительная задержка, которую не учитывает метрика АТЛ, но учитывает Delay. В результате, при использовании последней выбирается путь, изображенный на рис. 3.

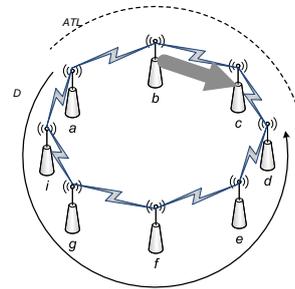


Рис. 3. Маршрутизация при непустой очереди на станции  $b$ .

#### 5. Выводы

Беспроводные сети на базе [1] могут использоваться для передачи трафика чувствительного к задержкам. Однако используемая по умолчанию в стандарте метрика АТЛ не позволяет выбирать маршрут с минимальным временем доставки пакетов, которое напрямую влияет на субъективную оценку качества голоса. В работе предлагается использовать метрику Delay, соответствующую среднему времени доставки пакетов и описываются способы определения значения метрики на звене (средней задержки) в случае существования трафика по нему, а также способы оценки метрики, когда этого трафика нет. Продемонстрирован пример сценария, в котором применение метрики Delay позволят повысить субъективную оценку качества услуги передачи трафика, чувствительного к задержкам.

В дальнейшем по результатам имитационного моделирования планируется получить количественную оценку эффективности предлагаемой метрики в зависимости от значений констант, используемых при определении значения

метрики Delay, а также от способа оценки метрики звена при отсутствии трафика по нему.

## Список литературы

- [1] *IEEE P802.11s/D3.0. Draft STANDARD. Mesh Networking*, 2009.
- [2] *IEEE Standard for Information technology-Telecommunications and information exchange between systems-Local and metropolitan area networks-Specific requirements - Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*, 2007.
- [3] ITU-T, *Recommendation G.107. The E-model, a computational model for use in transmission planning*.
- [4] J. Macker and J. Dean, "A study of link state flooding optimizations for scalable wireless networks," *Military Communications Conference, 2003. MILCOM 2003. IEEE*, vol. 2, pp. 1262–1267, Oct. 2003.
- [5] "Ad hoc on-demand distance vector routing protocol," internet-draft, IETF MANET Working Group, February 2003 2003. Expiration: August 17, 2003.
- [6] Z. J. Haas, M. R. Pearlman, and P. Samar, "The zone routing protocol (zrp) for ad hoc networks," internet-draft, IETF MANET Working Group, July 2002. Expiration: January, 2003.
- [7] R. Draves, J. Padhye, and B. Zill, "Routing in multi-radio, multi-hop wireless mesh networks," in *MobiCom '04: Proceedings of the 10th annual international conference on Mobile computing and networking*, (New York, NY, USA), pp. 114–128, ACM, 2004.
- [8] Y. Yang, J. Wang, and R. Kravets, "Designing routing metrics for mesh networks," in *In WiMesh*, 2005.
- [9] Y. Yang, J. Wang, and R. Kravets, "Load-balanced routing for mesh networks," *SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, vol. 10, no. 4, pp. 3–5, 2006.
- [10] В.М. Вишнеvский, А.И. Ляхов, М.Ю. Якимов, "Оптимизация работы высокоскоростной беспроводной сети в условиях помех," *Электросвязь*, pp. 16–19, 8 2007.

## Физическая модель интерференции прямых соединений: классификация и анализ возможных случаев

А.Н. Красилов  
ИППИ РАН  
krasilov@iitp.ru

### Аннотация

*В последнее время появился ряд работ, в которых с помощью аналитического и имитационного моделирования было показано что принципы, положенные в стандарт IEEE 802.11, оказываются неэффективными для многошаговых сетей, описанных в дополнении IEEE 802.11s. В частности, использование метода доступа CSMA/CA ведет к непропорциональному разделению пропускной способности между станциями. Однако, представленные в этих работах упрощенные «протокольные» модели интерференции не учитывали характерный для беспроводных сетей эффект захвата, при котором пара станций может успешно обмениваться данными, даже если одновременно с ними передает другая станция, находящаяся в их зоне интерференции. Это, в свою очередь, приводило к существенным различиям в результатах, полученных посредством моделирования и натурального эксперимента.*

*В данной работе используется так называемая «физическая» модель интерференции, которая позволяет учесть эффект захвата и более точно описать взаимодействие канального и физического уровней IEEE 802.11. Проводится классификация и детальный анализ возможных случаев интерференции соединений при условии, что все станции располагаются на одной прямой. Среди них выявляются случаи, которые приводят к неравномерному распределению пропускной способности, и определяется вероятность их появления.*

### 1. Введение

Традиционно считается, что одним из факторов, обеспечившим беспрецедентный коммерческий успех технологии WiFi, является сочетание простоты заложенных в нее принципов (и, в частности, простоты метода доступа к среде CSMA/CA) и приемлемой скорости передачи данных. Коммерческий успех, в свою очередь, подтолкнул мировое сообщество к использованию механизмов IEEE 802.11 в

приложениях, для которых изначально он не был предназначен. Так, в настоящее время дополнение в стандарт IEEE 802.11s [2], регламентирующее работу многошаговой беспроводной сети – mesh-сети – практически завершено, и устройства, его реализующие, все стремительней появляются на рынке.

Несмотря на это, оказывается, что метод доступа к среде CSMA/CA, прекрасно работавший в одношаговых сетях, оказывается малоэффективным в mesh-сетях. Об этом говорит ряд проведенных в последнее время исследований [3,4], показавших, в частности, существование проблемы непропорционального распределения пропускной способности станций, вызванной взаимной интерференцией передаваемых сигналов.

В общем случае для описания эффекта взаимной интерференции возможно использовать одну из двух моделей: протокольную и физическую. До сих пор для описания нежелательных эффектов, возникающих в mesh-сети, использовалась протокольная модель интерференции, что сильно упрощало анализ, но в то же время и приводило к результатам, не соответствующим в полной мере действительности. В частности, это связано с тем, что протокольная модель не учитывает так называемый эффект захвата, при котором пара станций может успешно обмениваться данными, даже если одновременно с ними передает другая станция, находящаяся в их зоне интерференции.

В данной работе для описания интерференции прямых соединений предлагается использовать физическую модель, которая позволяет учесть эффект захвата и более точно описать взаимодействие канального и физического уровней IEEE 802.11. Оказывается, что при таком подходе возникает намного больше случаев взаимодействия станций, нежели при использовании протокольной модели.

В статье рассматривается работа беспроводной сети, состоящей из четырех станций, расположенных в цепочку, и исследуется зависимость пропускной способности от уровня принимаемого сигнала. Также, подробно анализируются возникающие в сети эффекты. Проводится классификация

детальный анализ возможных случаев интерференции. Среди них выявляются случаи, которые приводят к неравномерному распределению пропускной способности, и определяется вероятность их появления. В заключении делаются выводы о том, как полученные результаты могут повлиять на разработку различных решений в mesh-сети.

## 2. Метод доступа к беспроводному каналу в mesh-сетях IEEE 802.11s

Беспроводная mesh-сеть – это многошаговая сеть, устройства которой (mesh-станции, Mesh Points) способны обмениваться данными как напрямую, когда это возможно, так и не напрямую посредством передачи данных через соседние с ними устройства (ретрансляции). В основу работы mesh-сетей, работающих под управлением протокола IEEE 802.11s, положен метод доступа к беспроводной среде CSMA/CA.

Суть метода CSMA/CA заключается в следующем. Прежде чем начать передачу каждая станция сети, убедившись, что среда свободна, т.е. в среде никто не передает, выжидает в течение случайно выбираемого интервала отсрочки (Backoff time). Интервал отсрочки формируется из слотов постоянной длительности  $\sigma$ , а число этих слотов равновероятно выбирается из множества  $[0, CW]$ . Величина  $CW$  называется конкурентным окном (Contention Window). Если предыдущая передача прошла успешно, то конкурентное окно равно своему минимально возможному значению  $CW_{min}$ . В противном случае, оно определяется числом  $k$  неудачных попыток передачи кадра и равно  $CW_k = W_k - 1 = (CW_{min} + 1)2^k - 1$ , однако, не может быть больше некоторого значения  $CW_{max} = (CW_{min} + 1)2^m - 1$ . Отсчет времени отсрочки приостанавливается, когда канал становится занят (в восприятии данной станции), и в следующий раз счетчик уменьшится только тогда, когда канал окажется свободен в течение интервала  $DIFS$ , если прием последнего кадра, зафиксированного данной станцией, был успешен, или  $EIFS$ , если неудачен.

Довольно часто в mesh-сетях возникает ситуация, когда две пары станций одновременно начинают передавать данные, и при этом приемник одной пары попадает в зону действия передатчика другой пары (рис. 1). Например, если станция А и С начнут одновременно передавать, то В не сможет успешно принять кадр от А, а D успешно примет кадр от С. Эта проблема называется проблемой взаимной интерференции прямых соединений.

## 3. Модели интерференции

На сегодняшний день известно две модели описания эффекта взаимной интерференции беспроводных станций: протокольная [3] и физическая [5].

### 3.1. Протокольная модель

В протокольной модели для каждой станции определены две области: зона уверенного приема (TX) и зона интерференции (CS) (рис. 1). В отсутствие препятствий TX представляет собой круг, а CS - кольцо, покрывающее TX. Передача от станции А к станции В считается успешной, если В находится в зоне уверенного приема А и при этом В не находится в зоне интерференции или зоне уверенного приема какой-либо другой станции, передающей в это же время. Например, если станции А и С будут передавать одновременно, то станция В не сможет принять кадр от станции А.

Все станции находящиеся в зоне интерференции или зоне уверенного приема передающей станции считают среду передачи занятой. Например, если А начала передавать к В, то Е откладывает свою передачу, в то время как С считает среду свободной и может начать передачу, что приведет к коллизии на станции В.

На основе протокольной модели в работе [3] был предложен ряд аналитических моделей для изучения влияния интерференции на показатели производительности соединений, которые показали, что в определенных случаях наблюдается неравномерность распределения пропускной способности между соединениями. Однако, протокольная модель не учитывает характерный для беспроводных сетей эффект захвата, что, в свою очередь, приводило к различиям результатов, полученных посредством аналитического расчета и натурального эксперимента.

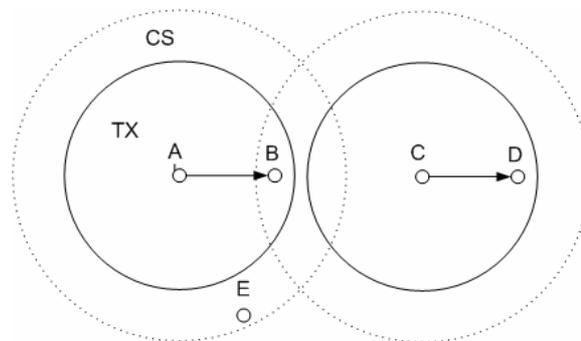


Рисунок 1. Фрагмент беспроводной сети для описания проблемы интерференции и протокольной модели

### 3.2. Физическая модель

Физическая модель более строго описывает процесс передачи кадра между станциями с точки зрения физического уровня, отсюда и ее название. В модели принимаемый станцией сигнал состоит из трех компонент: полезного сигнала (сигнала от передающей станции), интерференционной составляющей (суммы всех сигналов от остальных станций, передающих в данное время) и фонового шума.

В отсутствие препятствий ослабление сигнала между станциями, находящимися на расстоянии  $d_0$ , определяется равенством:

$$P_{RX}(d_0) = \bar{P}_{RX} \left( \frac{\bar{d}}{d_0} \right)^\theta, \quad (1)$$

где  $\bar{P}_{RX}$  – мощность принимаемого сигнала, измеренная на расстоянии  $\bar{d}$  (обычно 1 метр), а  $\theta$  – показатель спада уровня сигнала, значение которого варьируется от 2 для свободного пространства до 4 для случая отражения сигнала от поверхности земли.

Станция может успешно принять кадр, если выполнены два условия: 1) мощность полезного сигнала  $P_{RX}(d_0)$  выше порога  $P_R$  (порога чувствительности приемника), 2) величина сигнал-интерференция-шум (SINR) выше порога  $S_0$

$$\begin{cases} P_{RX}(d_0) \geq P_R, \\ \frac{P_{RX}(d_0)}{P_N + \sum_{i \neq 0} P_{RX}(d_i)} \geq S_0, \end{cases} \quad (2)$$

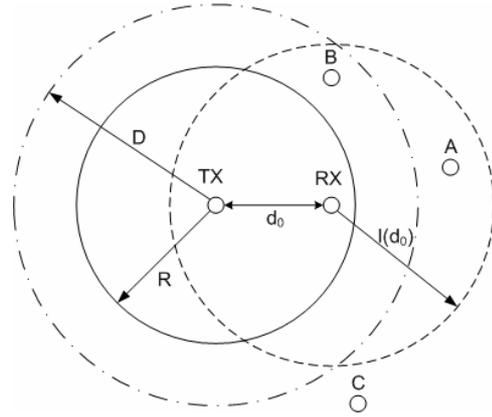
где  $P_N$  – мощность шума,  $P_{RX}(d_i)$  – мощность сигнала от источника, расположенного на расстоянии  $d_i$ . Следует отметить, что стандарт IEEE 802.11 предусматривает возможность работы станций на разных скоростях. При этом, чем выше скорость, тем выше порог  $S_0$ .

Из неравенства (2) следует, что успех передачи кадра между парой станций зависит не только от положения и мощности передатчика, но и от расположения и работы остальных станций.

Рассмотрим фрагмент беспроводной сети, включающий передатчик TX, приемник RX и три соседних с ними узла А, В и С (рис. 2). Считаем, что все станции передают с одинаковой мощностью. Введем следующие понятия и расстояния:

$R$  – радиус зоны уверенного приема,

$$R = \bar{d} \left( \frac{\bar{P}_{RX}}{\max(P_R, S_0 P_N)} \right)^{1/\theta}. \quad (3)$$



**Рисунок 2. Фрагмент беспроводной сети для описания физической модели**

Станция, находящаяся на расстоянии меньше  $R$  от передатчика, успешно принимает кадр данных в отсутствии интерференции. В этом случае  $\sum_{i \neq 0} P_{RX}(d_i) = 0$ , откуда, используя (1) и (2), получаем (3).

$D$  – радиус зоны блокировки (области занятости среды),

$$D = \bar{d} \left( \frac{\bar{P}_{RX}}{P_C} \right)^{1/\theta}, \quad (4)$$

где  $P_C$  – порог занятости среды. Любая станция, обнаружившая в среде сигнал выше  $P_C$ , считает, что среда передачи занята. На рис. 2 для станции В среда передачи занята, в то время как станция А считает среду свободной. Очевидно, что  $R \leq D$ .

$I$  – радиус зоны активной интерференции приемника. Если между TX и RX передается кадр данных, то любая станция, передающая в зоне активной интерференции приемника, “мешает” передаче TX-RX.

$$I(d_0) = d_0 \left[ \frac{1}{\frac{1}{S_0} - \frac{P_N}{P_{RX}} \left( \frac{d_0}{\bar{d}} \right)^\theta} \right]^{1/\theta}. \quad (5)$$

Например, если станция А начинает передавать во время передачи TX-RX, станция RX не сможет верно принять кадр от TX. Напротив, передача станции С не помешает RX принять кадр от TX, так как значение сигнал-интерференция-шум в этом случае оказывается выше порога  $S_0$  (т.е. проявляется эффект захвата).

#### 4. Классификация случаев интерференции

Рассмотрим беспроводную сеть, состоящую из 4-х станций, расположенных на одной прямой (рис. 3). Станции 1 и 2 устанавливаются для передачи данных, а 3 и 4 – другое соединение, при этом станции 1 и 3 находятся в насыщении, т.е. у них всегда есть пакеты для передачи. Все станции передают на одной фиксированной скорости и мощности, что в свою очередь определяет радиус зоны уверенного приема  $R$ , и величину порога  $S_0$ . Радиус зоны блокировки для всех станций также одинаков и равен  $D$ . Расстояние  $L$  между станциями 1-2 и 3-4 выбирается таким образом, чтобы станции находились в зоне уверенного приема друг друга ( $L \leq R$ ).

Пусть  $X$  – расстояние между станциями 1 и 3. Определим значения  $X$  (граничные точки), при которых происходят качественные изменения во взаимодействии станций в сети. Рассмотрим подробно пару станций 1-4:

- $0 \leq X \leq X_1 = R - L$  станции 1 и 4 находятся в зоне уверенного приема друг друга, т.е. в отсутствие коллизий станция 4 успешно принимает кадры, переданные станцией 1.
- $X_1 < X \leq X_2 = D - L$  станции 1 и 4 находятся в зоне блокировки друг друга, но вне зоны уверенного приема.
- $X > X_2$  станции 1 и 4 не слышат друг друга.

Аналогично, для пар станций 1-3 и 2-4 получаем точки  $X_3 = R$  и  $X_4 = D$ , а для пары станций 2-4 – точки  $X_5 = R + L$  и  $X_6 = D + L$ .

Исходя из физической модели интерференции, при одновременной передаче станциями 1 и 3 станция 4 сможет успешно принять кадр от станции 3, если 1 находится вне зоны интерференции станции 4, т.е. при  $X > X_7 = I(L) - L$  (эффект захвата). Аналогично, станция 2 сможет принять кадр от станции 1, если  $X > X_8 = I(L) + L$ .

Точки  $X_i$  разбивают прямую на интервалы, внутри которых реализуется определенные случаи интерференции. На каждом интервале ( $X_i, X_j$ ) пропускная способность соединений 1->2 и 3->4 постоянна.



Рисунок 3. Исследуемая беспроводная сеть

Последовательность, с которой точки  $X_i$  располагаются на прямой, существенно зависит от выбранной скорости и расстояния  $L$ , поэтому в общем случае количество вариантов расположения точек довольно велико. В статье детально рассматривается следующий конкретный пример конфигурации сети: скорость передачи 6 Мбит/с, расстояние  $L=90$  м. Пример выбран таким образом, чтобы показать, насколько существенным является учет эффекта захвата при исследовании интерференции соединений. Для данного примера с помощью имитационного моделирования построен график зависимости пропускных способностей соединений 1->2 и 3->4 от расстояния  $X$ . На основе физической модели проводится качественный анализ и объяснение полученных результатов и выявляются случаи интерференции, которые приводят к неравномерному распределению пропускной способности.

#### 5. Анализ случаев интерференции

Исследование явления интерференции проводилось в среде имитационного моделирования ns-3 [6]. В табл.1 приведены значения используемых в модели параметров. Все мощности в табл.1 выражены в логарифмических единицах относительно мощности в 1 мВт (0 дБм):  $P(\text{дБм}) = 10 \lg(P(\text{мВт})/1 \text{ мВт})$ . Шумом в ns-3 является тепловой шум в цепи приемника. Мощность шума  $P_N = kT \Delta f NF$ , где  $kT \Delta f$  – шум Найквиста,  $NF$  – коэффициент шума [7], определяемый свойствами приемника. В нашем случае  $P_N(\text{дБм}) = kT \Delta f(\text{дБм}) + NF(\text{дБ}) = -101 \text{ дБм} + 7 \text{ дБ} = -94 \text{ дБм}$ .

Таблица 1. Параметры имитационной модели

Параметр модели	Значение
Протокол физического уровня, ширина канала $\Delta f$	802.11a, 20 МГц
Выходная мощность передатчика, $P_0$	16 дБм
Порог чувствительности приемника, $P_R$	-98 дБм
Порог занятости среды, $P_c$	-98 дБм
Показатель спада уровня сигнала, $\theta$	4
Коэффициент шума, $NF$	7 дБ
Уровень шума, $P_N$	-94 дБм
Размер пакета данных на MAC уровне	80 байт

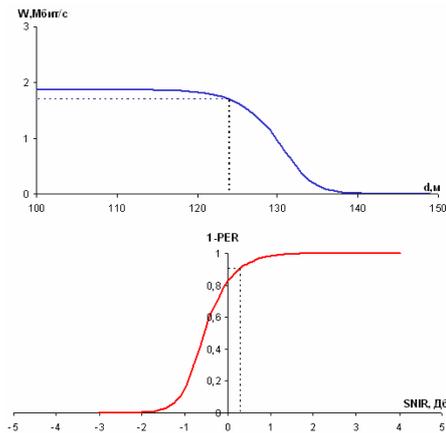


Рисунок 4. Производительность соединения точка-точка

Таблица 2. Показатели производительности соединения точка-точка

Скорость передачи, Мбит/с	6
$W_{max}$ , Мбит/с	1.9
$R$ , м	124
$S_0$ , дБ	0.3

На MAC-уровне все параметры выставлены в соответствии с требованиями стандарта IEEE 802.11a [1]. Размер пакета данных на MAC-уровне – 80 байт (размер голосового пакета).

Значение величины порога  $S_0$  в общем случае зависит от скорости передачи, размера пакета и свойств приемника. Поэтому для определения величины порога  $S_0$  с помощью моделирования исследовалась производительность соединения точка-точка. На рис. 4 представлены: график зависимости пропускной способности соединения точка-точка  $W$  от расстояния  $d$  между станциями и график зависимости доли успешно принятых пакетов  $1-PER$  от отношения сигнал-интерференция-шум  $SINR$ . В качестве  $S_0$  выбирается значение  $SINR$ , при котором  $1-PER$  равняется 0.9. В табл. 2 приведены значения величин:  $S_0$ ,  $R$ , рассчитанной по формуле (3), и максимальной пропускной способности  $W_{max}$  соединения точка-точка в насыщении.

Радиус зоны блокировки  $D$  не зависит от скорости передачи. В нашем случае  $D=160$  м в соответствии с (4). На основе полученного значения  $S_0$  и значений параметров, приведенных в табл.1, в соответствии с формулами п. 4 и 3.2 рассчитываются значения граничных точек  $X_i$  (табл. 3).

В эксперименте по интерференции соединений рассматривалась работа 4-х станций, расположенных на одной прямой, как показано на рис. 3 (скорость передачи 6 Мбит/с,  $L=90$  м). С помощью моделирования исследовалась

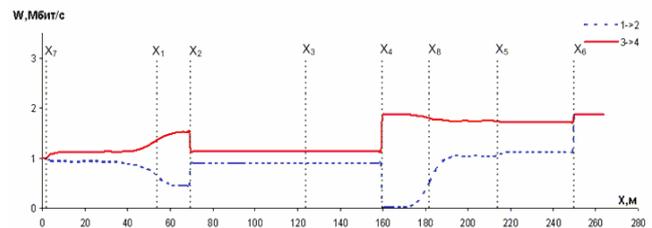


Рисунок 5. Пропускные способности соединений 1->2 и 3->4 (Мбит/с) от расстояния  $X$  (м)

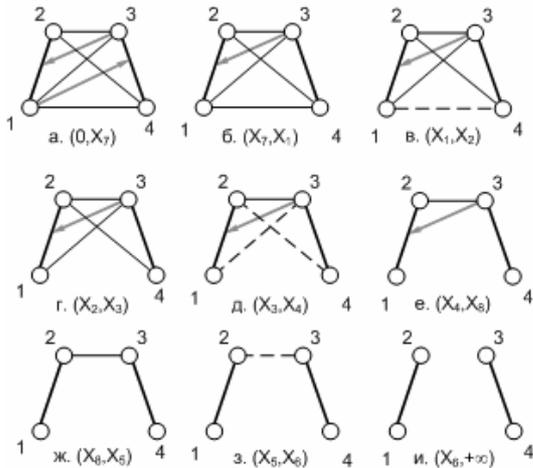
Таблица 3. Значения граничных точек  $X_i$  (м)

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
54	70	124	160	214	250	2	182

зависимость пропускных способностей соединений 1->2 и 3->4 от расстояния  $X$  (рис. 5). Видим, что изменение пропускных способностей происходит только в граничных точках  $X_i$ , что соответствует предположениям п. 4. В точках 1, 5, 7 и 8 наблюдается плавное изменение пропускных способностей. Связано это с тем, что вероятность успешного приема пакета в окрестности точки  $S_0$  является гладкой функцией  $SINR$  (рис. 4), а не ступенчатой, как это предполагает физическая модель (неравенство 2).

Рассмотрим более подробно работу станций на каждом интервале  $(X_i, X_j)$  и дадим качественное объяснение полученным зависимостям. На рис. 6 схематически показано состояние соединений между станциями для каждого случая интерференции. Сплошная линия означает, что станции находятся в зоне уверенного приема друг друга, т.е. успешно принимают кадры в отсутствии интерференции, пунктирная – в зоне блокировки, но вне зоны уверенного приема. Линия со стрелкой указывает на то, что станция попадает в зону интерференции приемника соседнего соединения. Например, на рис.6а станция 1 попадает в зону интерференции приемника соединения 3->4. Это означает, что при одновременной передаче станций 1 и 3, станция 4 не сможет принять кадр от станции 3.

а)  $X \in (0, X_7)$  – все 4 станции находятся в зоне уверенного приема друг друга, т.е. кадр, переданный любой станцией, корректно принимается всеми остальными станциями сети. Пропускные способности соединений 1->2 и 3->4 в этом случае оказываются равны друг другу в силу симметрии условий, в которых происходит передача, и численно равны приблизительно половине максимальной пропускной способности соединения точка-точка.



**Рисунок 6. Случай интерференции**

б)  $X \in (X_7, X_1)$  – станция 1 находится вне зоны интерференции станции 4. В этом случае станция 3 получает выигрыш в пропускной способности. Связано это с тем, что в случае одновременной передачи станций 1 и 3, станция 4 успешно принимает кадр от станции 3, а станция 2 регистрирует коллизию. Данное обстоятельство в свою очередь приводит к тому, что при следующей попытке передачи станция 1 удваивает свое конкурентное окно, в то время как окно станции 3 минимально, и она имеет больше шансов выиграть соревнование за канал.

в)  $X \in (X_1, X_2)$  – станции 1 и 4 находятся в зоне блокировки друг друга. В данном случае в работе сети возникает еще один эффект: станция 1 не может декодировать кадры подтверждения доставки, передаваемые станцией 4, и вынуждена ждать интервал времени  $EIFS$  после окончания их передачи. В то же время, станция 3 ожидает лишь интервал времени  $DIFS$ , который короче интервала  $EIFS$ . Разница между интервалами ожидания перед возобновлением процедуры конкурентного доступа приводит к тому, что станция 3 имеет еще больше шансов повторно получить доступ к среде передачи, чем станция 1, что в свою очередь приводит к еще большей неравномерности распределения пропускной способности между соединениями.

г)  $X \in (X_2, X_3)$  – станции 1 и 4 не слышат друг друга. Это означает, что эффект, рассмотренный в предыдущем случае, теперь отсутствует, и станции 1 и 3 ведут себя также как и в случае б. Заметим, что на рисунке 5 пропускные способности соединений принимают свои прежние значения.

д)  $X \in (X_3, X_4)$  – станции 1 и 3 в зоне блокировки друг друга, но вне зоны уверенного приема. В этом случае, если станция 3 начинает

передавать кадр данных, то станция 1 регистрирует передачу станции 3, но не способна корректно декодировать полученный кадр и вынуждена ждать интервал времени  $EIFS$  до возобновления процедуры конкурентного доступа. За это время станция 3 успевает получить кадр подтверждения от станции 4, который в соответствии со стандартом [1] передается на минимально битовой скорости 6 Мбит/с и выждать время  $DIFS$  ( $EIFS = SIFS + T_{ACK} + DIFS$ ). Ситуация аналогична, если передачу ведет станция 1. Получаем, что случай д не отличается от случая г, и распределение пропускной способности не изменяется.

е)  $X \in (X_4, X_8)$  – станции 1 и 3 скрыты друг от друга, а станция 3 находится в зоне интерференции станции 2. В этом случае распределение пропускной способности становится крайне неравномерным. Действительно, если станция 1 передает кадр данных, то станция 3, находясь вне зоны ее блокировки, продолжает процедуру отчета отложенного времени и также может начать свою передачу. В этом случае на станции 2 произойдет коллизия, а станция 4 успешно примет кадр данных. Станция 1 вынуждена будет повторить попытку передачи и при этом удвоить соревновательное окно. Следующая попытка передачи станции 1 с вероятностью близкой к 1 опять окажется неудачной, так как станция 3 все так же не слышит ее передачу. Очень быстро конкурентное окно станции 1 приблизится к  $CW_{max}$ , уменьшая с каждой попыткой шансы станции 1 получить доступ к среде передачи. Конкурентное окно станции 3, напротив, равно  $CW_{min}$ . Результаты моделирования показывают, что пропускная способность соединения 3->4 практически равна максимальной, в то время как соединение 1->2 оказывается неработоспособным.

ж)  $X \in (X_8, X_5)$  – станция 3 находится вне зоны интерференции станции 2. В этом случае наблюдается значительный рост пропускной способности соединения 1->2. Это связано с проявлением эффекта захвата: если станция 1 начала передачу кадра данных раньше станции 3, станция 2 успешно примет его несмотря на передачу станции 3. Моделирование показывает, что пропускная способность соединения 1->2 становится равной примерно половине максимальной пропускной способности соединения точка-точка, а пропускная способность соединения 3->4 уменьшается. Это обусловлено увеличением количества передаваемых кадров подтверждения от станции 2. Если станция 2 передает кадр подтверждения

во время того, как станция 3 прослушивает среду, то станция 3 вынуждена отложить передачу на время  $T_{ACK} + DIFS$ .

з)  $X \in (X_5, X_6)$  – станции 2 и 3 в зоне блокировки друг друга. Данный случай аналогичен предыдущему. Разница заключается в том, что кадры подтверждения от станции 2 не могут быть корректно декодированы на станции 3. Поэтому станция 3 вынуждена ждать на  $EIFS-DIFS$  больше, чем в предыдущем случае, чтобы вновь приступить к процедуре отчета отложенного времени. Результаты моделирования показывают незначительный рост пропускной способности соединения 1->2 и падение пропускной способности соединения 3->4.

и)  $X \in (X_6, +\infty)$  – соединения 1->2 и 3->4 изолированы друг от друга, поэтому пропускная способность каждого из них равна максимальной пропускной способности соединения точка-точка.

Из всех рассмотренных выше случаев, особый интерес представляет собой случай е, при котором проявляется резкая неравномерность распределения пропускной способности – соединение 1->2 оказывается практически полностью неработоспособным. Случай е возникает, когда передатчик одного из соединений попадает в зону интерференции приемника другого соединения (т.е. при  $X < I(L) + L$ ), и при этом оба передатчика скрыты друг от друга ( $X > D$ ). Если  $X$  выбирается равномерно из интервала  $(0, D+L)$ , то вероятность возникновения данного случая

$$p_e = \frac{1(L + I(L) - D > 0) \cdot (L + I(L) - D)}{D + L} \quad (6)$$

где  $1(A)$  – функция-индикатор, равная 1, если условие  $A$  выполнено, и 0 в противном случае.

Вероятность  $p_e$  характеризует долю случаев расположения станций, при которых реализуется ситуация, когда одно соединение полностью подавляет другое, при условии, что соединения оказывают влияние друг на друга ( $X < D + L$ ). Она зависит от трех параметров:

- скорости передачи (порог  $S_0$ ),
- порога занятости среды  $P_c$ ,
- расстояния  $L$ .

На рис. 7а представлены графики зависимости вероятности  $p_e$  от расстояния  $L$ , для различных значений порога занятости  $P_c$  (скорость 6 Мбит/с). Заметим, что увеличение  $L$  ведет к росту вероятности  $p_e$ , а максимальное значение вероятности достигается при условии, что  $L = R = D$ , и равняется 0.5 ( $P_c = -93.7$ ). Для каждого значения  $L$  существует предельное значение  $P_c$ , при котором вероятность  $p_e$  становится равной нулю (рис. 7б). Это предельное значение  $P_c$

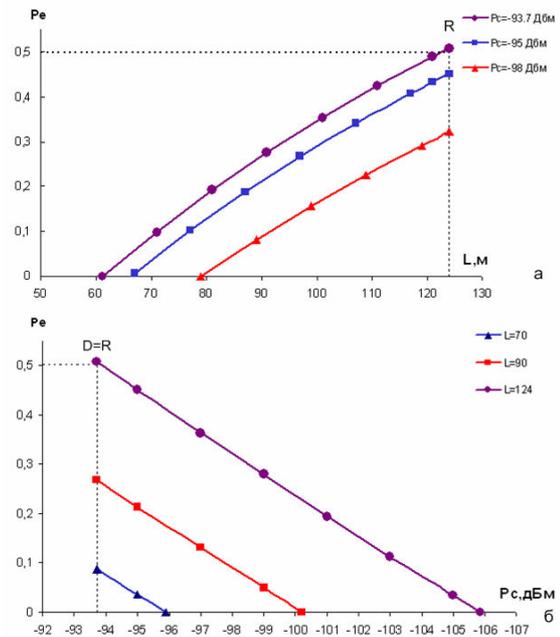


Рисунок 7. Вероятность возникновения случая е.

соответствует тому, что зона блокировки передающей станции покрывает зону интерференции приемника (т.е.  $D = L + I(L)$ ). Выполнения данного условия оказывается достаточно для того, чтобы защитить соединение 1->2 от интерференции с другими станциями. Станции, находящиеся вне зоны интерференции станции 2, могут параллельно вести свою передачу, не мешая передаче 1->2. Это означает, что условие  $D = L + I(L)$  является оптимальным с точки зрения увеличения общей производительности сети.

## 6. Заключение

Данная работа посвящена исследованию интерференции прямых соединений. С помощью физической модели проведена классификация возможных случаев интерференции, при условии, что все станции располагаются на одной прямой. На конкретном примере показано, что в случае, когда передатчик одного из соединений попадает в зону интерференции приемника другого соединения, и оба передатчика скрыты друг от друга, наблюдается резкая неравномерность распределения пропускной способности (случай е). Одно из соединений оказывается почти полностью неработоспособным. В случае же, когда передатчик другого соединения находится вне зоны интерференции приемника (случаи ж и з), возможна одновременная передача данных по обоим соединениям (эффект захвата). Полученные результаты указывают на то, что для

обеспечения надежной передачи данных между двумя станциями достаточно, чтобы зона блокировки передатчика в точности накрывала зону интерференции приемника (т.е.  $D=L+I(L)$ ).

В рамках mesh-сетей, для каждой конкретной пары передатчик-приемник данное условие может быть достигнуто с помощью использования:

1. Механизмов управления мощностью (Power Control).
2. Механизмов адаптивной подстройки порога занятости среды (Adapting Physical Carrier Sensing)

Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы при проектировании данных механизмов.

Дальнейшая работа будет посвящена исследованию влияния параметров конфигурации сети ( $L$ ,  $S_0$ ,  $P_c$ ) и направления потоков между станциями на возникновение тех или иных случаев интерференции, а также исследованию явления интерференции для случая произвольного расположения станций на плоскости.

## Список литературы

- [1] Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications. ANSI/IEEE Std. 802.11. IEEE Press, 2007 Edition
- [2] Draft Amendment: Mesh Networking. doc.: IEEE P802.11s/D3.0, March 2009.
- [3] А.И. Ляхов, И.А. Пустогаров, А.С. Гудилев. Проблема неравномерного распределения пропускной способности канала в сетях IEEE 802.11. Информационные процессы, Том 8, №3, 2008, стр. 149-167
- [4] A. Lyakhov, A. Safonov, M. Yakimov, A. Gudilov. Analysis of Direct Transmissions in IEEE 802.11 Networks. DCCN-2007, Moscow, Russia, vol.1. М.: VINITI, 2007, pp. 108-115.
- [5] Jing Zhu, Xingang Guo, L. Lily Yang, W. Steven Conner, Sumit Roy, and Mousumi M. Hazra. Adapting Physical Carrier Sensing to Maximize Spatial Reuse in 802.11 Mesh Networks.
- [6] The ns-3 network simulator, <http://www.nsnam.org/>
- [7] Barrie Gilbert. Noise Figure and Logarithmic Amplifiers. Analog Dialogue 42-06, June (2008)

## Оценка производительности сверхвысокоскоростных беспроводных сетей IEEE 802.11ac (VHT)

Якимов Михаил  
ИППИ РАН  
yakimov@iitp.ru

### Аннотация

*В настоящей работе рассматриваются сети нового поколения на базе разрабатываемого стандарта IEEE 802.11ac (VHT). Основной особенностью, заложенной в данном стандарте, является возможность одновременной передачи кадров с данными нескольким получателям и одновременного приема кадров от различных передатчиков путем использования технологии множественного доступа с пространственным разнесением каналов (SDMA). Ввиду необходимости синхронизации передач различных станций сети в стандарте определяется метод доступа к каналу, отличающийся от используемого в базовой версии стандарта IEEE 802.11 [1]. Поэтому аналитические модели для оценки производительности, разработанные прежде для сетей стандарта IEEE 802.11, оказываются неприменимыми для сетей VHT (Very High Throughput). В статье сделана попытка аналитически оценить производительность сетей нового поколения VHT и показана хорошая точность предложенного метода оценки.*

### 1. Введение

В настоящее время в комитете по стандартизации IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) идет активная разработка протокола IEEE 802.11ac, также известного как VHT. С его помощью предполагается добиться пропускной способности беспроводных сетей порядка 1 Гбит/с. Столь высокая скорость передачи позволит использовать технологию VHT в качестве “беспроводного Ethernet” и в перспективе заменить проводную связь с различными периферийными устройствами.

Достичь такой высокой пропускной способности позволяет технология множественного доступа с пространственным разделением каналов SDMA (Spatial Division Multiple Access).

### 2. Технология SDMA

SDMA – это одна из передовых технологий, которые предполагается использовать в беспроводных сетях связи следующего поколения. Технология SDMA использует антенные решетки и технологии обработки многомерного нелинейного сигнала для повышения пропускной способности и качества беспроводных систем связи [2]. Из многих методик получения данных, основанных на антенных решетках, SDMA является самой продвинутой технологией, так как она использует адаптивный подход в пространственном разнесении. Система SDMA проводит непрерывный мониторинг области покрытия во время передачи сигнала, динамически изменяя диаграмму направленности излучения.

### 3. Метод доступа к среде в сетях IEEE 802.11ac (VHT)

Один из возможных алгоритмов доступа к среде, которые используют пространственное разделение канала при передаче в беспроводной сети описан в [3]. В этом подходе предполагается наличие одной базовой станции AP и нескольких оконечных станций. Каждая оконечная станция имеет по одной антенне, а базовая станция имеет несколько антенн, в количестве до четырех, для обеспечения работы в режиме SDMA. Однако в работе [3] рассматривается только случай восходящей передачи кадров данных.

В данной работе предлагается использовать метод доступа, основанный на режиме EDCA уровня MAC стандартного протокола IEEE 802.11. Для поддержки технологии SDMA модифицируется схема конкурентного доступа. Процедура передачи делится на два периода: период конкурентного доступа и период бесконкурентной передачи данных.

Период бесконкурентной передачи включает в себя параллельную передачу кадров данных от базовой станции нескольким оконечным

(нисходящая передача) или от нескольких оконечных станций к базовой (восходящая передача). Длительность этого периода определяется длительностью кадров данных.

В периоде конкурентного доступа все станции, имеющие данные на передачу, начинают соревноваться за право передачи в следующем бесконкурентном периоде, используя стандартный метод множественного доступа CSMA/CA. Каждая оконечная станция пытается передать кадр запроса QoSNull, содержащий требования к качеству обслуживания, а также текущий размер очереди в буфере оконечной станции. Базовая станция также участвует в конкурентном доступе к среде вместе с оконечными станциями, пытаясь передать кадр RTS одной из оконечных станций.

Если первым успешно переданным за период конкурентного доступа кадром оказался кадр запроса QoSNull от одной из оконечных станций, то базовая станция замораживает свой счетчик отложенного времени, отправляет кадр подтверждения АСК и ожидает прихода запросов от остальных оконечных станций. По достижении некоторого числа запросов  $M$ , равного максимальному количеству пространственно разнесенных каналов, базовая станция завершает период конкурентного доступа, передавая кадр UL-MAP, в котором она указывает станции, которым разрешается вести передачу в следующей за этим кадром восходящей фазе бесконкурентного периода. Период конкурентного доступа ограничивается базовой станцией временем  $T_{timeout}$ . В случае его достижения базовая станция через интервал SIFS после освобождения среды отправляет кадр UL-MAP. Фаза восходящей передачи завершается одновременной отправкой базовой станцией кадров подтверждения АСК по соответствующим пространственным каналам.

Если в периоде конкурентного доступа первой происходит успешная передача кадра RTS базовой станцией (принят ответный кадр CTS), то базовая станция, спустя SIFS, посылает кадр DL-MAP, в котором указывает получателей, которым она будет передавать данные в последующей нисходящей фазе бесконкурентного периода. По завершению нисходящей фазы все получатели одновременно посылают кадры подтверждения АСК. Далее вновь следует период конкурентного доступа к среде.

Возможен случай, когда за время  $T_{timeout}$  не было ни одного успешного запроса (ни QoSNull, ни RTS). Тогда базовая станция завершает период конкурентного доступа только по появлению первого успешного запроса и передаёт, спустя интервал SIFS, кадр DL-MAP или UL-MAP.

#### 4. Оценка производительности беспроводных сетей IEEE 802.11 VHT с технологией SDMA

Найдем аналитическую оценку пропускной способности сети в режиме насыщения. При этом будем считать, что объем информации  $E$  от/к каждой оконечной станции, передаваемой в периоде бесконкурентной передачи, как в случае восходящей фазы, так и в случае нисходящей фазы одинаков.

Итак, в сети имеется  $N$  активных оконечных станций и одна базовая станция. Базовая станция имеет  $M$  пространственно разнесенных каналов, а также выбирает некоторое значение  $T_{timeout}$ . Все основные вычисления будем проводить в предположении  $N \geq M$ .

Для нахождения пропускной способности рассмотрим работу сети на бесконечном интервале времени. Её можно представить как следующие друг за другом пары временных периодов, каждая пара состоит из периода конкурентного доступа и периода бесконкурентной передачи кадров данных. Пусть  $P_{DL}$  – вероятность того, что пара содержит нисходящую фазу, а  $P_{UL} = 1 - P_{DL}$  – вероятность того, что пара содержит восходящую фазу. Тогда, формула для пропускной способности сети имеет вид:

$$S = \frac{\langle X_{UL} \rangle \cdot E \cdot P_{UL} + M \cdot E \cdot P_{DL}}{P_{UL} \cdot \langle T_{UL} \rangle + P_{DL} \cdot \langle T_{DL} \rangle}, \quad (1)$$

где  $\langle X_{UL} \rangle$  – среднее число оконечных станций, успешно передавших кадр запроса в периоде конкурентного доступа, при условии, что пара содержит восходящую фазу,  $\langle T_{UL} \rangle$  и  $\langle T_{DL} \rangle$  – средние длительности пар с восходящей и нисходящей фазой соответственно.

Для нахождения выражения произведений  $P_{UL} \langle X_{UL} \rangle$ ,  $P_{UL} \langle T_{UL} \rangle$ , а также величин  $P_{DL}$  и  $\langle T_{DL} \rangle$  воспользуемся известным аналитическим подходом [4], основанным на виртуальных слотах. Согласно этому подходу виртуальный слот может быть пустым (ни одна из станций не ведет передачу), успешным (только одна станция передает) или коллизийным (передают две или более станций). Обозначим  $\tau_{AP}$  и  $\tau_e$  – вероятности попытки передачи базовой и оконечной станции в виртуальном слоте. Как и в [5], усеченное бинарное экспоненциальное распределение времени, отложенного перед передачей кадра, будем аппроксимировать геометрическим распределением с параметром  $\tau_e$

для оконечной станции и  $\tau_{AP}$  – для базовой станции.

Пропускную способность сети будем искать в два этапа. Сначала найдем выражения для компонент формулы (1) через вероятности  $\tau_{AP}$ ,  $\tau_e$ , а затем – сами эти вероятности.

При произвольном выборе одной пары периодов конкурентного/бесконкурентного доступа возможны несколько исходов:

1. В периоде конкурентного доступа первым успешно был передан кадр RTS базовой станции (Рис. 1а), и в периоде бесконкурентной передачи происходит нисходящая передача кадров данных от базовой станции к  $M$  оконечным станциям. В этом случае продолжительность периода конкурентного доступа не ограничена временем  $T_{timeout}$ .

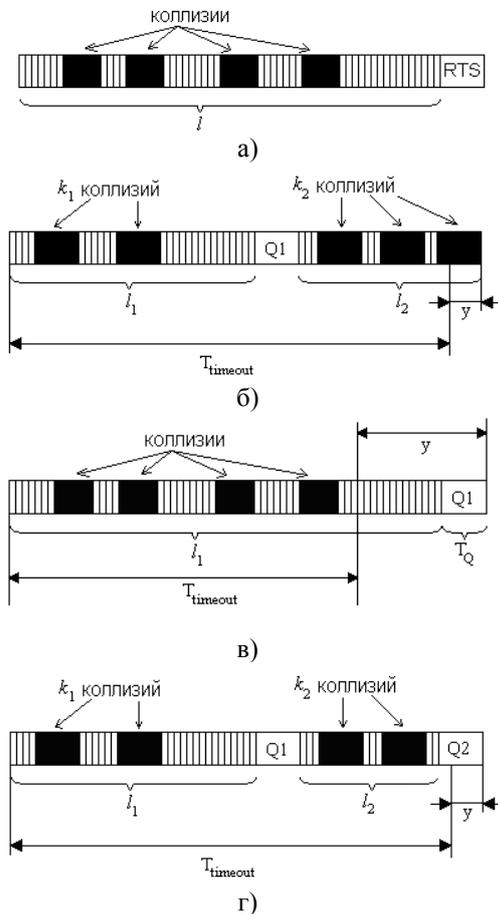


Рис. 1. Период конкурентного доступа

2. За период конкурентного доступа был успешно передан лишь один кадр запроса QoSNull (Q1) одной из оконечных станций. В этом случае период бесконкурентной передачи является восходящей фазой. Этот случай мог быть реализован двумя способами.

а) Конец интервала DIFS после успешно переданного кадра QoSNull и соответствующего кадра подтверждения ACK лежит левее границы

тайм-аута (Рис. 1б). После этой передачи были только пустые и/или коллизионные виртуальные слоты вплоть до границы тайм-аута  $T_{timeout}$ . При этом могло оказаться так, что из-за коллизии, пересекающей по времени границу тайм-аута, длительность периода конкурентного доступа будет несколько больше  $T_{timeout}$ .

б) Конец интервала DIFS, следующего за кадром подтверждения ACK лежит правее границы тайм-аута (Рис. 1в). Тогда вместе с окончанием интервала DIFS заканчивается и период конкурентного доступа. При этом способе длительность периода конкурентного доступа больше  $T_{timeout}$  и, аналогично случаю 1, может быть сколь угодно большой.

3. В периоде конкурентного доступа было успешно передано более одного кадра QoSNull от оконечных станций (Рис. 1г), и таким образом далее имеет место восходящая фаза. Общий объем данных, передаваемых в восходящей фазе, определяется числом оконечных станций, успешно передавших свой кадр запроса QoSNull за период конкурентного доступа.

#### 4.1. Фаза нисходящей передачи

Для нахождения  $P_{DL}$  и  $\langle T_{DL} \rangle$  рассмотрим период конкурентного доступа, предшествующий фазе нисходящей передачи (Рис.1). Пусть  $p_{coll,1}$  и  $p_{e,1}$  – вероятности появления коллизионного и пустого слотов до первой успешной передачи кадра,  $p_{RTS}$  и  $p_{Q,1}$  – вероятности успешного виртуального слота с передачей базовой или оконечной станции соответственно. Обозначим  $T_{coll} = T_{QoSNull} + DIFS$  – длительность коллизионного слота,  $\sigma$  – длительность пустого слота, а через  $T_{DATA}^{DL}$  – длительность обмена RTS/CTS и нисходящей фазы, определяемая выражением:

$$T_{DATA}^{DL} = T_{RTS} + SIFS + T_{CTS} + SIFS + T_{DL-MAP} + SIFS + T_{data\_fr}^{DL} + SIFS + T_{ACK} + DIFS. \quad (2)$$

Здесь  $T_{QoSNull}$ ,  $T_{RTS}$ ,  $T_{CTS}$ ,  $T_{DL-MAP}$ ,  $T_{ACK}$ ,  $T_{data\_fr}^{DL}$  – длительности передачи кадров QoSNull, RTS, CTS, DL-MAP, ACK и кадров данных в нисходящей фазе соответственно.

Тогда вероятность пары с нисходящей фазой и ее средняя длительность определяются по формулам:

$$P_{DL} = \frac{p_{RTS}}{1 - p_{coll} - p_e} = \frac{p_{RTS}}{p_{Q,1} + p_{RTS}}, \quad (3)$$

$$\langle T_{DL} \rangle = \frac{\sigma p_e + T_{coll} p_{coll}}{p_{Q,1} + p_{RTS}} + T_{DATA}^{DL}. \quad (4)$$

## 4.2. Фаза восходящей передачи

Для вычисления  $P_{UL}\langle X_{UL} \rangle$  и  $P_{UL}\langle T_{UL} \rangle$  рассмотрим период конкурентного доступа, в котором первым успешно переданным кадром оказался кадр запроса QoSNull от оконечной станции. Разобьем этот период на стадии, т.е. временные интервалы между двумя последовательными успешными передачами кадра QoSNull. После каждой стадии число конкурирующих оконечных станций уменьшается на единицу. Продолжительность первой стадии может быть не ограниченной. Последующие стадии начинаются, если граница тайм-аута  $T_{timeout}$  не была достигнута. При этом конкурентный период завершается по окончании виртуального слота, в течение которого была достигнута граница тайм-аута. Очевидно, количество стадий может принимать величину от 1 до  $M$ . Отсюда

$$P_{UL}\langle X_{UL} \rangle = \sum_{x=1}^M x P\{UL, X_{UL} = x\}, \quad (5)$$

где  $P\{UL, X_{UL} = x\}$  – вероятность, что выбранная пара периодов содержит фазу восходящей передачи, и число станций  $X_{UL}$ , успешно передавших кадр запроса QoSNull в конкурентном периоде, равно  $x$ .

Введем ряд дополнительных обозначений. Пусть  $T_Q = T_{QoSNull} + SIFS + T_{ACK} + DIFS$  – длительность успешного виртуального слота,  $k_{max}(l) = \lfloor l/T_{coll} \rfloor$  – максимальное число коллизий за интервал  $l$ . Распределение суммы длин  $x$  стадий, если последняя стадия закончилась успешной передачей запроса, обозначим через

$$P\left\{UL, \sum_{i=1}^x t_i = L\right\}, \text{ иначе } - P^*\left\{UL, \sum_{i=1}^x t_i = L\right\}.$$

Аналогично будем использовать обозначения  $P\{UL, \vec{t}_x = \vec{l}_x\}$  и  $P^*\{UL, \vec{t}_x = \vec{l}_x\}$ , где  $\vec{t}_x \triangleq |t_1 \dots t_x|^T$ , для вероятностных распределений комбинаций длин  $x$  стадий, последняя из которых завершилась успешно или досрочно из-за истечения тайм-аута, а также  $P\{UL, h_i = k_i, t_i = l_i\}$  и  $P^*\{UL, h_i = k_i, t_i = l_i\}$  для вероятностей успешно и досрочно законченной  $i$ -ой стадии длительностью  $l_i$  слотов и содержащей в себе  $k_i$  коллизий. В дальнейшем за единицу времени будем принимать длительность одного пустого слота  $\sigma$ .

Итак, при  $X_{UL} = 1$  возможны две различных ситуации. В случае, если превышение тайм-аута произошло во время успешной передачи кадра

QoSNull, то после сразу начинается период бесконкурентной передачи, т.е. конкурентный период состоит из одной успешной стадии длительностью  $l_1$  (Рис. 1в). Если же тайм-аут не превышен после успешной передачи кадра QoSNull, то начинается вторая стадия, которая заканчивается досрочно по достижению тайм-аута  $T_{timeout}$  (Рис. 1б). Отсюда получаем следующее выражение

$$P\{UL, X_{UL} = 1\} = \sum_{y=1}^{\infty} P\{UL, t_1 = T_{timeout} - T_Q + y\} + \sum_{y=0}^{T_{coll}-1} P^*\{UL, t_1 + t_2 = T_{timeout} - T_Q + y\}. \quad (6)$$

Расписывая вероятности из первой и второй сумм в (6) с учетом возможных коллизий в течение стадий конкуренции, получим выражения:

$$P\{UL, t_1 = l_1\} = \sum_{k_1=0}^{k_{max}(l_1)} P\{UL, h_1 = k_1, t_1 = l_1\},$$

$$P^*\{UL, t_1 + t_2 = L\} = \sum_{l_1, l_2: l_1 + l_2 = L} P^*\{UL, \vec{t}_2 = \vec{l}_2\} = \sum_{l_1=0}^L \sum_{k_2=0}^{k_{max}(L-l_1)} \sum_{k_1=0}^{k_{max}(l_1)} P^*\left\{UL, \vec{h}_2 = \vec{k}_2, \vec{t}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ L-l_1 \end{pmatrix}\right\},$$

где

$$P^*\{UL, \vec{h}_2 = \vec{k}_2, \vec{t}_2 = \vec{l}_2\} = P^*\{h_2 = k_2, t_2 = l_2 | UL, t_1 = l_1\} \times P\{UL, h_1 = k_1, t_1 = l_1\}.$$

По аналогии с п. 4.1 введем обозначения  $p_{coll,i}$  и  $p_{e,i}$  – вероятности коллизионного и пустого слота на  $i$ -ой стадии соответственно,  $p_{Q,i}$  – вероятность успешной передачи одной из оконечных станций, участвующих в конкурентном доступе на  $i$ -ой стадии, тогда  $P\{UL, h_1 = k_1, t_1 = l_1\} = C_{k_1}^{k_1+l_1-k_1T_{coll}} p_{coll,1}^{k_1} p_{e,1}^{l_1-k_1T_{coll}} p_{Q,1}$ ,  $P^*\{h_2 = k_2, t_2 = l_2 | UL, t_1 = l_1\} = C_{k_2-l_1(y)}^{k_2-1(y)+l_2-k_2T_{coll}} p_{coll,2}^{k_2} p_{e,2}^{l_2-k_2T_{coll}}$

Аналогичным способом находятся выражения для  $1 < X_{UL} < M$  с той разницей, что число слагаемых из первой группы (см. (6)) будет ограничено сверху величиной  $T_Q - 1$ , которая соответствует началу успешного виртуального слота за один слот до границы тайм-аута. Таким образом:

$$P\{UL, X_{UL} = x\} = \sum_{y=1}^{T_Q-1} P\left\{UL, \sum_{i=1}^x t_i = T_{timeout} + y - xT_Q\right\} + \sum_{y=0}^{T_{coll}-1} P^*\left\{UL, \sum_{i=1}^{x+1} t_i = T_{timeout} + y - xT_Q\right\} \quad (7)$$

Первая группа слагаемых отвечает случаю, когда

из-за передачи кадра запроса продолжительность периода конкурентного доступа может несколько превышать время тайм-аута. Вторая группа слагаемых аналогична второй группе в (6). Вероятности из правой части равенства:

$$P\left\{UL, \sum_{i=1}^x t_i = L\right\} = \sum_{\substack{\bar{l}_x: \sum_{i=1}^x l_i = L}} P\left\{UL, \bar{t}_x = \bar{l}_x\right\}$$

$$P^*\left\{UL, \sum_{i=1}^x t_i = L\right\} = \sum_{\substack{\bar{l}_x: \sum_{i=1}^x l_i = L}} P^*\left\{UL, \bar{t}_x = \bar{l}_x\right\}$$

Распределения  $P\left\{UL, \bar{t}_x = \bar{l}_x\right\}$  и  $P^*\left\{UL, \bar{t}_x = \bar{l}_x\right\}$  находятся рекуррентно:

$$P^*\left\{UL, \bar{t}_{x+1} = \bar{l}_{x+1}\right\} = \sum_{k_{x+1}=(y \neq 0)}^{k_{\max}(l_{x+1})} P^*\left\{h_{x+1} = k_{x+1}, t_{x+1} = l_{x+1} \left| UL, \sum_{i=1}^x t_i = \sum_{i=1}^x l_i \right.\right\} \times$$

$$\times P\left\{UL, \bar{t}_x = \bar{l}_x\right\} \cdot 1\left\{T_{\text{timeout}} \leq \sum_{i=1}^{x+1} l_i + x \cdot T_Q \leq T_{\text{timeout}} + T_{\text{coll}} - 1\right\}$$

$$P\left\{UL, \bar{t}_{x+1} = \bar{l}_{x+1}\right\} = \sum_{k_{x+1}=0}^{k_{\max}(l_{x+1})} P\left\{h_{x+1} = k_{x+1}, t_{x+1} = l_{x+1} \left| UL, \sum_{i=1}^x t_i = \sum_{i=1}^x l_i \right.\right\} \times$$

$$\times P\left\{UL, \bar{t}_x = \bar{l}_x\right\} \cdot 1\left\{0 \leq \sum_{i=1}^{x+1} l_i \leq T_{\text{timeout}} + T_Q - 1 - (x+1) \cdot T_Q\right\}$$

Теперь рассматривая каждую стадию по отдельности:

$$P\left\{h_{x+1} = k_{x+1}, t_{x+1} = l_{x+1} \left| UL, \sum_{i=1}^x t_i = \sum_{i=1}^x l_i \right.\right\} =$$

$$= C_{k_{x+1}}^{k_{x+1} + l_{x+1} - k_{x+1} T_{\text{coll}}} P_{\text{coll}, x+1}^{k_{x+1}} P_{e, x+1}^{l_{x+1} - k_{x+1} T_{\text{coll}}} P_{Q, x+1},$$

$$P^*\left\{h_{x+1} = k_{x+1}, t_{x+1} = l_{x+1} \left| UL, \sum_{i=1}^x t_i = \sum_{i=1}^x l_i \right.\right\} =$$

$$= C_{k_{x+1} - 1(y)}^{k_{x+1} - 1(y) + l_{x+1} - k_{x+1} T_{\text{coll}}} P_{\text{coll}, x+1}^{k_{x+1} - 1(y)} P_{e, x+1}^{l_{x+1} - k_{x+1} T_{\text{coll}}}$$

При  $X_{UL} = M$  успешно переданных кадрах запросов период конкурентного доступа ограничен максимальным временем  $Z_{\max} = T_{\text{timeout}} - (M-1)T_Q - 1$ , откуда

$$P\left\{UL, X_{UL} = M\right\} = \sum_{Z=0}^{Z_{\max}} P\left\{UL, \sum_{i=1}^M t_i = Z\right\}. \quad (8)$$

Зная распределение  $P\left\{UL, X_{UL} = x\right\}$  (см. (6) – (8)), с помощью (5) находим:

$$P_{UL}\langle X_{UL} \rangle = \sum_{x=1}^{M-1} x \sum_{y=1}^{y_{\max}(x)} P\left\{UL, \sum_{i=1}^x t_i = T_{\text{timeout}} + y - xT_Q\right\} +$$

$$+ \sum_{x=1}^{M-1} x \sum_{y=0}^{T_{\text{coll}}-1} P^*\left\{UL, \sum_{i=1}^{x+1} t_i = T_{\text{timeout}} + y - xT_Q\right\} +$$

$$+ M \sum_{Z=0}^{Z_{\max}} P\left\{UL, \sum_{i=1}^M t_i = Z\right\}, \quad (9)$$

где  $y_{\max}(x) = \begin{cases} \infty, & x=1 \\ T_Q - 1, & x > 1 \end{cases}$  – число слотов, на которое может быть превышена граница периода

конкурентного доступа  $T_{\text{timeout}}$ . Первая группа слагаемых – это вклад от случаев, когда последняя стадия является успешной. Вторая группа слагаемых – это вклад от случаев, когда последняя стадия завершается досрочно. При этом возможно, что стадия завершится коллизийным слотом и его окончание будет лежать правее границы тайм-аута на  $y \leq T_{\text{coll}} - 1$  слотов. Последняя группа отвечает случаю  $M$  успешно переданных кадров запроса в течение периода конкурентного доступа.

Для нахождения выражения  $P_{UL}\langle T_{UL} \rangle$  воспользуемся аналогичным подходом. При этом получим следующее выражение:

$$P_{UL}\langle T_{UL} \rangle = \sum_{x=1}^{M-1} \sum_{y=1}^{y_{\max}(x)} (T_{\text{timeout}} + y + SIFS - DIFS + T_{\text{DATA}}^{UL}) \times$$

$$\times P\left\{UL, \sum_{i=1}^x t_i = T_{\text{timeout}} + y - xT_Q\right\} +$$

$$+ \sum_{x=1}^{M-1} \sum_{y=0}^{T_{\text{coll}}-1} (T_{\text{timeout}} + y + T_{\text{DATA}}^{UL}) P^*\left\{UL, \sum_{i=1}^{x+1} t_i = T_{\text{timeout}} + y - xT_Q\right\} +$$

$$+ \sum_{Z=0}^{Z_{\max}} (Z + MT_Q - DIFS + T_{\text{DATA}}^{UL} - T_{\text{CTS}}) P\left\{UL, \sum_{i=1}^M t_i = Z\right\}, \quad (10)$$

Используя (3), (4), (9) и (10) в (1), получим выражение пропускной способности сети через вероятности слотов  $p_{\text{coll}, i}$ ,  $p_{e, i}$ ,  $p_{RTS}$ ,  $p_{Q, i}$ , которые в свою очередь связаны с вероятностями передачи базовой  $\tau_{AP}$  и оконечной  $\tau_e$  станций по формулам (11) – (14):

$$p_{e, i} = (1 - \tau_e)^{N+1-i} (1 - \tau_{AP})^{i(i-1)}, \quad (11)$$

$$p_{RTS} = \tau_{AP} (1 - \tau_e)^N, \quad (12)$$

$$p_{Q, i} = (N+1-i) \tau_e (1 - \tau_e)^{N-i} (1 - \tau_{AP})^{i(i-1)}, \quad (13)$$

$$p_{\text{coll}, i} = 1 - p_{Q, i} - (1 - \tau_e)^{N+1-i}. \quad (14)$$

### 4.3. Вероятности передачи

Пусть  $f_e$  и  $f_{AP}$  – среднее число попыток, совершаемых соответственно оконечной и базовой станцией в процессе передачи одного кадра запроса, а  $\overline{\omega_e}$  и  $\overline{\omega_{AP}}$  – среднее число виртуальных слотов, на которое оконечная и базовая станция воздерживается от передачи в процессе передачи кадра. Тогда, используя метод из [6], для вероятностей передачи оконечной и базовой станций имеем выражения:

$$\tau_e = \frac{f_e}{f_e + \overline{\omega_e}}, \quad \tau_{AP} = \frac{f_{AP}}{f_{AP} + \overline{\omega_{AP}}}. \quad (15)$$

Пусть также  $\chi_e$ ,  $\chi_{AP}$  – условные вероятности неудачной попытки передачи оконечной и

базовой станции соответственно,  $W_i$  – конкурентное окно после  $i$  коллизий,  $W_{\max}$  – максимальное конкурентное окно. Предполагая неограниченным число попыток передачи одного кадра, получим:

$$f_e = 1/(1 - \chi_e),$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_e = (1 - \chi_e) & \left( \sum_{i=1}^{m+1} \chi_e^{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{W_0 2^j - 1}{2} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=m+2}^{\infty} \chi_e^{i-1} \left\{ \sum_{j=0}^m \frac{W_0 2^j - 1}{2} + (i - m - 1) \frac{W_0 2^m - 1}{2} \right\} \right), \end{aligned}$$

где  $m = \log_2(W_{\max}/W_0)$ . Аналогичные выражения справедливы и для базовой станции при замене  $\chi_e$  на  $\chi_{AP}$ .

Вероятность неудачи для базовой станции:

$$\chi_{AP} = 1 - (1 - \tau_e)^N.$$

Пренебрегая вероятностями коллизий трех и более станций, вероятность неудачи оконечной станции находится по формуле:

$$\chi_e = 1 - \frac{P_{UL} \langle X_{UL} \rangle}{P_{UL} \langle X_{UL} \rangle + 2 \langle H_{e-e} \rangle + \langle H_{AP-e} \rangle},$$

где  $\langle H_{e-e} \rangle$  – среднее число коллизий между оконечными станциями в периоде конкурентного доступа, а  $\langle H_{AP-e} \rangle$  – среднее число коллизий с участием базовой станции.

Для нахождения средних  $\langle H_{AP-e} \rangle$  и  $\langle H_{e-e} \rangle$  дополнительно определим вероятность  $p_{coll\_AP-e}$  виртуального слота с коллизией базовой станции на первой стадии и вероятность  $p_{coll\_e-e,i}$  виртуального слота с коллизией оконечных станций на  $i$ -ой стадии. Данные вероятности выражаются через вероятности передачи следующим образом:

$$p_{coll\_AP-e} = \tau_{AP} (1 - (1 - \tau_e)^N), \quad (16)$$

$$p_{coll\_e-e,i} = p_{coll,i} - 1(i=1) \cdot p_{coll\_AP-e}. \quad (17)$$

Таким образом:

$$\langle H_{AP-e} \rangle = \frac{p_{coll\_AP-e}}{P_{RTS} + P_{QI}}.$$

Формулы для нахождения  $\langle H_{e-e} \rangle$  достаточно громоздки. Как и в случае произведений  $P_{UL} \langle X_{UL} \rangle$  и  $P_{UL} \langle T_{UL} \rangle$  величина  $\langle H_{e-e} \rangle$  складывается из средних чисел коллизий при успешных и досрочно завершённых последних стадиях конкурентного периода для всех  $x < M$ , при завершении конкурентного периода в случае  $x = M$  и при завершении первой стадии успехом базовой станции.

Таким образом, вероятности передачи  $\tau_{AP}$  и  $\tau_e$  находятся решением системы из  $4M+4$  уравнений (11) – (17) с таким же количеством неизвестных. Решение этой системы может быть найдено с помощью стандартных методов вычислительной математики.

Представленная аналитическая модель нахождения пропускной способности сети VHT показала хорошее соответствие результатов с результатами имитационного моделирования работы этой сети. При этом различие в производительности не превышало 5% при различных параметрах моделирования.

## 6. Заключение

В работе впервые предложен подход к оценке производительности сетей нового поколения VHT с методом доступа SDMA, позволяющим осуществлять различным станциям одновременную передачу кадров с данными. В дальнейшем разработанная аналитическая модель может быть расширена на случай каналов с пространственно-частотным разделением (SDMA/FDM) и ненасыщенных потоков данных на станциях сети, а также усовершенствована для учета работы сети в режиме дифференцированного качества обслуживания.

## 7. Литература

- [1] Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications. ANSI/IEEE Std. 802.11. *IEEE Press*, 2007 Edition
- [2] M. Cooper and M. Goldberg, Intelligent antennas: spatial division multiple access, *Annual Review of Communications* (1996) 999-1002.
- [3] Sheng Zhou, Zhisheng Niu: An Uplink Medium Access Protocol with SDMA Support for Multiple-Antenna WLANs. WCNC 2008, IEEE Wireless Communications & Networking Conference, March 31 2008 - April 3 2008, Las Vegas, Nevada, USA, Conference Proceedings. IEEE 2008: 1809-1814.
- [4] Bianchi G. Performance analysis of the IEEE 802.11 distributed coordination function. *IEEE Journal on Selected Area in Comm.*, March 2000, 18(3): 535-547.
- [5] Frederico Cali, Marco Conti, Enrico Gregori, Dynamic tuning of the IEEE 802.11 protocol to achieve a theoretical throughput limit, *IEEE/ACM Transactions on Networking (TON)*, v.8 n.6, p.785-799, Dec. 2000
- [6] Вишневецкий В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. М.: Техносфера, 2005 – 592 с.

# Анализ эффекта самоинтерференции потоков в mesh-сетях IEEE 802.11s

И.А. Пустогаров  
ИППИ РАН  
ivan.pustogarov@iitp.ru

## Аннотация

*Важнейшей составляющей планирования беспроводной сети является предварительная оценка пропускной способности, которая позволяет построить прогнозируемую и управляемую сеть, обеспечивающую гарантированное качество обслуживания.*

*В данной работе рассматривается подход к аналитической оценке производительности многошаговой сети с линейной топологией под управлением протокола IEEE 802.11s. Основным отличием предложенного подхода от существующих является учет того, что маршруты в такой сети обычно состоят из нескольких звеньев, а трафик, проходящий через последовательные звенья, принадлежит одному потоку. Учет этого факта позволяет получить результаты, которые лучше согласуются с показателями производительности реальных сетей.*

## 1. Введение

Изначально стандарт IEEE 802.11 [1] рассматривал только два режима работы: Ad Hoc и Hot Spot. Однако его высокая популярность и доминирующее положение на рынке привели к тому, что заложенные в него механизмы стали применяться для топологий, изначально в нем не предусмотренных. Одним из таких новых применений являются mesh-сети под управлением дополнения к стандарту IEEE 802.11s [2]. Mesh-сети – это многошаговые сети, устройства которых (mesh-станции) обладают функциями маршрутизации и способны использовать различные пути для пересылки пакетов данных. Беспроводная mesh-технология становится особенно необходимой при отсутствии проводной инфраструктуры для соединения станций. Такая ситуация может возникнуть, например, при чрезвычайных ситуациях, когда время развертывания сети имеет критическое значение.

В настоящее время существует довольно много работ, посвященных аналитическому исследованию одношаговых [3-7], а также многошаговых [8-16] беспроводных сетей. Однако, если модели одношаговых сетей уже приобрели законченный и зрелый вид, то ситуация с многошаговыми сетями является иной, хотя в этом направлении и было проделано большое количество исследований. Оценка пропускной способности одношаговых сетей сильно упрощается тем, что в такой сети станции воспринимают среду одинаково и могут координировать свои передачи. В многошаговых сетях станции воспринимают среду по-разному, поэтому ситуация оказывается намного сложнее. В связи с этим предположения, на которых основываются авторы существующих работ, во многом не соответствуют реальным условиям работы сетей.

Одной из первых работ по оценке пропускной способности многошаговых сетей на основе IEEE 802.11 является [8]. Несмотря на то, что в ней было учтено влияние скрытых станций, модель в ней изложенная, не учитывает повторных передач пакетов. В [9] модель отсчета интервала отсрочки не соответствует DCF. Предложенная в [10] модель не способна учесть влияния скрытых станций.

Ряд других исследований был посвящен нахождению максимальной пропускной способности mesh-сетей регулярных топологий [12,13] или основан на построении расписания [14,15,16], что, очевидно, делает их неприменимыми для анализа сетей IEEE 802.11.

Кроме того, в работах [8,9,10,11] предполагается, что станции случайным образом разбросаны на плоскости и работают в насыщении, в то время как большинству реальных сетей свойственны ограниченные нагрузки и определенная структура.

Основным недостатком для всех работ [8-16] является то, что в них рассматривается случай, когда источник и конечный получатель пакета данных находятся в одном шаге друг от друга, а значит, заранее вводится фундаментально неверное предположение о независимости

трафика на последовательных звеньях. Это неверно в корне, так как для mesh-сети характерны установившиеся маршруты, а через последовательные звенья обычно проходит трафик одного и того же потока. Следствием предположения об одношаговых маршрутах является то, что автоматически не учитывается эффект самоинтерференции, при котором пакеты одного потока, проходящие через последовательные звенья, вступают в коллизию между собой.

Помимо этого во всех работах [8-16] общая пропускная способность оценивается как суммарная пропускная способность на всех звеньях. Тем не менее, для пользователя скорее важна пропускная способность, измеренная на концах маршрута (что, по сути, означает доступность сервиса, одну из основных характеристик сети передачи данных).

В силу приведенных недостатков существующих на сегодня аналитических моделей многие исследования по оценке производительности проводятся с использованием имитационных моделей. Очевидно, при таком подходе для получения статистически значимых результатов необходимо значительное время, что сильно замедляет анализ. Это делает чрезвычайно важной разработку новой аналитической модели mesh-сети, которая учла бы следующие эффекты: 1) маршруты между источниками и конечными получателями были бы многошаговыми; 2) был бы учтен эффект самоинтерференции; 3) пропускная способность оценивалась бы как количество трафика, реально доставленного станции-получателю.

В данной работе предлагается аналитическая модель оценки пропускной способности цепочки станций, в которой первая станция является отправителем, последняя - получателем, а остальные станции только ретранслируют полученные пакеты. Эта модель является первым шагом к построению математической модели mesh-сети. Сценарий цепочки соответствует одному изолированному маршруту в mesh-сети.

Идея рассмотреть такую топологию возникает в силу того, что потоки данных в mesh-сети направлены по установившимся (по крайней мере, на некоторое время) маршрутам, поэтому пропускную способность сети можно рассматривать как комбинацию пропускных способностей отдельно взятых маршрутов. Станции в таких маршрутах, очевидно, расположены в цепочку.

## 2. Общая модель

С целью лучше понять влияние механизмов именно канального уровня на

производительность, в ходе дальнейших рассуждений намеренно не учитываются некоторые особенности физического уровня. Рассматривается упрощенная протокольная модель, для которой характерно: 1) радиус зоны уверенного приема  $R_T$  фиксирован. (успешно принять пакет могут только узлы, находящиеся в пределах зоны уверенного приема отправителя); 2) радиус зоны слышимости для всех станций фиксирован (зафиксировать занятую среду могут только узлы, находящиеся в пределах зоны слышимости отправителя); 3) не учитывается эффект захвата (пакет на приемнике не может быть успешно принят, если во время приема ведется еще хотя бы одна передача внутри зоны слышимости приемника); 4) рассматривается канал без помех.

Основным отличием предлагаемого подхода от уже существующих [3] является учет того, что станции в многошаговой сети воспринимают среду по-разному. Поведение станции определяется активностью близлежащих станций, которая для разных станций будет, очевидно различна.

Для формального описания того, как станция воспринимает среду, необходимо, следуя работе [3], ввести понятие виртуального слота станции, который определяется как время между двумя ее последовательными отсчетами интервала отсрочки. Длительность виртуального слота, очевидно, зависит от состояния канала в восприятии данной станции и может равняться (см. рис. 1): 1) пустому слоту  $\sigma$ , если канал был свободен, 2) длительности успешной передачи рассматриваемого узла со средним значением  $T_s$ , 3) длительности коллизионной передачи рассматриваемого узла со средним значением  $T_c$ , 4) средней длительности  $T_a$  передачи соседней станции рассматриваемого узла, либо нескольких соседних станций, если их передачи пересеклись.

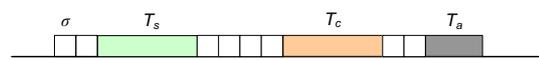


Рисунок 1. Возможные длительности виртуального слота

Длительность пустого слота постоянна, в то время как длительности других слотов имеют переменную длину. Нахождение их средних величин, а также вероятностей их появлений как раз и является одной из основных трудностей при оценке пропускной способности.

Аналогично [3] предположим, что вероятность того, что очередной виртуальный слот данной станции окажется пустым, успешным, коллизионным или занятым передачей другой станции, не зависит от предыдущего виртуального слота. Обозначим:

- вероятность пустого слота для станции  $i$ , как  $P_e(i)$ ;
- вероятность успешного слота для станции  $i$ , как  $P_s(i)$ ;
- вероятность коллизийного слота  $P_c(i)$  и
- вероятность слота, занятого передачей другой станции, как  $P_a(i)$ .

Далее пусть  $\tau_i$  – вероятность того, что станция  $i$  передает пакет при отсчете очередного виртуального слота, и  $p(i)$  – условная вероятность того, передача узла  $i$  оказалась коллизийной при условии, что передача была. Кроме того, пусть  $b(i)$  – вероятность того, что в очередном слоте канал оказался занят передачей станции (или станций, если их передачи пересеклись) в зоне слышимости станции  $i$ , при условии, что сама станция  $i$  не передавала.

Используя введенные выше обозначения, можно записать вероятности виртуальных слотов:

$$P_e(i) = (1 - \tau_i)(1 - b(i)),$$

$$P_s(i) = \tau_i(1 - b(i)),$$

$$P_c(i) = \tau_i p(i),$$

$$P_a(i) = (1 - \tau_i)b(i).$$

Определим пропускную способность  $S(i)$  узла  $i$  как сумму пропускных способностей всех исходящих из  $i$  соединений. Тогда

$$\begin{aligned} S(i) &= \frac{P_s(i)L}{P_e(i)\sigma + P_s(i)T_s + P_c(i)T_c + P_a(i)T_a} = \\ &= \frac{\tau_i(1 - p(i))L}{(1 - \tau_i)(1 - b(i))\sigma + \tau_i(1 - p(i))T_s + \tau_i p(i)T_c + (1 - \tau_i)b(i)T_a}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $L$  – длина пакета в байтах, которая считается постоянной. Очевидно, что пропускные способности станций, через которые проходит трафик одного потока, окажутся зависимы. В формуле (1) знаменатель представляет собой среднее время виртуального слота станции  $i$ , которое в дальнейшем будем обозначать  $T_{slot}(i)$ .

При фиксированном размере пакета величины  $T_s(i) = T_{DATA} + SIFS + T_{ACK} + AIFS$ , и  $T_c(i) = T_{DATA} + T_{ACK\_timeout}$  оказываются известными заранее.  $T_{DATA}$  – время, необходимое для передачи кадра данных на выбранной скорости, а времена  $SIFS$ ,  $T_{ACK}$ ,  $T_{ACK\_timeout}$  и  $AIFS$  – величины, определяемые стандартом IEEE 802.11.

Таким образом, переменными, выражения для которых необходимо получить являются: вероятность начала передачи  $\tau_i$ , вероятность

коллизий  $p(i)$ , вероятность  $b(i)$ , а также длительность  $T_a(i)$  виртуального слота, занятого передачей другой станции.

### 3. Модель для цепочки станций

Рассмотрим цепочку  $n \geq 4$  станций (рис. 2). Станции, соединенные линиями, находятся в зоне уверенного приема друг друга. Остальные станции находятся вне зоны слышимости друг друга. Такая топология соответствует сценарию, когда узлы сети работают на минимальной скорости 6 Мбит/с, зона уверенного приема совпадает с зоной слышимости, а последовательные цепочки станций находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Заметим, что в таком сценарии справедливы условия 1-3 протокольной модели (см. предыдущий раздел).

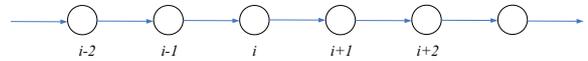


Рисунок 2. Рассматриваемая топология

Пусть трафик генерируется только на станции 1 с интенсивностью  $\lambda$ . Станцией получателем является последняя станция цепочки. Трафик в такой сети является однонаправленным, поэтому пропускная способность станции  $i$  определяется только соединением  $i \rightarrow i+1$ .

Очевидно, что при увеличении  $\lambda$  до некоторого значения  $\lambda^*$  (которое зависит от длины цепочки) пропускная способность будет равна подаваемой нагрузке. При достижении  $\lambda^*$  сеть войдет в режим насыщения, и пропускная способность более увеличиваться не будет.

Нагрузка  $\lambda^*$  (и, соответственно, максимальная пропускная способность) достигается в том случае, если пакеты данных не теряются, а одна из станций  $j^*$  в цепочке работает в режиме насыщения.

В этом случае вероятность начала передачи этой станцией равна [3]:

$$\tau_{j^*} = \frac{2(1 - 2p(j^*))}{(1 - 2p(j^*))(W + 1) + p(j^*)W(1 - (2p(j^*))^m)}, \quad (2)$$

где  $W$  – минимальное конкурентное окно, а  $m$  – двоичный логарифм отношения максимального и минимального конкурентного окна.

Так как пакеты в сети не теряются, то пропускная способность каждой станции одинакова, т.е.:

$$\lambda = S(i) = S(i+1). \quad (3)$$

Пропускная способность на каждом соединении может быть вычислена посредством (1). Из (1) и

(3) можно получить зависимость вероятностей успешных слотов для различных станций:

$$\frac{P_s(i)}{P_s(i+1)} = \frac{T_{slot}(i)}{T_{slot}(i+1)}. \quad (4)$$

Рассмотрим станцию  $i$ , находящуюся в середине цепочки. Через  $p_{free\_c}(i|j)$  обозначим вероятность того, что станция  $i$  не ведет передачу, при условии, что станция  $j$  отсчитывает интервал отсрочки. Через  $p_{free\_a}(i|j)$  обозначим вероятность того, что станция  $i$  не ведет передачу, а также не получает кадр ACK с последующим ожиданием AIFS, при условии, что станция  $j$  может начать свою передачу. AIFS – временной интервал, определяемый стандартом IEEE 802.11, в течение которого среда должна быть не занята для продолжения отсчета интервала отсрочки. Станция  $i$  передаст свой кадр данных для станции  $i+1$  успешно только при одновременном выполнении следующих условий:

- станция  $i+1$  не начала передавать одновременно с  $i$  (а станция  $i+1$  может начать передачу только, если станция  $i+2$  не передает и не получает кадр подтверждения с последующим ожиданием AIFS)
- станция  $i+2$  не ведет свою передачу и не начнет передавать еще время, требуемое для передачи пакета станции  $i$ .

В силу этого вероятность коллизии для станции  $i$  может быть записана в следующем виде:

$$p(i) = 1 - (1 - \tau_{i+1})p_{free\_c}(i+2|i)(1 - \tau_{i+2})p_{free\_a}(i+3|i+1) \left\lfloor \frac{T_D}{\sigma} \right\rfloor,$$

где  $\lfloor x \rfloor$  – целая часть  $x$ .

Теперь при условии, что станция  $i$  не передает, необходимо найти вероятность того, виртуальный слот станции  $i$  окажется занятым передачей соседней станции – либо станции  $i-1$ , либо станцией  $i+1$ , т. е.:

$$b(i) = 1 - (1 - \tau_{i-1})p_{free\_a}(i-2|i)(1 - \tau_{i+1})p_{free\_a}(i+2|i).$$

Здесь необходимо отметить, что после того, как станция  $i+1$  (соответственно, станция  $i-1$ ) начала передачу и до того, как ее закончит, станция  $i-1$  (соответственно, станция  $i+1$ ) может начать свою передачу. В этом случае длительность виртуального слота станции  $i$  будет зависеть от того, насколько «пересеклись» передачи станций  $i-1$  и  $i+1$ .

Для вычисления средней длительности такого виртуального слота проведем следующие рассуждения. Пусть станция  $i+1$  начала передачу в слот станции  $i$ . Тогда с некоторой вероятностью станция  $i-1$  начнет передачу в один последующих слотов, и средняя длительность виртуального слота будет равна  $N_1$ :

$$\begin{aligned} N_1(i) = & T_D + \\ & \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{T_D}{\sigma} \right\rfloor - 1} p_{free\_a}(i-2|i)\tau_{i-1}(1 - p_{free\_a}(i-2|i)\tau_{i-1})^k ((k+1)\sigma + T_{EIFS}) + \\ & \sum_{k=\left\lfloor \frac{T_D}{\sigma} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{T_D + T_{SIFS} + T_{ACK} + T_{AIFS}}{\sigma} \right\rfloor - 1} p_{free\_a}(i-2|i)\tau_{i-1} \times \\ & \times (1 - p_{free\_a}(i-2|i)\tau_{i-1})^k \left( \left( k - \left\lfloor \frac{T_D}{\sigma} \right\rfloor + 1 \right) \sigma + T_s \right) + \\ & + (1 - \tau_{i-1})p_{free\_a}(i-2|i) \left\lfloor \frac{T_D + T_{SIFS} + T_{ACK} + T_{AIFS}}{\sigma} \right\rfloor \times \\ & \times (T_{SIFS} + T_{ACK} + T_{AIFS}). \end{aligned}$$

В выражении для  $N_1$  первая сумма описывает случай, когда станция  $i-1$  начнет свою передачу во время передачи кадра данных от станции  $i+1$ . В этом случае станция  $i$  не сможет корректно декодировать кадры ни от одной из станций и будет ждать время EIFS. Вторая сумма описывает случай, когда станция  $i-1$  начнет передачу во время отсчета SIFS станцией  $i+1$ , получения ею ACK или отсчёта AIFS. В этом случае станция  $i$  должна ожидать окончания передачи станция  $i-1$ , включая ответную пересылку кадра ACK. Последнее слагаемое в формуле описывает случай, когда станция  $i-1$  так и не начнет передавать во время передачи станции  $i+1$ . В этом случае станция  $i$  должна ждать только до окончания передачи станции  $i+1$ .

Если станция  $i-1$  начала передачу одновременно со станцией  $i+1$ , то средняя длительность виртуального слота станции  $i$  будет равна  $N_2$ :

$$N_2(i) = T_D + T_{EIFS}.$$

Пусть станция  $i-1$  начала передачу в слот станции  $i$ . Тогда с некоторой вероятностью станция  $i+1$  начнет передачу в один последующих слотов, и средняя длительность виртуального слота будет равна  $N_3$ :

$$\begin{aligned} N_3(i) = & T_D + \\ & \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{T_D}{\sigma} \right\rfloor - 1} p_{free\_a}(i+2|i)\tau_{i+1}(1 - p_{free\_a}(i+2|i)\tau_{i+1})^k ((k+1)\sigma + T_{EIFS}) + \\ & \sum_{k=\left\lfloor \frac{T_D}{\sigma} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{T_D + T_{SIFS} + T_{ACK}}{\sigma} \right\rfloor - 1} \tau_{i+1}p_{free\_a}(i+2|i) \times \\ & \times (1 - p_{free\_a}(i+2|i)\tau_{i+1})^k \left( \left( k - \left\lfloor \frac{T_D}{\sigma} \right\rfloor + 1 \right) \sigma + T_D + T_{EIFS} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{T_D + T_{SIFS} + T_{ACK} + T_{AIFS}}{\sigma} \right]_{-1} \\
& + \sum_{k=\left\lfloor \frac{T_D + T_{SIFS} + T_{ACK}}{\sigma} \right\rfloor} \tau_{i+1} p_{free\_a}(i+2|i) \times \\
& \times (1 - p_{free\_a}(i+2|i) \tau_{i+1})^k \times \\
& \times \left( \left( k - \left\lfloor \frac{T_D + T_{SIFS} + T_{ACK}}{\sigma} \right\rfloor + 1 \right) \sigma + T_D + T_{SIFS} + T_{ACK} + T_{AIFS} \right) \\
& + (1 - \tau_{i+1} p_{free\_a}(i+2|i)) \left[ \frac{T_D + T_{SIFS} + T_{ACK} + T_{AIFS}}{\sigma} \right] \times \\
& \times (T_{SIFS} + T_{ACK} + T_{AIFS}).
\end{aligned}$$

Выражение для  $N_3$  отличается от аналогичного выражения для  $N_1$  тем, что если станция  $i+1$  начнет передачу кадра данных во время пересылки ACK станцией  $i$ , то этот кадр не будет декодирован, после чего станция  $i$  должна будет ждать время EIFS.

Используя  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ , найдем среднюю длительность  $T_a$  виртуального слота станции  $i$ , занятого передачей соседних станций:

$$\begin{aligned}
T_a(i) \cdot b(i) &= \tau_{i+1} p_{free\_a}(i+2|i) N_1(i) + \\
& + \tau_{i-1} p_{free\_a}(i-2|i) \tau_{i+1} p_{free\_a}(i+2|i) N_2 + \\
& + \tau_{i-1} p_{free\_a}(i-2|i) N_3(i).
\end{aligned}$$

Теперь осталось найти вероятности  $p_{free\_c}(i|j)$  и  $p_{free\_a}(i|j)$ . Поскольку в рассмотренной модели присутствуют только вероятности  $p_{free}(i \pm 2|i)$ , то найдем выражения только для них.

$p_{free\_c}(i+2|i)$  найдем как отношение средней длительности виртуального слота станции  $i+2$ , в который она не ведет свою передачу (исключая время передачи станции  $i+1$ ), к общей средней длительности виртуального слота (исключая время передачи станции  $i+1$ ). Последнее связано с тем, что, когда передает станция  $i+1$ , обе станции  $i$  и  $i+2$  считают канал занятым. Переопределим вероятности появления слотов, которые в данном случае будут условными (условие – станция  $i+1$  не передает):

$$\begin{aligned}
P_e(i+2|i) &= (1 - \tau_{i+2}) (1 - \tau_{i+3} p_{free\_a}(i+4|i+2)), \\
P_a(i+2|i) &= (1 - \tau_{i+2}) \tau_{i+3} p_{free\_a}(i+4|i+2), \\
P_s(i+2|i) &= \tau_{i+2} (1 - \tau_{i+3} p_{free\_a}(i+4|i+2)), \\
P_c(i+2|i) &= \tau_{i+2} \tau_{i+3} p_{free\_a}(i+4|i+2).
\end{aligned}$$

Тогда:

$$p_{free\_a}(i+2|i) = 1 - \frac{P_c(i+2|i)(T_D + T_{ACK\_Timeout}) + P_s(i+2|i)T_s}{P_c(i+2|i)(T_D + T_{EIFS}) + (P_s(i+2|i) + P_a(i+2|i))T_s + P_e(i+2|i)\sigma},$$

$$p_{free\_c}(i+2|i) = 1 - \frac{P_c(i+2|i)T_D}{P_c(i+2|i)(T_D + T_{EIFS}) + (P_s(i+2|i) + P_a(i+2|i))T_s + P_e(i+2|i)\sigma}.$$

$p_{free\_a}(i-2|i)$  и  $p_{free\_c}(i-2|i)$  вычисляется аналогично заменой  $i+2$  на  $i-2$ ,  $i+3$  на  $i-3$  и  $i+4$  на  $i-4$ .

Значения  $p_{free\_a}(i+2|i)$  ( $p_{free\_c}(i+2|i)$ ) зависят от значений  $p_{free\_a}(i+4|i+2)$  ( $p_{free\_c}(i+4|i+2)$ ), которые, в свою очередь, зависят от следующих станций в цепочке. В силу этого,  $p_{free\_a}(i+2|i)$  и  $p_{free\_c}(i+2|i)$  вычисляются последовательно, начиная с последней станции  $n$  в цепочке, для которой  $p_{free\_a}(n|n-2) = 1$ , поскольку она никогда не передает. Аналогичные рассуждения применимы и для  $p_{free}(i-2|i)$ , значения которых необходимо вычислять, начиная с первой станции в цепочке.

Далее, решая получившуюся систему уравнений (2) и (4) относительно  $\{\tau_{ij}, i \in 1, \dots, n\}$ , найдем значения  $p_s(i)$  и  $T_{slot}(i)$  для каждой станции  $i$  в цепочке, благодаря которым, используя (1), получим значение пропускной способности.

### 3. Заключение

Существующие работы, посвященные оценке пропускной способности mesh-сетей на основе IEEE 802.11, основываются на предположениях, которые в большинстве случаев не выполняются в реальных сетях передачи данных. Основной посылкой при построении изложенных в этих работах моделей является предположение о том, что станции случайным образом разбросаны на плоскости, а каждая из станций генерирует трафик, предназначенный для одного из ее непосредственных соседей. Таким образом, не учитывается одно из фундаментальных свойств беспроводных сетей – самоинтерференция, когда пакеты, принадлежащие одному потоку, проходя через последовательные звенья маршрута, интерферируют между собой.

В данной работе предложен несколько иной подход. Основным положением является учет того факта, что трафик в сети организован в виде потоков от станции-источника до станции назначения, а каждому потоку ставится в соответствие установившийся (по крайней мере, на некоторое время) маршрут. Таким образом, пропускная способность всей сети в целом может быть рассчитана как комбинация пропускных способностей отдельных потоков. В настоящей работе рассмотрен простейший случай одной

изолированной цепочки станций. Предложены выражения для вычисления максимальной пропускной способности цепочек станций произвольной длины с учетом эффекта самоинтерференции.

В ходе дальнейших исследований планируется расширить представленную модель на случай нескольких пересекающихся маршрутов, что в конечном итоге позволит построить модель для оценки производительности mesh-сети произвольной топологии

## 5. Литература

- [1] IEEE Std 802.11-2007, Revision of IEEE Std 802.11-1999, "Wireless Lan Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY)", specification, June 2007
- [2] IEEE P802.11s/D3.02, Draft Amendment to Standard, Mesh Networking, March 2009
- [3] Bianchi G. "Performance Analysis of the IEEE 802.11 Distributed Coordination Function." IEEE Journal on Selected Areas in Communication 18(3), Page(s): 535 - 547, march 2000.
- [4] M. H. Manshaei, G.R. Cantieni, c. Barakat, T. Turletti, Performance Analysis of the IEEE of the IEEE 802.11 MAC and Physical Layer Protocol. WOWMOM 2005: 88-97
- [5] C.H. Foh, M. Zukerman, Performance Analysis of the IEEE 802.11 MAC Protocol, EW2002 Proceedings, 2002
- [6] Y. Xiao, J. Rosdahl, Performance Analysis and Enhancement for the Current and Future IEEE 802.11 MAC Protocol, ACM SIGMOBILE, special issue on Wireless Home Networks, Vol.7, No 2, Apr., 2003, pp. 6-19
- [7] F. Cali, M. Conti, E. Gregori. Dynamic tuning of the IEEE 802.11 protocol to achieve a theoretical throughput limit. IEEE/ACM Transactions and Networking, 8(6): 785-799, December 2000
- [8] H. Chhaya, S. Gupta. Performance modeling of asynchronous data transfer methods of IEEE 802.11 MAC protocol. Wireless Networks, 3:271-234, 1997
- [9] Y. Wang, J. Aceves. Performance of collision avoidance protocols in single channel ad-hoc networks. In Proc. of ICNP, pp. 184-190, November 2002
- [10] M. Carvalho, J. Aceves. Scalable model for channel access Protocol in multihop ad hoc networks. In ACM Mobicom '04, September 2004
- [11] K. Duffy, D. Malone, D.J. Leith, Modelling the IEEE 802.11 Distributed coordination function in non-saturated conditions. IEEE Communication Letters, vol.9, no 8, pp. 715-717, 2005
- [12] P. Gupta, P.R. Kumar. The Capacity of Wireless Networks. IEEE Trans. Inform. heory, Vol.46, No. 2, pp388-404, Mar. 2000
- [13] J. Li, C Blake et al. Capacity of Ad Hoc Wireless Networks. ACM MobiCm'01, Rome, Italy, July 2001
- [14] J. Jangeun, M.L. Sichitiu. The nominal capacity of wirelss mesh networks. IEEE Wireless Communications, pp. 8-14, Oct. 2003
- [15] K. Jain et al. Impact of Interference on Multi-hop Wireless Networks Performance. ACM MobiCom'03. San Diego, USA, Sept. 2003
- [16] M. Kodialam, T. Nandagopal. Characterizing the Achievable Rates in Multi-hop Wireless Networks: The Joint Routing and Scheduling Problem. ACM MobiCom'03, San Diego, USA, Sept.2003

# Модель протокола маршрутизации AODV в NS-3

Павел Бойко  
ИППИ РАН  
boyko@iitp.ru

Елена Бучацкая  
ИППИ РАН  
borovkovaes@iitp.ru

## Аннотация

*Представлена модель протокола маршрутизации AODV, разработанная в среде имитационного моделирования NS-3. В статье описываются дизайн модели, поддерживаемые и не поддерживаемые функциональные возможности, дополнительные расширения протокола и использованные нами эвристики.*

## 1. Введение

Широкое распространение мобильных беспроводных устройств связи порождает растущую необходимость в создании надежных и универсальных коммуникационных протоколов, позволяющих пользователям мобильных устройств взаимодействовать друг с другом. Одним из протоколов, позволяющих образовывать беспроводную сеть “на лету”, без использования какой-либо существующей инфраструктуры, является протокол маршрутизации Ad hoc On-Demand Distance Vector (AODV) [1], [2]. AODV является одним из наиболее известных и зрелых протоколов, предназначенных для маршрутизации в мобильных специальных сетях (mobile ad-hoc network, MANET).

Однако, независимо от зрелости, экспериментальное тестирование и исследование протоколов для мобильных беспроводных сетей осложнено многими факторами. Крайне проблематичным является создание воспроизводимых сценариев с десятками, сотнями и даже тысячами мобильных станций. Еще сложнее создавать большое количество таких сценариев, гарантирующих универсальность и надежность протоколов. Из-за таких сложностей основным методом исследования протоколов MANET и AODV в частности является имитационное моделирование, см. например [1], [3].

В этой работе представлена реализация модели AODV в среде имитационного моделирования NS-3 [4]. Основной чертой этой среды моделирования является упор на реализм моде-

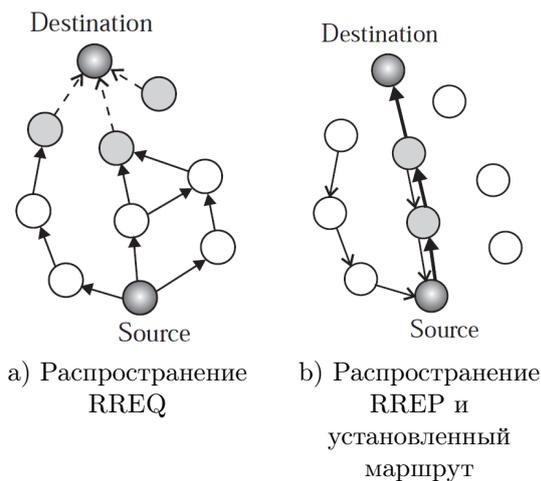
лей протоколов на всех уровнях модели OSI. В частности, вся инфраструктура IP маршрутизации полностью соответствует сетевой подсистеме ядра Linux, что позволяет создавать высоко реалистичные модели сложных протоколов маршрутизации, таких как AODV. Вместе с тем, на сегодняшний день<sup>1</sup> проект NS-3 находится на относительно ранней стадии своего развития и не включает в себя ни одной модели протоколов поиска маршрута по запросу. Мы постарались заполнить этот пробел, создав высоко реалистичную модель протокола AODV.

Дальнейшее изложение устроено следующим образом. В разделе 2 представлено краткое описание работы протокола AODV. Основным является раздел 3, в котором обсуждается внутреннее устройство модели AODV в NS-3. Рассмотрены настраиваемые параметры протокола, детали реализации маршрутной таблицы и буфера запросов, использованные эвристики, расхождения модели и стандарта [2]. В разделе 4 суммируются выводы из нашего опыта реализации модели AODV, а так же обсуждаются возможные направления будущей работы.

## 2. Основы протокола AODV

AODV – протокол маршрутизации для мобильных ad-hoc сетей, ищущий маршруты только по запросу. Основу работы протокола составляет обмен широковещательными сообщениями запроса пути (Route Request, RREQ) и адресными ответами на этот запрос (Route Reply, RREP). Критически важной частью протокола является последовательная нумерация запросов с помощью т.н. *порядковых номеров* (sequence numbers) и жестко фиксированные правила аккуратной обработки этих номеров. Благодаря использованию нумерации протокол гарантирует актуальность маршрутной информации и полностью решает типичную для протоколов маршрутизации с помощью вектора расстояний (distance vector routing)

<sup>1</sup>Доклад написан в сентябре 2009 г.



**Рис. 1. Механизм поиска маршрута в AODV. Иллюстрация из работы [6].**

проблему “счета до бесконечности”, [5]. Ниже кратко описаны процедуры поиска маршрута RREQ/RREP а также процедура сигнализации об разрыве маршрута (Route Error, REER). Более детальное рассмотрение см. в стандарте [2].

Когда станции требуется установить маршрут к прежде неизвестному адресату, на всю сеть распространяется сообщение RREQ, см. Рис. 1 а). При получении такого сообщения, станция ищет в своей таблице маршрутизации валидный маршрут до станции назначения. Если таковой имеется, станция, начавшей поиск, одноадресно посылается RREP сообщение с информацией о запрашиваемом маршруте. В противном случае RREQ пересылается далее. Станция-источник запроса (“Source” на Рис. 1) обрабатывает все пришедшие ответы RREP и выбирает среди них актуальный маршрут минимальной (в смысле количества ретрансляторов) длины, см. Рис. 1 б). Если в течении определенного времени после начала процедуры поиска, станция-источник не получила ни одного ответа, процедура может быть повторена.

Широковещательное распространение запросов RREQ неизбежно приводит к появлению *дубликатов* – копий одного и того же пакета, многократно принимаемых каждой станцией. Для отсеечения дубликатов все станции хранят уникальные номера обработанных RREQ. Кроме того, для уменьшения нагрузки на сеть радиус распространения RREQ может быть ограничен полем IP заголовка TTL. В этом случае последовательные повторы процедуры поиска должны использовать растущие значения TTL. Эта оптимизация протокола известна как “поиск в расширяющемся кольце” (expanding ring search).

В то время, когда поиск маршрута уже на-

чат (послано сообщение RREQ), но еще не завершен (не получено ни одного RREP), протокол AODV *обязан* буферизовать все пакеты данному получателю. Когда маршрут найден, станция посылает пакеты из буфера. Если же маршрут не найден в течении определенного интервала времени, сохраненные пакеты удаляются из буфера, при этом транспортный уровень может получить уведомление об ошибке.

Помимо процедуры поиска маршрута, протокол включает в себя эффективную процедуру сигнализации о разрыве используемого маршрута. Для этого на каждой станции для каждого исходящего звена сети поддерживается список соседей, использующих данное звено в своих маршрутах. Такие соседи называются *предшественниками* (precursors) звена. Если станция обнаруживает потерю звена (либо по отсутствию hello сообщений, либо по информации со второго уровня модели OSI, этот вопрос будет рассмотрен подробно в разделе 3.4), она отправляет предшественникам этого звена сообщение об ошибке (Route Error, RERR). RERR рекурсивно распространяется по сети вплоть до станций-источников всех маршрутов, проходящих через разорванное звено. Получив RERR источники трафика принимают решение о целесообразности начала поиска нового маршрута или сигнализации транспортному уровню о проблемах маршрутизации.

Стандарт AODV [2] не описывает распространение локального широковещательного трафика (subnet directed broadcast в терминологии IPv4). Однако все известные реализации (и наша не исключение) поддерживают пересылают широковещательный трафик согласно следующему правилу: каждый полученный широковещательный пакет пересылается широковещательно со всех интерфейсов станции в том и только том случае, если он не является дубликатом. Способы обнаружения дубликатов различаются в различных реализациях, см. раздел 3.4.

### 3. Модель AODV в NS-3

Ниже описано внутреннее устройство модели AODV в среде имитационного моделирования NS-3. Изложение построено следующим образом. В разделе 3.1 описано взаимодействие модели AODV с другими частями системы в рамках общей инфраструктуры маршрутизации в NS-3. Там же перечислены все настраиваемые параметры (*атрибуты* в терминологии NS-3) модели. В разделах 3.2 и 3.3 приводится детальное описание ключевых структур данных, используемых реализацией протокола.

Раздел 3.4 описывает эвристики используемые нами в случаях, не оговоренных стандартом. Наконец раздел 3.5 посвящен необязательным механизмам стандарта, которые не реализованы в нашей модели.

### 3.1. Интерфейс и структура

В системе типов NS-3 каждая модель протокола маршрутизации IP уровня<sup>2</sup> наследует базовый класс `Ipv4RoutingProtocol`. Базовый класс определяет два виртуальных метода, служащих единственными точками входа в протокол маршрутизации для остальной системы. Первый из них, `RouteOutput()` используется для всех пакетов, исходящих из данной станции. Второй, `RouteInput()` используется для пересылки (forwarding) и/или локальной доставки всех полученных пакетов. Оба метода возвращают маршрут в виде структуры `Ipv4Route`. Отметим, что интерфейс повторяет интерфейс маршрутизации сетевой подсистемы ядра Linux, определенный в заголовочном файле `net/route.h`.

На UML диаграмме Рис. 2 показаны основные классы модели AODV и их отношения друг с другом.

Сердцем модели является класс `aodv::RoutingProtocol`, реализующий всю функциональность обмена управляющими сообщениями и наследующий `Ipv4RoutingProtocol` как описано выше. Работа протокола управляется большим количеством настраиваемых параметров. Все они реализованы как *атрибуты* класса `aodv::RoutingProtocol`. В Табл. 1 перечислены атрибуты протокола, соответствующие параметрам, определенным в RFC [2]. Атрибуты протокола, введенные при реализации модели и не соответствующие каким-либо параметрам из RFC, приведены в Табл. 2.

Известные маршруты хранятся в *таблице маршрутизации*, которая реализована классом `aodv::RoutingTable`. Структура данных таблицы маршрутизации подробно описана в разделе 3.2. Отметим, что реализация полностью поддерживает машину состояний маршрутов, определенную стандартом, равно как устаревание/удаление неиспользуемых маршрутов по истечении определенного промежутка времени.

Для буферизации пакетов, ожидающих установление маршрута, реализован класс `aodv::RequestQueue`. Структура данных буфера запросов подробно описана в разделе 3.3. Поддерживаются операции поиска/удаления всех пакетов с заданным адресом получателя, огра-

<sup>2</sup>Везде в этой работе мы рассматриваем только протокол IP версии 4.

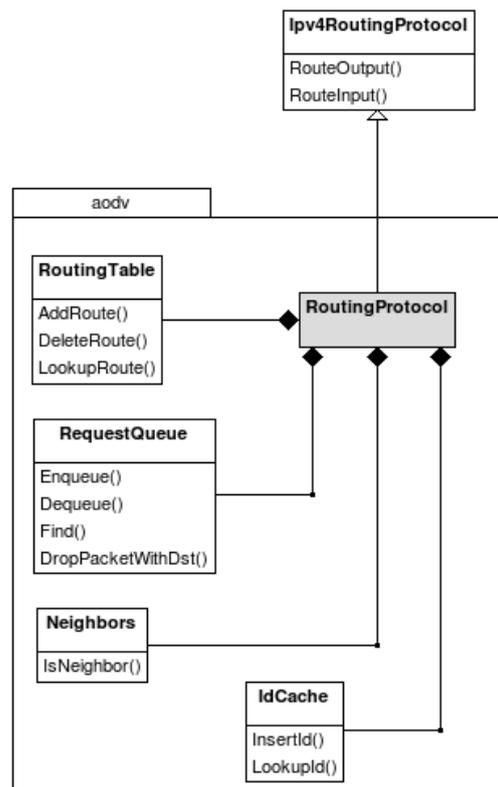


Рис. 2. UML диаграмма основных классов модели AODV.

нение на максимальный размер очереди и на максимальное время пребывания запроса в очереди.

Класс `aodv::Neighbors` реализует логику поддержания соседства и обнаружения разрыва звеньев сети, используемые для этого эвристики описаны ниже. Класс `aodv::IdCache` реализует универсальный кэш уникальных порядковых номеров и используется для обнаружения дубликатов широковещательных пакетов (как собственных RREQ, так и пакетов с данными).

### 3.2. Таблица маршрутизации

В этом разделе описано внутреннее устройство маршрутной таблицы `aodv::RoutingTable`. Таблица реализована в виде контейнера `map` из STL. В качестве ключа выступает адрес назначения, что значительно уменьшает время поиска маршрута. Каждая запись в таблице содержит:

- Указатель на IP маршрут в виде `Ptr<Ipv4Route>` (ввиду того, что протокол маршрутизации в NS-3 должен предоставлять информацию о маршруте другим протоколам именно в таком виде).

Атрибут	Описание	Значение
ActiveRouteTimeout	Время жизни активного маршрута	3 с
MyRouteTimeout	Время, которое станция помещает в поле life_time в RREP сообщении	11.2
BlackListTimeout	Время, на которое станция, линк до которой считается однонаправленным помещается в черный список	5.6 с
HelloInterval	Интервал между hello сообщениями	1 с
AllowedHelloLoss	Число потерянных подряд hello сообщений, позволяющее для исправного звена	2
NetDiameter	Диаметр сети - максимальное расстояние в шагах между двумя станциями в сети	35
RreqRetries	Максимальное число попыток найти маршрут с максимальным значением TTL равным диаметру сети	2
RreqRateLimit	Максимальное число RREQ сообщений в минуту	10
RerrRateLimit	Максимальное число RERR сообщений в минуту	10
NodeTraversalTime	Завышенная оценка передачи пакета между двумя соседними станциями	40 мс
NetTraversalTime	Оценка наибольшего времени, требующегося пакету, чтобы пройти всю сеть	2.8 с
PathDiscoveryTime	Оценка наибольшего времени, требующегося для того, чтобы найти маршрут	5.6 с
DeletePeriod	Время жизни нерабочего маршрута в таблице маршрутизации	15 с

**Таблица 1. Параметры протокола AODV определенные в RFC.**

Атрибут	Описание	Значение
GratuitousReply	В RREQ сообщениях выставляется флаг G	true
DestinationOnly	В RREQ сообщениях выставляется флаг D	false
EnableHello	Включает отправку hello сообщений	true
MaxQueueLen	Максимальное число пакетов в буфере	64
MaxQueueTime	Максимальное время, на которое пакет может быть помещен в буфер	30 с

**Таблица 2. Дополнительные параметры модели AODV.**

Включает в себя:

- destination – IP адрес станции назначения;
- source – IP адрес начальной станции (в наше случае это всегда адрес данной станции, так как в таблице маршрутизации любой станции хранятся только маршруты от этой станции до других);
- next\_hop – IP адрес станции, следующей в маршруте до станции назначения;
- адрес устройства с которого следует отправлять пакеты.
- Расстояние до станции назначения (измеряется, как число промежуточных станций).
- Состояние маршрута. Возможно одно из трех состояний: пригодный для передачи данных (валидный), не пригодный для передачи данных (невалидный), ищется в данный момент.
- Поле времени жизни – для валидных маршрутов, это время через которое маршрут станет невалидным, для невалидных маршрутов это время через которое маршрут будет удален.
- Флаг, показывающий содержит ли данный маршрут однонаправленные звенья.
- Порядковый номер маршрута, если известен.

- Таймер, используемый при ожидании RREP\_ACK.
- Предшественники – список станций, использующих данную станцию в качестве next\_hop, на пути к станции назначения. В случае потери данного маршрута им будет послано сообщение RERR, см. описание процедуры RERR в разделе 2.
- Число посланных RREQ сообщений (для маршрута, находящегося в поиске, в противном случае 0).

При каждом запросе к таблице маршрутизации происходит проверка записей, при которой, во-первых, пригодные для передачи данных маршруты с истекшим временем жизни помечаются как не пригодные к использованию и, во-вторых, не пригодные к использованию с истекшим временем жизни удаляются. Это позволяет не использовать для каждой записи в таблице маршрутизации отдельный таймер.

### 3.3. Очередь запросов

Пакеты, приходящие во время поиска маршрута, должны помещаться в буфер. Буфер реализован в виде вектора записей. Каждая запись хранит:

- Копию пакета.
- Заголовок IP (содержит информацию о станции назначения и номере протокола, необходимую для самостоятельной отправки пакета с помощью IPv4 протокола).
- Указатель на метод отправки пакета, на случай если маршрут будет найден.
- Указатель на обработчик ошибок маршрутизации.
- Время, по достижении которого, запись должна быть удалена из буфера.

Буфер вмещает максимум MaxQueueLen пакетов. При переполнении из буфера удаляются наиболее старые пакеты. Пакет не должен храниться в буфере дольше MaxQueueTime, так как, считается, что за это время он настолько устарел, что вероятнее всего никому более не нужен. Мы не стали связывать с каждым пакетом в очереди свой таймер, срабатывающий при устаревании пакета. Вместо этого каждый метод, позволяющий пользователю работать с очередью, удаляет устаревшие записи. Таким образом удаление пакета из буфера может происходить по одной из следующих причин: 1)

при переполнении буфера; 2) при устаревании пакета; 3) при удалении всех пакетов с данным адресом назначения. В любом случае при удалении пакета вызывается обработчик ошибок маршрутизации, связанный с данной записью. Это позволяет легко контролировать какие пакеты, когда и почему были удалены.

### 3.4. Используемые эвристики

Спецификация AODV [2] намеренно оставляет некоторые аспекты работы протокола неопределенными, мы будем называть такие процедуры *эвристиками*. Прежде все это моменты, требующие межуровневого взаимодействия с протоколами второго уровня модели OSI. При этом предполагается, что каждая реализация выберет максимально эффективный способ из доступных. В этом разделе суммируются эвристики, использованные в нашей реализации.

#### 3.4.1. Обнаружение однонаправленных звеньев.

Для нормальной работы AODV все звенья (links) сети обязаны быть двунаправленными. Для детектирования однонаправленных звеньев, протоколов предусмотрен механизм подтверждения по запросу. Для того, чтобы убедиться в симметричности звена, станция может послать по нему специальное сообщение RREP с битовым флагом “A” (от англ. *acknowledgement* – подтверждение). Получив такое сообщение, станция-сосед должна ответить коротким специальным сообщением RREP\_ACK. Успешный обмен RREP-RREP\_ACK по звену гарантирует его двунаправленность. Протокол, однако, не специфицирует в каком случае станция должна подозревать звено в асимметричности и инициировать процедуру проверки. Нами реализована следующая эвристика выставления флага “A” в RREP сообщении, требующего отправки подтверждения RREP\_ACK: станция выставляет флаг ‘A’ если она отвечает на запрос маршрута до своего соседа [7]. Эта эвристика, как и многие другие позволяют обнаружить однонаправленные звенья только в очень специфических и следовательно редких случаях. Можно было бы всегда требовать подтверждения получения RREP, но это, во первых, противоречит стремлению авторов AODV свести количество служебного трафика к минимуму и, во вторых, снижает эффективность работы AODV в сетях без однонаправленных звеньев или с очень небольшим их количеством – что типично для имитационного моделирования.

**3.4.2. Обнаружение разрыва звена.** Поведение протокола в мобильных условиях критически зависит от механизма сигнализации о разрыве маршрутов. Эффективность этого механизма, в свою очередь, критическим образом зависит от эвристики обнаружения разрыва звена. Наша реализация использует одновременно две таких эвристики, каждая из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Во-первых, каждая станция регулярно шлет короткие специальные HELLO сообщения. Звено с соседом считается разорванным, после потери последовательных AllowedHelloLoss таких сообщений с момента последнего успешно полученного или доставленного пакета. Этот механизм предназначен для детектирования поломки неиспользуемых в текущий момент звеньев маршрутов.

Во-вторых, используется межуровневая связь с MAC уровнем стандарта IEEE 802.11. Звено считается разорванным в том случае, если доставка кадра по нему оказалась неуспешной, т.е. не подтверждалась приемником в течении всех попыток повторения. Этот механизм предназначен для детектирования поломки используемых звеньев и обрабатывает гораздо быстрее, чем предыдущий.

Также реализовано ограничение на количество RREQ и RERR в секунду, так как вполне вероятно ситуация, когда сообщений потере маршрутов может стать столько, что они не дадут работать всей сети.

**3.4.3. Обнаружение дубликатов.** Для борьбы с дубликатами, каждая станция хранит адрес станции от которой она получила широковещательное сообщение и идентификатор (для предотвращения дублирования кода, записи о RREQ сообщениях и не служебных широковещательных пакетах хранятся в структуре одного типа):

- либо идентификатора пакета, предоставляемый в среде имитационного моделирования NS-3;
- либо идентификатора запроса RREQ (из заголовка RREQ сообщения)

Это довольно грубый и не всегда надежный способ, но для целей моделирования подходит и работает. Можно было бы считать хэш-функцию от каждого пакета и хранить полученное значение, но это бы усложнило функционирование, потребовало бы больше ресурсов, хотя вероятно обеспечивало бы большую надежность.

Все такие структуры хранятся в одном классе реализованном на основе контейне-

ра vector из STL. Записи о полученных пакетах хранятся PathDiscoveryTime = 2 \* NetTraversalTime = 2.8 секунды. Возможно это слишком большое время, но ввиду отсутствия проблем с нехваткой памяти мы можем себе это позволить. Для удаления записей о пакетах из кэша не используются отдельные таймеры для каждой записи. Удаление устаревших записей происходит при каждом обращении к кэшу.

### 3.5. Не поддерживаемая функциональность

Следующие необязательные оптимизации протокола не реализованы в модели:

- Методика постепенного расширения радиуса поиска (expanding ring search).
- Восстановление маршрута промежуточной станцией без инициации RERR (local repair).

Причиной этому послужило то, что для их функционирования требуется непосредственный доступ к IP заголовкам, что противоречит утверждению стандарта [2] о том, что AODV работает поверх UDP. Наша модель использует UDP сокет для отправки/получения всех контрольных сообщений, что значительно упростило ее реализацию, однако лишило нас возможности реализовать указанные оптимизации. Мы могли бы использовать низкоуровневые (raw) сокеты, но они непереносимы [8], что затрудняет их использование в NS-3.

Также наша модель не поддерживает механизм расширений RREQ, RREP и HELLO сообщений, так как они не требуются для базового функционирования протокола и были введены главным образом для работы с IPv6. [2]

Все остальные аспекты функционирования модели AODV полностью соответствуют RFC [2].

## 4. Выводы

Наш опыт реализации модели AODV в среде имитационного моделирования NS-3 позволяет сделать вывод о том, что на сегодняшний день NS-3 обладает всеми необходимыми качествами для создания высоко реалистичных моделей протоколов маршрутизации MANET. Более того, развитая инфраструктура позволяет делать это достаточно просто.

Т.к. модель в точности соответствует спецификации AODV, а сам протокол хорошо изучен как методом имитационного моделирования, так и в на опыте реальных реализаций,

созданная нами модель является хорошо понятной точкой отсчета для всех исследований протоколов маршрутизации MANET методом моделирования в NS-3. Помимо этого, реализация модели AODV, описанная в этой работе, является отправной точкой реализации модели любого другого протокола маршрутизации по запросу, такого как DSR [9] или DYMO [10]. Эта работа уже началась, см. [11].

## Список литературы

- [1] Charles E. Perkins and Elizabeth M. Royer. Ad-hoc on-demand distance vector routing. In *IEEE WORKSHOP ON MOBILE COMPUTING SYSTEMS AND APPLICATIONS*, pages 90–100, 1999.
- [2] C. Perkins, E. Royer, and S. Das. RFC 3561 Ad hoc On-Demand Distance Vector (AODV) Routing. Technical report, IETF, 2003.
- [3] Thomas Clausen. Comparative Study of Routing Protocols for Mobile Ad-hoc NETWORKS. Technical report, INRIA, 2004.
- [4] The ns-3 network simulator. <http://www.nsnam.org/>.
- [5] Count-To-Infinity Problem. <http://wiki.uni.lu/secan-lab/Count-To-Infinity+Problem.html>.
- [6] Elizabeth M. Royer and Charles E. Perkins. An implementation study of the aodv routing protocol. In *In Proceedings of the IEEE Wireless Communications and Networking Conference*.
- [7] Erik Nordström. AODV implementation. Technical report, Uppsala University.
- [8] raw(7) - Linux man page - Linux IPv4 raw sockets. <http://man-wiki.net/index.php/7:raw>.
- [9] David B. Johnson, David A. Maltz, and Yih C. Hu. The dynamic source routing protocol for mobile ad hoc networks (dsr). Technical report, IETF MANET Working Group, February 2007.
- [10] I. Chakeres and C. Perkins. Dynamic MANET On-demand (DYMO) Routing, draft-ietf-manet-dymo-17. Technical report, IETF, 2009.
- [11] Ian Thomson. [Ns-developers] DSR Project. <http://mailman.isi.edu/pipermail/ns-developers/2009-September/006621.html>.

# Оценка времени обслуживания пакетов в беспроводной сети под управлением протокола IEEE 802.16

Ляхов А.И.

*Институт проблем передачи информации РАН*  
lyakhov@iitp.ru

Лукин Д.В.

*Московский физико-технический институт*  
(государственный университет)  
ldvrt@mail.ru

## Аннотация

*В работе рассмотрен процесс передачи данных в централизованной беспроводной сети под управлением протокола IEEE 802.16, в котором группа абонентских станций использует общий канал для передачи данных базовой станции. Разработана аналитическая модель для исследования эффективности передачи восходящего трафика, включая процесс резервирования канала с использованием алгоритма случайного множественного доступа и непосредственно процесс передачи пакетов, учитывая прикрепление запросов полосы пропускания к данным. Получены аналитические оценки времени регистрации пакетов и времени обслуживания пакетов.*

## 1. Введение

В последнее время одним из основных направлений развития телекоммуникационной индустрии является разработка новых беспроводных сетей, как локального, так и городского масштаба [1]. Стандарт IEEE 802.16 "Air Interface for Fixed Broadband Wireless Access Systems" (воздушный интерфейс для фиксированных систем с широкополосным беспроводным доступом), разработанный в 2001 году Институтом инженеров по электротехнике и электронике (IEEE), представляет собой технологию широкополосной связи, рассчитанную на внедрение в городских беспроводных сетях (WMAN).

Стандарт IEEE 802.16 позволяет обеспечить пользователям доступ в глобальные сети в городских масштабах и, в дополнение к этому, дифференцировать уровни предоставляемых услуг и гарантировать качество обслуживания,

что позволяет использовать протокол для передачи мультимедийной информации в реальном времени.

Согласно стандарту время работы сети разбивается на фиксированные интервалы, называемые кадрами, причем каждый кадр содержит восходящий и нисходящий подкадры для передачи соответствующих потоков информации.

В централизованной сети под управлением протокола IEEE 802.16 Оконечные Станции (ОС) разделяют восходящий канал к Базовой станции (БС) на основе запросов полосы пропускания (ЗПП). ОС информируют БС о необходимости выделения полосы пропускания в последующих кадрах с помощью отправки запросов полосы пропускания. Получая ЗПП и учитывая количество буферизованных данных восходящего и нисходящего трафика, БС выделяет время для передачи данных (полосу пропускания) в восходящем подкадре каждой из ОС. В протоколе предусмотрены два основных метода отправки ЗПП: выделение отдельных слотов для отправки ЗПП или прикрепление ЗПП к данным. При этом БС может либо опрашивать отдельные ОС, периодически выделяя им отдельные слоты для отправки ЗПП, либо организуя интервал конкурентного доступа в каждом восходящем кадре.

Запрашиваемая полоса пропускания определяется количеством бит, необходимых для передачи MAC заголовков и пакетов с данными, без дополнительной служебной информации, добавляемой на физическом уровне (PHY Overhead).

Активными станциями считаются станции, для которых выделено время для передачи данных. Активные станции встраивают ЗПП в пакеты с данными в восходящем канале. Данный механизм будем называть поллингом с прикреплением (piggy-backing).

Неактивные станции (станции, не имеющие слотов для передачи данных), но имеющие пакеты с данными в очереди для передачи, передают ЗПП, либо путем их одноадресного поллинга БС, либо методом конкурентного опроса. Далее в работе будем рассматривать конкурентный метод опроса. При конкурентном опросе для организации доступа группы абонентов к общему каналу связи применяются алгоритмы случайного множественного доступа (СМД). Базовая станция опрашивает оконечные станции, определяя временные интервалы, в которые ОС могут передавать ЗПП. Каждый кадр содержит один такой интервал, состоящий из  $K$  слотов, причем  $K$  не меняется в процессе передачи. За время одного слота возможна передача ровно одного ЗПП.

Стандартизованным в IEEE 802.16 алгоритмом СМД является “двоичный экспоненциальный откат” (Binary Exponential Backoff, ВЕВ). Как показано в [3 – 5], можно считать, что при выполнении этого алгоритма ОС сначала равновероятно выбирает кадр (в пределах текущего окна разрешения конфликтов  $W_i$ , зависящего от числа  $i$  неудачных попыток передачи текущего ЗПП) для передачи ЗПП, а затем также равновероятно – слот из  $K$  возможных. После каждой неудачной передачи ЗПП ввиду коллизии в выбранном слоте ОС спустя тайм-аут  $T_r$ , необходимый для обнаружения неудачи, удваивает окно до тех пор, пока оно не достигнет максимума  $W_M$ , т.е. максимальной стадии  $M$  разрешения конфликта..

Заметим, что при поступлении новых пакетов данных в очередь ОС, уже выполняющей алгоритм ВЕВ, станция дополняет свой текущий запрос требованиями полосы для вновь поступивших данных, то есть с помощью одного ЗПП ОС информирует БС обо всех пакетах, требующих передачи. После успешной отправки ЗПП на один или несколько пакетов эти пакеты считаются зарегистрированными, то есть БС может планировать их передачу. Время задержки на этапе регистрации пакетов на основе алгоритма “двоичный экспоненциальный отката” оценивалось в [3] и [5]. Однако, время обслуживания пакета складывается не только из времени регистрации  $t_{reg}$  (от момента прихода пакета в очередь ОС до момента регистрации), но и собственно времени обслуживания зарегистрированных пакетов, которое мы назовем временем отправки  $t_{send}$  пакета. В [4] была впервые разработана аналитический метод оценки среднего времени обслуживания пакета. Цель данной работы состоит в развитии этого

метода для учета прикрепления запросов полосы пропускания к данным.

## 2. Оценка времени обслуживания пакетов

Время обслуживания пакета будем отсчитывать с момента прихода пакета в очередь до прихода к оконечной станции подтверждения (АСК) от БС о получении пакета. Так как базовая станция посылает подтверждение (АСК) на пришедшие в предыдущем кадре пакеты в управляющей секции в самом начале следующего кадра, то пренебрежем промежутком времени на посылку подтверждения и считаем моментом окончания обслуживания конец кадра, в котором пакет был получен БС. Будем считать моментом регистрации пакета конец кадра, в котором БС получила соответствующий ЗПП.

Пусть  $T_{BEB}$  и  $\Delta\tau$  – средние времена регистрации для пакетов, поступающих в очередь неактивной и активной станции соответственно. Пусть  $P_0$  – вероятность нулевого числа зарегистрированных пакетов у станции в конце кадра, т.е. вероятность того, что она неактивна. Тогда среднее время регистрации

$$T_{reg} = (1 - P_0)\Delta\tau + P_0T_{BEB}$$

Дальнейшее исследование будем проводить в предположении, что пакеты поступают в очередь к каждой из  $N$  ОС по закону Пуассона с интенсивностью  $\lambda$ . Следовательно,

$\Delta\tau = [1 - \exp(-\lambda)]^{-1} - (\lambda)^{-1}$ . Здесь и далее в работе за единицу времени взята длительность одного кадра. Также будем полагать отсутствие потерь пакетов, т.е. буфер каждой станции достаточно велик, а скорость работы сети больше суммарной интенсивности поступления пакетов, что означает выполнение неравенства  $N\lambda < S$ . Тогда на основе формулы Литтла находим среднее время отправки пакета  $T_{send}$

$$T_{send} = \frac{L_Q}{N\lambda},$$

где  $L_Q$  – средняя длина суммарной очереди зарегистрированных пакетов.

Следовательно, среднее время обслуживания пакета равно

$$T_{serv} = P_0\Delta\tau + (1 - P_0)T_{BEB} + \frac{L_Q}{N\lambda}. \quad (1)$$

Для оценки  $T_{BEB}$  будем использовать аналитическую модель, основанную на результатах в [3]-[4]. Основные выкладки приведены в разделе 4. Далее в разделе 3 будет описана модель изменения очереди зарегистрированных пакетов и определены  $P_0$  и  $L_Q$ ; таким образом, будут получены все данные для определения среднего времени обслуживания пакета  $T_{serv}$ .

### 3. Модель изменения очереди зарегистрированных пакетов

Рассмотрим систему массового обслуживания, описывающую процесс изменения суммы длин очередей зарегистрированных пакетов всех ОС. Считаем, что длительность восходящего кадра достаточна для передач  $S$  пакетов с данными. Пусть  $i(t)$  - число пакетов в системе в момент времени  $t$ , определяющее состояние системы.

В момент  $t_v$  окончания кадра  $v$  число пакетов в системе претерпевает скачок, для определенности будем считать  $i(t_v) = i(t_v + 0)$ , то есть пакеты, переданные за этот кадр, уже не учитываются. Далее на обслуживание выбираются следующие  $S$  пакетов, которые покинут систему в конце следующего кадра  $t_{v+1}$  по приходу к ОС подтверждения (ACK) от БС о получении пакетов. Подтверждение на посланные пакеты приходит к ОС по стандарту в начале следующего кадра (а не в конце текущего), но этим пренебрегаем, так как в рассматриваемой модели помехи отсутствуют, поэтому время окончания обслуживания принимается за конец текущего кадра. Для того чтобы в момент  $t_{v+1}$  в системе осталось  $j$  пакетов, при условии, что в момент  $t_v$  было  $i$  пакетов и  $i \geq S$ , необходимо, чтобы за интервал времени  $(t_v, t_{v+1})$  в систему поступило  $j-i+S$  пакетов. Если в момент  $t_v$  число пакетов в системе  $i(t_v)$  меньше  $S$ , то все эти пакеты будут переданы к моменту  $t_{v+1}$ , а вновь пришедшие пакеты будут ожидать начала следующего кадра для начала обслуживания.

Пакеты, поступающие к активным станциям, регистрируются посредством поллинга с прикреплением и помещаются в очередь зарегистрированных пакетов в начале следующего кадра. Пакеты, поступающие к неактивным станциям, регистрируются

посредством механизма конкурентного доступа. Таким образом, зарегистрированные пакеты поступают на обслуживание двумя способами, и распределение вероятности прихода  $k$  зарегистрированных пакетов при условии, что  $m$  фиксированных станций активны, имеет вид

$$f(k, m) = f_{puass}(k, m) \otimes f_{BEB}(k, N - m),$$

т.е.  $f(k, m), k = 0, \dots$ , – свертка двух распределений: распределения вероятностей

$$f_{puass}(k, m) = \frac{(m\lambda)^k}{k!} e^{-m\lambda}$$

прихода  $k$  заявок за кадр при пуассоновском потоке с интенсивностью  $m\lambda$ , что соответствует поступлению новых пакетов в очереди активных станций, и распределения  $f_{BEB}(k, N - m)$ , соответствующего поступлению пакетов из фазы конкурентного доступа  $N-m$  неактивных станций и определяемого в разделе 4.

Распределение числа активных станций  $m$  зависит от длины очереди  $i$ . Пусть  $\varphi(m | i)$  – вероятность того, что ровно  $m$  станций являются активными при наличии  $i$  пакетов во всех очередях ОС, полагая пакеты различимыми и распределенными между станциями равномерно. Согласно [6]:

$$\varphi(m | i) = C_N^m \sum_{l=1}^m (-1)^l C_m^l \left[ \frac{m-l}{N} \right]^i.$$

Тогда вероятность прихода  $k$  пакетов при наличии  $i$  пакетов в очереди равно

$$g(k, i) = \sum_{m=\min(1, i)}^{\min(N, i)} \varphi(m | i) f(k, m).$$

Используя эту функцию, определяем все ненулевые элементы матрицы одношаговых переходов между состояниями:

$$\begin{cases} p_{i,j} = g(j, i), 0 \leq i < S, j \geq i - S, \\ p_{i,j} = g(j - i + S, i), i \geq S, j \geq i - S. \end{cases}$$

Запишем уравнения равновесия и уравнение нормировки для стационарных вероятностей.

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{S-1} \pi_i g(j, i) + \sum_{i=S}^{S+j} \pi_i g(j-i+S, i), j \geq 0, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Решение данной системы уравнений позволяет определить среднюю длину очереди

$$L_Q = \sum_{j=0}^{\infty} j \pi_j. \quad (3)$$

Найдем вероятность  $P_0$  отсутствия зарегистрированных пакетов у данной станции в конце произвольно выбранного кадра.

Вероятность того, что конкретная станция является неактивной при наличии  $m$  активных станций, равна  $\frac{N-m}{N}$ . Поэтому вероятность пустой очереди конкретной станции при условии общей очереди длиной  $j$  определяется формулой

$$p(0 | j) = \sum_{m=1}^j \frac{(N-m)\varphi(m | j)}{N}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P_0 &= \sum_{j=0}^{\infty} p(0 | j) \pi_j = \\ &= \pi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j \frac{(N-m)\varphi(m | j) \pi_j}{N}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, получены аналитические выражения для расчета  $L_Q$  и  $P_0$ .

#### 4. Аналитическая модель конкурентного доступа

Согласно [3] вероятность  $p_c$  того, что попытка отправки ЗПП окончится неудачей из-за коллизии, находится путем решения следующего уравнения:

$$\begin{aligned} P_0(1-e^{-\lambda})^2 &= K(1-p_c) \left[ 1 - (1-p_c)^{1/(N-1)} \right] \times \\ & \left[ 1 + \frac{(1-2p_c)(1+W_0+2p_c T_{tr}) + p_c W_0(1-(2p_c)^M)}{2(1-2p_c)(1-p_c)} \right] \end{aligned}$$

с вероятностью  $P_0$ , определяемой через  $\pi_j$  в (4), в качестве параметра. Кроме того, согласно [3] вероятность того, что данная станция сделает попытку передачи ЗПП в данном кадре при условии, что эта станция неактивна, равна

$$\tau_{fr} = \frac{K(1-p_c) \left[ 1 - (1-p_c)^{1/(N-1)} \right]}{(1-p_c)(1-P_0)}.$$

Время регистрации  $T_{BEB}$  равно отношению  $E\{r(x, j)\}$  математического ожидания суммарного времени регистрации  $r$  пакетами, запросы полосы для которых передаются одним ЗПП, и  $E\{n(x, j)\}$  математического ожидания количества  $n$  таких пакетов, где длина первого кадра равна  $x$  ( $x \in (0, 1]$ ), а число целых кадров равно  $j$ , т.е.

$$T_{BEB} = \frac{E\{r(x, j)\}}{E\{n(x, j)\}}$$

В [4] было доказано, что

$$E\{n(x, j)\} = 2 - \lambda \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} + \lambda \Omega'(1),$$

$$\begin{aligned} E\{r(x, j)\} &= \frac{2}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \left( \frac{\lambda}{2} + 2 \right) + \\ &+ \left( 2 - \lambda \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} + \frac{\lambda}{2} \right) \Omega'(1) + \frac{\lambda}{2} \Omega''(1), \end{aligned}$$

где  $\Omega(z)$  – производящая функция времени передачи ЗПП, равная

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= (1-p_c) z^{-1-T_{tr}} \left( \sum_{l=0}^M p_c^{l-1} \prod_{i=1}^l \Psi_i(z) \right) \\ &+ \frac{p_c^M}{1-p_c \Psi_{M+1}(z)} \prod_{i=1}^{M+1} \Psi_i(z). \end{aligned}$$

Функция  $\Psi_i(z)$  определяется как

$$\Psi_i(z) = \frac{1}{W_{i-1}} \sum_{j=1}^{W_{i-1}} z^{j+T_{tr}} \text{ при } i = 1, \dots, M+1.$$

Вероятность, того что  $l$  станций попытаются передать ЗПП в данном кадре при условии, что всего  $N-m$  неактивных станций, равна

$$P_{tr}^l(l) = C_{N-m}^l \tau_{fr}^l (1-\tau_{fr})^{N-m-l}.$$

Вероятность  $P_{s-tr}(k | l)$  успешной передачи  $k$  ЗПП при условии, что  $l$  ЗПП передавалось, равна

$$P_{s\_tr}(k|l) = \sum_{v=1}^{\lfloor \frac{l-k}{2} \rfloor} C_K^{v+k} \cdot C_{v+k}^k \cdot V(v, l-k),$$

где  $\lfloor \frac{l-k}{2} \rfloor$  – означает наибольшее целое число,

не превышающее  $\frac{l-k}{2}$ ,

$$V(v, x) = 1 - v^{-x} \left( \sum_{y=1}^{v-1} C_y^v V(y, x) + \sum_{u=1}^{v-1} C_u^v \frac{x!}{(x-u)!} \sum_{y=1}^{v-1} C_y^{v-u} V(y, x-u) \right)$$

– число способов разместить  $x$  ЗПП по  $v$  слотам так, чтобы в каждом оказалось не меньше двух ЗПП.

Следовательно, вероятность  $k$  успешных передач ЗПП в одном кадре при условии, что в этом кадре  $N-m$  станций неактивны, равна

$$P_{s\_tr}(k) = \sum_{l=k}^{N-m} P_{s\_tr}(k|l) \cdot P_{tr}(l).$$

Производящая функция  $\theta(z)$  числа пакетов, запросы полосы для которых были успешно переданы в данном ЗПП, была найдена в [4] и

$$\text{равна } \theta(z) = \frac{ze^{-\lambda+\lambda z}}{1-e^{-\lambda}} \Omega(e^{-\lambda+\lambda z}).$$

Пусть  $p_{s\_tr}(s)$  – производящая функция распределения  $\{P_{s\_tr}(m)\}$ . Тогда, воспользовавшись теоремой из [6] и предполагая, что количества пакетов, запросы полосы для которых передаются в ЗПП разными станциями, одинаково распределены и независимы друг от друга, находим производящую функцию  $p_{s\_tr}(\theta(s))$  распределения суммарного числа пакетов, зарегистрированных в данном кадре всеми станциями.

Таким образом, получены вероятности

$$f_{BEB}(k, N-m) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k p_{s\_tr}(\theta(s))}{ds^k} \right|_{z=0}$$

регистрации  $k$  пакетов в одном кадре посредством механизма конкурентного доступа при условии, что в этом кадре  $N-m$  станций неактивны.

## 5. Численные результаты

В ходе экспериментов на основе численного решения системы уравнений (2) и выражений (3), (4) получены графики зависимостей средней длины очереди и вероятности нулевого числа зарегистрированных пакетов у станции в конце кадра  $P_0$  от интенсивности поступления пакетов, нормированной на ширину восходящего потока данных,  $\lambda_n = N\lambda/S$ , измеренной в процентах. Эксперименты проводились при следующих фиксированных параметрах.

$$N = 10, S = 50, K = 20, T_{ri} = 0.$$

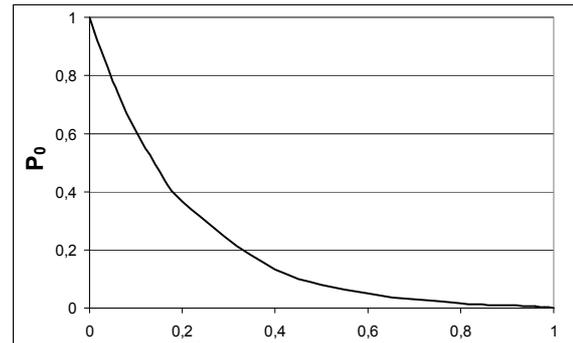


Рис. 1. Зависимость вероятности нулевого числа зарегистрированных пакетов у станции в конце кадра  $P_0$  от нормированной интенсивности  $\lambda_n$ .

Как показано на рис 1, с увеличением интенсивности входного потока станции переходят из режима конкурентного доступа в режим поллинга с прикреплением (piggy-backing).

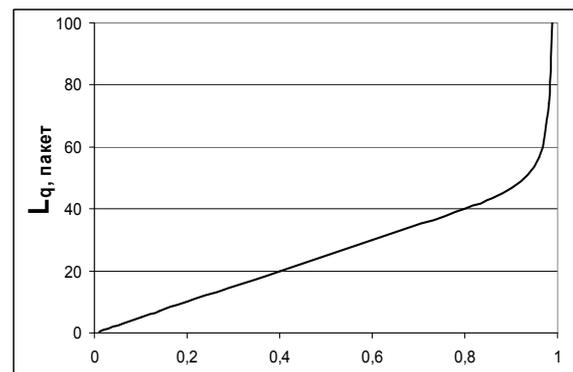


Рис. 2. Зависимость средней длины очереди зарегистрированных пакетов от нормированной интенсивности  $\lambda_n$ .

При дальнейшем увеличении интенсивности канал для передачи данных становится практически равным входному потоку и очередь

резко возрастает (а следовательно и время передачи пакета), как изображено на рис. 2.

Рис. 3 демонстрирует результаты оценки среднего времени обслуживания пакета  $T_{serv}$ . По рисунку видно, что при приближении нормированной интенсивности  $\lambda_n$  к крайним точкам время обслуживания пакета возрастает, что при приближении к 1 объясняется увеличением длины очереди и соответствующим увеличением времени отправки  $T_{send}$ , а при приближении к 0 переходом из режима поллинга с прикреплением в режим конкурентного доступа, при котором время регистрации  $T_{reg}$  существенно больше.

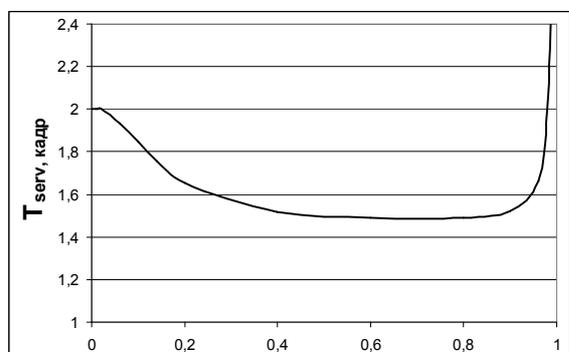


Рис. 3. Зависимость времени обслуживания пакетов ( $T_{serv}$ ) от нормированной интенсивности  $\lambda_n$ .

## 6. Заключение

В работе разработана аналитическая модель сети под управлением протокола IEEE 802.16, описывающая состояние суммарной очереди зарегистрированных пакетов конечных станций. Модель позволяет оценивать средние значения времени регистрации и полного времени обслуживания пакетов, учитывая резервирование канала с использованием алгоритма случайного множественного доступа и прикреплением запросов полосы пропускания к данным.

## 7. Литература

- [1] *IEEE Std 802.16-2004 (Revision of IEEE Std 802.16-2001), IEEE Standard for Local and metropolitan area networks, part 16: Air Interface for Fixed Broadband Wireless Access Systems.*
- [2] Вишнеvский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. *Широкополосные беспроводные*

*сети передачи информации.* М.: Техносфера, 2005.

- [3] Ляхов А.И., Лукин Д.В. Оценка производительности конкурентного доступа в сети IEEE 802.16. М.: Труды семинара Распределенные Компьютерные и Телекоммуникационные Сети: теория и приложения (DCCN-2007), 2007.
- [4] Ляхов А.И., Лукин Д.В. Аналитическая модель передачи данных в сети IEEE 802.16. // *Автоматика и телемеханика.* 2009. № 11.
- [5] A. Vinel, Y. Zhang, Q. Ni, A. Lyakhov, "Efficient Request Mechanism Usage in IEEE 802.16," *Proc. 49th IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM 2006)*, San Francisco, California, USA, November 27 - December 1, 2006.
- [6] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1*, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1952.

## Трафик реального времени в mesh сетях стандартов IEEE 802.11s и FLAME

Кирилл Андреев  
ИППИ РАН  
andreev@iitp.ru

Павел Бойко  
ИППИ РАН  
boyko@iitp.ru

### Аннотация

*На примере VoIP трафика исследуется вопрос о применимости mesh сетей различных стандартов в качестве транспортной среды для распространения трафика реального времени. Методом имитационного моделирования изучается поведение сети из двадцати mesh станций в различных сценариях топологии, мобильности и нагрузки. Определяется емкость сети – количество одновременных VoIP потоков, распространяющихся в сети с качеством приемлемым с точки зрения конечных пользователей. Приводятся выводы о сильных и слабых местах существующих решений для построения mesh сетей.*

### 1. Введение

Относительная дешевизна и низкое энергопотребление привели в последнее время к чрезвычайно широкому распространению мобильных беспроводных устройств связи. Это, в свою очередь, порождает растущую необходимость в создании надежных и универсальных коммуникационных протоколов, позволяющих пользователям мобильных устройств взаимодействовать друг с другом. Одним из направлений этой работы является разработка протоколов, позволяющих пользовательским устройствам образовывать беспроводную сеть “на лету”, без использования какой-либо существующей инфраструктуры. Среди таких протоколов отдельный интерес представляют решения, интегрированные с протоколами канального (второго с точки зрения модели OSI) уровня. Традиционно такие сети называются mesh, т.е. ячеистыми, сетями. Предполагается, что протоколы mesh сетей, во-первых, способны обеспечить максимальное использование сетевых ресурсов и, во-вторых, максимально просто интегрируются с существующими решениями третьего и выше

уровней модели OSI.

С точки зрения конечных пользователей, mesh сеть представляет собой транспортную среду для трафика между приложениями. Требования пользователей к такой среде, вообще говоря, просты: 1) достаточная производительность, 2) надежность, 3) безопасность. В этой работе мы рассмотрим в какой степени различные решения для mesh сетей способны удовлетворять требованиям по производительности и надежности, оставляя безопасность (защиту пользовательской информации) в качестве темы будущих исследований.

Рассмотрены два альтернативных решения для построения mesh сетей: FLAME [1] и IEEE 802.11s [2]. В основе обоих решений лежит стандарт IEEE 802.11 (WiFi). Оба решения доступны для непосредственного использования, а именно реализованы в ядре операционной системы Linux. К сожалению, оба решения достаточно сложны для того, чтобы мы могли хотя даже бегло объяснить их здесь. Отметим только, что протоколы IEEE 802.11s ориентированы на предварительное установление маршрута между устройствами источника и приемника данных. Процедуры поиска и поддержания маршрута заимствованы из хорошо известного протокола AODV [3]. Протокол FLAME напротив не нуждается в предварительном установлении маршрута и использует вместо этого широковещательную рассылку данных до тех пор, пока маршрут не будет обнаружен.

В качестве “пробника” производительности и надежности mesh решений мы выбрали пакетный голосовой (VoIP) трафик между двумя произвольно выбранными узлами сети. Выбор обусловлен несколькими соображениями. Во-первых, трафик реального времени (будь то голос, видео, многопользовательские игры в реальном времени и т.п.) с большой вероятностью будет присутствовать в реальных инсталляциях mesh сетей. Во-вторых, качество VoIP трафика зависит прежде всего от его за-

Параметр	Значение
Центральная несущая частота, МГц	400
Стандарт РНУ 802.11	802.11a
Ширина канала, МГц	5
Максимальная канальная скорость, Мб/с	13.5
Минимальная канальная скорость, Мб/с	1.5
Выходная мощность, dBm	30
Усиление антенн, TX + RX, dBi	1+1
Высота подвеса антенн, м	2
Порог отсечки для приема пакета, dBm	-95
Порог определения занятости среды, dBm	-115
Радиус приема, км	3.2
Радиус определения занятости среды, км	10.6
Количество станций	20
Минимальное время моделирования, один запуск, с	900
Количество независимых запусков	10
Случайная задержка перед запуском приложений, с	0.1

**Таблица 1. Параметры моделирования.**

держки (производительность) и доли потерянных пакетов (надежность), что позволяет объединить различные требования пользователей в одном показателе. В-третьих, качество голосового трафика с точки зрения конечного пользователя имеет хорошо определенное количественное выражение. Наконец, исследование качества голосового трафика на фоне интенсивного фоновых трафика данных позволяет оценить работу механизмов приоритизации трафика и обеспечения качества обслуживания (QoS), унаследованного обоими рассматриваемыми решениями из стандарта 802.11.

Исследование выполнено методом имитационного моделирования, что позволило рассмотреть поведение сети в разнообразных сценариях топологии, мобильности и при различной нагрузке.

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разделе 2 представлена методика моделирования. Описаны параметры станций и протоколов, модели трафика, сценарии топологии и мобильности. В разделе 3 приведены результаты моделирования. Для каждого сценария приводится и обсуждается зависимость доступности VoIP сервисов абонентам сети как функция нагрузки. В разделе 2 подводятся итоги исследования и делаются основные выводы.

## 2. Методика моделирования

Моделирование проводилось в среде NS-3. Специально для этого исследования нами были реализованы модели протоколов IEEE 802.11s

(версии D3.0) и FLAME, см. [4].

Параметры моделирования собраны на Табл. 1.

### 2.1. Модели трафика

Для моделирования сетевого трафика и оценки производительности сети использовались два трафика:

- Однонаправленный голосовой VoIP поток точка-точка, см. раздел 2.1.1.
- Поток фоновых данных точка-точка, см. раздел 2.1.2.

Для приоритизации голосового трафика по сравнению с данными мы использовали стандарт IEEE 802.11e [5]. Голосовой трафик имеет приоритет Voice, данные – Background. Следует понимать, что стандартный механизм приоритизации работает в одном коллизийном домене и *a priori* не гарантирует качество обслуживания для многошаговых маршрутов.

**2.1.1. Голосовой поток точка-точка.** Модель голосового трафика представляет собой непрерывный *односторонний* поток данных с интенсивностью 50 пакетов в секунду с полезной нагрузкой 20 байт каждый, что соответствует популярному речевому кодеру G.729 [6]. В качестве транспортного протокола используется UDP. В настоящее время мы не моделируем дополнительные заголовки/контрольный трафик, связанные с какими-либо протоколами уровня приложения, такими как SIP и RTP/RTCP.

Голосовые потоки точка-точка инициализируются в начале моделирования и существуют на всем протяжении прогона модели, при этом источник и приемник каждого голосового потока выбираются случайным образом равномерно среди всех станций сети.

Приемник голосового потока ведет статистику следующих параметров за каждую секунду модельного времени:

- Доля доставленных пакетов – отношение числа доставленных и числа отправленных пакетов.
- Среднее время доставки (one way delay) – среднее (за текущую секунду) время доставки одного пакета от приложения-отправителя к приложению-получателю.
- Вариация времени доставки (jitter) – мера изменчивости времени доставки различных пакетов, строгое определение см. в [7].

Исходя из этих параметров вычислялся рейтинг качества голоса – R-factor, см. рекомендацию [8, 9], для каждого голосового потока в зависимости от времени. По определению R-фактор принимает значения от 0 до 100, при этом в [10] определено шесть категорий качества передачи голоса, см. Табл. 2. Мы использовали значения по умолчанию для всех параметров модели [8] и параметры для кодера G.729.

**2.1.2. Фоновый поток данных.** Фоновая передача данных моделируется TCP соединением, по которому передается файл размером 2 МБ (это может быть, например, фотография с камеры мобильного устройства). Инициализация  $i$ -го по счету потока данных происходит между двумя различными станциями, случайно выбранными равномерно из всей сети в случайный момент времени  $t_{start}^i = t_{start}^{i-1} + \delta t$ , где  $t_{start}^{i-1}$  – время инициализации предыдущего потока данных (либо 0 если  $i = 1$ ), а  $\delta t$  распределена экспоненциально с средним значением (5 минут) / (полное количество станций). Другими словами в сети из  $n$  станций новый поток данных возникает в среднем раз в  $5/n$  минут между двумя случайными станциями сети.

Поток данных закрывается после того как файл полностью передан либо когда истекает время ожидания TCP. Принимающая станция регистрирует факт успешной (или неуспешной) передачи файла и собирает посекундную статистику о зависимости скорости передачи данных от времени. Отметим, что т.к. основной целью введения фонового трафика было изучение механизмов приоритизации и обеспечения QoS, мы не приводим далее результаты измерений скорости передачи данных.

## 2.2. Критерии производительности сети

Для количественного измерения производительности и надежности передачи голосового трафика в сети с точки зрения конечных пользователей, мы использовали понятие доступности сервиса абонентам и емкости сети.

Назовем абонентом станцию-приемник голосового потока. По определению *доступность сервиса абоненту* – это средняя (по времени, абонентам и прогонам модели) доля времени, в течении которого качество передачи голоса считается удовлетворительным, т.е. R-factor > 50.

Вообще говоря, доступность VoIP сервиса абонентам зависит от нагрузки на сеть, например количества уже активных абонентов. По определению, *емкость сети* – это максимальное количество одновременно активных голосовых потоков, при котором доступность сервиса каждому из абонентов не опускается в среднем (по абонентам и прогонам модели) ниже 95%. Емкость сети зависит, конечно, от ее размера, топологии, условий мобильности, интенсивности фонового трафика, наконец – используемого набора (“стеку”) протоколов mesh сети.

## 2.3. Сценарии использования

При анализе работы протокола использовались следующие сценарии мобильности и топологии:

- “Толпа” – все станции находятся в области приема друг друга, см. раздел 2.3.1.
- “Колонна” – станции выстроены в цепочку, а расстояние между станциями фиксировано таким образом, что в области приема каждой станции находится не более двух соседей, см. раздел 2.3.2.
- Случайная статическая топология – станции равномерно располагаются в прямоугольной области, см. раздел 2.3.3.
- Движение к случайно выбранной точке начинающая со случайной топологии, см. раздел 2.3.4.

**2.3.1. Толпа.** В качестве плотной рассматривалась сеть из 20 станций, расположенных в непосредственной близости друг от друга. Данный сценарий интересен с точки зрения анализа механизма доступа к среде и приоритизации трафика внутри одного коллизийного домена. Несмотря на то, что в сети диаметром 1 шаг маршрутизация тривиальна, в этом

Значение R	Качество	Удовлетворенность пользователей
$90 \leq R < 100$	Лучшее	Очень удовлетворены
$80 \leq R < 90$	Высокое	Удовлетворены
$70 \leq R < 80$	Среднее	Некоторые не удовлетворены
$60 \leq R < 70$	Низкое	Многие не удовлетворены
$50 \leq R < 60$	Плохое	Практически все не удовлетворены
$R < 50$	Не рекомендуется	Использование не рекомендуется

Таблица 2. Соотношение между R-фактором и категорией качества передачи речи.

сценарии существенным становится избыточный трафик, генерируемый протоколом маршрутизации: собственные контрольные сообщения, заголовки, избыточная передача данных. Так, в случае протокола FLAME при инициализации потока данных первый пакет будет повторен широкоэвентально каждой станцией, что уменьшает пропускную способность всей сети.

**2.3.2. Колонна.** Классический сценарий многошаговой топологии. Как и все остальные сценарии колонна была организована из 20 станций. Для данного сценария характерно то, что из-за большого расстояния между соседними станциями, выбранного для исключения возможности образования звеньев сети длиной более одного звена колонны, уровень принимаемого сигнала окажется слишком низким для того, чтобы задействовать высокие скорости передачи данных. Поскольку во всех сценариях алгоритм переключения скоростей был включен, то у колонны пропускная способность окажется заведомо ниже, чем, скажем, у сценария плотной сети. Более того, в каждом коллизийном домене один кадр передается дважды: сначала самой станцией, а затем станцией-ретранслятором. Также последним фактором, снижающим суммарную пропускную способность сети в таком сценарии, является то, что при случайном распределении начальной и конечной точек в потоке данных, средняя станция в колонне оказывается более загруженной. Стоит также отметить, что несмотря на то, что область слышимости составляет ровно одну соседнюю станцию, при передаче пакета в состоянии CCA-BUSY попадают станции, отстоящие от передающей на 3 шага в каждую сторону.

**2.3.3. Случайная топология.** 20 станций равномерно распределяются по прямоугольной площадке размером  $1.5 \times 4$  радиуса слышимости  $R$  ( $4.8 \times 12.8$  км). Плотность станций составляет при этом в среднем  $3.3R^{-2}$  или 0.3 станции на км<sup>2</sup>.

Размер области моделирования был подобран таким образом, чтобы сеть из 20 станций была в большинстве случаев:

- *связной* – существует путь между любой парой станций,
- *многошаговой* – диаметр сети больше 1,
- *разреженной* – среднее число соседей меньше общего количества станций.

Подбирая топологию мы провели 20000 прогонов модели, расставлявшей точки равномерно случайным образом на площадке. Среднее число соседей составляет 6.5, средний диаметр сети составляет 5-6 шагов и примерно в 80% случаев сеть была связной (16200 случаев).

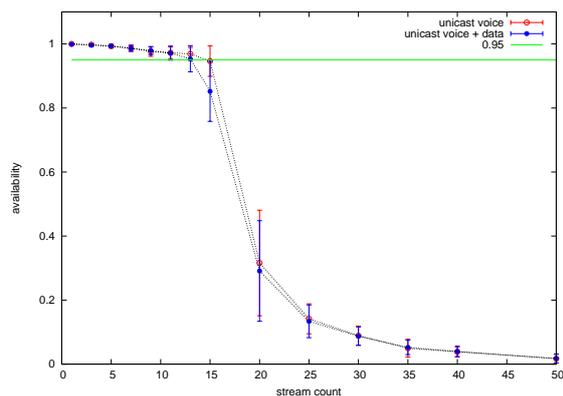
**2.3.4. Движение к случайно выбранной точке.** Классический сценарий мобильной сети, см. обзор [11]. В начальный момент времени станции распределяются равномерно в прямоугольнике, см. предыдущий раздел. Далее каждая станция выбирает случайную точку в пределах того же прямоугольника, выбирает случайное значение скорости равномерно от  $v_{min}$  до  $v_{max}$  и начинает прямолинейное равномерное движение к выбранной точке. По достижению точки процесс повторяется. Рассматривалось два варианта сценария: средней ( $v_{min} = 0$  и  $v_{max} = 15$  м/с) и высокой ( $v_{min} = 15$  м/с и  $v_{max} = 30$  м/с) мобильности.

## 3. Результаты

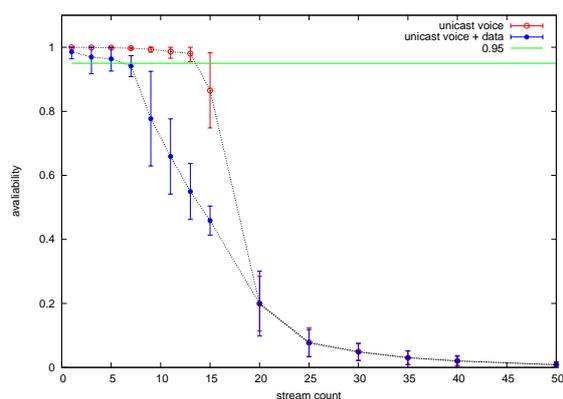
Результаты моделирования представлены в том же порядке, в котором выше описаны сценарии топологии и мобильности. Для каждого сценария приведены данные как для включенной, так и для выключенной фоновой передачи данных.

### 3.1. Толпа

Результаты для доступности голосового сервиса как функции нагрузки в толпе пред-



a) FLAME



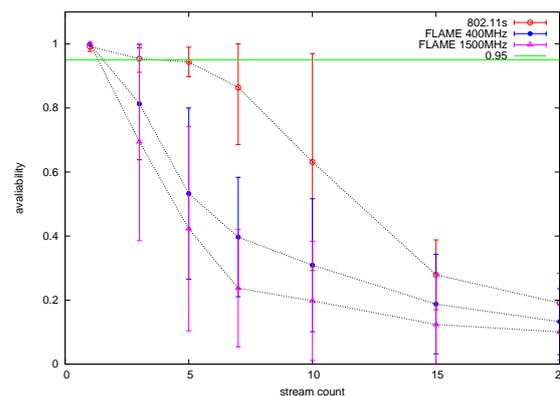
b) 802.11s

**Рис. 1. Доступность VoIP сервисов в плотной сети. а) FLAME, б) IEEE 802.11s**

ставлены на рисунке 1. На обоих графиках красным показаны характеристики без фонового трафика и синим показаны те же зависимости, но в присутствии фонового трафика, как описано в разделе 2.1.2.

Основные выводы, которые можно сделать из полученных графиков, следующие:

1. Емкость толпы из 20 станций составляет примерно от 7 до 13 голосовых потоков.
2. Приоритезация трафика в протоколе FLAME работает практически идеально, доступность голосовых потоков не зависит от наличия фоновых данных.
3. Без фонового трафика IEEE 802.11s работает немного хуже чем FLAME. По-видимому это объясняется дополнительной нагрузкой на сеть, из-за регулярных служебных сообщений.
4. Емкость сети 802.11s неожиданно сильно (вдвое) деградирует при включении фоновой передачи данных. Это связано



**Рис. 2. Доступность голосовых потоков в колонне.**

с особенностями процедуры установления маршрута.

Обратимся более подробно к последнему пункту. Отличия в поведении 802.11s, вызванные включением фоновых данных вызваны в первую очередь тем фактом, что передача запроса на установление маршрута осуществляется посредством отдельной очереди, имеющей большое значение  $CwMin$ , а именно такое же, как и у очереди с фоновыми данными. В результате чего проблема возникает с передачей запроса поиска маршрута, который не имеет приоритета по отношению к фоновым данным и с большой вероятностью просто не доходит до получателя.

### 3.2. Колонна

Результаты представлены на рисунке 2. Основные выводы, которые видны на данных графиках:

1. В худшем случае емкость колонны из 20 станций может составлять всего один голосовой поток!
2. Количество одноадресных голосовых потоков с приемлемым качеством оказалось существенно ниже, чем в режиме плотной сети. Во-первых, связано это с тем, что в одном коллизийном домене один кадр ретранслируется дважды, а во-вторых, что расстояние между станциями таково, что задействовать максимальную скорость передачи данных для одноадресных кадров невозможно.
3. В случае 802.11s доступность VoIP сервиса оказывается выше, чем у FLAME. Во-первых, во время установления маршрута

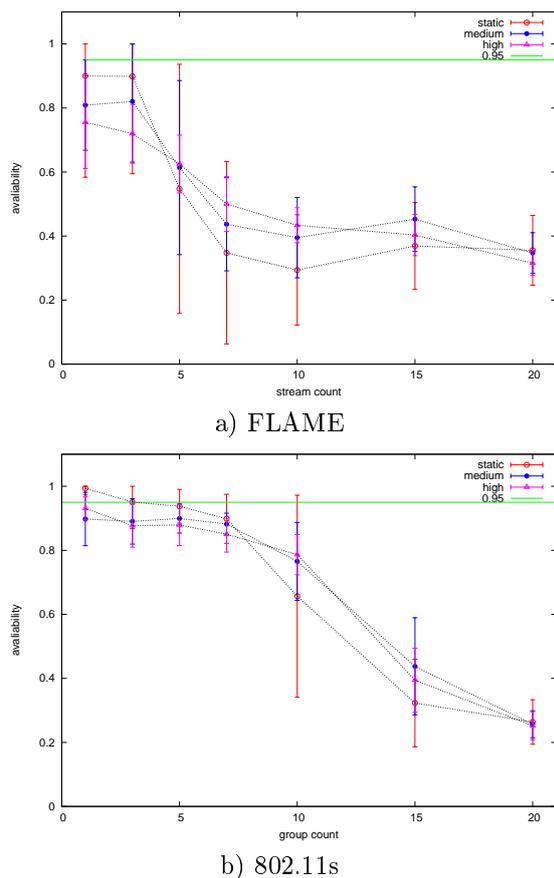


Рис. 3. Доступность одноадресных голосовых потоков в случайной топологии.

голосовые данные не передаются (накапливаются в специальной очереди), поэтому потери исключены и среда гораздо менее загружена во время поиска маршрута. Во-вторых, как уже отмечалось, для запроса на установление маршрута используется отдельная очередь с большим значением  $CwMin$ , что снижает вероятность неуспешного установления маршрута. В случае же FLAME, в качестве запроса служит сам кадр голосовых данных, передаваемый с малым значением окна, потому при его потере следующий кадр также будет передан вновь широкоэвещательно.

Несмотря на то, что данный сценарий не отображает качество работы протокола по той причине, что нет альтернативных маршрутов, преимущества процедуры предварительного выяснения маршрута в данном сценарии очевидны.

### 3.3. Случайные топологии

Результаты представлены на рисунке 3. Основные результаты, которые видны из получен-

ных графиков:

1. Емкость случайной сети из 20 станций составляет 3-7 голосовых потоков.
2. Решение IEEE 802.11s существенно менее подвержено воздействию мобильности (в рамках измеренных величин), по сравнению с FLAME. Связано это главным образом с тем, что в 802.11s отслеживается пропадание связи с соседом, через которого проложен маршрут, и происходит уведомление об ошибке маршрута, доставляемое источнику сообщений, то есть источник поступления новых данных в сеть на время установления нового маршрута будет перекрыт.
3. С ростом мобильности 802.11s начинает более существенно выигрывать у FLAME, поскольку чаще происходит разрыв соединений с соседями, а среднее время восстановления маршрута у протокола FLAME неизменно – половина интервала между широкоэвещательными посылками кадров, в то время как HWMP реагирует на разрыв соединения практически мгновенно, а именно после 5 последовательных неудач при передаче кадра.

Кроме вышесказанного, случайные топологии – это первый из сценариев, попадающий под определение mesh-сети, то есть сети, в которой один маршрут может быть реализован несколькими способами. Именно в этом сценарии становится очевидным тот факт, что для построения маршрута необходимо использовать метрику, как в случае 802.11s, отличную от количества звеньев.

## 4. Заключение

Сводные результаты о емкости сети из 20 станций в различных условиях показаны в Табл. 3. Несмотря на всю ограниченность проведенного анализа, можно сделать следующие выводы.

Во-первых, как статические, так и мобильные mesh сети оказываются пригодной транспортной средой для VoIP трафика, абонентская емкость сети из 20 станций колеблется в лучшем случае от 5 до 13 одновременных голосовых потоков.

Во-вторых, решение на основе стандарта IEEE 802.11s является безусловно предпочтительным по сравнению с FLAME в большинстве случаев.

В-третьих, приоритизация трафика и обеспечение QoS является, по-видимому, одной из

Сценарий / стандарт	FLAME	802.11s
Толпа	13	13
Толпа, фоновый трафик	13	7
Колонна	1	5
Случайная статическая топология	3	7
Средняя мобильность	3	7
Высокая мобильность	1	7

Таблица 3. Емкость сети из 20 станций в каждом из сценариев.

наиболее острых проблем передачи трафика реального времени в mesh сетях. Решения 802.11e оказываются лишь ограниченно применимыми в многошаговых топологиях. Более того, неприемлемым кажется следующее из механизмов 802.11e наиболее ненадежное распространение наиболее приоритетного трафика.

Technical report, 1999.

- [11] Tracy Camp, Jeff Boleng, and Vanessa Davies. A survey of mobility models for ad hoc network research. *Wireless Communication & Mobile Computing (WCMC): Special issue on Mobile Ad Hoc Networking: Research, Trends and Applications*, 2(5):483–502, 2002.

## Список литературы

- [1] Herman Elfrink. Forwarding Layer for Meshing. Revision 2.0. Technical report, Twente Institute for Wireless and mobile Communications, 2006.
- [2] *IEEE P802.11s/D3.0. Draft STANDARD for Information Technology – Telecommunications and information exchange between systems – Local and metropolitan area networks – Specific requirements – Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications Amendment: Mesh Networking [Electronic resource]*, 2009.
- [3] C. Perkins, E. Belding-Royer, and S. Das. Ad hoc On-Demand Distance Vector (AODV) Routing. RFC 3561 (Experimental), July 2003.
- [4] Kirill Andreev and Pavel Boyko. IEEE 802.11s Mesh Networking NS-3 Model. In preparation.
- [5] *IEEE Standard for Information technology-Telecommunications and information exchange between systems-Local and metropolitan area networks-Specific requirements - Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*, 2007.
- [6] ITU-T Recommendation G.729: Coding of speech at 8 kbit/s using conjugate-structure algebraic-code-excited linear prediction (CS-ACELP). Technical report, 2007.
- [7] H. Schulzrinne, S. Casner, R. Frederick, and V. Jacobson. RTP: A Transport Protocol for Real-Time Applications. RFC 3550 (Standard), July 2003. Updated by RFC 5506.
- [8] J. A. Bergstra and C. A. Middelburg. ITU-T Recommendation G.107 : The E-Model, a computational model for use in transmission planning. Technical report, ITU, 2003.
- [9] Online E-model implementation. <http://www.itu.int/ITU-T/studygroups/com12/emodelv1/>.
- [10] ITU-T Recommendation G.109: Definition of categories of speech transmission quality.

## Передача видеоданных по беспроводной сети с централизованным управлением и коррелированными помехами

Сидоркин О.С.

Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)

OSidorkin@gmail.com

### Аннотация

*В данной работе рассматривается передача несжатого видеопотока по сети, работающей в режиме с централизованным управлением с каналом Джилберта-Эллиота. Разработана аналитическая модель для исследования различных алгоритмов буферизации данных с целью уменьшения искажений видеок кадров при передаче.*

### 1. Введение

Распространение беспроводных сетей приводит к увеличению количества различных мультимедийных сервисов, предоставляемых через беспроводные сети, что, в свою очередь, приводит к появлению специфических требований к протоколам беспроводных сетей. Для оптимального выбора приоритетов потоков данных и планирования передачи с целью удовлетворения требованиям сервисов, использующих данную сеть, в сети должна поддерживаться система обеспечения качества обслуживания (Quality of Service, QoS). Наилучшим образом QoS обеспечивается при централизованном управлении, когда базовая станция (Access Point, AP) планирует передачу данных в соответствии с требованиями сервисов. Практически все существующие стандарты беспроводных сетей включают в себя режим работы с централизованным управлением: IEEE 802.16 предусматривает работу исключительно в режиме с централизованным управлением, IEEE 802.11 [1] и IEEE 802.15 предусматривают т.н. «периоды, свободные от коллизий» (contention-free periods), в течение которых AP управляет последовательностью передачи пакетов. В протоколе IEEE 802.11 централизованное управление обеспечивается механизмами PCF и HCCA [3].

Одним из примеров мультимедийных сервисов является передача видеоданных, требующая от сети возможности быстро передавать большие объемы данных с фиксированной задержкой. Рост пропускной способности беспроводных сетей сделал их пригодными для передачи видеоданных, однако, их большая, по сравнению с проводными сетями, подверженность помехам и сильная зависимость уровня помех от взаимного расположения станций усложняет задачу выделения канала с гарантированной пропускной способностью.

При наличии помех скорость передачи (количество переданных пакетов за определенный промежуток времени) не является постоянной, а меняется случайным образом. Несмотря на то, что пропускная способность сети достаточна для передачи видеопотока, времена передачи отдельных видеок кадров могут существенно отличаться. Если видеок кадр не передан до момента, когда он потребуется приемнику, то возникнут искажения. То есть из-за наличия флуктуаций количества ошибок за время передачи видеок кадра достаточная пропускная способность канала не гарантирует отсутствия ошибок при передаче видеопотока. Проблема решается выбором оптимального алгоритма управления очередью пакетов, составляющих видеок кадры, который обеспечит наименьшее искажение при передаче видеоданных в рамках ограничений на задержку.

В данной работе рассматривается влияние алгоритмов управления очередью и размера очереди на вероятность искажения данных. В работах [4]-[8] данная проблема исследована методом имитационного моделирования. В работе [9] на MACOM'08 впервые разработана аналитическая модель, описывающая передачу несжатого видеопотока по беспроводной сети с централизованным управлением и некоррелированными помехами (белый шум) при различных алгоритмах буферизации видеопотока.

Известно, что реальный беспроводный канал передачи данных лучше описывается моделью Джилберта-Эллиота. В данной работе, в отличие от работы [9], рассмотрена работа алгоритмов буферизации при передаче видеоданных через канал с коррелированными помехами (канал Джилберта-Эллиота).

В данной работе рассматривается беспроводная сеть с централизованным управлением. В сети присутствует АР, источник несжатого видеопотока (видеостанция) и прочие абоненты, создающие нагрузку на сеть. Приемник видеоданных подключен к АР при помощи проводной сети. Мы пренебрегаем временем передачи пакета через проводную сеть и возникающими при передаче через проводную сеть ошибками. Т.е. считаем, что наличие проводной сети никак не влияет на процесс передачи данных. Видеокадры одинакового размера приходят от источника со скоростью  $R$  кадров в секунду, т.е. через фиксированные интервалы  $1/R$ , и передаются по беспроводной сети.

Каждый видеокадр состоит из  $N$  MAC-пакетов (пакетов канального уровня). В течение каждого интервала длительностью  $1/R$  АР предоставляет видеостанции  $M$  возможностей передачи пакета, т.е. опрашивает ее  $M$  раз. Из-за наличия шумов в канале пакет может быть передан с искажениями и отброшен принимающей стороной. В этом случае передатчик может отправить пакет повторно либо начать передачу следующего видеокадра в зависимости от решения, диктуемого алгоритмом управления очередью.

## 2. Описание работы алгоритмов

Как показано в работе [9], буферизация видеокадров позволяет существенно увеличить долю неискаженных видеокадров. В данной статье рассматриваются два алгоритма буферизации.

### 2.1. Алгоритм без отбрасывания

В рассматриваемой системе есть 2 FIFO-буфера размером  $K_0$  видеокадров - буфер передатчика, расположенный на абонентской станции, и буфер приемника, который мы считаем расположенным на АР. Видеокадры, передаваемые источником видеоданных, попадают в буфер передатчика. Самый старый видеокадр выбирается из буфера передатчика, разбивается на пакеты MAC-уровня, передается по сети на приемник и собирается в буфере приемника. Передача следующего видеокадра не

начинается до тех пор, пока не завершится передача текущего. Этим гарантируется правильная последовательность передачи кадров и правильная сборка видеокадра из пришедших MAC-пакетов. В определенные моменты (с периодом  $1/R$ ) видеокадры выбираются из буфера приемника и передаются на верхний уровень сетевой иерархии. Интенсивность появления видеокадров в буфере передатчика равна интенсивности выбора видеокадров из буфера приемника. Если за определенный промежуток времени канал успевает передать больше видеокадров, чем источник выдает в буфер передатчика, то буфер передатчика будет опустошаться, а буфер приемника - наполняться. Если за определенный промежуток канал успевает передать меньше видеокадров, чем выдает передатчик, то буфер передатчика будет наполняться, а буфер приемника - опустошаться. Если в буфере приемника нет ни одного полного видеокадра в момент, когда он потребуется приемнику, то неполный видеокадр будет отброшен, а видеокадр будет считаться потерянным. Непереданная часть текущего видеокадра при этом выбрасывается из буфера передатчика и теряется.

Так как передатчик выдает видеокадр с такой же интенсивностью, с какой приемник их выбирает, то суммарное количество видеокадров в буферах приемника и передатчика не меняется в течение всего времени работы схемы. Фиксированное суммарное количество видеокадров в системе обеспечивается начальной задержкой длиной  $K_0/R$  секунд, в течение которой передатчик передает видеокадры, а приемник их не выбирает. При этом видеокадры накапливаются в системе и распределяются между буферами приемника и передатчика.

Схема имеет фиксированное время передачи – каждый кадр находится в системе в течение времени  $K_0/R$  секунд. По окончании этого времени он либо выбирается приемником полностью, либо отбрасывается. В стандарте IEEE802.11e [3] для поддержки QoS введен механизм, который позволяет задавать классы трафика и указывать максимальное время пребывания MAC-пакета в очереди передатчика. Если пакет не передан до истечения этого времени, то он отбрасывается. Таким образом, для реализации предлагаемой схемы достаточно установить максимальное время передачи равным  $K_0/R$  секунд. Через это время приемник должен будет выдать этот кадр, и, если он не передан или передан не полностью, кадр становится ненужным и должен быть отброшен, а передатчик должен начать передавать следующий видеокадр.

При такой схеме передачи целесообразно выбирать размеры буферов приемника и передатчика одинаковыми: увеличение размера любого из буферов приводит к увеличению времени ожидания видеокадра, но не к увеличению вероятности его успешной передачи. Если размер буфера передатчика больше размера буфера приемника, то переполнение буфера приемника наступит раньше, чем опустошится буфер передатчика, и передача будет приостановлена. То есть часть видеокадров будет постоянно ожидать передачи в буфере передатчика, и суммарная задержка может быть уменьшена путем уменьшения размеров буфера передатчика без увеличения вероятности искажения в канале. Если размер буфера передатчика меньше размера буфера приемника, то даже при большой скорости передачи пакетов через канал часть буфера приемника будет постоянно пустой.

После окончания очередного опроса абонентской станции в промежутке между выборами видеокадров количество пакетов в буфере приемника может либо (в случае неудачной передачи) не измениться, либо (в случае удачной передачи) увеличиться на 1. Если буфер приемника заполнен (то есть находится в состоянии «содержит  $L=N*K_0$  MAC-пакетов»), то перейти в состояние «содержит  $L+1$  MAC-пакетов» он не может в силу ограничения размера буфера. Работу системы по этому алгоритму можно рассматривать как марковский процесс с дискретным временем, единица которого равна  $t$  (интервалу между последовательными опросами абонентской станции), с  $L+1$  различными состояниями буфера приемника (с количеством MAC-пакетов в буфере приемника от 0 до  $L$ ).

## 2.2 Алгоритм с отбрасыванием

В случае приема искаженного видеокадра (опустошения буфера) может оказаться целесообразно отказаться от передачи очередных  $K$  кадров и увеличить время передачи кадра ( $K+1$ ). То есть имеется задержка восстановления длительностью  $K/R$ . Рассматривается следующий алгоритм: если передача происходит без искажений, то передаются все кадры в порядке прибытия, если какой-то кадр передается с искажением (то есть происходит опустошение буфера приемника), то отбрасывается переданная часть кадра и  $K$  следующих за ним кадров. При этом возрастает количество полностью переданных кадров и количество полностью потерянных кадров, и уменьшается количество кадров, переданных неполностью.

## 3. Исследование состояния буфера при передаче данных через канал Джилберта-Эллиота.

В работе [9] исследовалось влияние помех на работу беспроводной сети в режиме централизованного управления в предположении, что пакеты с данными искажаются независимо (это справедливо, например, для канала с аддитивным гауссовским шумом). Известно [2], что поведение беспроводной сети лучше описывается моделью Джилберта-Эллиота, в которой канал моделируется цепью Маркова с двумя состояниями: «хорошим» («0») и «плохим» («1») и непрерывным временем. Эти состояния отличаются различными вероятностями успешной доставки пакета. При этом вероятности искажения пакетов оказываются коррелированными, что затрудняет оценку вероятности успешной доставки неискаженного видеокадра.

### 3.1 Обозначения

Обозначим:

$p_0$  – вероятность успешной передачи пакета в «хорошем» состоянии,

$p_1$  – вероятность успешной передачи пакета в «плохом» состоянии.

При этом будем считать, что  $p_0 > p_1$ .

Время пребывания канала в состоянии  $i$  распределено экспоненциально с параметром  $\lambda_{ij}$ , где

$\lambda_{01}$  – интенсивность переходов из «хорошего» состояния в «плохое»,

$\lambda_{10}$  – интенсивность переходов из «плохого» состояния в «хорошее».

Вероятности нахождения канала в «хорошем» и «плохом» состояниях в произвольный момент времени равны:

$$P_0 = \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{10} + \lambda_{01}}, \quad (1)$$

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10} + \lambda_{01}}. \quad (2)$$

Математическое ожидание успешной передачи пакета через такой канал равно

$$P = p_0 P_0 + p_1 P_1. \quad (3)$$

Средняя скорость передачи видеокадров по каналу равна

$$C = \frac{P}{t}. \quad (4)$$

### 3.2 Аналитическая модель

Предположим, что в момент  $T_0$  сразу после выборки очередного видеокadra, в буфере находилось  $l$  пакетов. Время, затрачиваемое на попытку передачи одного пакета, равно  $t$ . Будем считать, что вероятность того, что канал изменит свое состояние 2 или более раз за время передачи пакета, пренебрежимо мала. Если за время передачи пакета произошло изменение состояния, то будем считать, что пакет передан с вероятностью «плохого» состояния.

Обозначим текущее состояние системы парой значений  $(i, l)$ , где  $i$  – состояние канала (0 для «хорошего» и 1 для «плохого»),  $l$  – количество пакетов в буфере приемника. Если канал в момент начала передачи пакета находился в состоянии 0, то вероятность того, что канал не поменяет состояние за время между опросами, равна

$$P_{00} = e^{-\lambda_0 t}. \quad (5)$$

Аналогично для состояния 1:

$$P_{11} = e^{-\lambda_1 t}. \quad (6)$$

За цикл опроса базовой станции буфер приемника может перейти из состояния  $l < L$  либо в состояние  $l+1$ , либо остаться в состоянии  $l$ . Если  $l=L$ , то буфер приемника полностью заполнен, и он может только оставаться в нём.

Обозначим вероятность перехода из состояния  $(i, l_1)$  в состояние  $(j, l_2)$  за один цикл опроса через  $p_{ij}(l_1, l_2)$ . Значения переходных вероятностей при  $l < L$  равны:

$$\begin{aligned} p_{00}(l, l) &= P_{00}(1 - p_0), \\ p_{00}(l, l+1) &= P_{00}p_0, \\ p_{01}(l, l) &= (1 - P_{00})(1 - p_1), \\ p_{01}(l, l+1) &= (1 - P_{00})p_1, \\ p_{10}(l, l) &= (1 - P_{11})(1 - p_1), \\ p_{10}(l, l+1) &= (1 - P_{11})p_1, \\ p_{11}(l, l) &= P_{11}(1 - p_1), \\ p_{11}(l, l+1) &= P_{11}p_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Для случая  $l=L$  переход в состояние  $l+1$  невозможен, поэтому переходные вероятности запишутся в виде:

$$\begin{aligned} p_{ii} &= P_{ii}, \\ p_{ij} &= P_{ij}. \end{aligned} \quad (8)$$

Все остальные переходные вероятности равны 0. Записав их в виде квадратной матрицы размером  $2(L+1)$ , мы получим матрицу  $\Lambda_1$  переходных вероятностей системы за один опрос.

Матрица  $\Lambda_M$  переходных вероятностей системы за  $M$  опросов получается умножением  $\Lambda_1$  саму на себя  $M$  раз:

$$\Lambda_M = (\Lambda_1)^M. \quad (9)$$

При выборе видеокadra из буфера приемника, буфер переходит из состояния  $l$  в состояние  $l_f = l - N$ , если  $l > N$ , или в  $l_f = 0$ , если  $l \leq N$ .

Обозначив коэффициенты матрицы  $\Lambda_M$  через  $p_{ij}^M(l_1, l_2)$ , получим коэффициенты  $\psi_{ij}(l_1, l_2)$  матрицы  $\Psi$  переходных вероятностей, описывающей процесс перехода системы между выборками соседних видеокadров:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(l_1, l_2) &= p_{ij}^M(l_1, l_2 + N); \quad 1 < l_2 \leq L - N, \\ \psi_{ij}(l_1, 0) &= \sum_{k=0}^N p_{ij}^M(l_1, k). \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть  $\vec{x}$  – левый собственный вектор матрицы  $\Psi$ , соответствующий собственному значению 1, причем

$$|\vec{x}| = 1. \quad (11)$$

Коэффициенты этого вектора являются стационарными вероятностями состояний буфера в моменты времени непосредственно после выбора видеокadров. Если после выбора очередного видеокadra буфер приемника пуст, то это значит, что либо выбран искаженный видеокadр, либо в буфере находился ровно 1 видеокadр. Чтобы найти вероятность получения неискаженного видеокadra, найдем вектор

$$\vec{y} = \vec{x} \Lambda^M, \quad (12)$$

который является вектором стационарных вероятностей системы в моменты времени перед выбором очередного видеокadra. Вероятность получения неискаженного видеокadra равна

$$P_{\text{неиск}} = \sum_{k=N}^L (y_0(k) + y_1(k)), \quad (13)$$

где  $y_0(l)$  – компоненты вектора стационарных вероятностей, соответствующие «хорошему» состоянию,  $y_1(l)$  – плохому.

### 3.3 Численные результаты

Численное моделирование проводилось для следующих параметров системы: передача ведется видеокadрами фиксированного размера ( $N=20$  пакетов на видеокadр) со скоростью  $R=30$  видеокadров в секунду, базовая станция опрашивает абонентскую станцию с периодом 1мс.

Зафиксируем среднюю скорость передачи данных по каналу и рассмотрим вероятность искажения видеокadra как функцию от вероятностей переходов между состояниями.

Из (2) и (3) следует, что

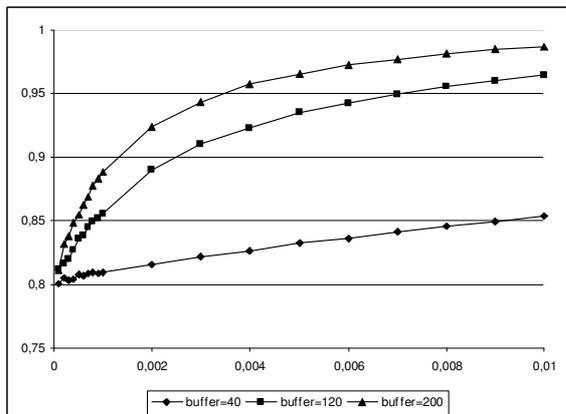
$$P_0 = \frac{P - p_1}{P_0 - P_1}, \quad (14)$$

$$P_1 = \frac{P - p_0}{P_1 - P_0}. \quad (15)$$

Выберем  $P=0.7$ ,  $p_0=0.9$ ,  $p_1=0.1$ , тогда  $P_0=0.75$ ;  $P_1=0.25$ . Из (1) следует, что при этом

$$\lambda_{10} = 3\lambda_{01}. \quad (16)$$

Результаты имитационного моделирования (Рисунок 1) показывают, что увеличение размера буфера значительно увеличивает вероятность получения неповрежденного видеокadra, но с увеличением периода пребывания канала в одном состоянии вероятность успешной доставки видеокadra резко падает. В пределе при уменьшении интенсивностей переходов до нуля с сохранением их отношения, вероятность получения неискаженного кадра падает до вероятности  $P_0$ , так как в плохом состоянии скорость передачи недостаточна для передачи потока кадров. При увеличении интенсивностей перехода между состояниями вероятность получения неискаженного видеокadra стремится к вероятности получения неискаженного видеокadra для канала с белым шумом [9].



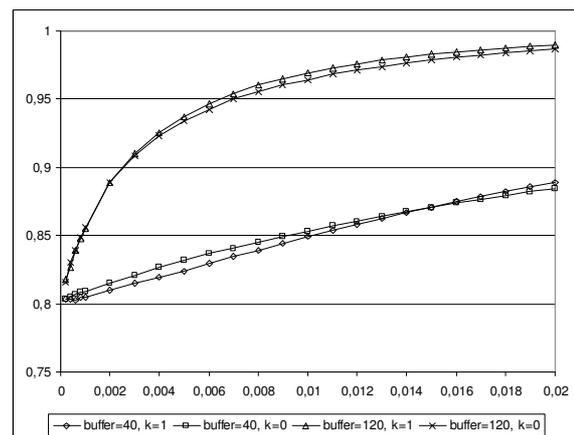
**Рисунок 1.** Зависимость вероятности успешной доставки видеокadra от интенсивности переходов из «плохого» состояния в «хорошее» при различных размерах буфера.

Использование алгоритма с отбрасыванием приводит к увеличению доли доставленных видеокadres, если скорость передачи данных в «плохом» состоянии, с учетом опросов, полученных за счет отбрасывания предыдущих видеокadres, достаточна для того, чтобы полностью передать один видеокادر. Если эта скорость недостаточна (при данном числе отбрасываемых видеокadres), то стратегии с отбрасыванием не имеют никаких преимуществ

перед стратегиями без отбрасывания, так как после отбрасывания  $K$  видеокadres в буфере приемника не будет накоплено достаточного количества пакетов, чтобы образовать полный видеокادر и полученный видеокادر будет отброшен.

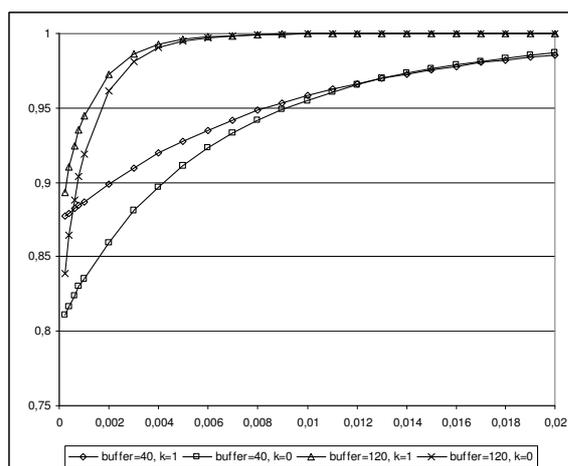
Так как отбрасывание видеокadres начинается только при опустошении буфера, то размер буфера влияет только на время перехода между режимами (когда он опустошается или наполняется), но не влияет на поведение системы в установившемся режиме (когда он либо полностью наполнен, либо пуст). Таким образом, наличие буфера способно скомпенсировать кратковременный «плохой» период.

На рисунке 2 представлены сравнительные результаты моделирования для значений вероятностей  $p_0=0.9$ ;  $p_1=0.1$  (аналогично рисунку 1) с отбрасыванием одного видеокadra и без отбрасывания видеокadres. В данном случае отбрасывания одного видеокadra недостаточно, поэтому отбрасывание не приводит к увеличению вероятности успешной доставки видеокadra.



**Рисунок 2.** Зависимость вероятности успешной доставки видеокadra от интенсивности переходов из «плохого» состояния в «хорошее» при различных размерах буфера и различном количестве отбрасываемых видеокadres при недостаточной скорости передачи в плохом состоянии.

На рисунке 3 представлены сравнительные результаты моделирования для значений  $p_0=0.9$ ;  $p_1=0.4$  с отбрасыванием одного видеокadra и без отбрасывания видеокadres. Так как пропускной способности канала в плохом состоянии недостаточно для передачи всего потока, но достаточно для передачи с учетом отбрасывания, то отбрасывание видеокadres дает существенный прирост количества полностью переданных видеокadres.



**Рисунок 3. Зависимость вероятности успешной доставки видеокadra от интенсивности переходов из «плохого» состояния в «хорошее» при различных размерах буфера и различном количестве отбрасываемых кадров при достаточной скорости передачи в плохом состоянии.**

#### 4. Выводы

В данной работе мы исследовали влияние буферизации на надежность передачи потока видеоданных через беспроводную сеть с каналом Джилберта-Эллиота, работающую в режиме централизованного управления, при котором АР периодически предоставляет потоку видеоданных возможность передачи. Были рассмотрены следующие алгоритмы буферизации и выделения полосы пропускания:

- Алгоритм с начальной задержкой. Приемник не выбирает видеокadры из буфера во время начальной задержки. Для работы этого алгоритма как приемник, так и передатчик должны иметь буферы достаточного размера для хранения всех видеокadров, поступивших в систему за время задержки.
- Алгоритм с начальной задержкой и задержкой восстановления. При получении неполного видеокadra, передатчик выбрасывает  $K$  следующих видеокadров и начинает передачу видеокadra  $K+1$ . При этом при определенных условиях повышается вероятность успешной передачи видеокadra  $K+1$  и последующих видеокadров.

В отличие от предыдущих работ [4]–[8], которые используют имитационное моделирование, в данной работе использовано описание работы алгоритма с помощью марковского процесса с дискретным временем и

исследования его с помощью матричного метода. Показано, что начальная задержка позволяет резко увеличить вероятность приема неискаженного видеокadra и что аналитический метод может быть использован для нахождения зависимости между качеством передачи потока видеоданных и выделенной потоку пропускной способности. Показано, что эффективность передачи через канал Джилберта-Эллиота ниже, чем при передаче через канал с белым гауссовским шумом. При малых интенсивностях переходов между состояниями требуется существенное увеличение размера буфера для обеспечения такой же вероятности успешной доставки видеокadra, как и при белом шуме.

#### 6. Список литературы

- [1] *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications Adopted by the ISO/IEC and redesignated as ISO/IEC 8802-11:1999(E)*
- [2] Вишнеvский В.М., Ляхов А.И., Портной С.Л. и И.В. Шахнович *Широкополосные беспроводные сети передачи информации*, Техносфера, М., 2005.
- [3] *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications Amendment 8. Medium Access Control (MAC) Quality of Service Enhancements. IEEE802.11e-2005.*
- [4] K. Sripanidkulchai and T. Chen, Network-adaptive video coding and transmission, *Visual Communications and Image Processing*, San Jose, January 1999.
- [5] Z. Miao and A. Ortega, Expected run-time distortion based scheduling for delivery of scalable media, *Packet Video Workshop*, April 2002.
- [6] S. H. Kang and A. Zakhor, Packet scheduling algorithm for wireless video streaming, *Packet Video Workshop*, April 2002.
- [7] Q. Li, M. van der Schaar, Providing adaptive QoS to layered video over wireless local area networks through real-time retry limit adaptation, *IEEE Trans. on Multimedia*, 2004.
- [8] M.-H. Lu, P. Steenkiste, T. Chen, Video Streaming Over 802.11 WLAN with Content-Aware Adaptive Retry, *ICME 2005*, pp.723-726.
- [9] A.Lyakhov, O.Sidorkin, Study of Buffering Algorithms for Video Streaming over Wireless Network, *MACOM'08*, 2008.

# УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ВИДЕОТРАНСЛЯЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАНЖИРОВАНИЯ ПАКЕТОВ В ПОТОКЕ MPEG

Титов А.Ю.(\*), Никифоров С.А.(\*), Коноплев В.В.(\*\*)

(\*) *Московский физико-технический институт (ГУ)*

(\*\*) *Институт космических исследований Российской академии наук*

*v.konoplev@rssi.ru*

## Abstract

В данной работе описывается метод улучшения качества трансляции видео-потокa MPEG в территориально распределенных сетях ТСП/Р. В его основе лежит приоритезация продвижения отдельных групп пакетов потока сетевым оборудованием в зависимости от их содержимого. При реализации метода была использована политика дифференцированного обслуживания AF PHB, поддерживаемая ведущими производителями сетевого оборудования. Сравнительные испытания показали заметное улучшение трансляции MPEG видео в сравнении обычной передачей.

## 1. Введение

По мере возрастающего интереса к системам организации телеконференций с использованием Интернет все большее внимание уделяется проблеме улучшения качества передаваемой видеoinформации транслируемой в открытых, территориально распределенных сетях. При этом сложно обеспечить гарантированное качество обслуживания, которое предполагает резервирование сетевых ресурсов с целью удовлетворения специфических требований к обслуживанию со стороны потоков трафика.

В связи с этим большинство современных коммерческих продуктов организации видео-конференций в сетях ТСП/Р имеют опцию адаптации интенсивности передачи к доступной полосе пропускания. К сожалению, данный подход может быть реализован только в режиме одноадресной (unicast) трансляции. Более того, оценка доступной полосы пропускания является технически сложной задачей, зачастую дающей ошибочные результаты.

В данной работе мы развиваем альтернативный подход к повышению качества передаваемой видеoinформации транслируемой в географически распределенных сетях основанный на ранжировании пакетов видеопотока в зависимости от их уровня «значимости» и

последующей приоритезации отбрасывания. Это позволяет значительно снизить негативный эффект от потерь пакетов вследствие кратковременных переполнений очередей в узлах сети как режиме одноадресной, так и групповой (multicast) трансляции.

## 2. Методика выборочной маркировки

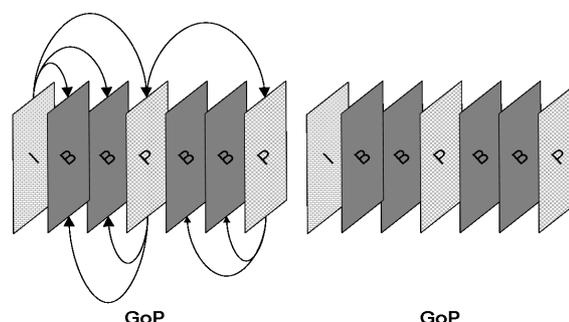


Рис. 1. Зависимость кадров в видеопотоке MPEG (заимствовано из [1]).

Дифференцированный подход к передаче различных составляющих частей потока MPEG был впервые предложен специалистами компании Motorola Inc. [1]. Суть метода заключается в том, что кадры в потоке MPEG не являются независимыми. Они организованы в так называемые группы изображений (GoP, Рис. 1). В группе присутствует один обязательный инициализирующий I-кадр, а также несколько опциональных P- и B- кадров, содержащий информацию о компенсации движения [2]. Значимость кадров связана с ошибками декодирования видеопотока и распределена между типами кадров следующим образом:  $I > P > B$ . В работе [1] авторами представлен оптимизирующий алгоритм управления очередью в передающем устройстве. Здесь на основании формальной значимости пакетов потока и их размера решается «задача об укладке рюкзака». Алгоритм работает таким образом, чтобы максимизировать общую «ценность» кадров оставшихся в буфере устройства в случае его переполнения.

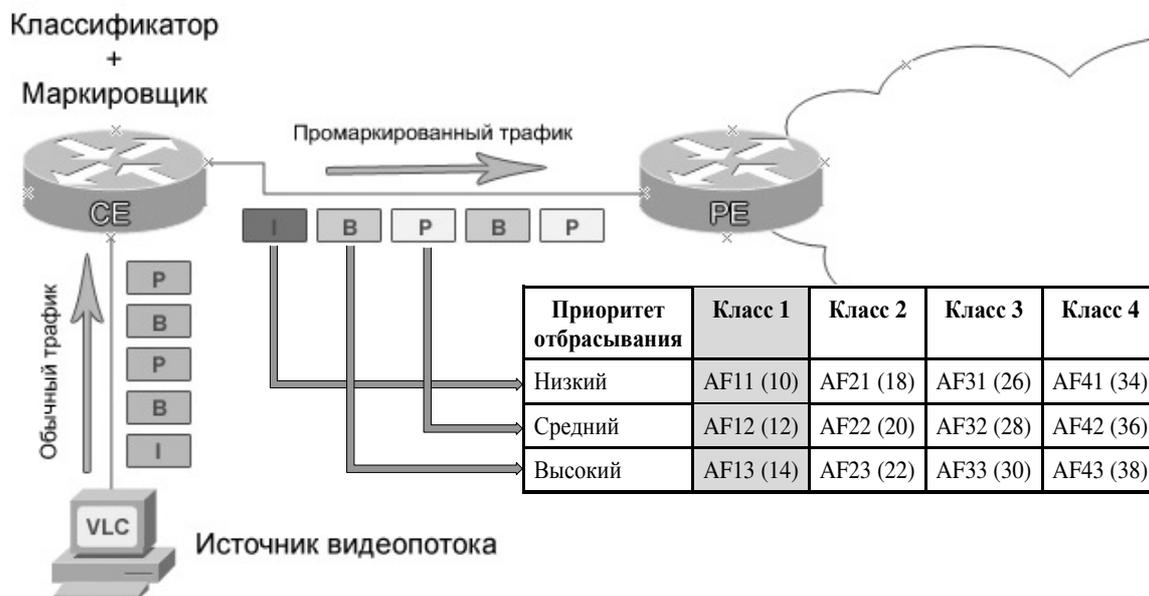


Рис. 2. Реализация метода на базе DiffServ AF PHB.

К сожалению, оригинальный метод [1] не может быть внедрен в реальных сетях передачи данных, поскольку предложенный алгоритм обработки очередей не поддерживается производителями сетевого оборудования.

В данной работе мы развили альтернативную реализацию метода ранжирования и выборочной передачи пакетов видеопотока, согласующуюся со спецификациями DiffServ. Нами была использована политика обслуживания DiffServ AF PHB [3], которая может быть реализована на базе сетевого оборудования, представленного ведущими производителями (в частности Cisco Systems Inc.). Политика AF PHB предусматривает четыре независимых класса обслуживания пакетов и три приоритета отбрасывания в рамках каждого класса. Таким образом, при планировании распределения ресурсов на базе AF PHB можно выделить отдельный класс для видеотрафика и отобразить различные типы кадров видеопотока на три приоритета отбрасывания в данном классе, как показано на Рис. 2.

### 3. Результаты и выводы

Заметим, что предложенный нами метод ранжирования пакетов в отличие от решения [1] не является оптимизирующим. Для исследования эффективности его работы был собран макет, показанный на Рис. 3. Видеосервер (VLC [4]) производил два идентичных видеопотока по ~900Кбит/с, идущих через общий канал пропускной способностью 2 Мбит/с на участке между маршрутизатором №1 и маршрутизатором №2. За каждым видеопотоком было зарезервировано по 49% полосы пропускания. Вследствие неравномерности передачи на общем канале возникали кратковременные перегрузки, приводящие к отбрасыванию пакетов.

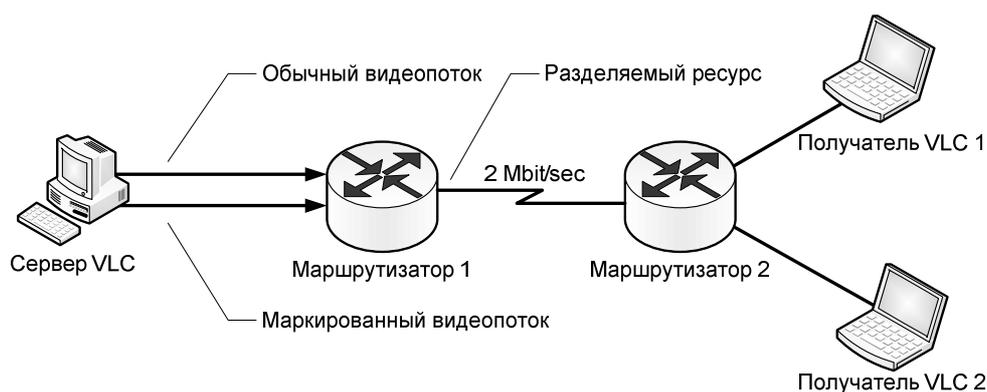


Рис. 3. Испытательный стенд.

Таб. 1. Статистика отбрасывания пакетов в потоках.

Пакеты	Маркированный поток			Обычный поток		
	I	P	I + P	I	P	I + P
Передан.	17392	27906	<b>45298</b>	16987	28519	<b>45506</b>
Отброш.	0	1032	<b>1032</b>	465	640	<b>1105</b>
Процент потерь	0%	3.7%	<b>2.3%</b>	2.7%	2.2%	<b>2.4%</b>

В поставленном эксперименте один видеопоток обрабатывался по обычной схеме со случайным отбрасыванием пакетов при наличии перегрузки, а второй видеопоток – по предложенной нами методике с маркировкой пакетов по схеме AF PHB. В Таб. 1 показана статистика по отброшенным пакетам в каждом потоке. Как видно общий процент потерь в обоих случаях примерно совпадает и составляет 2,3% в маркированном против 2,4% в обычном. Использованное нами в качестве сервера приложение VLC производило только I- и P-кадры и этим объясняется отсутствие B-кадров в эксперименте.

Для оценки качества видеопередачи мы использовали количество «замираний» видеотрансляции у получателя. По этому параметру наш метод давал улучшение от 15% до 50% (в зависимости от участка видеозаписи) в сравнении с обычной трансляцией.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что представленный метод улучшения видеотрансляции является работоспособным и позволяет добиваться заметного повышения качества передачи. Он может быть сравнительно легко реализован в сетях, где внедрена архитектура дифференциальных услуг. Еще одно важное преимущество метода заключается в том, что он не является компромиссным, то есть улучшение

качества трансляции не влечет за собой ухудшение других параметров, например уменьшения разрешения или частоты кадров или же резервирования сетевых ресурсов в ущерб другим приложениям.

#### 4. ССЫЛКИ

- [1] Guntur Ravindra, Joseph Thaliath, Ian.D.Chakeres. In-network Optimal Rate Reduction for Packetized MPEG Video — Q2SWinet'08, 2008.
- [2] ISO/IEC-13818. MPEG-2.
- [3] J. Heinanen. Assured Forwarding PHB Group — RFC-2597, 1999.
- [4] VLC media player <http://www.videolan.org/vlc/>

# Надежная многоадресная рассылка в беспроводной меш-сети.

Цыганова Анна  
ИППИ РАН  
tsyganova@iitp.ru

## Аннотация

В данной работе рассматривается задача многоадресной надежной передачи данных в беспроводной многошаговой меш-сети. Данная задача, формальная постановка которой приводится в данной статье, разбивается на две части. Во-первых, это разработка эффективного алгоритма маршрутизации, позволяющего строить дерево минимальной стоимости, покрывающее всех получателей. В качестве возможного решения этой подзадачи предлагается применять алгоритм Руиса, который позволяет уменьшить количество ретранслируемых пакетов и одновременно использовать преимущества широковежательного характера среды. Во-вторых, необходимо обеспечить надежность многоадресной передачи. С учетом особенностей механизма обеспечения надежности предлагается использовать новую метрику маршрутизации. В качестве механизма обеспечения надежности такой передачи, в работе используется алгоритм ELBP [1], позволяющий обеспечить заданную степень надежности доставки пакетов на каждом шаге передачи. Для многоадресной передачи данных в многошаговой меш-сети в работе оценивается вероятность успешной доставки пакетов от источника до каждого конечного получателя.

## 1. Введение

Трансляция мультимедийного трафика, а также данных нескольким получателям используется в различных приложениях и является популярной услугой. Большинство протоколов, реализующих групповую или многоадресную рассылку, работают на верхних уровнях модели OSI. Такой метод хорошо подходит для проводных сетей, где коллизии и потеря пакетов являются редкими событиями (и нижележащие уровни обеспечивают надежность доставки). При переходе от использования тра-

диционной проводной среды передачи данных к беспроводным каналам связи возникает ряд особенностей, влияющих на эффективность передачи данных. Беспроводная среда является ненадежной, что приводит к большим потерям пакетов, что недопустимо для приложений, использующих групповую рассылку. Большинство протоколов многоадресной рассылки, работающих на верхних уровнях, чаще всего не имеют встроенных механизмов обеспечения надежности доставки данных, но и при наличии таких механизмов реакция на потерю пакета занимает длительное время, что приводит к задержкам, что также недопустимо. Соответственно требуются дополнительные механизмы обеспечения надежности, работающие на нижних уровнях модели OSI. Кроме того, в беспроводных сетях многоадресная передача данных осуществляется так же как и передача низкоприоритетного трафика без учета требований к передаче мультимедийных данных на низких уровнях модели OSI, так как стандарт IEEE 802.11-2007 [4] не предусматривает для них методов поддержки качества обслуживания.

Введем несколько формальных определений для характеристики различных способов одношаговой (неопосредованной) (англ. one-hop) передачи. Пусть  $Y$  – множество всех соседей станции  $x$ .

**Определение 1** Одношаговая передача пакета станцией  $x$  называется индивидуальной (англ. individual, соответствует передаче individual frame в терминах IEEE 802.11-2007 [4]), если множество станций-приемников состоит из единственной станции  $y \in Y$ . Индивидуальная передача, как правило, ведется с подтверждениями, что обеспечивает надежность передачи.

**Определение 2** Одношаговая передача пакета станцией  $x$  называется широковежательной (англ. groupcast, соответствует передаче groupcast frame в терминах IEEE 802.11-2007), если множество станций-приемников  $Y' \subseteq Y$  и в адресной части пакета указывается специ-

альный адрес, подменяющий адреса  $Y'$ . Широковещательная передача, как правило, ведется без подтверждений и поэтому может быть ненадежной.

Легче всего обеспечить надежность с помощью индивидуальной передачи пакетов всем станциям, которые должны получать групповую рассылку, однако при этом среда передачи будет занята на время передачи пакета как минимум столько раз, сколько получателей рассылки. Для минимизации времени занятия среды логично было бы использовать широковещательную рассылку, когда для передачи пакета всем получателям он посылается один раз. К сожалению, в современных беспроводных протоколах, как правило, отсутствуют подтверждения доставки широковещательных пакетов, что не позволяет обеспечить надежность. К счастью, в последнее время появились механизмы обеспечения надежности [8, 10, 9, 6, 1] такого способа рассылки. Таким образом, появляется новый тип одношаговой многоадресной широковещательной передачи пакета:

**Определение 3** *Одношаговая передача пакета станцией  $x$  называется списочной (англ. reliable multicast/broadcast), если множество станций-приемников  $Y' \subseteq Y$ , и передача ведется с подтверждениями, т.е. считается надежной.*

В настоящее время одним из наиболее приоритетных направлений в беспроводных сетях стало развитие меш-сетей, описываемых стандартом IEEE 802.11s [3]. Помимо предлагаемых преимуществ в плане высокой отказоустойчивости, легкости развертывания, а также простоты наращивания сети, есть и ряд особенностей по сравнению с классическими беспроводными сетями стандарта 802.11, требующих отдельного внимания. С учетом этих особенностей, задача групповой маршрутизации разбивается на *две подзадачи*.

В силу большой степени интерференции в меш-сети снижается пропускная способность и возникает необходимость экономно расходовать ресурсы сети. Соответственно, передача должна затрагивать минимальное количество узлов сети и оказывать минимальное влияние на окружающие узлы, так как любое передаваемое сообщение может стать причиной коллизий и, как следствие, уменьшить пропускную способность сети в целом. Поэтому *первая подзадача* – разработка эффективных алгоритмов групповой маршрутизации, основанных на построении дерева рассылки с учетом широковещательного характера среды, а также влия-

ния на остальные узлы сети. При этом надежность передачи должна обеспечиваться из конца в конец по маршруту передачи от источника к получателям. Поэтому *вторая подзадача* – создание новых метрик, отражающих надежность групповой рассылки и учитывающих специфику механизмов многоадресной передачи с подтверждениями на каждом шаге передачи.

Целью данной работы является постановка задачи маршрутизации для надежной групповой рассылки, предложение вида метрики, отражающей специфику списочной передачи данных, а так же аналитическая оценка надежности доставки при одном из возможных решений (ELBP [1])

## 2. Построение дерева передачи

Пусть множество узлов меш-сети  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ , связи между ними обозначим  $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ , тогда поставим в соответствие реальной сети граф  $G(X, E)$ . Обозначим узлы, входящие в группу рассылки как  $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ . В общем случае дерево групповой рассылки не обязательно состоит только из узлов-получателей рассылки. Обозначим  $F = \{f_1, f_2, \dots\}$  множество узлов, используемых для передачи групповых сообщений, которыми могут быть узлы-получатели рассылки и источник сообщений  $s$ . Наиболее простым и очевидным методом решения задачи построения дерева групповой рассылки является склейка одноадресных маршрутов. Однако так же очевидно, что такое дерево не будет являться оптимальным в плане использования ресурсов меш-сети. При передаче пакетов индивидуальным способом решением задачи будет построение дерева минимального веса, которая известна также как Задача Штейнера. Карп [5] продемонстрировал, что задача NP-сложна даже в случае, когда все соединения имеют одинаковый вес, в то время как в беспроводных сетях цена занимаемых ресурсов при передаче данных разным соседям различна. С другой стороны, при большой плотности узлов в области покрытия одной станции находится большое количество соседей. При пересылке кадра они все его получают. Очевидно при этом широковещательная передача может быть выгоднее чем одноадресная, в силу того что меньше времени тратится на передачу пакетов, поскольку в узлах ветвления при  $n$  ветвях используется 1, а не  $n$  передач, см. Рис.1. Соответственно процедура вычисления веса дерева меняется, и нужны новые эвристические алгоритмы построения дерева.

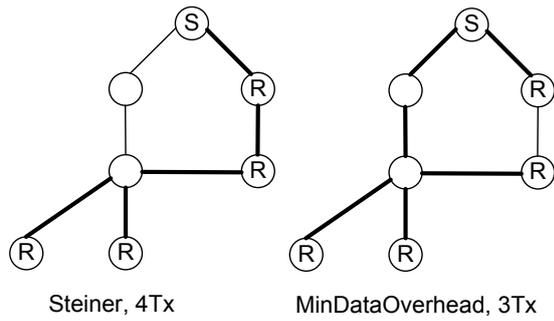


Рис. 1.

### 3. Использование широковещательного характера среды

Широковещательный характер среды передачи данных позволяет осуществлять передачу пакетов сразу нескольким получателям в пределах зоны уверенного приема. Однако в то же время занятие среды одним из узлов ведет к невозможности передачи другими узлами. Для оценки оптимальности выбора маршрута при широковещательном способе передачи необходимо задать метрику маршрута.

При вычислении одноадресных маршрутов стандарт IEEE 802.11s [3] определяет метрику звена следующего вида:

$$c_a = \left[ O + \frac{B}{r} \right] \frac{1}{1-p}, \quad (1)$$

где  $O$  – константа, определяемая физическим уровнем и отражающая накладные расходы на передачу данных,  $B$  – размер стандартного пакета,  $r$  – скорость текущей передачи,  $p$  – вероятность ошибки передачи пакета  $B$  на скорости  $r$ . Такая метрика имеет физический смысл времени занятия среды при передаче стандартного пакета. В случае индивидуальной рассылки и построения дерева Штейнера  $T$ , метрика маршрута будет вычисляться по формуле:

$$L_{route} = \sum_{t \in T} L_t, \quad (2)$$

где  $L_t$  – метрика звена  $t$ .

Будем считать, что в случае широковещательного метода передачи пакетов для обеспечения надежности на каждом шаге в общем случае его должны подтверждать некоторое количество получателей, то есть используется списочная передача пакета. При этом на каждом шаге  $i$ , характеризуемым передатчиком  $f$ , множеством получателей на данном шаге  $\mathcal{N}$ , множеством узлов, которые должны подтвердить получение  $\mathcal{J}$  на данном шаге  $i$ :  $(f_i, \mathcal{N}_i, \mathcal{J}_i)$  для успешного приема всеми получателями на каждом шаге рассылка пакета должна вестись

на скорости, используемой при определении метрики (1), минимальной среди получателей  $\mathcal{N}$ . Метрика вершины, т.е. количество канального времени, затраченного на передачу пакета из этой вершины, будет при этом зависеть от количества узлов-приемников сообщения на каждом шаге, количества узлов, которые должны подтверждать получение сообщения и от выбранной в зависимости от этих двух множеств скорости передачи. Считая, аналогично (1), что при каждой попытке передачи затрачивается  $[O + \frac{B}{r_i}]$  времени, получим общий вид метрики вершины на одном шаге передачи:

$$L_{f_i} = \sum_{k=1}^K \varphi_k(i) k \left[ O + \frac{B}{r_i} \right], \quad (3)$$

где  $K$  – предельное количество попыток передачи сообщения,  $\varphi_k(i)$  – вероятность того, что потребуется  $k$  попыток передачи сообщения на шаге  $i$ , а  $r_i = \min\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$  – минимальная скорость среди  $N$  узлов-получателей на данном шаге из скоростей, используемых при подсчете метрики (1). Теперь общим решением задачи будет дерево с минимальным весом, определяемым по следующей формуле:

$$L = \sum_{i: f_i \in F} L_{f_i}. \quad (4)$$

Выбор множества  $F$ , определяющего дерево рассылки, является «Задачей о вершинном покрытии», которая, как известно, является NP-полной и не может быть точно решена за полиномиальное время [5]. Будем считать, что широковещание ведется на минимальной скорости, и найдем в этом предположении субоптимальное решение задачи. Существует хороший эмпирический подход [7], ставший классикой, использующий особенности широковещательного характера среды и позволяющий найти приближенное решение задачи о минимальном вершинном покрытии.

Цель алгоритма, приводимого в работе [7] – уменьшить количество передающих узлов в дереве, увеличивая количество листьев. Для описания алгоритма введем несколько обозначений. Пусть  $Cov(x)$  – узлы покрываемые  $x$  при широковещательной передаче сообщения. Так же используется несколько списков: список всех узлов сети, который при инициализации определяется как  $X = X - s$ ,  $F$  – список узлов, передающих групповые пакеты, независимо от того, являются ли они участниками группы рассылки или нет, список  $aux$ , который в начальный момент имеет вид  $aux = V - Cov(s) + s$ .

Предполагается, что информация о топологии сети в каком-либо виде может быть получена единственным узлом, вычисляющим дерево. В первый момент список передающих узлов

$F$  пуст. После инициализации алгоритм строит дерево начиная с узла  $x$ , который покрывает наибольшее количество узлов в текущем наборе  $aux$ . После этого  $x$  добавляется к списку  $F$  и становится частью набора узлов, передающих групповые сообщения и исключается из набора  $X$ . При этом узел  $x$  может быть выбран как передающий, только если он передает данные двум или более нижележащим узлам. В дополнение, получатели групповой рассылки, покрываемые узлом  $x$  ( $Cov(x)$ ) удаляются из списка  $aux$  узлов, которые необходимо покрыть деревом, а узел  $x$  добавляется в  $aux$ . Этот процесс повторяется, пока все узлы не будут покрыты или пока не останется больше узлов, позволяющих, будучи выбранными в качестве передающих, обеспечить выигрыш в смысле количества передач. В последнем случае различные поддерева соединяются деревом Штейнера. Для этого может применяться любая эвристика для построения дерева Штейнера. Построенное таким образом дерево в подавляющем большинстве случаев будет иметь такой же либо меньший вес в смысле накладных расходов, чем дерево, построенное с помощью алгоритма Штейнера.

#### 4. Надежная многоадресная доставка сообщений в беспроводной меш-сети

Нужно отметить, что алгоритм [7] не предполагает какого-либо обеспечения надежности передачи пакетов. При этом большая потеря пакетов на любом из звеньев передачи на втором уровне модели OSI окажется причиной плохой работы приложений на более высоких уровнях. Соответственно требуется применение одного из известных механизмов обеспечения надежной передачи на одном шаге при списочной передаче пакетов по дереву (из конца в конец), построенному с помощью алгоритма [7].

Очевидно, что многоадресный кадр не может подтверждаться стандартным способом с помощью ACK-кадра, посылаемого каждым из получателей, в силу неизбежности коллизий из-за одновременной посылки кадров-подтверждений станциями, получающими многоадресную рассылку. Существует несколько алгоритмов, позволяющих реализовать надежную доставку сообщений с помощью оптимизационных приемов, учитывающих особенности беспроводной передачи данных. Некоторые из этих алгоритмов, такие как BSMA (Broadcast Support Multiple Access) [9] использует нестандартный для протокола IEEE 802.11 метод ARQ, основанный на отправке кадра нега-

тивного подтверждения при неверно принятом кадре данных. Протоколы BMW (Broadcast Medium Window) [10] и BMM (Batch Mode Multicast MAC) [8] одноадресно опрашивают станции-получатели на предмет успешного получения сообщения, используя либо модифицированные кадры RTS, либо специальные кадры RAK. Отправитель повторяет посылку кадра данных, пока не получит кадр подтверждения успешной доставки (ACK) от каждого получателя. Протокол BMM, в отличие от протокола BMW, не использует процедуру конкурентного доступа между каждым обменом запросом-подтверждением в цепочке, что сокращает время передачи пакетов.

Такие протоколы обеспечивают хорошую надежность передачи данных, однако платой за это является большая избыточность: накладные расходы при этом, например, в случае BMM могут превысить полезную нагрузку. Поэтому для повышения производительности предлагаются подходы, частично жертвующие надежностью передачи данных в пользу производительности. Например, протокол LBP (Leader-Based Protocol) [6] выбирает среди всех получателей одного лидера, который от имени всей группы получателей отвечает за посылку кадра CTS в ответ на RTS и кадра подтверждения ACK в ответ на кадр с данными (так же может посылать и негативные кадры NCTS и NAK как отказ от приема и негативное подтверждение соответственно). При этом лидер выбирается случайно и равновероятно среди всех получателей (см. [2]), что является малоэффективным в плане достижения надежности, так как условия работы станций неодинаковы (разные вероятность коллизий, уровень шума, удаленность от станции, посылающей многоадресный кадр). Развитием этого подхода является использование предложенный в работе [1] были предложены механизмы обеспечения надежной доставки сообщений с помощью механизма многоадресной передачи с мультилидерным подходом ELBP (Enhanced Leader-Based Protocol), который позволяет достигнуть необходимого уровня надежности в балансе с производительностью.

Рассмотрим многоадресную передачу пакета на произвольном шаге рассылки по дереву. Протокол ELBP выбирает из общего количества получателей сообщения  $N$  (в нашем случае одношаговых получателей широкоэвентального сообщения) некоторое количество лидеров  $J$ , при том таких, у которых вероятность потери пакета  $p_j$  выше, чем у остальных узлов. После отправки блока из  $M$  пакетов отправитель запрашивает у каждого из лидеров под-

тверждение доставки (стандартный кадр Block Ack Request, BAR), и каждый из лидеров должен ответить кадром (Block Ack), содержащим битовую маску подтверждений на кадры блока. Если хотя бы один из лидеров не подтвердил прием какого-либо кадра из блока, то такой кадр должен быть передан вновь в следующем блоке. При этом лидеры могут быть выбраны как на длительное время, так и перед посылкой каждого блока кадров. Если пакет по какой-либо причине не был доставлен после первой попытки передачи, для его успешной доставки может потребоваться некоторое количество повторных передач, ограниченное параметром  $K$ .

Пусть количество узлов-получателей на очередном шаге  $N$ , номер очередной передачи обозначим  $k = 1, \dots, K$ , тогда вероятность того, что все лидеры ровно после  $k$ -й передачи получили переданное сообщение, будет вычисляться по формуле:

$$\pi_k = \prod_{j=1}^J (1 - p_j^k) - \prod_{j=1}^J (1 - p_j^{k-1}), k \leq K, \quad (5)$$

Вероятность того, что не все лидеры получили кадр данных после  $k$ -й попытки:

$$\tilde{\pi}_k = 1 - \prod_{j=1}^J (1 - p_j^k). \quad (6)$$

В случае использования механизма ELBP вероятность того, что потребуется  $k$  попыток для передачи пакета в (3) будет равна:

$$\varphi_k = \begin{cases} \pi_k, & k < K, \\ \pi_k + \tilde{\pi}_k, & k = K. \end{cases} \quad (7)$$

Слагаемое  $O$ , отражающее в случае ELBP расходы на обеспечение надежности передачи пакета, может быть записано в виде:

$$O_{ELBP} = \frac{(BAR + BlockAck)J}{M} + O. \quad (8)$$

Надежность передачи считается для узлов-получателей на  $i$ -м шаге и зависит от того, является ли получатель лидером:

$$\eta_{ij} = \begin{cases} p_j^K, & 1 \leq j < J, \\ \sum_{k=1}^K (\pi_k p_j^k) + \tilde{\pi}_k p_j^K, & J < j \leq N. \end{cases} \quad (9)$$

Однако в плане использования приложений решающее значение имеет не надежность на каждом конкретном шаге передачи, а общая надежность передачи от источника сообщений до конечных получателей по маршруту а так же надежность доставки ровно до всех получателей рассылки. Обозначим  $Q_{ji}$  вероятность того, что кадр будет успешно передан получателю  $j$  от

ретранслятора  $f$ ,  $Q$  – вероятность доставки пакета до всех конечных получателей по дереву,  $Q_v$  – вероятность доставки пакета до конечного получателя  $v$  по маршруту от источника сообщения. Так как вероятность того, что каждый следующий узел дерева получит кадр данных зависит от вероятности его успешного получения на предыдущем шаге. Поэтому в каждом узле дерева необходимо иметь информацию о том, кто является передатчиком для данного узла; введем для этого функцию  $parent(f)$ . Тогда,

$$Q_{fj} = \begin{cases} 1 - \eta_{fj}, & f = s, \\ (1 - \eta_{fj})Q_{parent(f),f}, & f \neq s. \end{cases} \quad (10)$$

$$Q_v = Q_{parent(v)v}, \quad (11)$$

Вероятность того, что пакет был успешно передан всем получателям на  $i$ -м шаге передачи  $Q_i^N$ , будет равна:

$$Q_i^N = \sum_{k=1}^K \pi_{ki} \prod_{j=J_i+1}^{N_i} (1 - p_j^k). \quad (12)$$

Тогда вероятность  $Q$  того, что пакет был успешно передан всем получателям рассылки  $V$ , будет определяться успешностью передачи во всех узлах дерева передающих узлов:

$$Q = \sum_{\forall i: f_i \in F} Q_i^N. \quad (13)$$

## 5. Заключение

В данной работе рассмотрена задача многоадресной рассылки в беспроводной меш-сети с обеспечением надежной передачи. Предложено решать данную задачу с помощью ширококвещательной передачи по дереву маршрутов с использованием подтверждений на каждом шаге. Такой новый тип одношаговой многоадресной ширококвещательной передачи пакета назван *списочной передачей*. При этом дерево рассылки должно быть построено с помощью алгоритма, минимизирующего вес дерева в метрике нового вида (3), отражающей количество канального времени, затрачиваемого на передачу пакета, и использование механизма подтверждений на каждом шаге (многошаговая списочная передача). В предположении, что ширококвещание ведется на минимальной скорости, для построения дерева используется алгоритм [7], минимизирующий количество передающих вершин. Для обеспечения надежности передачи

на каждом шаге используется способ многоадресной передачи с подтверждениями, описываемый математической моделью, предложенной в [1]. В силу того, что алгоритм [7] изначально не рассчитан на использование широковещания с подтверждениями и соответствующей метрики, требуется разработка нового алгоритма групповой маршрутизации, который позволил бы учесть особенности списочной передачи.

vol.2, 2001.

## Список литературы

- [1] Якимов М.Ю., Сафонов А.В. Поддержка надежной многоадресной передачи в беспроводном протоколе ieee 802.11. *Труды конференции "Информационные технологии и системы" (ИТиС-2007)*, pages 54–58, 2007.
- [2] H.-C. Chao, S. W. Chang, and J. L. Chen. Throughput improvements using the random leader technique for the reliable multicast wireless lans. In *ICN '01: Proceedings of the First International Conference on Networking-Part 1*, pages 708–719, London, UK, 2001. Springer-Verlag.
- [3] *IEEE P802.11s/D3.0. Draft STANDARD for Information Technology – Telecommunications and information exchange between systems – Local and metropolitan area networks – Specific requirements – Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications Amendment: Mesh Networking [Electronic resource]*, 2009.
- [4] *IEEE Standard for Information technology – Telecommunications and information exchange between systems – Local and metropolitan area networks – Specific requirements – Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*, 2007.
- [5] Karp, R.-M. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations (Plenum Press, New York)*, page 85–103, 1975.
- [6] J. Kuri and S. K. Kasera. Reliable multicast in multi-access wireless lans. *Wirel. Netw.*, 7(4):359–369, 2001.
- [7] P. M. Ruiz and A. F. Gomez-Skarmeta. Approximating optimal multicast trees in wireless multihop networks. In *Computers and Communications, 2005. ISCC 2005. Proceedings. 10th IEEE Symposium on*, pages 686–691, 2005.
- [8] M.-T. Sun, L. Huang, A. Arora, and T.-H. Lai. Reliable mac layer multicast in ieee 802.11 wireless networks. In *ICPP '02: Proceedings of the 2002 International Conference on Parallel Processing*, page 527, Washington, DC, USA, 2002. IEEE Computer Society.
- [9] K. Tang and M. Gerla. Random access mac for efficient broadcast support in ad hoc networks. pages 454–459, 2000.
- [10] K. Tang and M. Gerla. Mac reliable broadcast in ad hoc networks. volume 2, pages 1008–1013

## Динамическое распределение спектра между вторичными пользователями в сетях когнитивного радио

Ошмарин Дмитрий Владимирович

Нижегородский Государственный Технический Университет им. Алексева  
dmitry.oshmarin@gmail.com

### Аннотация

*Вопрос эффективности использования электромагнитного спектра частот становится краеугольным камнем в современных беспроводных телекоммуникационных сетях и системах. Концепция когнитивного радио, предполагающая повторное использование спектра вторичными пользователями, позволяет увеличить эффективность использования частотных ресурсов. В данной работе рассматриваются модели динамического распределения спектра между вторичными пользователями на основе последовательного и одновременного групповых аукционов. Так же производится сравнение посредством моделирования основных характеристик, таких как эффективность, сходимость и прибыльность, двух сравниваемых типов аукционов.*

### 1. Введение

Развитие радиовещания, цифрового телевидения и беспроводных систем связи происходит столь стремительно, что все более остро встает вопрос об эффективности использования частотного спектра. Основным механизмом распределения спектрального ресурса на сегодняшний день является, так называемое, лицензирование. Оно подразумевает закрепление того или иного частотного диапазона за тем или иным оператором, предоставляющим услуги конечному пользователю, на конкурсной основе. Соответственно, лицензированный спектр может использоваться только тем оператором, за которым он закреплен.

С одной стороны, как показывают исследования [1], использование частотного ресурса неодинаково эффективно во всей полосе частотного спектра и зависит от частоты, пространства и времени. С другой стороны, электромагнитный спектр, пригодный для современных мобильных телекоммуникаций,

является конечным ресурсом. Данные обстоятельства позволяют говорить о неэффективности существующего механизма распределения спектрального ресурса, который на сегодняшний момент является статическим практически во всех доступных полосах частот.

Один из подходов к решению проблемы неэффективного использования спектрального ресурса был предложен в работах J. Mitola [2, 3] и вылился в концепцию когнитивного радио. Когнитивное радио – это интеллектуальная беспроводная система связи, способная анализировать окружающую обстановку и приспосабливаться к ней посредством обучения, реагируя на изменения в окружении изменением своих собственных параметров (например, несущей частоты, мощности, способа модуляции) в реальном времени с целью увеличения эффективности использования спектрального ресурса [4].

В системах когнитивного радио принято различать первичных и вторичных пользователей. Первичный пользователь обладает эксклюзивными правами на использование некоторой лицензированной полосы частот. Вторичный пользователь обладает правом использования лицензированной полосы частот только в том случае, если она не занята первичным пользователем. Передача прав на использование спектра от первичных пользователей вторичным с последующим динамическим распределением спектра между ними позволит значительно увеличить эффективность использования спектрального ресурса.

В данной статье рассматривается механизм динамического распределения спектра между вторичными пользователями на основе теории аукционов, где в качестве аукциониста выступает первичный пользователь или группа первичных пользователей, а в качестве покупателя выступают вторичные пользователи. Анализ полученного аукциона ограничивается случаем, когда вторичный пользователь может претендовать только на один диапазон частот из всех, разыгрываемых на аукционе. Данный

алгоритм может быть реализован в качестве протокола канального уровня и не имеет жесткой привязки к диапазонам рабочих частот.

## 2. Обзор литературы

Основополагающими работами в области когнитивного радио принято считать [2, 3]. В [2] рассматривается язык представления знаний о системе связи (RKRL – Radio Knowledge Representation Language) как метод описания и представления знаний в системах когнитивного радио. Механизмы организации и использования спектрального пула вторичными пользователями рассматриваются в [3].

Обзоры когнитивного радио с указанием наиболее перспективных и представляющих научный интерес областей, а так же текущих результатов исследований представлены в [4, 5].

Динамическое распределение спектра в системах когнитивного радио рассматривается в работах [6-10]. Распределение спектра между базовыми станциями стандарта IEEE 802.22 на основе алгоритма раскрашивания графа рассмотрено в [6]. [7,8] посвящены теоретико-игровым моделям и алгоритмам распределения спектра между приемопередающими парами в сетях когнитивного радио. В [9] рассматриваются две модели аукционов, направленных на распределение спектра между приемопередающими парами путем управления мощностью узлов-передатчиков. Периодический аукцион передачи прав первичного использования частотных диапазонов рассматривается в [10].

## 3. Модель сети

Рассмотрим модель сети, показанную на Рис. 1. Первичные базовые станции предоставляют спектральному брокеру информацию о частотных ресурсах, которые в данный момент не заняты, выступая в качестве продавцов. Спектральный брокер собирает информацию о свободных частотных диапазонах для последующего распределения между вторичными базовыми станциями. Вторичные базовые станции, конкурирующие между собой (например, в случае принадлежности различным операторам мобильной связи), выступают в качестве покупателей частотного ресурса. База данных хранит информацию о доступных частотных диапазонах, первичных и вторичных базовых станциях.

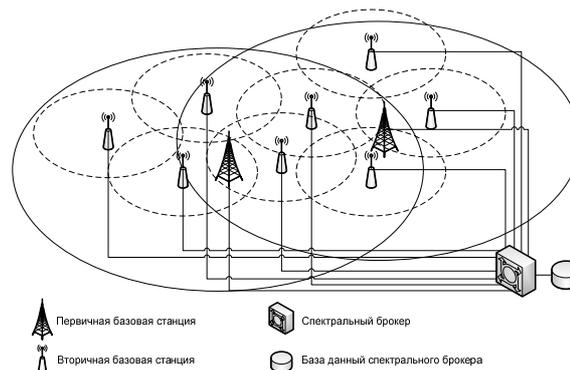


Рис. 1 Модель сети

Динамическое распределение спектра в рассматриваемой модели осуществляется спектральным брокером на основе знания о свободных частотных диапазонах посредством аукциона. Длительность использования частотного диапазона указывается первичной базовой станцией в момент передачи информации спектральному брокеру. В течение данного промежутка времени первичная базовая станция не имеет права использовать данный частотный диапазон, что гарантирует отсутствие интерференции между первичным и вторичным пользователем. Соответственно, права на использование спектра в результате аукциона передаются вторичной базовой станции на заранее определенный интервал времени, по окончании которого частотный диапазон должен быть освобожден.

## 4. Модель аукциона

В данной работе рассматривается групповой закрытый аукцион, исходом которого является распределение спектра между вторичными пользователями. Причем каждый вторичный пользователь может стать обладателем только одного частотного диапазона по результатам проведенного аукциона. Определим множество частотных диапазонов, разыгрываемых на аукционе:

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_M\},$$

где  $M$  – количество доступных частотных диапазонов.

Множество оценок частотных диапазонов вторичным пользователем, участвующим в аукционе:

$$V_i = \{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^M\}$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда все частотные диапазоны равноценны для вторичного пользователя, то есть:

$$v_i^1 = v_i^2 = \dots = v_i^M = v_i$$

Выигрыш вторичного пользователя может быть представлен в виде:

$$\Pi_i = \begin{cases} v_i - b_i, & b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0, & b_i < \max_{j \neq i} b_j \end{cases},$$

где  $b_i$  – предложение цены  $i$ -го вторичного пользователя.

Так как рассматриваемый аукцион является групповым, то аукционист имеет две возможности продажи частотных диапазонов: последовательный и одновременный. В случае последовательно аукциона каждый частотный диапазон разыгрывается отдельно и после каждого розыгрыша объявляется победитель. В случае одновременного аукциона все  $M$  частотных диапазонов разыгрываются за один раз и распределяются между  $M$  вторичными пользователями с максимальной ценой предложения.

Предположим, что  $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$  вторичных пользователей участвуют в групповом аукционе, где разыгрывается  $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$  частотных диапазонов,  $n > m$ . Все частотные диапазоны являются равноценными для вторичных пользователей, как оговаривалось ранее, тем самым образуя множество оценок:  $V_i = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Рассмотрим более подробно последовательный аукцион, в котором после каждого розыгрыша спектральный брокер распространяет информацию о выигравшем вторичном пользователе и о цене его предложения. В случае последовательного аукциона удобно начать рассмотрение с момента, когда разыграно  $k$  частотных диапазонов и  $(n-k)$  вторичных пользователей продолжают участие в аукционе. Предположим, что предложения цены распределены равномерно с плотностью распределения вероятностей:

$$f(b) = \frac{1}{v_{\max}}, \quad (1)$$

где  $v_{\max} = \max_i V_i$ .

Пусть  $b_i$  предложение цены  $i$ -го вторичного пользователя за  $(k+1)$  частотный диапазон. В таком случае,  $i$ -ый вторичный пользователь выиграет аукцион тогда и только тогда, когда его предложение цены больше, нежели предложение цены всех остальных  $(n-k-1)$  вторичных пользователей. Для начала определим вероятность того, что предложение цены  $b_i$   $i$ -го вторичного пользователя больше, чем предложение цены  $b_j$   $j$ -го вторичного пользователя:

$$P(b_i > b_j) = \int_0^{b_i} f(b) db = \frac{b_i}{v_{\max}} \quad (2)$$

Тогда вероятность выигрыша аукциона  $i$ -ым вторичным пользователем может быть выражена следующим соотношением:

$$P(b_i > \forall b_j) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n-k-1} P(b_i > b_j) = \left( \frac{b_i}{v_{\max}} \right)^{n-k-1} \quad (3)$$

Таким образом, функция выигрыша вторичного пользователя вычисляется по формуле:

$$\Pi_i^{nocl} = P(b_i > \forall b_j) \cdot (v_i - b_i) = \left( \frac{b_i}{v_{\max}} \right)^{n-k-1} \cdot (v_i - b_i) \quad (4)$$

Для получения оптимального предложения цены вторичным пользователем найдем производную функции выигрыша:

$$\frac{d\Pi_i^{nocl}}{db_i} = \frac{(n-k-1) \cdot (v_i - b_i) \cdot b_i^{n-k-2} - b_i^{n-k-1}}{v_{\max}^{n-k-1}}$$

Отсюда получим оптимальное предложение цены вторичного пользователя в последовательном групповом аукционе:

$$b_i^{nocl} = \frac{(n-k-1) \cdot v_i}{(n-k)} \quad (5)$$

Далее проанализируем одновременный групповой аукцион и найдем оптимальное предложение цены вторичным пользователем. Как и в случае последовательного аукциона, спектральный брокер распространяет информацию о выигравших вторичных пользователях и их предложениях цены.

Пусть  $b_i$  предложение цены  $i$ -го вторичного пользователя за один частотный диапазон. В таком случае,  $i$ -ый вторичный пользователь выиграет аукцион тогда и только тогда, когда его предложение цены будет находиться среди  $m$  максимальных предложений. Если множество проигравших вторичных пользователей обозначить через  $L$ , то вероятность данного события равна:

$$P(b_i > \forall b_j | j \in L) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n-m} P(b_i > b_j) = \left( \frac{b_i}{v_{\max}} \right)^{n-m} \quad (6)$$

Таким образом, функция выигрыша вторичного пользователя вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \Pi_i^{odn} &= P(b_i > \forall b_j | j \in L) \cdot (v_i - b_i) = \\ &= \left( \frac{b_i}{v_{\max}} \right)^{n-m} \cdot (v_i - b_i) \end{aligned} \quad (7)$$

Для получения оптимального предложения цены вторичным пользователем найдем производную функции выигрыша:

$$\frac{d\Pi_i^{odn}}{db_i} = \frac{(n-m) \cdot (v_i - b_i) \cdot b_i^{n-m-1} - b_i^{n-m}}{v_{\max}^{n-m}}$$

Отсюда получим оптимальное предложение цены вторичного пользователя в последовательном групповом аукционе:

$$b_i^{odn} = \frac{(n-m) \cdot v_i}{(n-m+1)} \quad (8)$$

Отдельно рассмотрим случай, когда спектральный брокер распространяет информацию не о выигравшей цене предложения, а о минимальной цене предложения в аукционе. Понятно, что в следующем раунде аукциона никто из вторичных пользователей не будет предлагать цену ниже минимальной в предыдущем раунде, так как вероятность выигрыша при этом минимальна и равна 0. Это позволяет нам заменить нижнюю границу предложения цены вторичными пользователями на некоторую величину  $b_{\min}$  и записать (1) в виде:

$$f(b) = \frac{1}{v_{\max} - b_{\min}} \quad (9)$$

Тогда для последовательного группового аукциона (2), (3), (4) и (5) пересчитываются в (10), (11), (12) и (13) соответственно:

$$P(b_i > b_j) = \int_{b_{\min}}^{b_i} f(b) db = \frac{b_i - b_{\min}}{v_{\max} - b_{\min}} \quad (10)$$

$$P(b_i > \forall b_j) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n-k-1} P(b_i > b_j) = \left( \frac{b_i - b_{\min}}{v_{\max} - b_{\min}} \right)^{n-k-1} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Pi_i^{nocl} &= P(b_i > \forall b_j) \cdot (v_i - b_i) = \\ &= \left( \frac{b_i - b_{\min}}{v_{\max} - b_{\min}} \right)^{n-k-1} \cdot (v_i - b_i) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_i^{nocl}}{db_i} &= \frac{(n-k-1) \cdot (v_i - b_i) \cdot (b_i - b_{\min})^{n-k-2}}{(v_{\max} - b_{\min})^{n-k-1}} - \\ &- \frac{(b_i - b_{\min})^{n-k-1}}{(v_{\max} - b_{\min})^{n-k-1}} \\ b_i^{nocl} &= \frac{(n-k-1) \cdot v_i + b_{\min}}{(n-k)} \end{aligned} \quad (13)$$

Для одновременного группового аукциона (6), (7) и (8) пересчитываются в (14), (15) и (16) соответственно:

$$\begin{aligned} P(b_i > \forall b_j | j \in L) &= \prod_{j=1, j \neq i}^{n-m} P(b_i > b_j) = \\ &= \left( \frac{b_i - b_{\min}}{v_{\max} - b_{\min}} \right)^{n-m} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Pi_i^{odn} &= P(b_i > \forall b_j | j \in L) \cdot (v_i - b_i) = \\ &= \left( \frac{b_i - b_{\min}}{v_{\max} - b_{\min}} \right)^{n-m} \cdot (v_i - b_i) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_i^{odn}}{db_i} &= \frac{(n-m) \cdot (v_i - b_i) \cdot (b_i - b_{\min})^{n-m-1}}{(v_{\max} - b_{\min})^{n-m}} - \\ &- \frac{(b_i - b_{\min})^{n-m}}{(v_{\max} - b_{\min})^{n-m}} \\ b_i^{odn} &= \frac{(n-m) \cdot v_i + b_{\min}}{(n-m+1)} \end{aligned} \quad (16)$$

Сравним полученные последовательные и одновременные групповые аукционы посредством моделирования.

## 5. Результаты моделирования

Моделирование динамического распределения спектра между вторичными пользователями проводилось для четырех моделей аукциона: последовательного, последовательного с распространением минимального предложения цены, одновременного и одновременного с распространением минимального предложения цены. Целью моделирования являлись анализ и сравнение основных характеристик аукционов, таких как эффективность и сходимость аукциона, выручка аукциониста и средняя прибыль вторичных пользователей.

Параметры моделирования:

- количество вторичных пользователей  $n=8$ ;
- количество частотных диапазонов  $m=5$ ;
- оценки частотных диапазонов вторичными пользователями распределены равномерно на интервале  $[0, 1]$ ;
- количество повторений распределения частотных диапазонов равно 20.

Вначале проведем сравнение аукционов с точки зрения их эффективности. В теории аукционов эффективным будет такой аукцион, в котором предмет, разыгрываемый на аукционе, достается тому пользователю, который его выше оценивает. На Рис. 2 представлена гистограмма распределения выигрышей аукциона среди вторичных пользователей.

Таким образом, все виды рассматриваемых аукционов абсолютно одинаковы с точки зрения эффективности, так как частотные диапазоны распределяются среди одних и тех же вторичных пользователей.

На Рис. 3 представлены графики зависимости выручки аукциониста от количества распределений частотных диапазонов между вторичными пользователями.

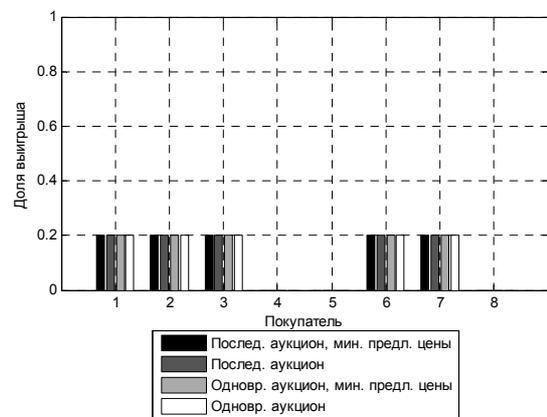
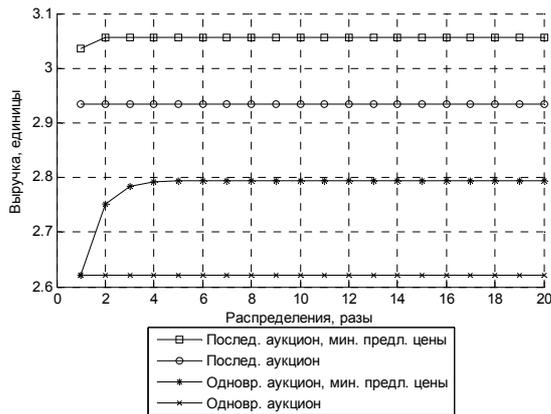


Рис. 2 Гистограмма распределения выигрышей среди вторичных пользователей

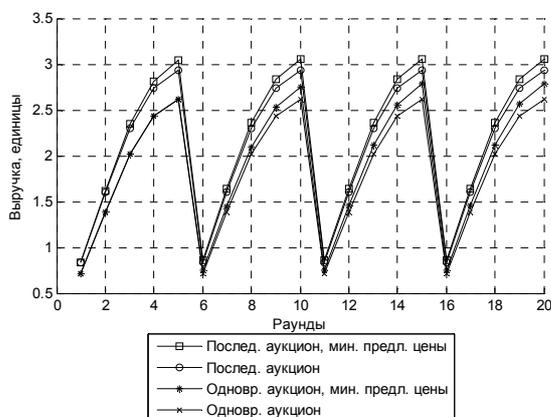


**Рис. 3 Выручка аукциониста в различных аукционах**

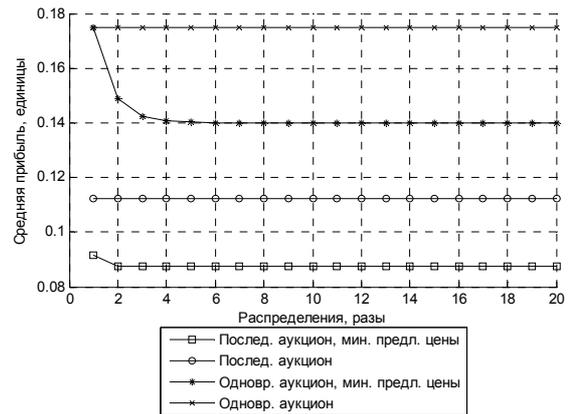
Наибольшую выручку для аукциониста приносит последовательный аукцион с распространением минимального предложения цены. В независимости от выбора последовательного или одновременного типа аукциона, для аукциониста выгодно распространять информацию о минимальном предложении цены, так как это приносит ему дополнительную выручку за счет стимуляции вторичного пользователя к более агрессивному повышению своего предложения цены. На Рис. 3 так же видно, что сходимость последовательного аукциона выше сходимости одновременно аукциона, так как при последовательном аукционе вторичный пользователь имеет возможность корректировать предложение цены при каждом новом розыгрыше частотного диапазона, а не один раз за распределение, как это происходит при одновременном аукционе.

На Рис. 4 представлена динамика изменения выручки с развитием аукциона.

На Рис. 5 приведено сравнение средней прибыли вторичного пользователя в различных типах аукционов.



**Рис. 4 Динамика увеличения выручки аукциониста в различных аукционах**



**Рис. 5 Средняя прибыль вторичного пользователя в различных аукционах**

Как видно на Рис. 5, для вторичного пользователя участие в простом одновременном аукционе является наиболее выгодным с точки зрения средней прибыли, которую он получит за выигранный частотный диапазон.

## 6. Заключение

Современные тренды в развитии беспроводных телекоммуникаций все больше убеждают нас в несостоятельности статического распределения частотных ресурсов. Предлагаемое динамическое распределение спектра среди вторичных пользователей позволяет значительно увеличить эффективность использования частотных ресурсов. Одним из механизмов динамического распределения спектра в системах когнитивного радио может быть распределение на основе аукциона, результатом которого является временная передача прав на использование некоторого частотного диапазона от первичного пользователя вторичному.

В данной работе рассматривается модель сети, где первичные пользователи (первичные базовые станции) передают информацию о свободных частотных диапазонах спектральному брокеру, который организует аукцион среди вторичных пользователей (вторичных базовых станций). Также были рассмотрены модели последовательного и одновременного аукционов с распространением информации о выигрышном и минимальном предложении цены. На основе результатов моделирования сделаны выводы об эквивалентности рассматриваемых аукционов с точки зрения их эффективности и о более высокой скорости сходимости последовательного аукциона. Также в результате моделирования были получены графики зависимости выручки аукциониста и средней прибыли вторичных пользователей и гистограммы распределения

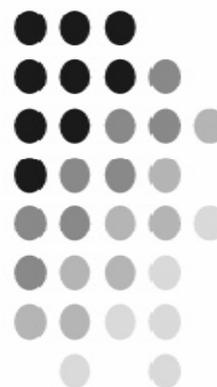
частотных диапазонов среди вторичных пользователей в различных аукционах.

## 7. Библиографический список

- [1] Cabric, D. Implementation issues in spectrum sensing for cognitive radios / D. Cabric, S.M. Mishra, R.W. Brodersen // *Signals, Systems and Computers*, 2004. Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference. 2004. Vol. 1. P. 772-776.
- [2] Mitola, J. Cognitive radio: making software radios more personal / J. Mitola, G.Q. Maguire // *Personal Communications*, IEEE. 1999. Vol. 6. P. 13-18.
- [3] Mitola, J. Cognitive radio for flexible mobile communications / J. Mitola // *Mobile Multimedia Communications*, 1999. (MoMuC '99) 1999 IEEE International Workshop. 1999. P. 3-10.
- [4] Haykin, S. Cognitive radio: brain-empowered wireless communications / S. Haykin // *Selected Areas in Communications*, IEEE Journal. 2005. Vol. 23. P. 201-202.
- [5] Akyildiz, I.F. NeXt generation/dynamic spectrum access/cognitive radio wireless networks: A survey / I.F. Akyildiz, Won-Yeol Lee, M.C. Vuran, M. Shantidev // *Computer Networks*. 2006. Vol. 50. P. 2127-2159.
- [6] Sengupta, S. Enhancements to cognitive radio based IEEE 802.22 air-interface / S. Sengupta, S. Brahma, M. Chatterjee, N.S. Shancar // *Communications*, 2007. ICC'07. IEEE International Conference. 2007. P. 5155-5160.
- [7] Ошмарин, Д.В. Теоретико-игровая модель распределения ресурсов в самоорганизующихся системах когнитивного радио / Д.В. Ошмарин // Сборник тезисов, материалы Пятнадцатой Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (ВНКСФ-15, Кемерово – Томск): материалы конференции, тезисы докладов: В 1 т. Т.1 – Екатеринбург – Кемерово: издательство АСФ России, 2009. С. 672-673.
- [8] Ошмарин, Д.В. Теоретико-игровая модель распределения спектрального ресурса в системе когнитивного радио / Д.В. Ошмарин // *Россия молодая: передовые технологии – в промышленность: матер. II Всерос. молодежн. науч.-техн. конф. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2009. – Кн. 2. С. 84-89.*
- [9] Huang, J. Auction-based spectrum sharing / J. Huang, R.A. Berry, M.L. Honig // *Mobile Networks and Applications*. 2006. Vol. 11. P. 405-418.
- [10] Rodriguez, V. Auction driven dynamic spectrum allocation: optimal bidding, pricing and service priorities for multi-rate, multi-class CDMA / V. Rodriguez, K. Moessner, R. Tafasolli // *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, 2005. PIMRC 2005. IEEE 16th International Symposium. 2005. Vol. 3. P. 1850-1854.

# Раздел 2

Информационные  
технологии  
и проблемы управления  
в сложных системах и сетях



# Совместное применение генетического программирования и верификации моделей для построения автоматов управления системами со сложным поведением

К.В. Егоров, Ф.Н. Царев

*Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий,  
механики и оптики*

*egorovk@rain.ifmo.ru, tsarev@rain.ifmo.ru*

## Аннотация

*Цель работы заключается в разработке метода совместного применения генетического программирования и верификации моделей для построения автоматов управления системами со сложным поведением. Исходными данными являются тесты (каждый тест состоит из входной последовательности событий и соответствующей ей последовательности выходных действий, которую должен вырабатывать автомат) для системы со сложным поведением и утверждений на языке логики линейного времени (Linear Time Logic, LTL).*

*В предыдущих работах построение автоматов осуществлялось только на основе тестов. Одним из недостатков такого подхода является то, что с помощью тестов достаточно трудно (такое описание будет слишком громоздким) описать все варианты поведения. Это означает, что построенный таким образом автомат нельзя использовать без дополнительных проверок. В случае обнаружения ошибок в построенном автомате его придется модифицировать вручную, что достаточно трудно, так как зачастую компьютер выделяет состояния и переходы не так, как это делает человек.*

*Предлагаемый подход исправляет указанный недостаток. Функция приспособленности, используемая в алгоритме генетического программирования, учитывает успешность прохождения тестов и истинность LTL-формул. В случае прохождения всех тестов и выполнения всех LTL-формул можно считать, что автомат с заранее заданным поведением построен.*

*Приводятся результаты экспериментального исследования на двух задачах – на одной из них применение верификации позволяет построить удовлетворяющий спецификации автомат, который не получается построить только на*

*основе тестов, а на другой применение верификации замедляет построение автомата.*

## 1. Введение

Автоматное программирование – это парадигма программирования, в рамках которой программы предлагается проектировать в виде совокупности взаимодействующих автоматизированных объектов управления [1]. При этом каждый автоматизированный объект управления содержит внутри себя управляющий конечный автомат.

Для многих задач автоматы удается строить эвристически, однако существуют задачи, для которых такое построение автоматов затруднительно. К задачам этого класса относится, в частности, задача об «Умном муравье» [2–4]. Для построения автомата для этой задачи в указанных работах достаточно успешно применялись генетические алгоритмы.

Одним из авторов настоящей работы в работе [5] предложен метод построения автоматов с помощью генетического программирования на основе тестов. Однако, как известно, тесты не могут описывать всего поведения программы, и их выполнимость не может служить критерием правильности. Поэтому нельзя использовать автоматные программы, созданные на их основе, без дополнительных проверок и, в случае неправильности, необходимо вручную менять программу или набор тестов.

Метод проверки того, что программная система соответствует заявленной спецификации (обладает необходимыми свойствами или удовлетворяет определенным требованиям), называется верификацией. Обычно систему верифицируют после ее создания, но это сложный процесс, поэтому верификации, как правило, не уделяют должного внимания. В

настоящей работе предлагается использовать верификацию для создания программ и описывать поведение системы на языке верификатора до создания программы.

Наиболее практичным в настоящее время является метод верификации, названный *Model Checking* [6, 7]. Его использование предполагает преобразование программы в формальную модель с конечным числом состояний для последующей верификации и формальную запись утверждений, которые требуется проверить. Для программ, написанных традиционным путем, возникают сложности при построении модели по программе и при преобразовании контрпримера из терминов модели в термины программы.

Этих сложностей можно избежать, если программа является автоматной [1, 8]. Здесь имеет место та же ситуация, что и при контроле аппаратуры, которая при сложной логике не может быть проверена, если она не спроектирована специальным образом с учетом контролепригодности.

В настоящей работе рассматриваются только автоматные программы. Особенности этого класса программ позволяют избежать преобразований к модели и обратно, так как автоматная программа представляет собой модель, пригодную для верификации.

В ходе работы разработано средство, которое принимает на вход набор тестов и *LTL*-формул, а на выход выдает автоматную программу, удовлетворяющую как тестам, так и *LTL*-формулам.

## 2. Генерация автоматных программ на основе тестов

В автоматных программах выделяют три типа объектов: поставщики событий, система управления и объекты управления. Система управления представляет собой конечный автомат или систему взаимодействующих автоматов. Автомат – это множество состояний и переходов между ними. Каждый переход помечен событием, при котором он может осуществиться, и условием, выполнимость которого требуется для перехода. Поставщики событий генерируют события, а система управления по каждому событию может совершать переход, считывая значения входных переменных у объектов управления для проверки условия перехода. Такая система называется реагирующей или событийной [9].

Автоматные программы строятся генетическим алгоритмом на основе тестов. Каждый тест для программы представляет собой последовательность входных и соответствующих

ей выходных воздействий. Под входными воздействиями понимаются события от поставщиков событий и условия переходов, а выходные – вызываемые действия объектов управления.

Построение автоматов на основе тестов осуществляется на основе алгоритма генетического программирования. Он содержит такие элементы, как создание начальной популяции, подсчет функции приспособленности, скрещивание, мутация.

Начальная популяция создается случайным образом – генерируются автоматы, содержащие одинаковое число состояний. В каждом из них начальное состояние выбирается случайным образом, число переходов из каждого состояния выбирается случайно, события, по которым выполняются переходы, также назначаются случайным образом.

Функция приспособленности вычисляется исходя из успешности выполнения тестов для автомата.

Вычисление функции приспособленности основано на редакционном расстоянии (расстоянии Левенштейна) [10]. Функция приспособленности основана на редакционном расстоянии. Для ее вычисления выполняются следующие действия: на вход автомату подается каждая из последовательностей  $Input[i]$ . Обозначим последовательность выходных воздействий, которую сгенерировал автомат на входе  $Input[i]$  как  $Output[i]$ . После этого вычисляется величина

$$FF_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{ED(Output[i], Answer[i])}{\max(|Output[i]|, |Answer[i]|)}\right)}{n}$$

Здесь как  $ED(A, B)$  обозначено редакционное расстояние между строками  $A$  и  $B$ , как  $Answer[i]$  обозначена эталонная выходная последовательность, которую должен генерировать автомат на входе  $Input[i]$ . Отметим, что значения этой функции лежат в пределах от 0 до 1, при этом, чем «лучше» автомат соответствует тестам, тем больше значение функции приспособленности.

Функция приспособленности зависит не только от того, насколько «хорошо» автомат работает на тестах, но и числа переходов, которые он содержит. Она вычисляется по формуле:

$$FF_2 = \begin{cases} 0.5 \cdot T \cdot FF_1 + 0.01 \cdot (100 - cnt), & FF_1 < 1 \\ T + 0.01 \cdot (100 - cnt), & FF_1 = 1 \end{cases}$$

В этой формуле как  $cnt$  обозначено число переходов в автомате, а как  $T$  обозначена «стоимость» прохождения всех тестов (при

проведении экспериментов было выбрано значение  $T=100$ ).

Эта функция приспособленности устроена таким образом, что при одинаковом значении функции  $FF_1$ , отражающей «прохождение» тестов автоматом, преимущество имеет автомат, содержащий меньше переходов. Кроме этого, автомат, который «идеально» проходит все тесты, оценивается выше, чем автомат, проходящий тесты не идеально.

Учет числа переходов в функции приспособленности необходим по двум причинам. Во-первых, минимизация числа переходов приводит к тому, что в результирующем автомате отсутствуют неиспользуемые в тестах переходы – так как они не используются, то могут быть удалены из автомата без ущерба для его поведения на тестах. Во-вторых, чем меньше в автомате переходов, тем более «общее» поведение он задает. Таким образом, частично решается проблема «переобучения», заключающаяся в том, что автомат демонстрирует правильное поведение только на тестовых входных последовательностях. Две указанные особенности должны учитываться при построении набора обучающих тестов.

Кроме этого, при проверке всех тестов помечаются переходы, участвующие в обработке каждого из них.

При скрещивании используется стратегия элитизма, то есть в следующее поколение переходят несколько лучших особей без изменений. В скрещивании участвуют все особи, причем скрещивание может быть как случайным, без учета прохождения тестов, так и с сохранением вершин, помеченных при вычислении функции приспособленности.

Мутация заключается в случайном изменении события перехода, вызванных действий или конечного состояния перехода.

Благодаря стратегии элитизма и скрещиванию «по тестам» обеспечивается рост максимального значения функции приспособленности по поколению и, в итоге, выполнение всех тестов. Скрещивания, выполняемые традиционным образом, и мутации позволяют избежать преждевременной сходимости к локальным максимумам, в которых выполняются не все тесты.

### 3. Верификация автоматных программ

В настоящей работе верифицируется не вся автоматная программа, а только ее модель, представленная конечным автоматом. При этом

поставщики событий и объекты управления рассматриваются в качестве «внешней среды», которая ничего не помнит о последовательности переходов рассматриваемого автомата и вызванных действиях. Таким образом, в любой момент времени может быть совершен любой переход из текущего состояния автомата [11].

Для описания требований к автоматным программам будем применять язык *LTL*, в котором время линейно и дискретно. Синтаксис *LTL* включает в себя пропозициональные переменные  $Prop$ , булевы связки ( $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ) и темпоральные операторы. Последние применяются для составления утверждений о событиях в будущем.

Будем использовать следующие темпоральные операторы:

- **X** (**next**) – « $Xp$ » – в следующий момент выполнено  $p$ ;
- **F** (**in the Future**) – « $Fp$ » – в некоторый момент в будущем будет выполнено  $p$ ;
- **G** (**Globally in the future**) – « $Gp$ » – всегда в будущем выполняется  $p$ ;
- **U** (**Until**) – « $pUq$ » – существует состояние, в котором выполнено  $q$  и до него во всех предыдущих выполняется  $p$ ;
- **R** (**Release**) – « $pRq$ » – либо во всех состояниях выполняется  $q$ , либо существует состояние, в котором выполняется  $p$ , а во всех предыдущих выполнено  $q$ .

Множество *LTL*-формул таково:

- пропозициональные переменные  $Prop$ ;
- True, False;
- $\varphi$  и  $\psi$  – формулы, то:
  - $\neg\varphi$ ,  $\varphi\wedge\psi$ ,  $\varphi\vee\psi$  – формулы;
  - $X\varphi$ ,  $F\varphi$ ,  $G\varphi$ ,  $\varphi U\psi$ ,  $\varphi R\psi$  – формулы.

Верификатор, используемый в данной работе, на вход получает модель автоматной программы и *LTL*-формулу. После проверки модели, верификатор либо сообщает, что формула выполняется, либо приводит контрпример – путь в модели, опровергающий утверждение. Подробнее об этом можно прочитать в работах [7, 12, 13].

### 4. Совместное применение генетического программирования и верификации

Как отмечалось выше, создание автоматов только на основе тестов не может гарантировать правильное поведение программы. Поэтому предлагается использовать *LTL*-формулы для описания заранее заданного поведения и их использование для генерации конечного автомата.

Проверка *LTTL*-формулы будет выполняться в процессе работы алгоритма генетического программирования для автоматов, которые рассматриваются в процессе его работы. Заметим, что утверждения об автоматах ограничиваются утверждениями о переходах и действиями над объектами управления, например о последовательности обработанных событий и выработанных при этом действиях. Это ограничение объясняется тем, что мы заранее не можем ничего знать о состояниях.

Предлагается также генетическими алгоритмами строить программу, но при этом учитывать результат верификации. Для каждой особи из текущей популяции при вычислении функции приспособленности верифицировать модель (конечный автомат) особи и учитывать результат для вычисления приспособленности. Чем больше число успешно выполненных *LTTL*-формулы для конкретной особи, тем больше должна быть функция приспособленности. Это позволяет выживать особям, для которых выполняется большее число *LTTL*-формулы. Приведем выражение для функции

приспособленности:  $FF_3 = FF_2 + F \cdot \frac{n_1}{n_2}$ . Эта

функция приспособленности основана на функции приспособленности, которая использовалась при генерации автоматных программ на основе тестов. В указанной формуле как  $F$  обозначена «стоимость» выполнения всех формул (при проведении вычислительных экспериментов было выбрано значение  $F=10$ ), как  $n_1$  – число *LTTL*-формулы, которые выполняются для автомата, а как  $n_2$  – общее число *LTTL*-формулы, специфицирующих поведение системы со сложным поведением.

Однако выполнимость или невыполнимость *LTTL*-формулы позволяет только отбирать «лучшие» особи, но не позволяет «улучшать» популяцию путем скрещивания или мутации, так как этот процесс был бы случайным и не гарантировал бы увеличения числа верных утверждений. Это обусловлено тем, что мы не учитывали бы влияния структуры автомата (вершин и переходов) на выполнимость или невыполнимость формулы. Для преодоления этого предлагается учитывать контрпример построенный верификатором. Такой контрпример представляет собой список вершин и переходов автомата, которые опровергают *LTTL*-формулу. Благодаря такому списку мы можем увеличить вероятность скрещивания или мутации по одному или нескольким переходам из контрпримера. Например, мы можем случайно заменить конечное состояние перехода, входное воздействие и выходные. Благодаря

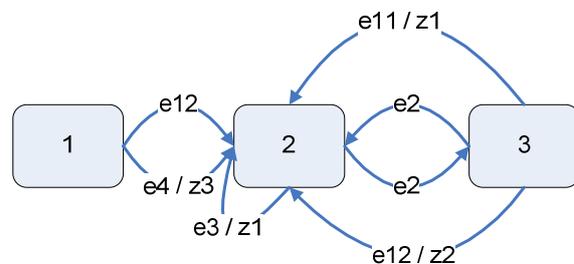
предложенным действиям перестанет существовать данный контрпример для *LTTL*-формулы, и увеличатся шансы новой особи соответствовать большему числу *LTTL*-формулы.

Необходимость применения верификации при автоматическом построении модели программы можно рассмотреть на примере автомата управления дверьми лифта [11]. Поставщики событий генерируют следующие события:  $e11$  – открыть двери,  $e12$  – закрыть двери,  $e2$  – успешное открытие или закрытие дверей,  $e3$  – препятствие мешает закрыть двери,  $e4$  – двери сломались. У объекта управления есть следующие методы:  $z1/z2$  запуск открытия/закрытия дверей,  $z3$  – звонок в аварийную службу. Предположим, что автомат строится только на основе тестов, приведенных в таблице.

**Таблица.** Набор тестов для автомата управления дверьми лифта.

#	Входные воздействия	Выходные воздействия
1	$e11, e2, e12, e2$	$z1, z2$
2	$e11, e2, e12, e2, e11, e2, e12, e2$	$z1, z2, z1, z2$
3	$e11, e2, e12, e3, e2, e12, e2$	$z1, z2, z1, z2$
4	$e11, e2, e12, e2, e11, e2, e12, e3, e2, e12, e2$	$z1, z2, z1, z2, z1, z2$
5	$e11, e2, e12, e3, e2, e12, e3, e2, e12, e2$	$z1, z2, z1, z2, z1, z2$
6	$e11, e4$	$z1, z3$
7	$e11, e2, e12, e4$	$z1, z2, z3$
8	$e11, e2, e12, e2, e11, e4$	$z1, z2, z1, z3$
9	$e11, e2, e12, e3, e4$	$z1, z2, z1, z3$

Согласно приведенным тестам получится неправильный автомат (рис. 1), для которого выполняются все тесты. В сгенерированном автомате открытие дверей может быть начато, когда двери уже открыты, и аналогично закрытие, когда двери закрыты. Так же после поломки лифта двери опять могут начать закрываться, хотя этого не предусмотрено.



**Рис. 1.** Автомат, построенный только на основе тестов

Для ограничения такого поведения и требуются *LTL*-формулы. Например, они позволяют делать утверждения о допустимости и недопустимости определенных последовательностей событий неограниченной длины. При помощи тестов можно описывать только последовательности ограниченной длины.

Построение модели не только на тестах, но и на *LTL*-формулах, позволяет получить автомат с правильным поведением. Приведем некоторые из них:

- $G(\text{wasEvent}(\text{ep.e11}) \Rightarrow \text{wasAction}(\text{co.z1}))$  – при обработке события открыть двери, запускается открывание дверей;
- $G(\text{wasEvent}(\text{ep.e4}) \Leftrightarrow \text{wasAction}(\text{co.z3}))$  – если сломалась дверь, то тогда и только тогда делается звонок в аварийную службу;
- $G(\text{wasEvent}(\text{ep.e3}) \Rightarrow \text{wasAction}(\text{co.z1}))$  – если препятствие мешает открыть дверь, то открыть дверь;
- $G(\text{wasEvent}(\text{ep.e11}) \Rightarrow X(\text{wasEvent}(\text{ep.e4}) \text{ or } \text{wasEvent}(\text{ep.e2})))$  – после обработки события открыть двери, следующее будет либо успешное открытие, либо событие поломки;
- $G(\text{wasAction}(\text{co.z1}) \Rightarrow X(!\text{wasAction}(\text{co.z1}) U(\text{wasAction}(\text{co.z2}) \text{ or } \text{wasEvent}(\text{ep.e4}))))$  – если дверь начала открываться, то она не сможет повторно открыться до закрытия или поломки.

Построенный автомат показан на рис. 2 и он не обладает недостатками, указанными выше.

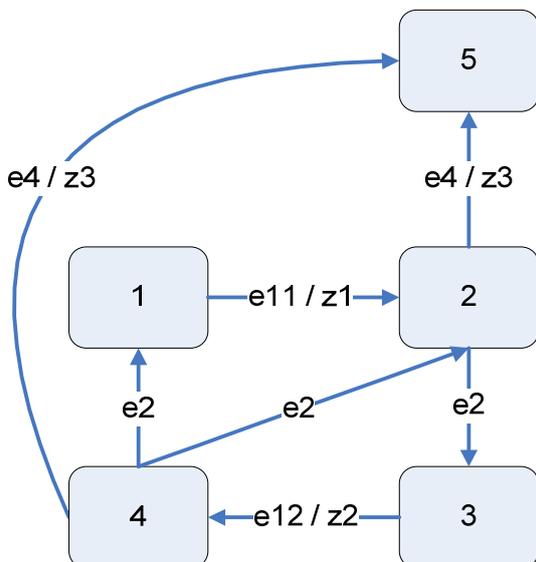


Рис. 2. Автомат, построенный на основе тестов и *LTL*-формул

## 5. Сравнение методов

Сравнение методов проводилось на примере задачи управления электронными часами с будильником, взятом из работы [1]. В работе [5] для этой задачи автомат был построен только на основе тестов.

В качестве исходных данных были выбраны 38 тестов, описывающих поведение часов с будильником в различных режимах работы. В этих тестах размер входных последовательностей составлял от трех до 12 событий, а размер выходных последовательностей – от одного до 12 выходных воздействий. При применении метода, использующего верификацию, к этим тестам были добавлены одиннадцать *LTL*-формул.

Авторами настоящей работы было проведено 1000 вычислительных экспериментов с использованием каждого из методов. Во всех случаях результатом построения являлся один и тот же конечный автомат, показанный на рис. 3. Отметим, что этот автомат изоморфен автомату, построенному вручную в работе [1].

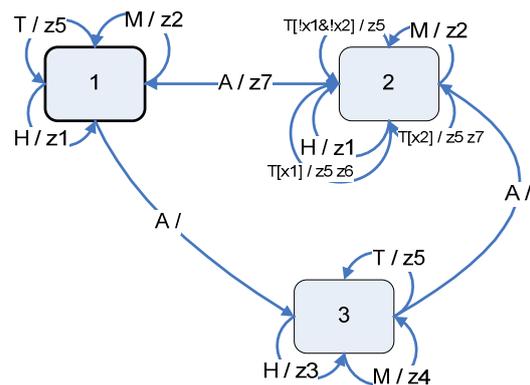


Рис. 3. Автомат управления часами с будильником

На этом рисунке начальным состоянием автомата является состояние с номером «1».

Для каждого из запусков каждого из алгоритмов запоминалось количество вычислений функции приспособленности (оно равно числу просмотренных в процессе работы автоматов) в процессе построения автомата. Для алгоритма, использующего только тесты, минимальное значение этой величины составило 256063, максимальное – 9239523, среднее значение – 1450467.28 (стандартное отклонение – 1106266.586).

При использовании и тестов, и *LTL*-формул минимальное значение этой величины составило 218236, максимальное – 19492104, среднее значение – 2422871.644 (стандартное отклонение – 2312211.574).

Таким образом, добавление верификации замедлило построение автомата. Это можно объяснить тем, что промежуточные особи, проходящие часть тестов, не удовлетворяли *LTL*-формулам, поэтому сложнее было получить «улучшение» популяции.

В то же время, попытка избавиться от контрпримера, найденного верификатором, не всегда дает лучшую особь (особь с большей функцией приспособленности), так как после предлагаемых действий автомат может, как удовлетворять утверждению, так и перестать проходить некоторые тесты.

Для предотвращения такой ситуации планируется учитывать верификацию не за счет устранения плохого пути, а за счет соответствия *LTL*-формуле. Для этого при скрещивании двух особей оставлять неизменной часть автомата, удовлетворяющего формуле, аналогично скрещиванию по тестам. Такую часть автомата можно получить в процессе верификации – когда при обходе в глубину верификатор возвращается в вершину, то на уже просмотренной части автомата *LTL*-формула выполняется. Сохраняя неизменной эту часть автомат при скрещивании можно действительно получить особь, удовлетворяющую большему числу утверждений и тестов.

## 6. Заключение

Разработанное средство показало возможность применения верификации и генетических алгоритмов для генерации модели программы. Оно позволяет автоматически строить модель программы по набору тестов и *LTL*-формул. Однако не имеет значения выбор языка логики, с таким же успехом можно было использовать любой другой язык, позволяющий делать утверждения о модели программы. Язык *LTL* был выбран только в качестве примера, имеется возможность перейти на другой верификатор с иным входным языком.

Был продемонстрирован пример, когда применение одних только тестов приводит к построению «неправильного» конечного автомата. В тоже время, совместное применение тестов и *LTL*-формул позволяет добиться правильного поведения автомата.

## 6. Литература

- [1] Поликарпова Н. И., Шалыто А. А. Автоматное программирование. СПб: Питер, 2009.
- [2] Angeline P. J., Pollack J. Evolutionary Module Acquisition // Proceedings of the Second Annual

Conference on Evolutionary Programming. 1993. <http://www.demon.cs.brandeis.edu/papers/ep93.pdf>

[3] Jefferson D., Collins R., Cooper C., Dyer M., Flowers M., Korf R., Taylor C., Wang A. The Genesys System. 1992.

<http://www.cs.ucla.edu/~dyer/Papers/AlifeTracker/Alife91Jefferson.html>

[4] Chambers L. Practical Handbook of Genetic Algorithms. Complex Coding Systems. Volume III. CRC Press, 1999.

[5] Царев Ф. Н. Метод построения автоматов управления системами со сложным поведением на основе тестов с помощью генетического программирования / Материалы Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии». Саратов: СГУ. 2009, с. 216–219.

[6] Hoffman L. Talking Model-Checking Technology // Communications of the ACM, 2008, V. 51. № 7, pp. 110–112.

[7] Кларк Э., Грамберг О., Пелед Д. Верификация моделей программ: Model Checking. М.: МЦНМО, 2002.

[8] Шалыто А. А. Switch-технология. Алгоритмизация и программирование задач логического управления. СПб: Наука, 1998.

[9] Harel D. et al. StateMate: A Working Environment for the Development of Complex Reactive Systems // IEEE Trans. Software Eng. 1990, № 4, pp. 403–414.

[10] Левенштейн В. И. Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов. Доклады Академии Наук СССР 163.4, с. 845–848.

[11] Разработка технологии верификации управляющих программ со сложным поведением, построенных на основе автоматного подхода. Второй этап. СПбГУ ИТМО, 2007. [http://is.ifmo.ru/verification/\\_2007\\_02\\_report-verification.pdf](http://is.ifmo.ru/verification/_2007_02_report-verification.pdf)

[12] Gerth R., Peled D., Vardi M. Y., Wolper P. Simple On-the-fly Automatic Verification of Linear Temporal Logic / Proc. of the 15th Workshop on Protocol Specification, Testing, and Verification, Warsaw, 1995, pp. 3–18.

[13] Егоров К. В., Шалыто А. А. Методика верификации автоматных программ // Информационно-управляющие системы. СПб: Политехника, 2008, № 5, с. 15–21.

# Задача оптимального управления с управляемыми коэффициентами высокой размерности. Методы последовательного улучшения

Батурина Ольга  
Институт Проблем Управления РАН  
ol.baturina@mail.ru

## Аннотация

*Рассматривается задача оптимального управления, описываемая линейной системой с управляемыми коэффициентами. Для такой задачи описывается глобальный метод последовательного улучшения программы управления. Вводится сингулярное управление, позволяющее существенно облегчить вычислительные трудности, возникающие при решении такого класса задач.*

## 1. Введение

Теория оптимального управления насчитывает уже более 50-ти лет. Возникающие на практике задачи стимулировали развитие как самой теории, так и численных методов решения задач оптимального управления. Бурное развитие этого раздела математики связано с требованиями практической деятельности людей. Многие процессы, имеющие место в технических системах, в экономике, в управлении деятельностью человеческого сообщества, в экологии, в медицине и в ряде других областей, моделируются учеными как задачи оптимального управления. Если говорить о приближенных методах решения задач оптимального управления, то можно выделить следующие направления: методы, основанные на необходимых условиях оптимальности; методы, основанные на достаточных условиях оптимальности В.Ф. Кротова; методы, основанные на принципе расширения; методы, основанные на сведении задачи оптимального управления к задачам математического программирования; методы глобальной оптимизации; мультиметодные технологии.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$I(v) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(T)) \rightarrow \min_{v \in D} \quad (1)$$

$$dx/dt = f(t, x, u); \quad x(0) = x_0;$$

$$x \in R^n; \quad u \in U. \quad (2)$$

где вектор  $x_0$ , вектор-функция  $f(t, x, u)$ , функции  $F(x)$ ,  $f^0(t, x, u)$  и компактное множество  $U$  заданы,  $D$  – множество допустимых процессов  $v = (x(t), u(t))$ .

Будем рассматривать случай, когда функции  $F(x)$ ,  $f^0(t, x, u)$  являются вогнутыми относительно  $x$ , а правые части фазовой системы линейны:  $f(t, x, u) = A + Bu$ .

Выделим из данной задачи подзадачу улучшения. Пусть имеется допустимый неоптимальный процесс  $v_0 = (x_0(t), u_0(t)) \in D$ . Требуется найти процесс  $v = (x(t), u(t)) \in D$ , такой что  $I(v) < I(v_0)$ .

Повторяя эту операцию, получим улучшающую последовательность допустимых процессов  $\{v_s\} \subset D$ , для которой  $I(v_{s+1}) < I(v_s)$ .

## 3. Алгоритм улучшения

Опишем глобальный метод улучшения для данной задачи.

Определим функцию улучшения в линейной форме  $\phi(t, x) = y(t)x$  и составим для нее следующую конструкцию:

$$H(t, y, x, u) = y^T Ax + y^T Bxu - f^0(t, x, u). \quad (3)$$

Сопряженная система для данной задачи будет иметь вид:

$$dy/dt = -(A^T + B^T u_0)y, \quad y(T) = -F_x(x_0(T)). \quad (4)$$

Таким образом, получаем следующий алгоритм улучшения:

1. Зададим начальное управление  $u_0(t)$ , из уравнения процесса и начальных условий (2) определим траекторию  $x_0(t)$ .
2. Решая задачу Коши (4), найдем сопряженную траекторию  $y(t)$ .
3. Новое управление находим из условия  $u_1(t, x) = \operatorname{argmax} H(t, x, u), u \in U$ .
4. Подставляя полученное управление в систему (2), получим соответствующую траекторию  $x_1(t)$ .

Рассмотрим случай, когда  $U = [a, b]$  и  $f^0(t, x, u) \equiv 0$ . Обозначим  $K(t, x) = y(t)^T Bx$ . Имеем решение:

$$u_1(t) = \begin{cases} a, & \text{если } K < 0, \\ b, & \text{если } K > 0, \\ \text{var}, & \text{если } K = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть в момент времени  $t = \tau$   $K(\tau) = 0$ , т.е. значение управления оказывается нефиксированным в этой точке. Доопределим его сингулярным управлением, полученным дифференцированием равенства  $K(t, x(t)) = 0$  при  $t > \tau$ :

$$u_{\text{sing}}(t) = u_0(t) + \frac{y^T (AB - BA)x}{y^T B^2 x}. \quad (6)$$

Теоретически сингулярная дуга улучшенной траектории  $K(t) = 0$  автоматически реализуется как скользящий режим. Однако реализация такого подхода оказывается связана с существенными вычислительными трудностями. Регулярное управление  $u_{\text{sing}}(t)$  снимает эти трудности.

#### 4. Пример

Рассмотрим следующую задачу:

$$I(v) = -x_1^2 \left(\frac{1}{2}\right) - 2x_2^2 \left(\frac{1}{2}\right) - 3x_3^2 \left(\frac{1}{2}\right) - x_4^2 \left(\frac{1}{2}\right) \\ \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = (A + Bu)x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |u| \leq 3,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального управления было взято постоянное управление  $u_0 = 0.3$ . Задача решалась двумя методами - глобальным и градиентным. В таблице представлены результаты расчетов.

Номер итерации	Глобальный метод	Градиентный метод
0	-5.7363	-5.7363
1	-6.2632	-5.9802
2	-7.0209	-6.1917
3	-8.6155	-6.3612
4	-9.2517	-6.4917
5	-9.3634	-6.6005
6	-9.4112	-6.7307
7	-9.5372	-6.9959
8	-9.6509	-7.6729
9	-9.7391	-8.8565
10	-9.7973	-9.6505

#### 5. Заключение

Системы такого вида возникают в прикладных задачах физики. Следует выделить применение упомянутого итерационного метода к проблеме оптимизации управления квантовыми системами с помощью лазерного излучения.

Ранее для решения подобных задач физиками использовался градиентный метод, описанный в [2]. Проведенное сравнение этих двух методов показало, что на первых итерациях глобальный метод позволяет быстрее приблизиться к оптимальному решению.

#### 6. Литература

- [1] V.F. Krotov *Global methods in optimal control theory*. NY.: Marcel Dekker, Inc, 1995. - 382 p.
- [2] В.Ф. Кротов *Об оптимизации управления квантовыми системами*. ДАН, 2008, т. 423, № 3, стр. 316-319.
- [3] О.В. Батурина *Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами. Итеративные методы*. VI Всероссийская школа-семинар молодых ученых «Управление большими системами»: Сборник трудов. - Т1.- Ижевск: ООО Информационно-издательский центр «Бон Анца», 2009. - стр. 65-67.

# Метод разделения движений для синтеза дискретных законов управления динамическими системами<sup>1</sup>

Рассадин Юрий Михайлович

Учреждение Российской академии наук

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

[rassadinj@gmail.com](mailto:rassadinj@gmail.com)

## Аннотация

Получение дискретного представления непрерывных систем связано с рядом трудностей, обусловленных высокой размерностью динамических систем, что затрудняет аналитическое нахождение переходных матриц, особенно в нелинейном случае. В работе предлагается процедура приведения непрерывных управляемых систем к специальному виду, представляющему собой последовательность элементарных блоков (в которых размерности вектора состояний и управлений совпадают), что позволяет в предположении о постоянстве фиктивных управлений каждого блока на интервале квантования разбить задачу поиска переходной матрицы на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности. Предложен подход к декомпозиции задачи синтеза стабилизирующего закона управления. Тот факт, что отдельные блоки являются элементарными, позволяет компенсировать нелинейности и нестационарности модели объекта управления и синтезировать законы обратной связи на модальном уровне. Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере модели асинхронного электропривода.

## Abstract

The representation of continuous systems in the digital form involves a number of problems due to the high dimensionality of dynamical systems which makes it difficult to analytically find the responsible matrices and mostly in the nonlinear case. In the paper the procedure for continuous control systems

transformation to the special form of a sequence of elementary blocks (in which the dimensions of the state vector and controls coincide) is proposed. It allows to divide the problem of searching for the responsible matrices to independently solved lower dimension sub-problems with the assumption of fictitious controls constancy in the each unit in the simple interval. Also an approach to the decomposition of the problem of stabilizing control law synthesis is proposed. The fact that each block is elementary allows eliminating the nonlinearity and nonstationary of the object model and synthesizing the stabilized feedback of closed loop systems in the modal technique. The proposed algorithms are applied to a nonlinear model of an asynchronous motor.

## 1. Введение

В связи с тем, что в настоящее время в системах управления широко используются цифровые регуляторы, важным аспектом реализации законов управления является представление моделей непрерывных объектов в дискретном виде. Как известно, дискретные системы аппроксимируют соответствующие непрерывные системы наилучшим образом при использовании явного решения задачи Коши. В случае систем высокой размерности как для линейных, так и, в особенности, для нелинейных систем, найти фундаментальное решение дифференциального уравнения в явном виде или сложно, или в принципе не представляется возможным.

В данной работе предложены декомпозиционные методы дискретизации непрерывных систем с использованием блочного подхода, позволяющие разделить поиск

<sup>1</sup> Работа была выполнена при частичной поддержке гранта Президента МК-2548.2009.8

фундаментального решения систем высокой размерности на независимые подзадачи меньшей размерности. Применительно к линейным нестационарным системам показано, что при некоторых, не обременительных условиях на гладкость параметров модели, управляемые системы приводятся к блочной форме управляемости (БФУ) [1,2], представляющей собой последовательность элементарных блоков, в которых размерности вектора состояний и фиктивных управлений совпадают. Такая структура преобразованной системы позволяет с точностью, определяемой только шагом квантования, последовательно находить фундаментальные решения отдельных блоков в сильно упрощающем предположении, что фиктивные управления на шаге квантования постоянны.

Тот факт, что БФУ состоит из элементарных блоков, позволяет решить задачу стабилизации для нестационарных систем на модальном уровне за счет компенсации на каждом шаге нестационарных составляющих. Последняя задача еще более упрощается за счет приведения БФУ к наддиагональной блочной форме. Отметим, что если система уже представлена в дискретном виде, то предложенный алгоритм эффективен за счет получения блочной формы. Для стационарных дискретных систем сложности синтеза задачи стабилизации связаны с высокой размерностью, а для нестационарных общих подходов вообще неизвестно, кроме Linear Quadratic Methods.

Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на примере нелинейной модели асинхронного электропривода.

## 2. Блочная форма управляемости

Рассматривается линейная многомерная нестационарная динамическая система, математическая модель которой имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (1)$$

где  $x \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния,  $u \in \mathcal{R}^p$  – вектор управляющих воздействий,  $A, B$  – функциональные матрицы соответствующих размерностей, пара  $(A, B)$  управляемая [3,4].

Предполагается, что элементы матриц системы (1) принадлежат к необходимым классам гладкости по времени, которые определяются исходя из требований к проводимым процедурам.

Допущение 1. Пусть матрицы  $A, B$  системы (1) представимы в виде  $A(t) = A_N + \Delta A(t)$ ,

$$B(t) = B_N + \Delta B(t), \text{ где } A_N, B_N \text{ – номинальные}$$

значения, и справедливо равенство

$$\forall i = \overline{0, n-1} \Rightarrow r[A_N^i B_N] = r[A(t)^i B(t)].$$

Теорема 1. Если допущение 1 выполняется, то система (1) может быть приведена к блочной форме управляемости.

В качестве доказательства приведем процедуру получения БФУ.

Шаг 1. Не ограничивая общности, будем считать, что  $rB_N = p$ .

Выберем  $p$  линейно-независимых строк матрицы  $B_N$ . С помощью перестановки строк представим  $x$  в виде  $col(x_1, x_0)$ , где  $x_0 \in \mathcal{R}^p$  – координаты, соответствующие ЛНЗ строкам матрицы  $B_N$ . После такой перестановки система (1) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{10} \\ A_{01} & A_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_0 \end{pmatrix} u. \quad (2)$$

Таким образом, можно утверждать, что существует аннулирующее преобразование  $L_1(t) = B_1(t)B_0^+(t)$ , где  $B_0^+(t)$  – псевдообратная матрица для  $B_0(t)$ , введенная для однородности изложения. В данном случае  $B_0^+(t) = B_0^{-1}(t)$ . Проведем замену  $\bar{x}_1 = x_1 - L_1(t)x_0$ . Заметим, что на этом шаге нам потребовалась дифференцируемость матрицы  $B_0(t)$ , а, значит, и всей матрицы  $B(t)$  на  $[0, \infty)$ . Система (2) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & B_1 \\ \tilde{A}_{01} & \tilde{A}_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \end{pmatrix} u. \quad (3)$$

Проанализируем первое уравнение системы (3), где в качестве фиктивного управления рассматривается  $x_0$ . Отметим, что ранг матрицы  $\text{rank} B_1 = p_1 \neq 0$  из условий управляемости исходной системы. Если  $p_1 = n - p$ , то преобразование считаем законченным, т.к. система уже записана в требуемой форме. В противном случае (при  $p_1 < n - p$ ) переходим ко второму шагу процедуры.

Шаг 2. На втором шаге рассматривается первое уравнение системы (3), где управление не полное,  $\text{rank} B_1 < n - p$ .

Матрица  $B_1$ , полученная в результате операций дифференцирования, сложения и перемножения над исходными матрицами системы (1), так же, как и исходные матрицы, представима в виде суммы двух слагаемых – номинальной постоянной матрицы и матричного слагаемого, зависящего от времени, причем для  $\tilde{A}_{11}$  и  $B_1$  выполняется допущение 1. Тогда для

рассматриваемого уравнения можно провести аналогичную процедуру выделения блока с полным фиктивным управлением следующим образом.

Выберем  $p_1$  линейно независимых (базисных) строк матрицы  $B_1$ , тогда перестановкой строк расщепим вектор  $\bar{x}_1$  на две группы переменных,  $\tilde{x}_1$ , и  $\bar{x}_2$ , где  $\tilde{x}_1 \in \mathcal{R}^{p_1}$  – переменные, соответствующие базисным строкам  $B_1$ ,  $\bar{x}_2 \in \mathcal{R}^{n-p-p_1}$ , в матрице  $\tilde{A}_{11}$  выделяются соответствующие клеточные матрицы. Тогда первая подсистема системы (3) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22}(t) & A_{21}(t) \\ A_{12}(t) & A_{11}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1(t) \\ \bar{B}_1(t) \end{pmatrix} x_0, \quad (4)$$

где  $\text{rank} \bar{B}_{10} = p_1 = \dim \tilde{x}_1$ . Все строки подматрицы  $\tilde{B}_1$  являются линейными комбинациями базисных строк матрицы  $B_1$ , следовательно, существует аннулирующее  $\tilde{B}_1$  преобразование  $L_2(t) = \tilde{B}_1(t) \bar{B}_1^+(t)$ .

Неособая замена переменных  $\tilde{x}_2 = \bar{x}_2 - L_2(t) \tilde{x}_1$  приведет к виду

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= \hat{A}_{22} \tilde{x}_2 + B_2 \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_1 &= \hat{A}_{12} \tilde{x}_2 + \hat{A}_{11} \tilde{x}_1 + B_1 x_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{A}_{22} &= A_{22} - L_2 A_{12}, \quad \hat{A}_{12} = A_{12}, \quad \hat{A}_{11} = A_{11} + A_{12} L_2 \\ B_2 &= A_{22} L_2 + A_{21} - \dot{L}_2 - L_2 A_{11} - L_2 A_{12} L_2. \end{aligned}$$

Заметим, что требование дифференцируемости на временном луче  $[0, \infty)$  для  $L_2(t)$  приводит к требованию дважды дифференцируемости на  $[0, \infty)$  для матрицы  $B(t)$  и один раз дифференцируемости на  $[0, \infty)$  для матрицы  $A(t)$ . Выразим через блоки новых переменных уравнение для блока  $\tilde{x}_1$ .

Вообще говоря, после проведенной замены изменится также и уравнение для нулевого блока (а для последующих шагов будут изменяться все уравнения блоков с номерами  $\overline{0, n-2}$ , где  $n$  – номер итерации), которое примет вид

$$\dot{x}_0 = \hat{A}_{02} \tilde{x}_2 + \hat{A}_{01} \tilde{x}_1 + A_{00} x_0 + B_0 u,$$

где  $\hat{A}_{02} = \tilde{A}_{02}$ ,  $\hat{A}_{01} = \tilde{A}_{01}(E + L_2)$ .

Если ранг матрицы  $B_2$  равен  $n - p - p_1$ , то преобразование можно считать законченным, так как блок для  $\tilde{x}_2$  будет иметь полное фиктивное управление. В противном случае необходимо итерационным образом продолжить выделение элементарных блоков переменных, а именно провести действия шага 2 над системой

уравнений относительно  $\tilde{x}_2$ , причем в качестве управляющих воздействий будет рассматриваться блок переменных  $\tilde{x}_1$ . Условием остановки итерационной процедуры является равенство ранга матрицы коэффициентов при фиктивном управлении и размерности выделенного блока.

*Шаг r.* Пусть на  $r$ -м шаге выполнилось условие остановки итерационной процедуры  $\dim x_r = \text{rank} B_r$ . Тогда переменные нового пространства состояний будут иметь вид  $\bar{x}^T = (x_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{r-1}, \bar{x}_r)$ . Для удобства восприятия, переобозначим все блоки переменных и матрицы «с волной» или «с чертой», как  $\tilde{\tilde{x}}_i \equiv x_i$ ,  $\tilde{\tilde{A}}_{ij} \equiv A_{ij} \quad \forall i, j$ . Тогда система (1) примет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=i}^r A_{ij}(t) x_j + B_i(t) x_{i-1}, \quad i = \overline{r, 1} \quad (5)$$

$$\dot{x}_0 = \sum_{j=0}^r A_{0j}(t) x_j + B_0(t) u,$$

где для каждого блока выполняется соотношение  $\text{rank} B_i = \dim x_i$ .

Суть блочного метода заключается в последовательном решении элементарных подзадач стабилизации в отдельных блоках (сверху вниз), при последовательном использовании в качестве фиктивных управлений переменных следующего блока. Сформированные локальные связи обеспечиваются на последнем шаге выбором истинного управления.

Покажем, что представление системы (1) в виде БФУ (5) существенно упрощает проблему получения дискретного представления системы (1), для которой, в случае большой размерности, возникают известные вычислительные трудности в получении аналитического решения [5].

### 3. Наддиагональная форма

**Теорема 2.** Система (5) с помощью неособой замены переменных может быть приведена к наддиагональному виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i(t) x_i + B_i(t) x_{i-1}, \quad i = \overline{r, 1}; \\ \dot{x}_0 &= A_0(t) x_0 + B_0(t) u, \end{aligned} \quad (6)$$

где для каждого блока выполняется соотношение  $\text{rank} B_i = \dim x_i$ .

И снова, как и в п. 2.1, процедура нахождения неособой замены переменных декомпозируется на пошаговые независимые подзадачи меньшей размерности.

*Шаг 1.* Уравнение для блока с индексом  $r$  уже записано в нужном нам виде. Следовательно,

не требуется проводить замен для  $r$  и  $(r-1)$  блоков.

*Шаг 2.* В уравнении для  $(r-1)$  блока системы (5) присутствует зависимость от  $r$  блока. Назначим переменные  $(r-2)$  блока таким образом, чтобы они скомпенсировали это слагаемое. Пусть  $x_{r-2} = -P_{r-2,r}x_r$ , тогда выбором матрицы  $P_{r-2,r}$  можно достичь требуемого результата. Для этого  $P_{r-2,r}$  должна иметь вид  $B_{r-1}^+ A_{r-1,r}$ , где  $B_{r-1}^+$  – матрица, псевдообратная для  $B_{r-1}$ . Для того чтобы привести переменные  $(r-2)$  блока к требуемому виду, устремим к нулю невязку выбранной замены  $\bar{x}_{r-2} = x_{r-2} + P_{r-2,r}x_r$ . Тогда эта невязка войдет в новую систему как новые переменные для  $(r-2)$  блока, а уравнение для него примет вид  $\dot{\bar{x}}_{r-2} = \dot{x}_{r-2} + P_{r-2,r}\dot{x}_r + \dot{P}_{r-2,r}x_r$ . Так как матрица  $P_{r-2,r}$  входит в это уравнение явно и под знаком производной по времени, очевидно, что  $P_{r-2,r}$  должна быть один раз дифференцируема на рассматриваемом луче  $[0, \infty)$ .

*Шаг 3.* Последующие замены проводятся аналогичным образом до нулевого блока, содержащего реальное управление, выбором которого достигается требуемый вид замкнутой системы. Представим управление в виде суммы двух слагаемых, одно из которых будет ответственно за компенсацию  $r$ ,  $(r-1), \dots, 2, 1$  блоков, а другое будет использовано для вывода системы на требуемое состояние:  $u = u_1 + u_2$ ,

причем  $B_0 u_1 = -\sum_{j=0}^{r-1} \bar{A}_{0,r-j} \bar{x}_{r-j}$ , где  $\bar{A}_{0,r-j} \bar{x}_{r-j}$  – слагаемые, полученные в результате каскада компенсирующих замен и входящие в нулевой блок. Переобозначим для удобства  $\bar{A}_{ii} := A_i$ .

#### 4. Дискретное представление

Применительно к системе (6), процесс получения дискретного представления разбивается на независимо решаемые задачи для каждого блока следующего вида

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i x_{i-1}, \quad x_i(0) = x_{i0},$$

$$x_i(t_{k+1}) = e^{A_i T_k} x_i(t_k) + \left( \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_i(T_k - \tau)} B_i(\tau) d\tau \right) x_{i-1}(t_k)$$

где  $T_k = t_{k+1} - t_k$  –  $k$  интервал квантования,  $i \in \overline{r, 0}$ ,  $x_{-1} = u$ , в результате чего получается дискретное представление системы (6)

$$x_i(k+1) = A_i(k)x_i(k) + B_i(k)x_{i-1}(k), \quad i = \overline{r, 1}; \quad (7)$$

$$x_0(k+1) = A_0(k)x_0(k) + B_0(k)u(k),$$

где  $A_i(k)$  – переходная матрица  $i$ -го блока, а

$$B_i(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_i(T_k - \tau)} B_i(\tau) d\tau. \quad \text{Для упрощения}$$

восприятия и записи оставлены те же обозначения изменившихся матриц  $A_i(k)$ ,  $B_i(k)$  и векторов.

В следующем разделе приводится пошаговая процедура синтеза задачи стабилизации, применительно к системе (7). Отметим, что в настоящее время для дискретных нестационарных систем процедуры синтеза стабилизирующих обратных связей недостаточно формализованы. Ниже показано, что, используя блочный подход, удастся решить задачу стабилизации на модальном уровне.

#### 5. Синтез обратной связи

Основываясь на вышеизложенных рассуждениях, можно сформулировать основной результат данной работы.

**Теорема 3.** Пусть дана непрерывная управляемая система (1). Тогда, с учетом допущения 1 и при достаточной гладкости функциональных матриц, система (1) представима в виде (7), а система (7) стабилизируема за конечное число шагов.

В качестве доказательства, приведем конструктивную процедуру блочного синтеза, применительно к системе (7) сверху вниз, начиная с  $r$ -го блока.

*Шаг 1.* Рассмотрим уравнение для  $r$ -го блока. Выберем фиктивное управление в  $r$ -м блоке в виде  $x_{r-1}(k) = -B_r^+(k)A_r(k)x_r(k)$ . Тогда после замыкания,  $r$ -й блок примет вид  $x_r(k+1) = 0 + B_r(k)\bar{x}_{r-1}(k)$ , где переменная  $\bar{x}_{r-1}(k)$  имеет смысл невязки

$$\bar{x}_{r-1}(k) = x_{r-1}(k) + B_r^+(k)A_r(k)x_r(k).$$

*Шаг 2.* Для обеспечения последнего равенства из шага 1 следует решить задачу стабилизации уравнения

$$\begin{aligned} \bar{x}_{r-1}(k+1) &= A_{r-1}(k)x_{r-1}(k) + B_{r-1}(k)x_{r-2}(k) + \\ &+ B_r^+(k+1)A_r(k+1)x_r(k+1). \end{aligned}$$

Аналогично первому шагу, рассматривая  $x_{r-2}(k)$  в качестве фиктивного управления, выберем его в виде

$$\begin{aligned} x_{r-2}(k) &= B_{r-1}^+(k)[\bar{x}_{r-1}(k+1) - A_{r-1}(k)x_{r-1}(k) - \\ &- B_r^+(k+1)A_r(k+1)x_r(k+1)]. \end{aligned}$$

Тогда замкнутая система для  $(r-1)$ -го блока примет вид

$$\bar{x}_{r-1}(k+1) = 0 + B_{r-1}(k)\bar{x}_{r-2}(k),$$

где

$$\bar{x}_{r-2}(k) = x_{r-2}(k) - B_{r-1}^+(k)[\bar{x}_{r-1}(k+1) - A_{r-1}(k)x_{r-1}(k) - B_r^+(k+1)A_r(k+1)x_r(k+1)]$$

имеет смысл невязки. В продолжение намеченной процедуры, на последнем шаге аналогично выбирается истинное управление  $u$ , в результате чего замкнутая система принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k+1) &= B_i(k)\bar{x}_{i-1}(k), \quad i = \overline{1, r}; \\ \bar{x}_0(k+1) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Последовательность стабилизации может быть выражена цепочкой соотношений  $\bar{x}_0(0) = 0 \Rightarrow \bar{x}_1(1) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \bar{x}_r(r) = 0$ . Как видим, система (8) стабилизируется снизу вверх за  $r$  шагов.

## 6. Заключение

В данной работе решена недостаточно изученная в теории управления задача представления непрерывных нестационарных и нелинейных моделей объектов высокой размерности в дискретной форме. Основной вопрос поиска фундаментальных решений дифференциальных уравнений предлагается решать на основе метода разделения движений и представления исходной непрерывной системы в модифицируемой блочной форме управляемости, что позволяет осуществить декомпозицию поиска фундаментального решения на независимые подзадачи меньшей размерности. Предположения о постоянстве входных воздействий в каждом блоке системы приводят к погрешности вычислений порядка шагу дискретизации по времени. Тот факт, что каждый блок полученной блочной формы является элементарным, позволяет в процессе пошагового синтеза задачи стабилизации компенсировать нестационарные и

нелинейные составляющие модели объекта управления и осуществить конечношаговую сходимость в дискретной модели.

Не смотря на то, что в работе рассматривались линейные системы, предложенные алгоритмы в ряде случаев могут быть применены и к нелинейным моделям, в частности, если они уже представлены в блочной форме управляемости. В качестве примера приведены дискретные алгоритмы синтеза в задаче слежения по скорости асинхронного электропривода [6], описываемого нелинейной системой уравнений шестого порядка.

## 7. Литература

- [1] В.А. Уткин «Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями», *Автоматика и Телемеханика*, 2001, № 11, С. 73-94.
- [2] В.А. Уткин «Метод разделения движений в задачах управления асинхронным приводом», *Автоматика и Телемеханика*, 1993, № 12, С. 53-65.
- [3] Андреев Ю.Н. *Управление конечномерными линейными объектами*. – М.: Издательство «Наука», 1976.
- [4] Уонем У.М. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход*. – М.: Наука, 1980.
- [5] Б.Куо *Теория и проектирование цифровых систем управления*. – М.: Машиностроение, 1986.
- [6] Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. *Теория автоматизированного электропривода*. – М.: Энергия, 1979

## Модель адаптивного поведения агентов в мультиагентной системе управления экологической безопасностью

Дорониная Е.Г.  
katerina\_komova@mail.ru

### Аннотация

*Для решения задач экологической безопасности предлагается использовать систему, основанную на технологии мультиагентных систем. В частности, в статье разработаны модели поведения агентов мультиагентной системы управления экологической безопасностью, представлен метод обучения агентов на основе нечеткой нейронной сети и «жадного» механизма выбора стратегии, который позволяет сократить пространство состояний и действий агента.*

Агентно-ориентированные модели имеют большие перспективы исследований в социально-экономических системах [1]. Мультиагентная система (МАС) – это развивающаяся информационная технология, основанная на понятии распределенного интеллекта как объединение отдельных интеллектуальных агентов, обладающих своими базами знаний и средствами рассуждений. Для решения задачи управления экологической безопасностью в мультиагентной системе были выделены агент – ресурса (для оценки состояния ресурса и идентификации источников выбросов), агент - предприятия (представляет интересы предприятия) и агент – супервизор (оценивает и анализирует ситуацию в целом, разрабатывает рекомендации и подходы к оптимальному управлению, ведет переговоры с агентом - предприятием).

Одним из актуальных направлений работ в рамках мультиагентного моделирования является исследование взаимодействия агентов [2]. Наиболее сложным взаимодействием является коммуникация между персонифицированными агентами, которыми являются агент - предприятия и агент – супервизор.

Интересы предприятия и административного центра вряд ли можно назвать совпадающими, однако степень достижения своей цели каждым из агентов зависит от его собственных решений, так и от действий всех остальных участников. Эколого-экономическая система может быть

описана множеством состояний  $s \in S$ , в которых могут находиться агенты с вероятностью  $P(S)$ . Каждый агент имеет набор возможных действий -  $A_i$ . В какой-то момент времени  $t \in [0; T]$  агент находится в состоянии  $s \in S$  и предпринимает действие  $a_i \in A$  и получает некоторое вознаграждение. При этом агент - супервизор имеет право первого хода и может ограничивать возможности агента – предприятия (так называемые модели конфликтно управляемых систем с иерархической структурой).

Выбор того или иного действия в момент времени  $t \in [0; T]$  осуществляется агентом – предприятием, исходя из его экономических интересов, как правило, стремящегося к максимизации прибыли, полученной в результате хозяйственной деятельности, за вычетом затрат, связанных с очисткой выбросов на предприятиях, налога и штрафными санкциями за сброс загрязняющих веществ. При этом предлагается ввести коэффициент  $M$ , увеличивающий значения штрафных санкций относительно затрат предприятия на природоохранные мероприятия, что позволяет предупредить чрезмерные выбросы:

$$f_i = \int_0^T (D_i(y_i, t) - Z_i(k_i, t) - N_i(v_i, t) - M_i \cdot S_i(v_i, t)) dt \rightarrow \max_{v_i} \quad (1)$$

где  $t$  – временная координата;  $T$  – момент времени, до которого ведется рассмотрение;  $D_i(y_i, t)$  – прибыль предприятия от реализации продукции объемом  $y$  в момент времени  $t$ ;  $Z_i(k_i, t)$  – затраты предприятия на очистку отходящих газов, на вывоз и утилизацию твердых отходов и на очистку сточных вод – капитальные и эксплуатационные затраты. Данные затраты зависят от количества загрязняющих веществ, удаляемых на предприятии –  $k_i$  в момент времени  $t$ .  $N(v_i, t)$  – затраты предприятия (налоги) за сбросы загрязняющих веществ в пределах нормы.  $v_i$  – количество загрязняющих веществ сбрасываемых в ОС без очистки.  $S(v_i, t)$  – функция затрат за негативное воздействие на

окружающую среду (штрафы) в момент времени  $t$  за сверхнормативный или сверхлимитный сброс загрязняющих веществ.  $M_i$  – цена загрязнения для предприятия во много раз превышающая затраты на природоохранные мероприятия –  $Z_i(k_i, t)$ .

Задача (1) решается при ограничениях:  $v_i \leq q_i$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

где величина  $q_i$  – максимально допустимое значение выбросов загрязняющих веществ на  $i$ -ом предприятии.

Агент – супервизор представляет органы власти, деятельность которых заключается в поддержании требуемого уровня безопасности с помощью установленных законов, норм и систем штрафов. При этом агент – супервизор стремится минимизировать ущерб от деятельности предприятий региона, который зависит от текущего загрязнения окружающей среды и суммы налоговых выплат и штрафов предприятий региона:

$$\Phi = \int_0^T \sum_{i=1}^n (W_i(v_i, t) - N_i(v_i, t) - S_i(v_i, t)) dt \rightarrow \min_q \quad (2)$$

$$q_i \geq \omega_i$$

где  $\omega_i$  – минимальная величина допустимых выбросов, определяемая технологическими параметрами  $i$ -ого предприятия,  $W_i(v_i, t)$  – ущерб от загрязнения окружающей среды, связанный с деятельностью  $i$ -ого предприятия региона ( $i=1...n$ ) в момент времени  $t$ .

Параметры экономических механизмов настраиваются агентом – супервизором в соответствии с наблюдаемым уровнем безопасности каждого предприятия и региона.

Интересы предприятия и административного центра вряд ли можно назвать совпадающими, однако степень достижения своей цели каждым из агентов зависит от его собственных решений, так и от действий всех остальных участников.

Достижение устойчивого развития эколого-экономической системы можно осуществлять различными методами иерархического управления. В существующих условиях, как правило, управление административного центра носит административно-законодательный характер с применением экономических механизмов воздействия, то есть центр запрещает предприятию использовать стратегии, не удовлетворяющие законодательно оговоренным требованиям, и назначает платежи за пользование природными ресурсами и экономические санкции за экологические правонарушения.

Функционирование системы управления будем рассматривать во времени, точнее на отрезке  $[0, T]$ , при этом предполагаем, что

параметр  $t$  представляет дискретное множество значений  $0=t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ . Будем считать, что все параметры, входящие в систему, изменяются во времени:  $v_i(t)$ ,  $k_i(t)$ ,  $y_i(t)$ . Административный центр и предприятия заинтересованы в максимизации за все время функционирования системы своих выигрышей, который складывается из выигрышей агентов в момент  $t_k$ , где  $k=1, \dots, m$ .

Статическую игру, рассматриваемую в момент  $t_k$ , можно представить следующим образом:

1) агент-супервизор, стремясь уменьшить нагрузку на окружающую среду, воздействует (выбирает ход  $x_S \in X_S$ ) на область допустимых управлений агента-предприятия за счет изменения величины ограничений на сброс загрязняющих веществ –  $q_i$  и цену загрязнения  $M_i$  для  $i$ -ого предприятия ( $i = 1...n$ ) – выбирает стратегию  $R_S(t_k)$ . Т.е. задача агента-супервизора состоит в поиске таких векторов  $q=(q_1, \dots, q_n)$  и/или  $M=(M_1, \dots, M_n)$ , которые обеспечат перевод состояния окружающей среды в новое более приемлемое состояние и минимизирует ущерб от загрязнения ОС.

2) агент – предприятия, делая свой ход –  $x_1 \in X_1$ , определяет свою оптимальную стратегию из множества:

$$R_i(R_S, t_k) = \{x_1 \in X_1: f(x_S, x_1) = \sup_{y_1} f(x_S, y_1)\},$$

$$y_1 \in X_1$$

в зависимости от управлений центра и максимизации целевой функции (1).

Пусть оптимальные управления являются программными, т.е. являются функциями времени.

Пусть  $q^*(t_k)$ ,  $M^*(t_k)$  – решение задачи (3)

$$\min_{q_i^*} \left[ \sum_{i=1}^n (W_i(q_i^*(t_k), t_k) - N_i(q_i^*(t_k), t_k) - \right. \quad (3)$$

$$\left. M_i^*(t_k) \cdot S_i(q_i^*(t_k), t_k) \right], q_i \geq \omega_i$$

$v_i^*(q, t_k)$  – решение системы (4)

$$\max_{v_i^*} \left[ (D_i(y_i(t_k), t_k) - Z_i(k_i(t_k), t_k) - N_i(v_i^*(t_k), t_k) - \right. \quad (4)$$

$$\left. M_i \cdot S_i(v_i^*(t_k), t_k) \right], v_i \leq q_i^*$$

Пусть  $q^*(t_k)$ ,  $M^*(t_k)$ ,  $v_1^*(q, t_k)$ , ...,  $v_n^*(q, t_k)$  – оптимальные в смысле Нэша стратегии игроков в момент времени  $t_k$ .

Действительно, для всех предприятий  $i = 1...n$

$$(D_i(y_i(t_k), t_k) - Z_i(k_i, t_k) - N_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k) -$$

$$M_i \cdot S_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k)) \geq (D_i(y_i(t_k), t_k) - Z_i(k_i, t_k) -$$

$$N_i(v_i(q_i^*, t_k), t_k) - M_i \cdot S_i(v_i(q_i^*, t_k), t_k))$$

Для агента – супервизора:

в случае фиксированного значения цены загрязнения  $M_i$ :

$$\sum_{i=1}^n (-W_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k) + N_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k) + M_i \cdot S_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k)) \geq$$

$$\sum_{i=1}^n (-W_i(v_i^*(q_i, t_k), t_k) + N_i(v_i^*(q_i, t_k), t_k) + M_i \cdot S_i(v_i^*(q_i, t_k), t_k))$$

в случае фиксированного значения величины ограничений на сброс загрязняющих веществ -  $q_i^*$ :

$$\sum_{i=1}^n (-W_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k) + N_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k) + M_i^* \cdot S_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k)) \geq$$

$$\sum_{i=1}^n (-W_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k) + N_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k) + M_i \cdot S_i(v_i^*(q_i^*, t_k), t_k))$$

3) тогда решение примет вид:  $\{q_i^*(t_k), M_i^*(t_k), v_i^*(q_i^*, t_k)\}_{i=1}^n$

Состояние равновесия по Нэшу в дифференциальной игре состоит в использовании в каждый момент  $t_k$  игроками стратегий, образующих ситуацию равновесия по Нэшу в статических играх  $k=1, \dots, m$ .

Выигрыши игроков в дифференциальной игре равны:

выигрыш агента – супервизора:

$$\Phi = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n (W_i(v_i(t_k), t_k) - M_i \cdot S_i(v_i(t_k), t_k)) \quad (5)$$

выигрыш агента – предприятия:

$$f = \sum_{k=1}^m (D_i(y_i(t_k), t_k) - Z_i(k_i(t_k), t_k) - M_i \cdot S_i(v_i(t_k), t_k)) \quad (6)$$

Целью агента - супервизора является максимизация собственного выигрыша в игре. Максимальное значение суммарного выигрыша агента зависит от “скрытых” переменных – решений других игроков. Для решения данных задач агент - супервизор должен обучаться, то есть результаты восприятия должны использоваться не только для осуществления действий, но и для повышения способности агента действовать в будущем. Обучение состоит в том, чтобы обеспечить использование наблюдаемых вознаграждений для определения в процессе обучения оптимальной (или почти

оптимальной) стратегии для данной среды. Обучение происходит по мере того, как агент наблюдает за своим взаимодействием с миром и собственными процессами принятия решений. Задача обучения с подкреплением является наиболее общей из всех категорий.

Задача обучения с подкреплением является наиболее общей и распространенной. Однако, когда ситуации и действия задаются векторами, то итеративное формирование матрицы  $Q(s_k, a_j)$  невозможно. Один из способов справиться с этим состоит в использовании средств функциональной аппроксимации (например, с помощью искусственных нейронных сетей), а обучение проводить путем итеративной настройки параметров. Функциональную аппроксимацию  $Q(S(t), a(t))$  предлагается проводить при помощи нечеткой нейронной сети (ННС) Такаги-Сугено 0-го порядка.

Алгоритм работы нейронечеткого Q-обучения (рис. 1) в течение одного шага времени может быть получен следующим образом. Текущее время  $t$ , агент уже выполнил действие  $U_{t-1}(S_{t-1})$  в предыдущий раз шаг  $t-1$ , и получил награду  $R_t$ :

1. Фазификация нового входного состояния  $S_t$ .
2. Вычисление  $\alpha_{R_i}(S_t)$  истинного значения правила  $R_i$  при входной переменной  $S_t$ , посредством последовательного алгебраического умножения (оператор Т-нормы).
3. Оценка оптимального Q-значения текущего состояния  $S_t$ , основанного на изученной Q-функции до настоящего времени
4. Вычисление TD-ошибки  $\tilde{e}_t$ .
5. Обновление значений весовых коэффициентов ННС  $w_t^i(U_t^i)$  и весовых коэффициентов действий  $w_t^i(a)$ .
6. Обновление величины  $\beta_t^i$  – скорость обучения для  $i$ -ого правила.
7. Выбор действия  $U_t(S_t)$  согласно  $\epsilon$  - «жадной» стратегии
8. Вычисление Q-значения текущей пары состояние – действие, основанной на новой Q - функции после настройки значений весовых коэффициентов -  $Q(S_t, U_t(S_t))$ .

Использование нейронечеткого аппарата в Q-обучении позволит провести:

- обобщение по вводу и выводу (т.к. среда функционирования агента характеризуется большим или непрерывным пространством состояний и действий);
- сокращение размерности;

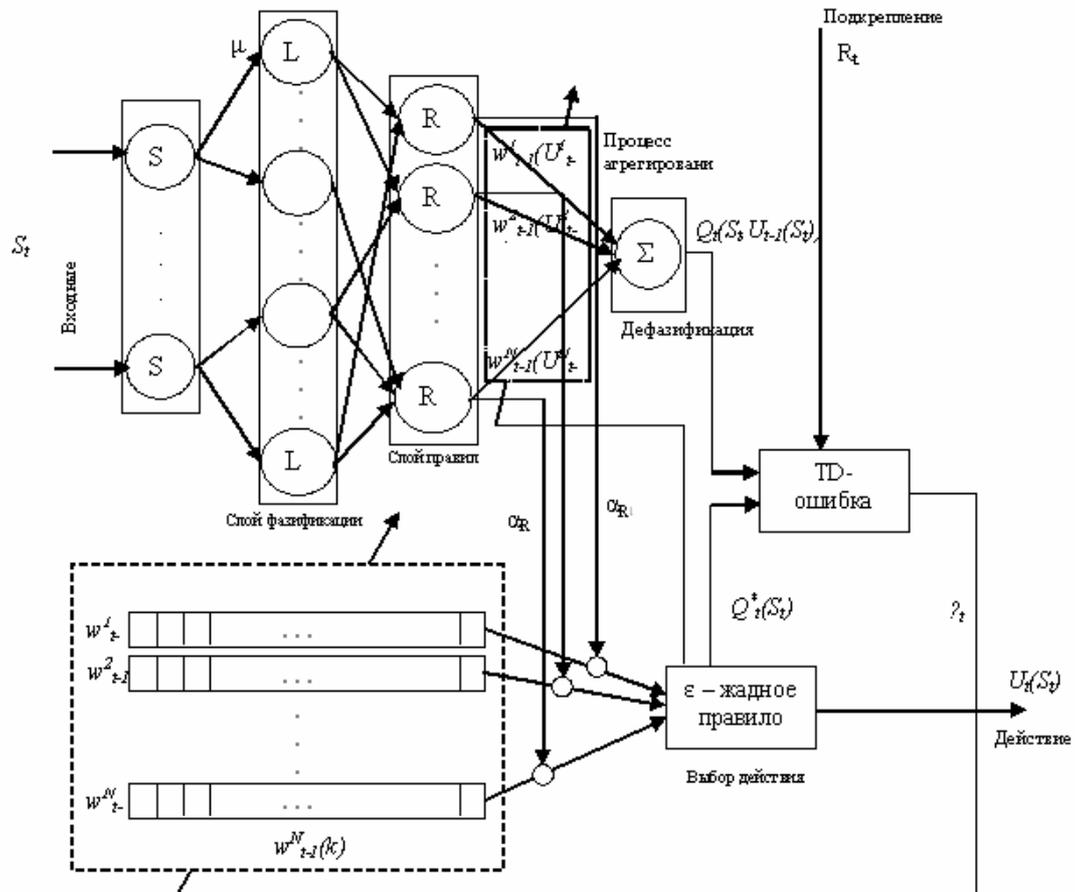


Рис. 1. Структура нейронечеткого Q-обучения

• ускорение процесса обучения (т.к. Q-обучение медленно, то есть агент при Q-обучении нуждается в большем количестве испытаний, чтобы приблизиться к желательному поведению).

[2] Тарасов В.Б. *От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: Философия, психология, информатика*. М.: Эдиториал УРСС, 2002. - 352с.

[1] Макаров В.Л. *Искусственные общества* // *Искусственные общества*, 2006. Т.1, № 1. С. 10- 24.

## Fluidics in control of flight vehicles

Pavel V. Kovrygin

*Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences,  
e-mail: [pavel-kovrygin@ya.ru](mailto:pavel-kovrygin@ya.ru)*

### Abstract

*Evolution of variation characteristic of fluidic elements was analyzed. There was given technical information of reliability control fluidic devices based on long field experience:*

- *In control system of parameters aviation powerplant (gas turbine engine) in such environment as high and low temperatures, pressures and vibrations;*
- *In flight control system in such environment as perturbation action electromagnetic or nuclear radiation.*

*New organization method of combined flight control system created on automatic elements of different physical nature is proposed. In this control system the redundant one was realized wholly on fluidics.*

### 1. Introduction

The control systems (CS) of flight vehicles (FV) have to maintain operability in the real conditions including electromagnetic fields and radiation, lightning discharges, and so on. Reliability of the FV CS is increased if the control hardware is based on diverse sets of elements.

A special place among the automation facilities is occupied by the fluidics. Being a natural continuation of the traditional pneumatics, fluidics improved its speed by the order of two, reduced the outer dimensions of the control facilities, and expanded the area of their application mostly owing to higher reliability of operation in the extreme conditions. These qualities are due to the execution of the functional tasks of control on the flows of fluid media such as gases or liquids without using the moving mechanical parts and to the possibility of using the printed-circuit board technology to produce the components such as the primary functional elements, communication channels, resistances, capacitors, and so on.

Virtually all electronic elements performing combinational (logic) or multistep (flip-flops, shift

registers, and so on) operations have fluidic counterparts.

Fluidics was very popular in the early 1960's. It was believed that one of its main tasks is the design of slow but reliable computers. This enthusiasm (or delusion from the today standpoint) was characteristic of many experts. A computer replicating the structure of a large electronic computer was constructed in the USA [1]. Similar studies were also carried out in the USSR [2, 3]. Later on the designers and users for various reasons experience disappointment caused by a reduction of the application areas of fluidics. In our opinion, this was due to the regard for the general laws of operation of systems with many primary fluidic elements and developed interaction chains where faults occurred sometimes.

Leaving aside the "romanticism" of the designers of these days who believed in the possibility of replacing electronics to a large extent, it is possible to specify the following points:

- fluidics can operate in severe environments characterized by high and low temperatures and pressures, vibration, shocks, electromagnetic noise, external radiation, and directed radiations of energy of diverse electrical nature;
- the functional fluidic elements can be manufactured by printing, the devices can be integrated;
- fluidics restores operability after possible overloads in supply and environmental pressures;
- the fluidic systems can be manufactured as a rule from uniform materials such as plastics, glass, metals, and so on, which makes them available for a long time owing to the lack of chemical corrosion, ageing, and deterioration of the physical properties of the components.

The practice of designing the fluidic systems is oriented to their realization in the form of programmable chains, which rules out the software errors.

The fluidic elements and systems feature a number of advantages making them extremely

recommendable for use in the FV CS's. The list of already mentioned advantages of fluidics may be augmented by such properties as the lack of electromechanical and mechanical noise for other on-board equipment and the possibility of using the compressed air from the FV power installations such as the compressor of the gas-turbine engines (GTE) acquiring the information about the control parameters in the form of air pressures and flows. At the same time, it deserves noting that the fluidic elements have a much lower speed as compared with their electronic counterparts. Therefore, the need arises, on the one hand, to explore ways to increase speeds of the fluidic devices up to some feasible limit and, on the other hand, to study the possibility of designing devices executing the tasks of control in the rigid real-time scale.

## 2. Fluidic elements, modules, and aggregates

The functional characteristics of the primary fluidic elements are most important for high performance of the fluidic control devices. An intensive experimental study of various fluidic elements enables us to select the basic printed primary fluidic elements (profiles) for construction of more sophisticated fluidic devices. The following requirements were satisfied at that. For the active (powered) fluidic elements performing logical operations, the boundaries between the discrete states «0» and «1» were moved more apart by increasing the static stability of «0» and «1» with the use of additional internal (aerodynamic) and external (channel) negative feedbacks with the passage to the positive feedback at the instants of switching from «0» to «1» and *vice versa* [4]. As for the passive fluidic elements (without pressure supply), only the internal aerodynamic feedbacks were used. At that, the aerodynamic noise to the other fluidic elements was reduced, and for the continuous-action fluidic elements the output noise components were reduced [5].

Modules executing the standard OR, NOR, AND, NAND, FLIP-FLOP and other operations were constructed of the primary fluidic elements [6]. On the standard board, the logic functions are realized, at that, with pressure-normalized and flow-normalized inputs and outputs. Combination of active and passive elements within a module improves their mutual modes of operation and in fact minimizes the aerodynamic input and output noise, which enables one to interconnect the modules into more complicated circuits without mutual updating of their adjustments. As applied to the FV control, such molded-plastic modules are intended for the standby aircraft CS's.

AIF [7] was developed for control of the aviation GTE's. In it, the fluidic elements were cut out from the stainless metallic plates in the form of the through profiles on the programmed electro-erosion machines and then assembled into aggregates which executed the desired algorithms of control of the engine individual parameters. The AIF was intended for designing high-reliability CS's powered by the on-board air from the GTE compressor at the temperature of 600°C. This was made possible owing to the wide functional nomenclature of the fluidic elements including the discrete and continuous elements and the complex of constructive and technological techniques enabling the integrated execution of the aggregated units and devices. At that, each detail included different inseparable elements integrated into a strong monolithic unit of a particular functional purpose which is stable to shocks, vibration, and oscillations of temperature and pressure. Another distinction of the AIF is its modularity, that is, the possibility of using the same blocks to design other control devices.

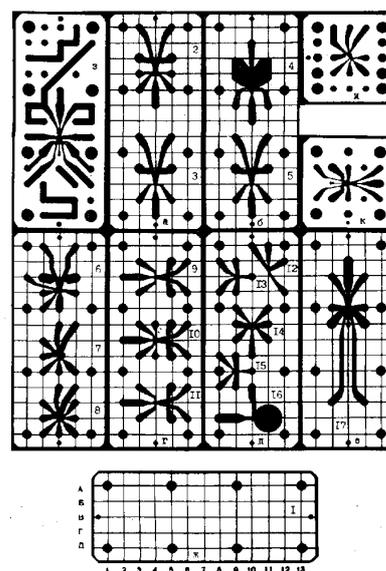


Fig. 1

Standard 96 x 40 or 40 x 40 mm plates (Fig. 1) of thickness 0.6, 0.8, or 1.0 were used to manufacture the fluidic and communication boards, whereas the spacers were made of 0.5 mm-thick plates. Breadboarding of the individual circuits makes use of the boards with the required set of different elements that are assembled into a packet with spacers clamped between them. The width of the supply channels of the active fluidic elements varied from 0.4 to 0.8 mm depending on their purpose. The modular coordinate grid with 3.5 x 3.5 mm cells simplifies the interlayer conjugations of the element boards and allows one to assemble promptly any circuit by means of the breadboarding connecting

boards or plastic tubes and carry out the necessary testing. In the course of circuit refinement, individual functional units consisting of several plates connected into packet are designed and used in turn as blocks for breadboarding and refinement of more complicated systems.

The designed and refined units are individual aggregates having their installation places on the engine.

The fluidic aggregates operate under unstable supply pressure (of 0.5 kPa and higher) and variable environmental pressure.

The AIF has a library of programs developed for automatic cutting of more than twenty primary discrete and analog fluidic elements, as well as various configurations of channels with branchings and turns. Wide selection of the fluidic elements enables one to construct control devices with a minimal number of elements, which is advantageous in terms of flow of the working medium (air), mass, and size of the aggregated devices. Manufacture of the designed element board carrying the fluidic elements and communication channels comes to interfacing the corresponding programs from the library of programs of elements. At integral design of the fluidic devices, one must check the calculations of assemblies because the characteristics of communications cut out on the plate need not coincide with the characteristics of pipes that were used for communication at breadboarding. This is especially true for the aggregates with pulse and frequency signals.

Devices for acquisition of information about the control parameters such as the angular velocity fluidic sensors (AVFS), sensors of pressure ratio, revolutions per minute, flows, temperature, and so on are essential for the fluidic CS's. The purpose of AVFS is to generate the feedback signal for control of the FV spatial position. The AVFS was designed for the backup flight control system [8].

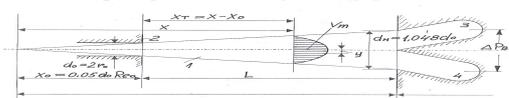


Fig. 2

Figure 2 depicts the diagram of the sensitive elements. Upon leaving the supply nozzle 2, the laminar air jet 1 propagates in the inertial space and comes to two differential reception channels 3 and 4. In the case of no angular velocity, jet 1 is not shifted about the reception channels 3 and 4, and the difference of static pressures  $\Delta p$  in channels 3 and 4 is zero. In the presence of the angular velocity, the free jet is shifted about the axis of pressure receivers. The shift is proportional to the angular velocity and is measured by the difference of pressures  $\Delta p$  in channels 3 and 4.

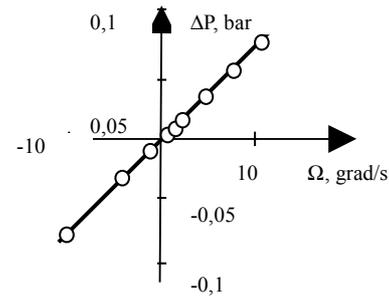


Fig. 3

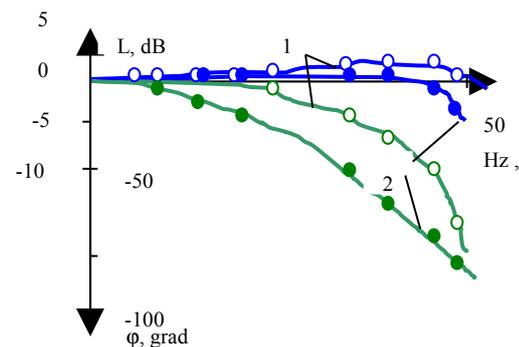


Fig. 4

Figure 3 shows the static characteristic, and Fig. 4, the amplitude-phase-frequency characteristic (APFC) with jet flight length  $L = 12$  mm and supply nozzle 2 width 0.8 mm. The angular velocity is measured within the range of 0...80°/sec. Linearity of the static characteristic of the AVFS with ten-stage fluidic amplifier with gain  $10^5$  on the whole is at least 1%, the phase shift is  $10^\circ$  at the frequency 4 Hz and load in the form of a flowless chamber. At connection of a load in the form of a long pipeline ( $d = 2$  mm,  $l = 15$  m), the phase characteristics worsen appreciably. The time constant in angular velocity of the entire fluidic channel at that exceeds 100 ms. Any control system needs a storage or generator of the reference parameter such as either the level of signal intensity (pressure, for instance) or the relative distribution of the levels in space (digital code) or time (frequency, period, phase, pulse shape). For the FV operating under different supply and environment pressures, it is difficult to have a constant reference pressure. In this case, the constant (reference) frequency proves to be the most useful parameter. The AIF system includes a reference frequency generator (RFG) with fluidic excitation system retaining its operability under variations of the supply pressure, temperature, and environment pressure and under dynamic overloads. Examination of different schemes and designs of the fluidic RFG's demonstrated that the fluidic mechanical oscillation

generator with the pulse scheme of excitation of the balance resonator is the best choice [9].

The pulse scheme of excitation enables one to limit the supply of excessive power to the mechanical generator and thereby reduce the impact of pressure variations on the balance oscillation swing and, consequently, on the frequency of its natural oscillations. The coordinating communications lineup the exciting pulse and the peak of the balance oscillatory velocity. The balance wheel has the form of a planar disk connected to the stationary axis by flexible spokes. At its periphery there are shutters with openings whose edges at oscillations of the balance modulate a flow coming to the input of the excitation circuit. The force pulses from its output are directed by the nozzles to the planar flexible spokes to push the balance at the passage of the neutral position. The RFG is excited by the supply pressure of 20 KPa. Figure 5 shows the frequency  $f$  vs. the supply pressure. The error in frequency is 0.12% within the dynamic range of supply pressure variation 1:10.

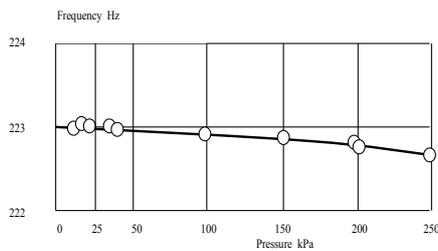


Fig.5

### 3. Fluidic FV CS

The existing maneuverable aircraft use configurations with aerodynamic (static) instability at the subsonic flight modes, which increases the requirements on the reliability of the CS maintaining the given characteristics of aircraft stability and controllability. Reliability of the electrical remote control system (ERCS) is based on the multiple redundantization of the control channels, but even in this case it is not protected against transient failures of the on-board electrical power supply. It was required to estimate the possibility of designing a fluidic backup for the emergency control of the aircraft longitudinal motion as a solid body using the hydro-mechanical part of the electrohydraulic control actuator (CA) of the ERCS [10].

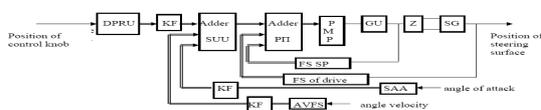


Fig.6

Figure 6 depicts a block diagram of the working model of the fluidic backup control channel. The system has an input circuit from the control stick to the CA input summing amplifier and a feedback circuit from the attack angle sensors (AAS) and the angular velocity sensors (AVS) of the aircraft with correcting filters (CF), as well as the loop by the position of drive rod and the sliding valve [10].

The pneumatic «nozzle–shutter» transducer having actually no dynamic errors within the control frequency band was selected as the sensor of the linear displacements for measuring the position of the pilot’s control stick, CA rod, and hydraulic control valve.

Air was chosen as the working medium despite its essential disadvantages such as the high compressibility and relatively low sound speed which limit the length of the pipeline connections owing to the requirements on the dynamic characteristics of the fluidic system paths. As compared with the liquid medium, the advantages of the gas medium lie in the availability of the working medium (air), possibility to work at low pressure, small size, mass, and power supply, fire-resistance, virtual insensitivity to overloads, and simplicity of operation.

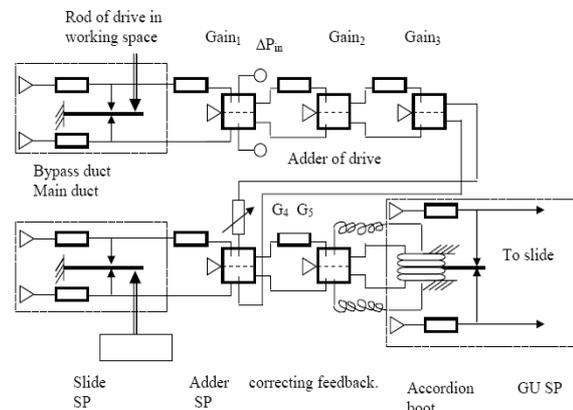


Fig.7

Figure 7 depicts the block diagram of the fluidic CACS. The issues of conjugation of the fluidic channel with the electric backup channels are not discussed here. The differential signal of the sum of signals from AAS and AVS arrives to the inputs 3 and 7 of the amplifier  $A_1$ .

The routes of the fluidic chain of the control signals from all feedbacks are diagrammed in Fig. 8. The pipelines of 3 and 12 m that are defined by the location of the pilot’s control stick and the weathercock AAS are the weak points of the chain. The AVS is located closer to the CA drive because its

characteristic is independent of the place of installation.

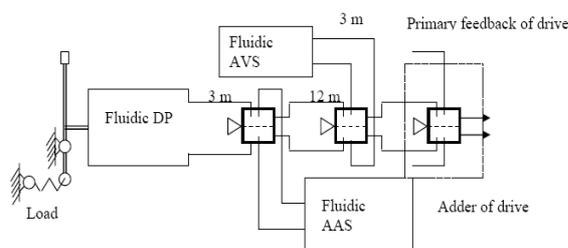


Fig.8

The CA with fluidic control based on the hydro-mechanical part of the redundant electro-hydraulic CA has a two-chamber power hydraulic cylinder (PHC), throttling hydraulic control valve, and the multichannel autopilot servo controlling the position of the hydraulic control valve slide. The fluidic actuator CS was constructed by substituting in one of the redundantization channels the fluidic elements for the electrical ones with retention of its structure. System operability was verified by including the aircraft mathematical model into the closed loop with the physical CS breadboard. The heaviest flight modes were modeled in both the statically stable and statically unstable variants of the aircraft configuration. The basic aim of modeling was to estimate the possibilities of providing stability of the closed-loop system. The system proved to have sufficient stability margins for the channel gains defined for these modes. The experimental system APFC's of the attack angle and the angular velocity were in satisfactory agreement with the calculated data.

For the aircraft with statically unstable configuration, the system stability margins at the lower stability boundary did not differ from the similar characteristics of the ERCS. At the upper stability boundary, we succeeded to improve the system stability margins from 3 to 6 dB in amplitude and from 15° до 50° in phase at the minimal gains in the channels of the attack angle and the angular velocity for the flight modes under consideration by using the integro-differentiating fluidic CF included in the control loop.

The results obtained corroborated the operability of the fluidic control system in some difficult flight modes and supported advisability of working on this basis on the design of a backup channel stable to the environmental action. The popular microprocessor technology is usually very sensitive to the extreme conditions, primarily, to high temperatures and vibration, and needs a highly reliable backup. This fact stimulated the quest for new principles of CS design. It seemed difficult to satisfy the entire set of the complicated and contradictory requirements on

the FV CS's while remaining at the level of the traditional approaches.

The problem was solved on another physical platform, that of the fluidics. In this case, the system was insensitive to variations of the temperature of the working medium and environment and to high levels of electromagnetic fields and radiation and at the same time ensured fire safety and reduction in mass owing to the lack of power transformers.

The aforementioned AIF system underlies the designs of more than twenty fluidic controllers of various GTE parameters using the air from the GTE compressor at temperature up to 600°C.

The pneumatic CS's enable one to provide the optimal characteristics of the power unit by using nontraditional control parameters characterizing the air flow through the engine such as the ratios of air pressure in different sections of the engine, changes in the relative local velocity, values of the local Mach number, changes in the position of compression shocks, striking angles of air flow on the compressor blades, and so on. In the designs of the fluidic GTE CS's, consideration was given to the problems of control of its individual elements such as the air intake, compressor, reactive nozzle, and fuel flow. Due to the FV operational conditions, it is difficult to obtain the signal of pressure on the basis of which the desired GTE parameters are generated. The task of maintaining the rotation frequency of the GTE axle belongs to this class.

Figure 9 shows the block diagram of the controller of rotation frequency of the air-turbine [7] supplying power to the on-board users. The controller maintains the given frequency of the turbine (T) by controlling the air supply through the vortex valve (VV). The signals from the RFG and the rotation frequency sensor (RFS) are fed into the inputs of the phase discriminator (PHD), they have identical pulse amplitudes and durations. In this case, there will be no signal at the PHD output. At changes in the turbine load manifesting themselves in the changes of its rotation, the PHD will identify the phase difference between the frequencies of turbine and RFG and send command to modify appropriately the air flow through the BK, that is, to increase/decrease the flow and thereby offset the deviation of the turbine frequency from the reference. The flight tests of the fluidic CS of the air inlet wedge bar panels were successfully carried out in 1975 [11]. Tests under different weather conditions corroborated its reliability. At that, the optimal characteristics of the power unit were maintained. The relay program-closed schemes of air inlet control were checked in full. Two schemes used the ratio of the static pressure  $P_{st}$  on the internal wall of the air inlet channel to the full pressure  $\varepsilon = P_{st}/p^*$ . In one of these schemes, the

pressure ratio signal was generated by means of two flow reduction gears and one static pressure taken off the channel wall with support of the mode  $P_{st}/P_{red1} > \varepsilon > P_{st}/P_{red2}$ . In the second scheme, the reduced full pressure was compared using the Laval nozzle with two static pressures supporting the mode  $P_{st}/p^* < \varepsilon < P_{st2}$ . The system was supplied either by the engine compressor or the approach ram air. In the third scheme, control was based on the local Mach velocity in the channel within the dead zone. To retain the anti-surge margins, correction by means of the pneumatic weathercock sensors of the attack angle (AAS) and sideslip, as well as by the signal of air pressure drop after the compressor was used in the system. In all schemes, as soon as the work signals leave the dead zone the logic unit generates a signal to pull the wedge panels in or out subject to the mismatch sign. The flight tests of the fluidic CS were carried out at the Mach velocities from 1.1 to 2.1 within the height range  $H=12...20$  km in the course of horizontal rectilinear speedup and deceleration, at climb, turns, and sliding with the extreme deviation of pedals, as well as at engine throttling and pickup, in the modes of surge and autorotation. In the course of flight tests, the CS worked faultlessly in all of these modes. Good characteristics demonstrated by the air inlet CS made for further successful use of fluidics in the GTE automation. The passage of the psychological barrier of distrust to such control systems was of no less importance. Controllers of the compressor bypass valve and the input directing apparatus (IDA) were designed for the GTE family to prevent the surge in the engine D-36 of the YAK-42 aircraft [11]. The controller relies on the fluidic sensor of the pressure ratio, gas-dynamic divider, flow reduction gears, fluidic comparison element, fluidic amplifier, and an actuator generating commands to the mechanisms of air bypass from the compressor. The controller has a relay characteristic with hysteresis within  $0.1...0.25$ . Its mass is equal to 2.5 Kg. Such modular fluidic controllers were designed and found wise use for the GTE's of passenger aircraft such as YAK-42, AN-24, AN-74, IL-96, Tu-204, and others. There was not a single claim for replacement during the entire time of their use. The problems arising at the design of the CS's of the hypersonic athodyd were caused by the extremely high temperature of the working medium and environment in the slowed down gas (air) flow, jump structure of the gas flow, and strongly varying boundary layer in the combustion chamber (CC). This defined complexity of the task of selecting the control parameters and method of engine control. An experimental small two-mode athodyd was designed [11] for which an astatic fluidic control system of hydrogen flow in the CC and cooling system was selected. This engine was for the first time tested in

flight by the hypersonic flying laboratory [12]. The engine gas-dynamic parameters in the form of pressure ratios in the sections of engine channels were used for control of the hydrogen flow. On the whole, the implemented fluidic CS of fuel flow that worked for a short time at a temperature of more than  $900^{\circ}\text{C}$  performed all the necessary functions at four flight starts in all modes along the flight trajectory, including limitation of the CC wall temperature and prevention of surge at thermal CC blocking with repeated engine startup.

Tests and practice of using fluidics in FV control, suggest promising principles of designing the backup CS's not only for the FV's. In connection with the advent of sophisticated technological plants, complexity of their CS's grows dramatically, and higher requirements are presented on their survivability under the action of the destabilizing factors (DF). Indeed, any fault of the FV CS's, nuclear power stations, oceanic liners, passenger coaches and trains can lead to unpredictable consequences and catastrophes entailing huge human and economic losses. That is why survivability of the CS's of such plants is so topical. The DF's which can be both natural and artificial (developed intentionally) represent one of the main causes affecting CS stability. In particular, by the external DF's we mean both the natural factors such as lightning discharges, radiation flows from the outer space, electromagnetic fields, and so on, and the artificial factors such as the ionizing, ultrahigh-frequency, and laser radiations, as well as the neutral beams.

The redundant electronic high-performance FV CS's support acceptable operability in rigid real time upon occurrence of physical malfunctions (faults and failures) in their individual elements [13]. Since the methods of detecting the design errors in the applied and system software also are well developed for these systems [14], they find wide use as the main FV CS's. However, even the most sophisticated redundant electronic structures [15] cannot protect them against the external DF's that can entirely disable them for some time, which in rigid real time implies inadmissible interrupt of the control and loss of the FV. An additional nonelectric CS channel which is not subjected to DF's must be used to maintain control continuity under external actions.

As was already noted, from this standpoint the fluidic elements are much more preferable to the electronic ones in terms of intensity of their physical malfunctions, which is due to the uniformity of the materials used (metal, plastic, ceramics) and simpler manufacturing technology. The fact that no applied system software is used also is important.

Yet the speed of fluidic elements is much lower as compared with their electronic counterparts. Therefore, they cannot be used to design computing devices rivaling the general-purpose digital computers.

In this connection, on the one hand, it is required to find ways to increase the speed of fluidic elements to some attainable limit, and on the other hand, a possibility appears to design devices other than the general-purpose computers which can perform the tasks of control in real time.

Studies demonstrated that the required speed of the CS elements is about 100 KHz and that the differential analyzer with integrators having programmed arithmetic and speed of 10,000 iterations per second must be used as the dedicated computer.

Qualitative analysis of the specificity of fluidic elements was carried out. It can underlie a sufficiently complicated backup FV CS to execute with an acceptable accuracy during several seconds the programs of control instead of the temporarily failed main electronic channel of the system.

Let us consider an FV CS protected against both its inherent and external DF's [16]. It operates in two modes. In the working mode, the main, electronic CS operates in the control loop, whereas the backup, fluidic one idles, although calculates in parallel the same algorithms as the main system. Expectedly, the backup CS channel has lower accuracy. Therefore, after each basic cycle the main CS channel corrects its backup counterpart.

Consequently, the CS backup channel over small intervals must approach accuracy of the main channel. Upon occurrence of an external DF, the system switches to the emergency mode and activates the backup channel. Upon cessation of the external DF, computations are resumed in the main channel using the information from the backup one.

The above structure providing the virtually absolute survivability can be realized only upon attaining the desired speed of the fluidic elements and digital integrators of the indicated type.

As was shown in [17], the speed of fluidic elements grows with reduction of their linear dimensions and increase in the velocity of gas flow in the supply channels. Therefore, the main methods for increasing the speed of the fluidic element-based backup CS are as follows:

- Miniaturization of the fluidic elements primarily by narrowing the supply channels of the fluidic elements to 0.1 mm and less;

- Use along with air of less dense gases such as helium, hydrogen, and helium-hydrogen mix;
- Use of the working gases having higher sound wave speeds (the same helium and hydrogen);
- Improvement of the manufacturing technology and transition to devices with the degree of integration of up to 15...20 and more elements in the cubic centimeter. Obviously, by using the aforementioned method, one can reach the maximum speed.

The planar technology is most popular in the manufacture of the fluidic devices. The fluidic elements and functional modules in the form of printed boards with communication channels are assembled into multilayer modules performing the desired control laws.

In these constructions, it is the linear dimension that plays the speed-defining role because the passage of signal through the device circuit depends only on it. Therefore, in what follow we consider only its impact on the speed of fluidic elements.

For the transient motions, the dynamic similarity criterion is expressed by the dimensionless Strouhal number  $St = VT/L$ , where  $V$  is the gas flow speed;  $T$  is the characteristic time (period for the transient periodic processes); and  $L$  is the characteristic linear dimension.

Therefore, the process time is directly proportional to the element's linear size. Hence, reduction in the linear dimensions of the supply channel (flow area) of the fluidic element reduces the flow of working medium proportionally to the square of dimension. The power of the supply flow is reduced by the same factor. This characteristic is extremely important for the FV because it defines the CS size-mass characteristics (SMC).

The physical characteristics and parameters of the working gas define the gas-dynamic processes in the fluidic elements: the gas supply pressure, pressure in the environment to which the gas is discharged upon passing the fluidic devices, the gas itself with its density and speed of sound wave propagation in it.

Let us consider the impact of these parameters of the working medium on the speed of fluidic elements. We assume for simplicity that the coefficient of working medium flow from the nozzle retains constant value at variations of the supply pressure, working medium density, and absolute environmental pressure.

For the subcritical flow speeds, the air mass obeys the formula:

$$G = \varepsilon f g \sqrt{2 \rho_0 p_0 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}, \quad (1)$$

where  $s$  is the flow coefficient,  $f$  is the fluidic element nozzle cross-section area,  $g$  is the gravitational acceleration,  $p_0$  and  $p_1$  are the absolute gas pressures before and after the supply nozzle,  $\kappa$  is the isentropic index, and  $\rho_0$  is the density of gas before the supply nozzle.

Since the gas density after the supply nozzle follows  $\rho_0 = p_0/gRT$ , where  $R$  is the gas constant and  $T$  is the Kelvin absolute temperature, expression (1) is representable as

$$G = \varepsilon f g \sqrt{\frac{2g}{RT} \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}, \quad (2)$$

according to which the weight flow of gas through the supply nozzle is for a given absolute gas temperature a function of the absolute pressure at the nozzle input and the ratio of this pressure to the absolute gas pressure after the nozzle (environment). Formula (2) is calculated using the tables of gas-dynamic functions. However, comparative analysis can do without accurate determination of flow; it suffices to determine the qualitative nature of the dependence of speed on the aforementioned parameters within the range of observation of the self-similarity principle of gas-dynamic processes. Therefore, it is possible to use formula (3) which provides results that are close to those obtained through (2) for the entire range of the subcritical flow modes if the gas density is calculated from the pressure  $p_1$

$$G = \varepsilon f g \sqrt{2 \rho (p_0 - p_1)} \quad \text{или} \quad G = \varepsilon f g \sqrt{2 \rho \Delta p}, \quad (3)$$

where  $\Delta p$  is the difference of pressures before and after the nozzle. Correspondingly, for the volume flow,

$$Q = \varepsilon f g \sqrt{2 \Delta p / \rho}. \quad (4)$$

For the same nozzle cross-section and different flow conditions, the relations of the weight flows are representable as

$$G_1/G_2 = \sqrt{\rho_1/\rho_2} \sqrt{\Delta p_1/\Delta p_2}, \quad (5)$$

and those of the volume flows as

$$Q_1/Q_2 = \sqrt{\rho_2/\rho_1} \sqrt{\Delta p_1/\Delta p_2}. \quad (6)$$

For the FV CS's, the most important characteristics of the fluidic elements are speed, weight flow of the working medium, and power consumption. In fact, they define the FV CS SMC.

Let us also consider the dependences of these characteristics on the supply pressure, choice of the working medium, and pressure of the environment into which it is discharged.

For convenience of specifying the nature of these dependences in the fluidic elements, we introduce relative coefficients and compare them with certain coefficients used as the initial ones. The certain values for the active fluidic element having supply channel width 0.4 mm, operating on air with excessive supply pressure 1 kPa at absolute environmental pressure of 100 kPa are used as the initial values. Under these conditions, the volume flow  $Q = 40$  nl/h. At that, the specific weight of air is  $1.29$  kg/m<sup>3</sup>, and the weight flow is  $G = 0.05$  kg/h. The power of the element supply is assumed to be approximately 10 mW.

We introduce the following relative coefficients. The relative speed coefficient  $\Lambda_v$  corresponding to the ratio of the gas flow through the supply nozzle at operation with the chosen working gas and supply pressures of the working medium and environment to the speed of flow through the nozzle under the aforementioned conditions. In the calculations of  $\Lambda_v$ , the ratio of speeds can be replaced by that of the volume flows under the same conditions. The relative coefficients  $\Lambda_G$  and  $\Lambda_N$  define the corresponding ratios of the weight flows and powers to the same initial values, the aforementioned coefficients for these conditions being equal to unity.

The coefficients for the fluidic elements operating with different working media such as air, helium, and hydrogen at different excessive environmental pressures (0.1; 1.0; 10, and 100 kPa) and absolute environmental pressures (100; 10, and 1 kPa) were calculated from (3) - (6) and compiled into a table. In all cases, the flow of working medium was assumed to be subcritical. The calculations assumed that the flow is isothermic and the working media densities are proportional to the absolute environmental pressure.

Table 1. Coefficients of fluidic elements with different working media

Working space	Overpressure of power supply kPa	Absolute pressure of environment								
		100 kPa			10 kPa			1 kPa		
		$\lambda_v$	$\lambda_G$	$\lambda_N$	$\lambda_v$	$\lambda_G$	$\lambda_N$	$\lambda_v$	$\lambda_G$	$\lambda_N$
Air	0,1	0,32	0,32	0,03	1,0	0,1	0,1	3,2	0,03	0,32
	1,0	1	1	1	3,2	0,32		10	0,1	10
	10	3,2	3,2	32	10	1	100	-	-	-
	100	10	10	1000	-	-	-	-	-	-
Helium	0,1	0,84	0,12	0,08	2,65	0,038	0,265	8,4	0,01	0,84
	1,0	2,65	0,376	2,65	8,4	0,12	8,4	26,5	0,03	26,5
	10	8,4	1,2	8,4	26,5	0,38	26,5	-	-	-

Hyd roge n	0,1	1,2	0,084	0,12	3,8	0,026	0,38	12,0	0,008	1,2
	1,0	3,76	0,265	3,76	12	0,084	12	37,6	0,026	37,6
	10	12	0,84	120	38	0,265	380	-	-	-

Analysis of the tabulated data suggests the following conclusions.

- Independently of the gas used by the fluidic elements, the density of the working medium is the main factor defining the coefficients  $\Lambda_V$ ,  $\Lambda_G$ , and  $\Lambda_N$  for the given excessive supply pressure.
- The speed of the fluidic elements grows dramatically with reduction in the working gas density and absolute environmental pressure. At that, there is an appreciable power gain as compared with that reached only by the increase in the supply pressure.

For example, in order to increase by the factor of three the speed of elements working with air at supply pressure under normal condition, a ten-fold increase in the supply pressure (up to 10 kPa) is required. At that, power consumption is increased by the factor of 30. With helium and the same supply pressure, the speed increases by the factor of 8.4 and power increases by the factor of 30.

With hydrogen, this gain is even more pronounced: the power increases by the factor of 30, the speed, by the factor of 12. Yet, if the absolute environmental pressure is reduced from 100 kPa to 10 kPa, then we get the same increase in speed without any increase in the supply pressure. At that, the power increases only three times, and the weight flow decreases three times. At simultaneous reduction in the absolute pressure with the use of light gases, the speed of fluidic elements may be more than 30 kHz.

The above discussion concerns the fluidic elements with the supply channel width of 0.4 mm. The up-to-date technology allows one to make channels of width 0.1 mm, which increases speed by the factor of four and enables the speed of 100 kHz. Further increase in speed up to 200 kHz is possible by making the supply channels of widths smaller than 0.1 mm and increasing the flow speeds up to 800 and over 1.000 m/sec, respectively, for helium and hydrogen, the speeds of sound being, respectively, 965 and 1284 m/sec.

Importantly, the coefficient  $\Lambda_G$  drops with the passage to the light gases and reduced absolute pressure. The weight flow of gas is reduced as many times as the speed (coefficient  $\Lambda_V$ ) increases. This factor is most important for the space FV's because at supply from the gas cylinders the weight charge is reduced at the same volume equivalent.

It also deserves noting that with a great ratio of nozzle pressures (in the case at hand, about 0.5) and a low absolute environmental pressure, the time of signal transmission through the communication channels in the fluidic devices may increase, thus, leading to lower speed. Special studies are required to optimize transmission of the information signals under such conditions.

## 5. Conclusions

- The backup FV CS's may be implemented with the fluidic elements as special-purpose computers.
- High-speed fluidic-electrical and electrical-fluidic converters with switching frequency of at least 5 kHz are required for fast real-time information exchange between the main and backup CS's.
- Substantial increase in the speed of fluidic devices is concerned primarily with reduction in the linear dimensions of the primary functional fluidic elements and in the absolute environmental pressure (in the cavity of working medium discharge) and with the use of light gases.
- The present level of science and technology enables speed of fluidic element of the order of 200 kHz.

## 12. References

- [1] Glaskin R.S., Jacoby M., Reader T.D. (1965). Joint Automatic Control In: Transactions of Conference Rensselaer Politech. Inst., p. 569-577. Rensselaer
- [2] Kasimov A.M. Popov A.I. (2002). Redundant system of controlling moving craft, p.115-126. Knowledge, Anapa.
- [3] Kasimov A.M., Mamedli E.M., Melnikov L.I., Chernyavskiy L.T. (2000). Questions of realization reserve control system. In: Automation and telemechanics, №2, p.172-182. Institute of control sciences, Moscow.
- [4] Kasimov A.M. (1965). Influence physical properties of operating environment on the transient phenomenon passing. In: Automatic control fluidics, p.437-454. Science, Moscow.
- [5] Korotkov F.A., Vanskiy Y.V., Zazulov Y.I., Peisahovich A.I. (1976). System of devices of aggregate-integrated fluidics. In: Transactions of VI international conference "Yablonna", p.40-54. Science, Moscow.
- [6] Mamedli E.M., Samedov R.Y., Sobolev N.A. (1998). Recovering methods of computing process in real-time digital control systems, p.175. Institute of control sciences, Moscow.
- [7] Popov A.I. (1988). Fluidic sensor of angular velocity. In: *Devices and control system*, №5, p.45-49. Institute of control sciences, Moscow.
- [8] Stepanov G.P. Kasimov A.M. Belukov A.A., Vologodskiy N.V. (1999). *Fluidics of air-feed jet engine in*

*aeronautical experience*, p. 220-232. Institute of control sciences, Moscow.

[9] Stepanov G.P. Shihman Y.M. (1992). Parameters and control system of hypersonic jet engine. In: *Transactions of conference of rocket-space technology*, p.223-303. Science, Moscow.

[10] Vanskiy Y.V. Kasimov A.M. (1976). Fluidic generator stable oscillation. In: *Transactions of V international conference "Yablonna"*, p.417-503. Science, Moscow.

[11] Viktorov V.V. (1976). Noise sources in continuous fluidic elements. In: *Transactions of VI international conference "Yablonna"*, p.519-523. Science, Moscow.

[12] Vaiser I.V., Kasimov A.M. (1975). *Some methods for improving the characteristics of fluidic elements*. p.324. Science, Moscow.

[13] Vaiser I.V., Kasimov A.M. (1975). *System of fluidics modules*. p.334. Science, Moscow.

[14] Zalmanzon L.A. (1965). *Experience in Introducing Pneumonic*. p.203. Science, Moscow.

[15] Zalmanzon L.A. (1965). *Fluidics in automatic control*. p.526. Science, Moscow.

## Об эффекте самоподобия трафика сервера, предоставляющего данные различного объема

Иван Цитович<sup>1</sup>, Иван Титов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН

<sup>2</sup> Московский технический университет связи и информатики  
cito@iitp.ru

### Аннотация

Проводится исследование свойств трафика сервера данных, порождаемого запросами пользователей на передачу данных существенно различного объема. Считается, что такой трафик должен обладать эффектами самоподобного трафика с параметром Херста больше 1/2, особенно в области малых вероятностей потерь. В работе показано, что для системы с потерями, то есть при ограничении пропускной способности, эффект самоподобия может быть существенным для некоторых критериев качества функционирования сервера. Вместе с тем, при рассмотрении системы с ожиданием, эффект самоподобия оказывает значительное влияние на размер буфера. Показано, что игнорирование реальной структуры трафика в этом случае приводит к высоким потерям.

### 1. Введение

В последние несколько лет мультисервисные сети получили широкое распространение. Основной концепции мультисервисной сети является передача различного по своей природе абонентского трафика (аудио, видео, данные).

В настоящей статье рассматривается модель сервера данных, на вход которого поступают запросы пользователей на передачу данных существенно различного объема. Примером может служить файловый сервер предоставляющий доступ к файлам различного типа. Передача пользователю информации о содержании различных директорий и результатов поиска требует кратковременного занятия ресурса, в то время как передача конкретного файла требует значительно большего времени, которое, в свою очередь, зависит от размера файла.

Требования с различным объемом используемого ресурса сети можно разбить на классы, внутри которых различие в объеме используемого ресурса относительно небольшое. Требования

одного класса формируют поток, который может исследоваться классическими методами. Предполагается, что средний объем используемого ресурса требованиями из различных классов различается на большую величину  $k$ ,  $k \gg 1$ . В связи с этим, для описания таких эффектов в математической модели трафика данных, порождаемого сервером, объем передаваемых данных нужно описывать случайной величиной с неограниченной дисперсией.

Такой трафик может порождать эффекты, характерные для самоподобного трафика с параметром Херста больше 1/2. Анализу эффекта самоподобия такого трафика и посвящена работа.

### 2. Математическая модель

При проведении численных исследований была построена модель сервера данных, обрабатывающего требования с различным временем обслуживания. Источник нагрузки порождает  $n$  пуассоновских потоков с интенсивностями  $\lambda_i$ ,

$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  - суммарная интенсивность поступающих требований,  $p_i = \lambda_i / A$  - вероятность поступления требования из  $i$ -го потока. Требование  $i$ -го потока обслуживается в течение  $a_i$  единиц времени. Тогда среднее время обслуживание требования составит  $A = \sum_{i=1}^n p_i \cdot a_i$  единиц времени.

В качестве характеристики случайности источника нагрузки рассматривается среднеквадратическое отклонение длительности обслуживания

$$\sigma = \sqrt{D}, \quad D = \sum_{i=1}^n p_i \cdot a_i^2 - A^2.$$

В качестве характеристики, описывающей статистическую однородность нагрузки, рассматривается отношение шума к среднему значению, т.е. величина  $\sigma/A$ . В том случае, когда эта величина принимает небольшие значения, говорят,

что источник обладает дисперсией, если же  $\sigma/A \gg 1$ , то источник не обладает конечной дисперсией и такой источник является объектом наших исследований.

Для анализа такой системы необходимо разбить требования на группы с принципиально различными длительностями обслуживания. Внутри одной группы можно исследовать их с помощью классических моделей, поскольку дисперсия ограничена.

Для простоты положим, что длительность обслуживания требования  $i$ -го потока  $a_i = k^{i-1}$ , где  $k$  - некоторое достаточно большое число. Введение параметра  $k$  позволяет нам регулировать соотношение между длительностями обслуживания требований принадлежащих различным потокам. Фактически параметр  $k$  задаёт класс требований, определяемый принципиально различным объёмом запрошенной информации.

Для того чтобы каждый из потоков создавал одинаковую нагрузку на систему (поскольку при этом эффекты, вызванные сосуществованием потоков различной природы, проявляются более явно), интенсивность  $i$ -го потока должна определяться, как  $\lambda_i = \lambda_1 \cdot k^{-(i-1)}$ . В этом случае

$$A = \frac{k^{-n} - 1}{k^{-1} - 1} \cdot \lambda_1, \quad A = \lambda_1 \cdot n/A, \quad A \cdot A \text{ задаёт об-}$$

щую нагрузку в единицу времени и  $A \cdot A = n \cdot \lambda_1$ .

Дисперсия такого источника

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1 \cdot k^{i-1}}{A} - \frac{\lambda_1^2 \cdot n^2}{A^2} \approx k^{n-1} - n^2 \quad \text{при}$$

больших  $k$  или  $n$ . Поэтому

$$\sigma/A \approx k^{0.5 \cdot (n-1)} / n \rightarrow \infty \text{ при больших } k \text{ или } n.$$

Следовательно, предлагаемая модель обладает свойством, позволяющим исследовать эффекты, соответствующие неограниченной дисперсии времени обслуживания.

### 3. Анализ полученных результатов

Для численных исследований была использована приведенная выше модель при  $n = 3$ ,  $k = 10$  и  $\lambda_1 = 33.3$ . Общая нагрузка, создаваемая тремя потоками, равна 100.

Для сравнения использовались две модели обслуживания требований. Первая моделирует описанную выше схему, вторая – результат моделирования системы обслуживания, на вход которой поступает один пуассоновский поток с интенсивностью  $A$  и временем обслуживания  $A$ , то есть моделируется система, для которой не учитывается структура источника нагрузки.

Все требования, поступающие в систему, получают одинаковую скорость -  $Cm$ , следовательно, длительность обслуживания определяется только объёмом запрошенного файла.

### 3.1. Исследование функции распределения

Считается, что самоподобный трафик лучше всего описывается распределением с «тяжелым хвостом». Случайная величина  $X$  имеет распределение с тяжелым хвостом, если  $P(X \geq x) \sim c \cdot x^{-a}$ , при  $x \rightarrow \infty$ , где  $a$  параметр формы ( $0 < a < 2$ ),  $c$  - некоторая положительная константа. Данное распределение обладает хвостом, спадающим по степенному (гиперболическому) закону, в то время как распределение с легким хвостом, такое как экспоненциальное или гауссовское, имеет экспоненциальное убывание хвоста.

При проведении моделирования рассчитывался объём используемого ресурса -  $X$  на протяжении 2700000 единиц времени. За это время на обслуживание в систему поступило более  $10^8$  запросов. На рис. 1 изображена зависимость  $1 - F(x)$  от  $x$  в логарифмическом масштабе, где  $F(x)$  - функция распределения случайной величины  $X$ .

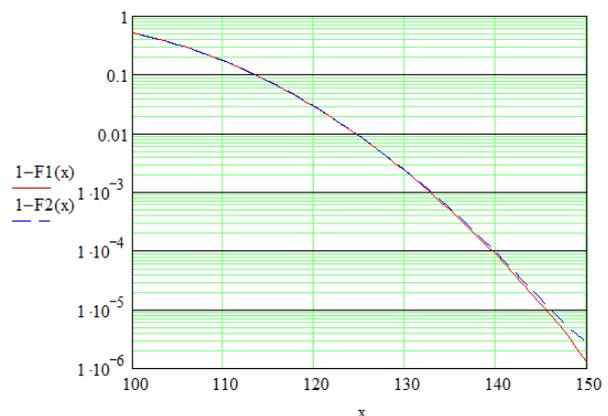


Рис. 1. Функция распределения объёма занятого ресурса в системе обслуживания

Из данной зависимости хорошо видно, что хвост распределения объёма задействованного ресурса для системы, на вход которой поступает несколько потоков различной природы (1), затухает с такой же скоростью, что и хвост распределения для системы с одним пуассоновским потоком на входе (2). У обоих распределений экспоненциальное убывание хвоста, то есть в логарифмическом масштабе они имеют вид близкий к линейному. Из рис. 1 видно, что для 1-й системы вероятность того, что объём задействованного ресурса будет равен некоторому значению, равна соответствующей вероятности для 2-й систем.

### 3.2. Результаты численных исследований потерь

Принято считать, что самоподобный трафик обладает высоким коэффициентом пульсаций и имеет ярко выраженный асинхронный и пульсирующий характер (burst). Коэффициент пульсаций для заданного процесса соответствует отношению пикового объёма занятого ресурса к его среднему значению. Такой трафик обладает большим разбросом значений, относительно классического пуассоновского, и это должно приводить к большему значению потерь при ограничении пропускной способности на выходе системы обслуживания.

Рассмотрим систему с потерями, то есть ограничим ёмкость пучка на выходе сервера данных -  $\nu$ . На рис. 2 приведена зависимость количества потерянных требований для 1-й и 2-й систем ( $k_1$  и  $k_2$ ) от общего количества требований поступивших на обслуживание ( $k_0$ ) при  $\nu = 115$ .

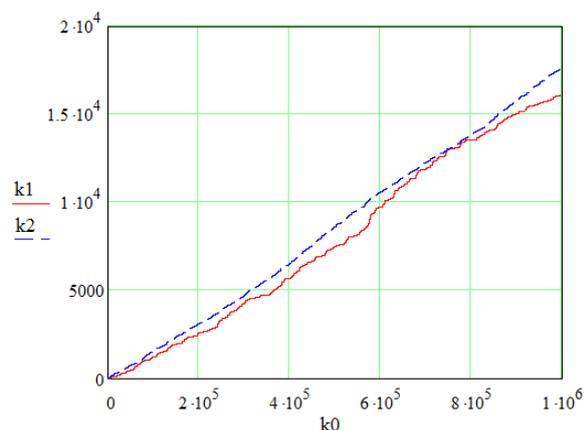


Рис. 2. Зависимость количества потерянных требований от количества пришедших

Анализ приведенной зависимости показывает, что для 2-й системы рост количества потерянных требований имеет характер очень близкий к линейному. В то время как для 1-й системы прослеживаются периоды интенсивного роста отказов, соответствующие периодам с высокой средней нагрузкой в системе. Однако количество требований, поступивших в период времени, когда объём задействованного ресурса был равен  $\nu$ , примерно одинаково для обеих систем.

### 3.3. Исследование распределения длительности периодов с высокой нагрузкой

Для того чтобы оценить влияние сосуществования нескольких потоков различной природы, необходимо рассматривать длительность периодов, в течение которых объём занимаемого ресурса был выше некоторого заданного значения.

В работе [1] на рис. 1 - 3 были представлены временные зависимости изменения объёма занятого ресурса в системе, математическая модель которой описана выше, при различных длительностях наблюдения. Из них хорошо видно, что существуют длительные периоды, в течение которых средний объём занятого ресурса значительно превосходит математическое ожидание создаваемой нагрузки. Наличие таких длительных периодов может приводить к переполнению буфера устройств, через которые проходит трафик сервера данных, инициированный запросами пользователей. Причём с ростом длительности этих периодов вероятность переполнения буфера и, соответственно, потеря, будет увеличиваться.

Для количественной оценки необходимо рассмотреть распределение вероятностей периодов времени, в течение которых объём занятого ресурса превосходил заданный уровень.

На рис. 3 приведены зависимости  $1 - F(T_{110})$  в логарифмическом масштабе для 1-й и 2-й систем обслуживания, где  $F(T_{110})$  - функция распределения периодов времени -  $T_{110}$ , в течение которых объём занятого ресурса превосходил уровень 110.

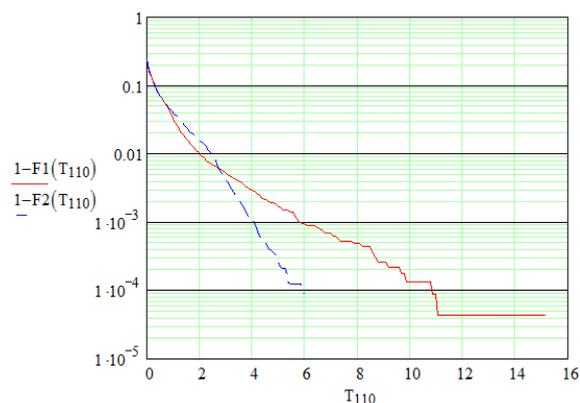


Рис. 3. Зависимость функции распределения  $1-F(T)$  от длительности периода времени для уровня 110

Из данной зависимости, видно, что для 1-й системы обслуживания, на вход которой поступают три потока требований принципиально различной природы, вероятность таких состояний, когда длительность периода больше 10 единиц времени, достаточно велика (максимальное значение длительности периода достигает 15 единиц времени). При этом для 2-й системы, на вход которой поступает один поток требований, за всё время наблюдений не было зафиксировано ни одного случая, чтобы длительность периода превосходила 6 единиц времени.

На рис. 4 приведена аналогичная зависимость зависимости, полученная для уровня 125.

С ростом уровня, вероятность превышения которого исследуется, скорости убывания хвостов функций распределения меняются не значительно. Следовательно, даже в области малых вероятностей (порядка  $10^{-6}$ ), то есть при анализе

очень редких событий, внутренняя структура источника нагрузки оказывает сильное влияние на длительность периодов с высокой нагрузкой и, соответственно, на вероятность переполнения буфера.

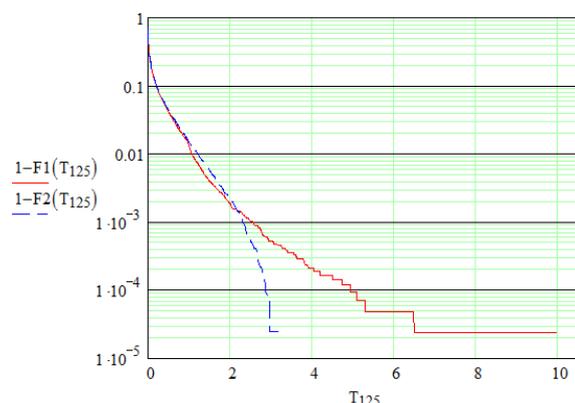


Рис. 4. Зависимость функции распределения  $1-F(T)$  от длительности периода времени для уровня 125

### 3.4. Результаты исследований вероятности переполнения буфера

Добавим в модель коммутационное устройство, к которому подключен сервер данных. Предположим, что пропускная способность канала между сервером и коммутационным устройством не ограничена (многократно превосходит среднюю нагрузку в системе). При этом ограничивающим фактором является пропускная способность выходного канала коммутационного устройства. Поэтому коммутационное устройство имеет буфер на входе. Если весь объем ресурсов выходного канала занят, то поступающие пакеты буферизируются, пока объем задействованного ресурса в выходном канале не станет меньше максимального.

Вероятность переполнения буфера рассчитывалась как отношение количества информации, поступившей в период времени, когда буфер был заполнен, к общему объему обработанной информации. Вычисления проводились при различных значениях размера буфера ( $B$ ) и пропускной способности выходного канала коммутационного устройства ( $V$ ). Результаты, полученные для 1-й ( $P1$ ) и 2-й ( $P2$ ) систем, представлены в таблице.

Сравнение полученных результатов показывает, что вероятность переполнения буфера для 1-й системы в несколько раз превосходит аналогичную характеристику, полученную для второй системы. Например, для системы с размером буфера  $40 \cdot Cm$  и ёмкостью выходного канала коммутационного устройства  $115 \cdot Cm$  (средняя нагрузка равна  $100 \cdot Cm$ ) вероятность переполнения буфера для системы с тремя потоками на входе будет почти в 10 раз больше вероятности, полу-

ченной для системы с одним пуассоновским потоком на входе. При этом с ростом объема буфера и ёмкости выходного канала различие между этими характеристиками увеличивается. Таким образом, для систем, в которых стремятся обеспечить высокое качество обслуживания, внося дополнительную избыточность (увеличивая объем буфера или пропускную способность), игнорирование реальной структуры потоков приводит к недооценке вероятности переполнения буфера и росту потерь.

Таблица. Вероятность переполнения буфера

V	B	P1	P2
$110 \cdot Cm$	$40 \cdot Cm$	0.00402	0.00059
$115 \cdot Cm$	$20 \cdot Cm$	0.00098	0.00039
$115 \cdot Cm$	$40 \cdot Cm$	0.000634	0.000067
$120 \cdot Cm$	$20 \cdot Cm$	0.000162	0.000043
$120 \cdot Cm$	$40 \cdot Cm$	0.0000780	0.0000017
$125 \cdot Cm$	$20 \cdot Cm$	0.0000187	0.0000045

## 4. Выводы

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. При рассмотрении системы с потерями, то есть при ограничении пропускной способности выходного канала сервера данных, внутренняя структура источника системы, на вход которой поступает несколько потоков требований различной природы, не оказывает существенного влияния на вероятность потерь и можно рассматривать систему с одним потоком на входе с суммарной интенсивностью и средней длительностью обслуживания (т.е. только 2-ю систему).
2. Игнорирование реальной структуры трафика сервера данных, порождаемого запросами пользователей на передачу данных существенно различного объема, приводит к недооценке реальной вероятности переполнения буфера. При этом с ростом размера буфера и пропускной способности выходного канала различие между 1-й и 2-й системой увеличивается.

## 5. Литература

- [1] Цитович И.И., Титов И.Н. Исследование свойств мультиплексирования потоков в мультисервисных сетях // Сборник трудов 31-й конференции молодых учёных и специалистов ИППИ РАН: Информационные технологии и системы ИТиС'08. М. 2008. С.9-13.

## Оценивание амплитуды установившихся колебаний в релейных системах<sup>1</sup>

Кочетков С.А.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

*E-mail: ser711@yandex.ru*

### Аннотация

*При использовании алгоритмов управления на скользящих режимах с использованием разрывных управляющих воздействий возникает проблема “чаттеринга” (от англ. chattering - болтанка), которая негативным образом влияет на ошибку регулирования. Для уменьшения этого негативного явления можно использовать процедуру вибролинеаризации. Однако необходимо иметь оценки колебаний для того, чтобы должным образом выбрать частоту вибролинеаризующего сигнала. В данной работе предлагается алгоритм оценки максимальной амплитуды колебаний.*

### 1. Введение

Проблема, связанная с доопределением решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью возникла в середине XX века. Одновременно с решением данной задачи в чисто математической постановке [1, 2], где правая часть уравнений предполагается разрывной в исходной постановке, разрабатывалась теория систем с переменной структурой [3, 4], где преднамеренно организовывался скользящий режим за счет целенаправленного синтеза управлений в классе разрывных функций.

Развитие теории скользящих режимов в настоящее время идет по двум направлениям. Усилиями ряда зарубежных ученых (в основном наших соотечественников) развивается теория скользящих режимов высокого порядка (или второго рода) [5].

Второе направление связано с дальнейшей разработкой положений теории «классических» скользящих режимов [3, 4], в частности, с целью довести ее положения до инженерной практики. Большой интерес к этому направлению в последние десятилетия связан, с одной стороны, с бурным развитием и совершенствованием силовых

электронных переключающих устройств, а с другой стороны, с рядом преимуществ методов систем с разрывными управлениями с точки зрения синтеза эффективных алгоритмов управления.

Не секрет, что фраза «теория скользящих режимов» вызывает скепсис у специалистов по управлению, так как теоретические построения основываются на гипотезе идеального скользящего режима – движения в бесконечно малой окрестности многообразия скольжения при бесконечной частоте переключений релейных элементов, нереализуемой на практике. В реальных системах конечная частота переключений релейных элементов приводит к возникновению низкочастотных колебаний с конечной амплитудой в установившемся режиме, что неблагоприятно сказывается на точности регулирования. В различных схемах модуляции непрерывных сигналов для повышения точности стремятся максимально повысить частоту переключений релейных элементов, причем, как правило, алгоритмы модуляции реализуется программно. В то же время, модуляция непрерывных сигналов на скользящих режимах реализуется по обратной связи, что заведомо обеспечивает максимально возможную в замкнутой системе управления частоту. Другими словами, при учете только неидеальностей собственно релейной характеристики использование скользящих режимов может приводить к большей эффективности и простоте реализации алгоритмов модуляции. Если ограничение частоты модуляции, связанное с нереализуемостью идеального реле неизбежно, то другие факторы, влияющие на частоту модуляции, такие, как неучтенные в модели объекта управления паразитная динамика, запаздывание и т. д. в принципе можно компенсировать. В частности, использование асимптотических наблюдателей состояний позволяет исключить паразитную динамику за счет замыкания быстрых движений в контуре обратной связи с наблюдателем, модель которого не содержит паразитной динамики [7]. Отметим, что подобно-

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 09–08–00429-а, гранта Президента МК-2548.2009.8.

го эффекта в классических схемах модуляции без обратной связи достичь весьма проблематично.

Избежать низкочастотных колебаний значительной амплитуды в установившемся режиме (в теории скользящих режимов используют термин “чаттеринг” от англ. chattering – болтанка) можно двумя способами – повышать частоту или/и уменьшать амплитуду разрывных управляющих воздействий. При реализации разрывных управлений в виртуальной среде (микропроцессорах) использование обоих способов не представляет проблем. Если же разрывные управления реализуются с помощью внешних исполнительных устройств, имеющих неидеальности различной природы, то возникновение «чаттеринга» неизбежно, так как изменять амплитуду релейного элемента в процессе функционирования системы часто не представляется возможным, а частота переключений ограничена сверху, с одной стороны, используемой элементной базой, а, с другой – используемыми алгоритмами управления. Тот факт, что в объектах управления в достаточной мере выполняется гипотеза фильтра, позволяет найти компромисс между частотой переключений и фильтрующими свойствами объекта управления, что приводит к удовлетворительному решению проблемы: проходя через систему, колебания подавляются до величины, которой на практике можно пренебречь. Отметим, что последнее относится к максимально достижимой частоте переключений релейного элемента, которую и следовало бы реализовать на всех режимах работы замкнутой системы управления, что, как отмечено выше, представляет собой не достаточно извезданной работой исследователя. проблема оценки амплитуды установившихся колебаний (“чаттеринга”). Учитывая, что последняя русскоязычная публикация по теории скользящих режимов [4] вышла почти тридцать лет назад, в разделе 2 приводятся основные результаты теории скользящих режимов, на которых основывается дальнейшее изложение и аргументируется постановка задачи. В разделе 3 описан метод повышения частоты переключений в замкнутой системе с использованием дополнительных высокочастотных сигналов на входах релейных элементов, позволяющих теоретически увеличивать до бесконечности частоту переключений и, как следствие, исключить явление чаттеринга. В разделе 4 приводятся оценки точности регулирования при конечной частоте переключений релейных элементов.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации линейной стационарной системы общего вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^p$ ,  $\text{rank} B = p$ ,  $A, B$  – матрицы соответствующих размерностей, пара  $(A, B)$  предполагается управляемой.

Изложим идею синтеза замкнутой системы с разрывным управлением в задаче стабилизации системы (1), которая с помощью неособого преобразования приведена к регулярной форме [8]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_1 \in R^{n-p}$ ,  $x_2 \in R^p$ ,  $\text{rank} B_2 = p$ , пара  $(A_{11}, A_{12})$  – управляема.

Преднамеренная организация в системе (2) скользящего режима на многообразии скольжения

$$s = Cx_1 + x_2 = 0, \quad s \in R^p \quad (3)$$

приводит к редукции динамического порядка исходной системы при движении в скользящем режиме, который описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C)x_1, \quad x_2 = -Cx_1, \quad (4)$$

где выбором матрицы  $C \in R^{p \times (n-p)}$  можно назначить произвольные темпы сходимости в укороченной системе (4). Для организации скользящего режима по многообразию (3) решается задача стабилизации системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} - A_{12}C)x_1 + A_{12}s, \\ \dot{s} &= [(CA_{11} + A_{21}) - (CA_{12}C + A_{22}C)]x_1 + \\ &+ (CA_{12} + A_{22})s + B_2u. \end{aligned}$$

Для упрощения процедуры синтеза можно воспользоваться свойством инвариантности движения в скользящем режиме как к линейному преобразованию поверхности скольжения, так и к линейному преобразованию вектора управляющих воздействий [4]. Поэтому без ограничения общности рассмотрим последнюю систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} - A_{12}C)x_1 + A_{12}s, \\ \dot{s} &= A_x x_1 + A_s s + u, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_x = [(CA_{11} + A_{21}) - (CA_{12}C + A_{22}C)]$ ,

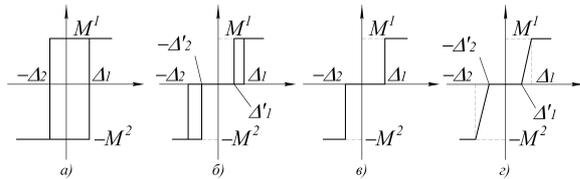
$A_s = CA_{12} + A_{22}$  и управления выбраны в виде разрывных функций

$$u_i = -M_i \text{sign} s_i, \quad i = \overline{1, p}. \quad (6)$$

Достаточные условия возникновения скользящего режима на многообразии (3) имеют вид неравенств  $s_i \dot{s}_i < 0$ ,  $i = \overline{1, p}$  [4], из которых получают нижнюю оценку для выбора амплитуд разрывных управлений:  $M_i > \|A_x^i\| \|x_1\| + \|A_s^i\| \|s\|$ ,

где здесь и далее  $\|A_{(i)}^i\|$  – строчные нормы  $i$ -х строк соответствующих матриц.

Выше рассматривались вопросы организации скользящих движений с использованием идеальной релейной характеристики (6) и, соответственно, скользящее движение принадлежало многообразию скольжения (3). Однако на практике релейные элементы содержат различные нелинейности (рис. 1).



**Рис. 1. Характеристики переключения релейного элемента**

Наличие неидеальностей приводит к возникновению реального скользящего режима. Движение в реальном скользящем режиме происходит в некоторой окрестности многообразия скольжения (3). При этом в установившемся режиме возникает такое нежелательное явление как автоколебания (“чаттеринг”). Компенсировать влияние автоколебаний можно, например, принудительно повышая частоту колебаний за счет внешнего модулирующего сигнала.

В следующем разделе коротко описана процедура вибролинеаризации, позволяющая в пределе при стремлении частоты вибросигнала к бесконечности полностью компенсировать влияние “чаттеринга”.

Далее приводится процедура оценивания амплитуды колебаний при конечной частоте “чаттеринга” и известных амплитудах релейных воздействий. Описание данной процедуры для линейной системы общего вида (1) является основной целью работы.

### 3. Компенсация неидеальностей исполнительных устройств

Рассмотрим систему (5), в которой управляющее воздействие  $\tilde{u}(t)$  выбрано в виде

$$\tilde{u} = \overline{\text{sign}(L_1 s^*(t) + v(t))}, \quad (7)$$

где  $v(t)$  – вибролинеаризирующий сигнал,

$L_1 = \text{diag}\{l_{ii}\}, i = \overline{1, p}$ ,  $\overline{\text{sign}(\cdot)}$  – одна из функций, изображенных на рис. 1.

Будем рассматривать вибролинеаризирующий сигнал [6, 9, 10, 11], имеющий треугольную форму соответственно:

$$v_i(t) = \begin{cases} \frac{2h_i\omega}{\pi}t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega}; \\ 2h_i - \frac{2h_i\omega}{\pi}t, & \frac{\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{3\pi}{2\omega}; \\ 4h_i + \frac{2h_i\omega}{\pi}t, & \frac{3\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}, \quad i = \overline{1, p}, \end{cases}$$

где  $\omega$  – частота колебаний вибролинеаризирующего сигнала.

Предполагается, что для траекторий (5) справедливы неравенства

$$-M^2 + \xi_2 \leq A_{x,i}x_1 + A_{s,i}s \leq M^1 - \xi_1,$$

$$(\xi_1, \xi_2 = \text{const} > 0), \quad i = \overline{1, p},$$

где  $A_{x,i}$ ,  $A_{s,i}$  –  $i$ -е строки соответствующих матриц.

При выполнении условий (9) за конечный промежуток времени выполняется неравенство  $\|s\| \leq \max(\Delta_1, \Delta_2)/l$ ,

где  $-\Delta_2$ ,  $\Delta_1$  – амплитуды сигналов на входе исполнительного устройства, при котором управляющее воздействие  $\tilde{u}$  выходит на границы  $-M^2$ ,  $M^1$ ,  $\|s\| = \max\{|s_i|\}_{i=\overline{1, p}}$ . При этом в указанной окрестности возникают колебания, обусловленные внешними сигналами  $v_i(t)$  [12].

При этом в пределе, когда частота колебаний стремится к бесконечности ( $\omega \rightarrow \infty$ ), амплитуда автоколебаний стремится к нулю. В следующем разделе рассматривается процедура оценивания амплитуды “чаттеринга” при конечной частоте вибросигнала  $\omega$ .

### 4. Оценивание «чаттеринга»

Применение вибролинеаризирующего сигнала с бесконечной частотой возможно только в теории. На практике скорость переключения ограничивается множеством факторов, одним из основных является увеличение тепловых потерь ключевых устройств при высокочастотных переключениях. В данном разделе рассматривается допредельный случай. Получены количественные оценки максимальной амплитуды колебаний, возникающих из-за конечности частоты переключений исполнительных устройств.

Основная проблема состоит в том, что вид нелинейности исполнительного устройства и его параметры обычно неизвестны. Поэтому хотелось бы получить оценки амплитуд для наихудшего случая, когда имеется информация только об амплитудах релейных воздействий. Существенно, что чем точнее будет оценен “чаттеринг”, тем точнее может быть выбрана частота вибролинеаризирующих сигналов. Другими словами, грубая оценка может привести к существенному увели-

чению частоты переключения, что является нежелательным с точки зрения тепловых потерь в исполнительных устройствах. Для получения оценки предлагается использовать эталонную систему, переменные состояния которой имеют заведомо большую амплитуду колебаний, чем в исходной системе (5), (7). Причем для эталонной системы амплитуда “чаттеринга” оценивается достаточно просто.

При конечной частоте переключений установившийся режим является периодическим, поэтому

$$x_1(t_{0i}) = x_1(t_{0i} + 2\pi/\omega), \quad s(t_{0i}) = s(t_{0i} + 2\pi/\omega). \quad (8)$$

В общем случае [12] управляющее воздействие  $\tilde{u}(t)$  содержит переменную  $\tilde{u}_{\text{var}}$  и постоянную  $\tilde{u}_0$  составляющие. Соответственно в установившемся режиме переменные  $s$ ,  $x_1$  также содержат постоянные  $s_0$ ,  $x_{10}$  и переменные  $s_{\text{var}}$ ,  $x_{1\text{var}}$  составляющие, что позволяет представить векторы  $x(t) = (x_1 \ s)^T$ ,  $\tilde{u}(t)$  в виде

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 + \tilde{u}_{\text{var}}(t), \quad \dot{\tilde{u}}_0 = 0, \quad x(t) = x_0 + x_{\text{var}}(t), \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Для  $i$ -й компоненты вектора  $\tilde{u}(t)$  зависимость  $\tilde{u}_{\text{var}}$  от времени при различных  $\tilde{u}_0$  качественно показана на рис. 2. При этом согласно (8) получим

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + \dot{x}_{\text{var}}(t) = A(x_0 + x_{\text{var}}) + B(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_{\text{var}}),$$

где для простоты изложения принято

$$x = (x_1 \ s)^T, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}C & A_{12} \\ A_x & A_s \end{pmatrix},$$

$$B = (0_{(n-p) \times p} \ I_{p \times p})^T.$$

Для постоянной и переменной составляющих находим

$$Ax_0 = -B\tilde{u}_0, \quad \dot{x}_{\text{var}} = Ax_{\text{var}} + B\tilde{u}_{\text{var}}. \quad (9)$$

Таким образом, для оценки “чаттеринга” необходимо определить норму  $\|x_{\text{var}}\|$ , под которой мы будем понимать максимальный элемент вектора  $x(t)$ .

Отметим, что согласно построениям для амплитуд  $\bar{M}^1$ ,  $\bar{M}^2$  переменной составляющей  $\tilde{u}_{\text{var}}$  и исходного управления справедливы соотношения

$$M^1 + M^2 = \bar{M}^1 + \bar{M}^2 = M, \quad \bar{M}^1, \bar{M}^2 = \text{const} > 0. \quad (10)$$

Введем также в рассмотрение некоторый вектор  $\tilde{u}^*(t)$ , компоненты  $\tilde{u}_i^*(t)$  которого выберем следующим образом: если средняя составляющая компоненты  $\tilde{u}_i$  отрицательна, выбираем  $\tilde{u}_i^*(t)$  в виде прямоугольного сигнала с амплитудами  $\bar{M}^1$ ,  $\bar{M}^2$ , равными максимальным амплитудам

реальной переменной составляющей  $\tilde{u}_{\text{var}}$  (см. рис. 2).

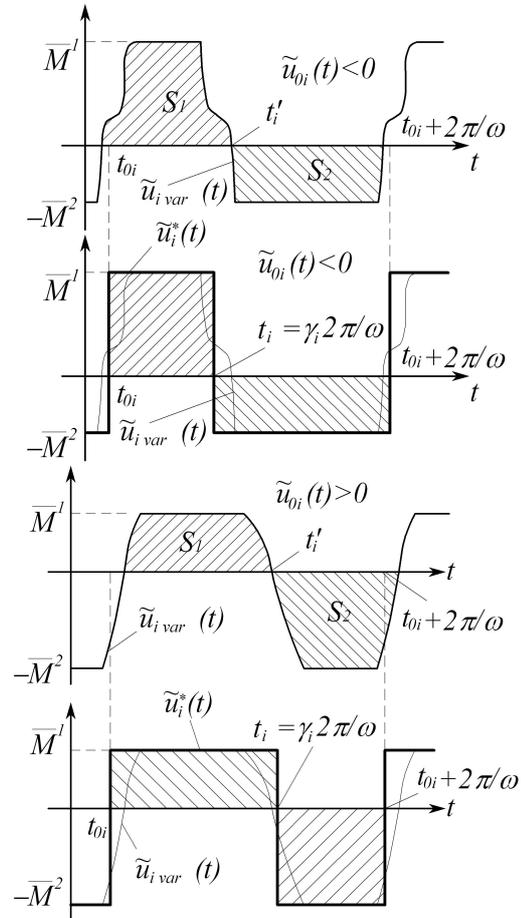


Рис. 2. Переменная составляющая управляющих воздействий

Кроме того, пусть существуют три момента переключения компоненты  $\tilde{u}_i^*(t)$ . Первый и последний  $t_{0i}$ ,  $t_{0i} + 2\pi/\omega$  совпадают с моментами времени, когда значение  $i$ -й компоненты вектора  $s_{\text{var}}(t)$  минимальны. Внутри периода  $\tilde{u}_i^*(t)$  переключается в некоторый момент времени  $t_i$ , когда средняя составляющая  $\tilde{u}_i^*(t)$  на периоде колебаний равняется нулю, т.е.

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_{t_{0i}}^{t_{0i} + 2\pi/\omega} \tilde{u}_i^*(t) dt = 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad t_i = t_{0i} + \gamma_i \frac{2\pi}{\omega}, \quad (11)$$

где  $\gamma_i$  – скважность для  $i$ -компоненты вектора  $\tilde{u}^*(t)$ .

*З а м е ч а н и е.* Отметим, что поскольку вид нелинейности обычно неизвестен, постольку момент переключения  $t_i$  может находиться как левее, так и правее точки  $t_i \in [t_{0i}, t_{0i} + 2\pi/\omega]$ , в которой  $\tilde{u}_{i\text{var}}$  равно нулю (пересекает нуль) внут-

ри периода.

Из соотношений (7) и (11) находим, что для компоненты  $\tilde{u}_i^*(t)$  между амплитудами  $\overline{M}_i^1$ ,  $\overline{M}_i^2$  и скважностью  $\gamma_i$  существует соотношение

$$\begin{cases} \overline{M}_i^1 = M(1-\gamma_i), \\ \overline{M}_i^2 = M\gamma_i. \end{cases} \quad (12)$$

Учитывая вышесказанное, на периоде колебаний можно записать выражение для компонент  $\tilde{u}_i^*(t)$  вспомогательного вектора  $\tilde{u}^*(t)$ :

$$\tilde{u}_i^*(t) = \begin{cases} \overline{M}_i^1, & t_{0i} \leq t \leq t_i; \\ -\overline{M}_i^2, & t_i \leq t \leq t_{0i} + \frac{2\pi}{\omega}, \quad i = \overline{1, p}. \end{cases}$$

Прямоугольная форма сигнала  $\tilde{u}^*(t)$  позволяет проще оценить амплитуду “чаттеринга”, не конкретизируя вид нелинейности исполнительного устройства.

Для оценивания амплитуды колебаний в установившемся режиме сравним систему (9) с эталонной системой вида

$$\dot{\tilde{x}} = F(t) + B\tilde{u}_{\text{var}}^*, \quad \tilde{x} \in R^n, \quad (13)$$

где  $F(t)$  – кусочно-непрерывная вектор-функция, выбор которой поясним ниже.

В силу соотношений (12) имеем два случая

$$\begin{cases} \overline{M}_i^1 \geq \overline{M}_i^2, & \overline{M}_i^1 < \overline{M}_i^2, \\ \gamma_i \leq 1/2; & \gamma_i > 1/2, \end{cases}$$

в соответствии с которыми выберем компоненты  $F(t)$  в виде

$$F_i(t) = \begin{cases} \|A\|_i \|x_{\text{var}}\|, & t_{0i} \leq t \leq t_i; \\ -\|A\|_i \|x_{\text{var}}\| \frac{\gamma_i}{1-\gamma_i}, & t_i \leq t \leq t_{0i} + \frac{2\pi}{\omega}; \\ \gamma_i \geq 1/2; \end{cases} \quad (14)$$

$$F_i(t) = \begin{cases} \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| \frac{1-\gamma_i}{\gamma_i}, & t_{0i} \leq t \leq t_i; \\ -\|A\|_i \|x_{\text{var}}\|, & t_i \leq t \leq t_{0i} + \frac{2\pi}{\omega}; \\ \gamma_i \leq 1/2. \end{cases}$$

Принимая во внимание (12), (14), легко показать, что для (13) существует периодический режим. Действительно, рассмотрим, например, решение (13) при  $\gamma_i \geq 1/2$  (случай (б) на рис. 2):

$$\tilde{x}_{1i}(t) = \begin{cases} \tilde{x}_{1i}(t_{0i}) + \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| (t-t_{0i}), & t_{0i} \leq t \leq t_i; \\ \tilde{x}_{1i}(t_i) - \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| \frac{\gamma_i}{1-\gamma_i} (t-\gamma_i 2\pi/\omega), \end{cases} \quad (15)$$

$$\tilde{s}_i(t) = \begin{cases} \tilde{s}_i(t_{0i}) + (\|A\|_i \|x_{\text{var}}\| + M(1-\gamma_i))(t-t_{0i}), \\ \tilde{s}_i(t_i) - \left( \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| \frac{\gamma_i}{1-\gamma_i} + M\gamma_i \right) (t-\gamma_i 2\pi/\omega), \end{cases}$$

где  $t_i \leq t \leq t_{0i} + 2\pi/\omega, i = \overline{1, n-p}$ ;

$t_i \leq t \leq t_{0i} + 2\pi/\omega, i = \overline{n-p+1, n}$ .

Согласно данным выражениям значения переменных  $\tilde{x}_{1i}(t)$ ,  $\tilde{s}_i(t)$  повторяются через моменты времени, отстоящие друг от друга на величину периода  $2\pi/\omega$ :

$$\tilde{x}_{1i}(2\pi/\omega) = \tilde{x}_{1i}(t_{0i} + 2\pi/\omega), \quad i = \overline{1, n-p};$$

$$\tilde{s}_i(t_{0i}) = \tilde{s}_i(t_{0i} + 2\pi/\omega), \quad i = \overline{n-p+1, n}.$$

Аналогичный результат получается и при  $\gamma_i \leq 1/2$ .

Выберем теперь начальные условия для системы (13) равными (8), а именно  $\tilde{x}(t_{0i}) = x(t_{0i})$ . Покажем, что траектории (13) являются мажорантами для (9).

Согласно замечанию рассмотрим 2 случая: 1)  $t'_i \leq t_i$ ; 2)  $t'_i > t_i$ . Проведем рассуждения

первого случая при  $\gamma_i \geq 1/2$ . С учетом (14) имеем  $\dot{\tilde{x}}(t) \geq \dot{x}(t)$ ,  $t_{0i} \leq t \leq t_i$ ,

следовательно,  $\tilde{x}(t_i) \geq x(t_i)$ . В момент времени  $t = t_i$  согласно (15) имеем

$$\tilde{x}_{1i}(t_i) = \tilde{x}_{1i}(t_{0i}) + \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| \gamma_i 2\pi/\omega;$$

$$\tilde{s}_i(t_i) = \tilde{s}_i(t_{0i}) + (\|A\|_i \|x_{\text{var}}\| + M(1-\gamma_i))\gamma_i 2\pi/\omega.$$

Обозначим за  $\Delta\tilde{x}_{1i} = \tilde{x}_{1i}(t_i) - \tilde{x}_{1i}(t_{0i})$ ,

$\Delta\tilde{s}_i = \tilde{s}_i(t_i) - \tilde{s}_i(t_{0i})$ , тогда

$$\Delta\tilde{x}_{1i} = \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| \gamma_i 2\pi/\omega,$$

$$\Delta\tilde{s}_i = (\|A\|_i \|x_{\text{var}}\| + M(1-\gamma_i))\gamma_i 2\pi/\omega.$$

Рассмотрим наихудший случай, когда амплитуда колебаний максимальна. Как видно, величины  $\Delta\tilde{x}_{1i}$ ,  $\Delta\tilde{s}_i$  зависят от скважности  $\gamma_i$ . Для начала определим скважности  $\gamma_i$  ( $i = \overline{1, p}$ ), при которых  $\Delta\tilde{s}_i$  максимальны. Вычисляя значение в точке экстремума, получим

$$\frac{\partial \Delta\tilde{s}_i}{\partial \gamma_i} = \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| 2\pi/\omega + M 2\pi/\omega - 4\gamma_i M \pi/\omega = 0;$$

$$\|A\|_i \|x_{\text{var}}\| + M - 2\gamma_i M = 0 \Rightarrow \gamma_{i \max} = \frac{1}{2} + \frac{\|A\|_i \|x_{\text{var}}\|}{2M}.$$

Принимая во внимание, что выражение для  $\Delta\tilde{s}_i$  представляет собой уравнение параболы с ветвями, направленными вниз, и с учетом  $\gamma_{i \max} > 0,5$  получим, что максимальное значение величины  $\Delta\tilde{s}_i$  на отрезке  $[0,5; 1]$  достигается в точке  $\gamma = \gamma_{i \max}$ :

$$\Delta\tilde{s}_{i \max} = \max_{\gamma_i \in [0,5; 1]} \Delta\tilde{s}_i = (M + \|A\|_i \|x_{\text{var}}\|)^2 \frac{\pi}{2\omega M} \quad (16)$$

где  $i = \overline{1, p}$ .

С учетом

$$\Delta \tilde{s}_i(1) = \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| 2\pi / \omega = \max_{\gamma_i \in [0, 5; 1]} \Delta \tilde{x}_{i1} < \Delta \tilde{s}_{i \max}$$

получим, что амплитуда колебаний переменной  $\tilde{x}_{i1}$  меньше колебаний  $\tilde{s}_i$ . Таким образом, для оценки “чаттеринга” необходимо использовать величину  $\Delta \tilde{s}_i$ .

Выше было показано, что до момента переключения  $t = t_i$  график переменной  $\tilde{s}_i(t)$  находится выше графика  $s_{i \text{ var}}(t)$ . Покажем теперь, что  $\tilde{s}_i(t)$  является мажорантой и на оставшемся интервале  $t \in [t_i; t_{0i} + 2\pi / \omega]$ .

С учетом  $\gamma_{i \max} \geq 1/2$  имеем

$$\frac{\gamma_{i \max}}{1 - \gamma_{i \max}} \geq 1 \Rightarrow \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_i} \geq \|A\|_i \|x_{\text{var}}\|.$$

В силу последнего неравенства и учитывая (15), можно положить  $\tilde{x}(t) \leq \dot{x}(t)$ ,  $t_i \leq t \leq t_{0i} + 2\pi / \omega$ .

Теперь рассмотрим движение в обратном времени для переменных  $\tilde{s}_i(t)$  и  $s_i(t)$  при  $t_{0i} + 2\pi / \omega \leq t \leq t_i$  и начальных условиях (8). Из последнего неравенства имеем  $\tilde{s}_i(-t) > s_i(-t)$ ,  $t_{0i} + 2\pi / \omega \leq t \leq t_i$ .

Учитывая полученные ранее результаты, можно утверждать, что справедливо неравенство  $\tilde{s}_i(t) > s_i(t)$ ,  $t_{0i} \leq t \leq t_{0i} + 2\pi / \omega$ , т.е. функция  $\tilde{s}_i^*(t)$  является мажорантой для  $s_i(t)$  (см. рис. 3). Следовательно, среднее значение переменной  $\tilde{s}_i(t)$  больше среднего значения на периоде от переменной  $s_i(t)$ . Иными словами, если обозначить через  $s_{i+}$  и  $-s_{i-}$  (см. рис. 3) максимальное положительное и минимальное отрицательное значение переменной  $\tilde{s}_i(t)$ , то

$$\Delta \tilde{s}_{i \max} / 2 \geq s_{i-}. \quad (17)$$

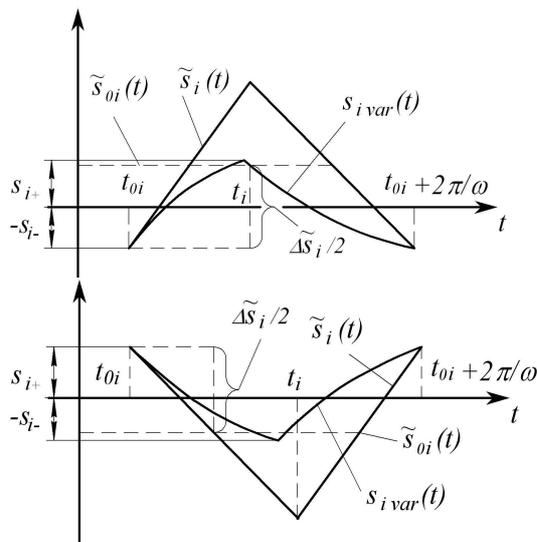


Рис. 3. Качественный вид переходных процессов для (9), (13)

Пусть теперь  $t_{0i}$  соответствуют моментам времени, когда компоненты вектора  $x(t)$  максимальны. Выберем по аналогии  $F(t)$  и  $\tilde{u}_{\text{var}}^*$  таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) \leq \dot{x}(t), & t_{0i} \leq t \leq t_i; \\ \tilde{x}(t) > \dot{x}(t), & t_i < t \leq t_{0i} + 2\pi / \omega \end{cases}$$

и для (13) существовал периодический процесс. Принимая для (13) начальные условия в виде  $\tilde{s}_i(t_{0i}) = s_{i+}$ ,  $i = \overline{1, p}$  и рассуждая, как и ранее, получим  $\tilde{s}_i(t) < s_i(t)$ ,  $t_{0i} \leq t \leq t_{0i} + 2\pi / \omega$ . На этот раз функция  $s_i(t)$  является мажорантой для  $\tilde{s}_i(t)$  (см. рис. 3). В силу последнего неравенства среднее значение переменной  $s_i(t)$  больше среднего значения на периоде от переменной  $\tilde{s}_i(t)$ , откуда следует, что

$$\Delta \tilde{s}_{i \max} / 2 \geq s_{i+}. \quad (18)$$

Объединяя (17), (18), получим оценку  $\Delta \tilde{s}_{i \max} / 2 \geq \|x_{\text{var}}\|$ . Поскольку  $\Delta \tilde{s}_{i \max}$  наибольшая для максимальной из строчных норм  $\|A\|_i$ , постольку из (16) и последнего неравенства получим оценки

$$\begin{aligned} \|x_{\text{var}}\| &\leq (M + \|A\| \|x_{\text{var}}\|)^2 \frac{\pi}{4\omega M}, \\ -\frac{\|A\|^2}{4M} \frac{\pi}{\omega} \|x_{\text{var}}\|^2 + \left(1 - \frac{\|A\| \pi}{2\omega}\right) \|x_{\text{var}}\| - M \frac{\pi}{4\omega} &\leq 0, \end{aligned}$$

где  $\|A\|$  – максимальная строчная норма некоторой строки матрицы  $A$ .

Для решения полученного неравенства рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \varphi(\|x_{\text{var}}\|) &= -\frac{\|A\|^2}{4M} \frac{\pi}{\omega} \|x_{\text{var}}\|^2 + \\ \left(1 - \frac{\|A\| \pi}{2\omega}\right) \|x_{\text{var}}\| - M \frac{\pi}{4\omega}. \end{aligned}$$

График данной функции представляет собой параболу с вершиной в точке  $\|x_{\text{var}}\| = \|x_{\text{var}}\|_0$ ,

$$\|x_{\text{var}}\|_0 = \frac{\left(1 - \frac{\|A\| \pi}{2\omega}\right) 2M\omega}{\|A\|^2 \pi}.$$

При  $1 - \frac{\|A\| \pi}{2\omega} > 0$  и  $\|A\| \neq 0$  имеем

$$\|x_{\text{var}}\|_0 > 0,$$

$$\varphi(\|x_{\text{var}}\|_0) = \left(1 - \frac{\|A\| \pi}{2\omega}\right) \frac{M\omega}{\|A\|^2 \pi} > 0,$$

$$\varphi(0) = -M\pi / (4\omega) < 0.$$

Таким образом, уравнение

$$-\frac{\|A\|^2 \pi}{4M \omega} \|x_{\text{var}}\|^2 + \left(1 - \frac{\|A\| \pi}{2 \omega}\right) \|x_{\text{var}}\| - M \frac{\pi}{4\omega} = 0 \quad (19)$$

может иметь два положительных корня, которые обозначим  $\|x_{\text{var}}\|_1$ ,  $\|x_{\text{var}}\|_2$ ,  $\|x_{\text{var}}\|_1 < \|x_{\text{var}}\|_2$ .

Тогда  $\varphi(\|x_{\text{var}}\|) \leq 0$  при

$$\|x_{\text{var}}\| \in [0; \|x_{\text{var}}\|_1] \cup [\|x_{\text{var}}\|_2; \infty),$$

где второй интервал открыт. Следовательно, то в качестве оценки нормы  $\|x_{\text{var}}\|$  выбираем наименьший корень уравнения (19), который в первом приближении равен

$$\|x_{\text{var}}\| \leq \left(1 - \frac{\|A\| \pi}{2 \omega}\right)^{-1} \frac{M\pi}{4\omega}.$$

Норма  $\|x_{\text{var}}\|$  оценивает максимальную амплитуду колебаний переменных  $s_i(t)$ , правая часть дифференциального уравнения которой содержит максимальную строчную норму  $i$ -й строки матрицы  $A$ . Полученная оценка максимальной амплитуды справедлива и для переменной  $\tilde{x}_1$  в силу

$$\Delta \tilde{x}_{1i} = \|A\|_i \|x_{\text{var}}\| \gamma_i 2\pi / \omega \leq \|A\| \|x_{\text{var}}\| 2\pi / \omega < \|x_{\text{var}}\|.$$

Согласно (16), (17), (18) оценки амплитуд колебаний для остальных переменных

$$\|s_i(t)\| \leq (M + \|A\|_i \|x_{\text{var}}\|) \pi / (4\omega M)$$

могут быть получены в виде

$$\|s_i(t)\| \leq (M + \|A\|_i \|x_{\text{var}}\|)^2 \pi / (4\omega M), \quad i = \overline{1, p}.$$

Рассуждения для второго случая (при  $t'_i > t_i$ ) проводятся в обратном порядке. Сначала рассматриваются движения (9), (13) в обратном времени при начальных условиях (8), а затем в прямом. При этом получают аналогичные результаты. Аналогичные выкладки получают и при  $\gamma_i < 1/2$ .

## 5. Заключение

В статье была рассмотрена проблема оценивания амплитуды установившихся колебаний при реализации управляющих воздействий исполнительными устройствами с различного рода нелинейностями. Была получена оценка максимальной амплитуды колебаний, которая может быть использована при синтезе алгоритмов управления, позволяющих осуществлять стабилизацию линейной системы общего вида с заданной точностью.

## 6. Литература

- [1] Филиппов А.Ф., “Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью”, *Матем. сб.* 1960. Т. 51. № 93:1. С. 99-128.
- [2] Айзерман М.А., Пятницкий Е.С. “Основы теории разрывных систем. Часть I”, *AuT*, 1974. № 7. С. 33-47.
- [3] *Системы автоматического управления с переменной структурой* / под редакцией Емельянова С.В., М.: Наука, 1967.
- [4] Уткин В.И., *Скольльзящие режимы в задачах оптимизации и управления*, М.: Наука, 1982.
- [5] *Modern sliding mode control theory (Series Lecture Notes in Control and Information Sciences)*, Bartolini, G., Fridman, L., Pisano, A., Usai, E, Ed. Berlin/Heidelberg: Springer, 2008. V. 375.
- [6] Фельдбаум А.А. *Электрические системы автоматического регулирования*, М.: Оборонгиз, 1957.
- [7] Bondarev A. G., Bondarev S. A., Kostylyeva N. Y., Utkin V. I., “Sliding modes in systems with asymptotic state observers”, *Automation and Remote Control*, 1985. V. 46. No. 6. P. 679-684.
- [8] Уткин В.И., Янг К.Д. Методы построения плоскостей разрыва в многомерных системах с переменной структурой, *AuT*, 1978. № 10. С. 72-77.
- [9] Цыпкин Я.З., *Релейные автоматические системы*, М.: Наука, 1974.
- [10] Нгуен К.Х., Уткин В.А. “Задачи управления двигателем постоянного тока”, *AuT*, 2006. №5. С. 102-118.
- [11] Красовский А.А., “О вибрационном способе линеаризации некоторых нелинейностей”, *AuT*, 1948. № 1. С. 34-42.
- [12] Кочетков С.А., “Подход к реализации алгоритмов управления на скольльзящих режимах при наличии неидеальностей актюаторов”, *Сборник трудов V всероссийской школы-семинара молодых учёных “Управление большими системами” УБС’08*, Липецк, 21 – 24 октября 2008.

# Геоинформационная технология исследования динамики взаимодействия геофизических пространственно-временных процессов

А.Б. Дерендяев<sup>1</sup>, В. Г. Гитис<sup>1</sup>, Г. А. Соболев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Учреждение РАН, Институт проблем передачи информации

<sup>2</sup>Учреждение РАН, Институт физики Земли

wintsa@gmail.com

## Аннотация

*Значительное развитие сетевой ГИС GeoТайм 2.0, позволило усовершенствовать геоинформационную технологию анализа взаимодействия пространственно-временных процессов. Для исследования технологии взято несколько тестовых регионов: Бишкекский полигон Научной станции РАН, на котором в течение ряда лет работают системы измерения деформаций земной поверхности (GPS), сейсмичности, глубинного электрического сопротивления и геомагнитного поля, высоко сейсмичный регион Северо-Западного Китая и регион Центральной Азии. В работе представлены методы и инструменты анализа взаимодействия геофизических процессов. Показано, что в пределах Бишкекского геодинамического полигона существует взаимосвязь полей сейсмичности и деформаций земной поверхности, обнаружены аномалии, предшествующие Ташаньскому и Сусамырскому землетрясениям.*

## 1. Введение

Поиск взаимосвязей различных геофизических полей является одним из перспективных направлений для исследования процессов, протекающих в различных оболочках Земли. К настоящему времени в мировом сообществе сложилось обоснованное тысячами исследований мнение, что динамика развития нашей планеты определяется нелинейным взаимодействием геологических, геофизических, геохимических, гидрогеологических и других факторов. К ней в большой мере применимы закономерности, вытекающие из физики неравновесных процессов. Однако, конкретной теории, применимой к многокомпонентной, гетерогенной и неоднородной системе, к которой относится Земля, пока не создано. Продолжается

сбор экспериментальных данных, описывающих различные поля планеты [3].

В данной работе рассматриваются методы геоинформационного анализа взаимодействия геофизических полей. Методы иллюстрируются несколькими примерами: сопоставлением сейсмичности с наблюдениями за горизонтальными деформациями земной поверхности с помощью GPS в западном фланге Северо-Тянь-Шаньской сейсмогенерирующей зоны (Бишкекский полигон Научной станции РАН), сопоставлением данных геофизического и геохимического мониторинга с процессом подготовки сильного землетрясения Северо-Западного Китая и с сопоставлением данных плотности сейсмического потока с процессом подготовки сильного землетрясения в Центральной Азии.

## 2. Технология анализа

При анализе взаимодействия процессов можно ожидать проявления нескольких типов связи. В одном случае динамика одного процесса может во многом определять динамику другого; это – прямая причинно-следственная связь. В другом случае сходная динамика обоих процессов есть отражение динамики некоторого другого известного или неизвестного процесса. Кроме того, нельзя исключать и нахождения в данных случайных связей, особенно, в условиях ограниченных во времени наблюдений.

Сетевые многофункциональные ГИС для исследования пространственно-временных процессов в настоящее время находятся в стадии становления. Наибольшее распространение имеют коммерческие сетевые серверные решения, такие, как ArcIMS ESRI, GeoMedia WebMap Intergraph, MapGuide Autodesk, MapXtreme, MapInfo. Характеристики серверных ГИС очень близки. Клиентское обеспечение этих систем, как правило, имеет весьма ограниченные возможности, такие, как, визуализация

изображений растровых карт в стандарте WMS, наложение на изображения слоев векторных данных и чтение атрибутов этих данных. Обращение к любой операции анализа или выполнение простейших операций визуализации (изменение масштаба, сдвиг, смена палитры и т.д.) выполняются на сервере, что практически лишает пользователя возможностей интерактивного исследования данных.

Для ГИС, предназначенных для научных исследований, важно обеспечить интерактивность операций анализа данных. Тесное взаимодействие интерактивных методов аналитического и визуального исследований обеспечивает основу пространственного и пространственно-временного когнитивного моделирования и существенно упрощает понимание исследуемого материала. В связи с этим более перспективными для анализа пространственно-временных процессов являются технологии, реализованные на клиентских системах, выполненных в виде Java-приложений. Эти технологии развиваются в сетевых ГИС, таких как, например, GeoТайм 2.0 (<http://www.geo.iitp.ru/geotime/index.htm>, ИППИ РАН), ГИС UPC (<http://www.unidata.ucar.edu/>, Unidata Program Center, Боулдер, США).

Архитектура ГИС GeoТайм 2.0 обладает тремя особенностями. ГИС реализована в виде Java-приложения и ее загрузка происходит с использованием технологии Java Web Start, которая является развитием технологии Java Applet. Применение технологии Java Web Start позволяет исключить негативное влияние веб-браузера на работу системы – в частности, устранить накладываемые им дополнительные ограничения по выделению оперативной памяти, что является критическим фактором, принимая во внимание значительный объем обрабатываемых пространственно-временных данных. Вторая особенность состоит в том, что система состоит из ядра и динамически загружаемых плагинов. Это позволяет пользователю изменять конфигурацию системы в зависимости от предметной области решаемых задач. Третья особенность архитектуры состоит в поддержке параллельных вычислений, которые могут выполняться на многопроцессорных или многоядерных ПК пользователя.

Сетевая ГИС GeoТайм 2.0 обладает многими уникальными функциями, необходимыми для анализа пространственно-временных процессов. Она позволяет совместно обрабатывать разнотипные данные: линии, полигоны, 4D каталоги землетрясений, координатно привязанные временные последовательности, 2D, 3D и 4D сеточные поля. Важной функцией является возможность динамической загрузки данных и плагинов. Система поддерживает

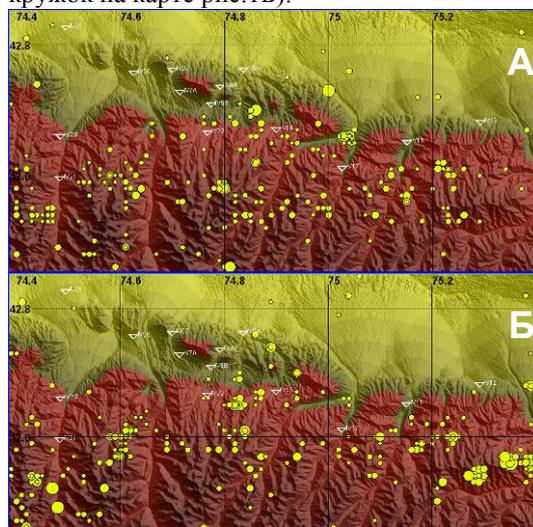
интерактивное управление визуализацией 2D, 3D и 4D сеточных и векторных слоев, анимационное представление точечных и сеточных слоев в любых двумерных проекциях. Аналитика системы включает в себя операции оценивания свойств пространственно-временных данных в виде 2D, 3D и 4D сеточных слоев, анализ и обнаружение аномалий, предшествующих землетрясениям.

### 3. Анализ взаимосвязи сейсмичности и деформаций земной поверхности

Исследовался Бишкекский полигон Научной станции РАН. Исходные данные представлены каталогом землетрясений и данными космической геодезии (GPS).

Сейсмический каталог охватывает период 1994-2008 гг. Было установлено, что для данной территории каталог является представительным, начиная от энергетического класса с  $K \geq 7.0$ . Каталог содержит 740 землетрясений.

Визуальный анализ каталога показал, что расположение землетрясений по площади заметно различалось до и после середины 2002 г. На рис. 1 нанесены эпицентры землетрясений энергетических классов от  $K = 7.0$  (кружки наименьшего размера) до  $K = 13.7$  (наибольший кружок на карте рис. 1Б).



**Рис. 1.** Расположение эпицентров землетрясений: (А) 01.01.1994 – 13.05.2002 гг., (Б) период 14.05.2002 – 31.12.2008 гг.

Сопоставление двух карт рис. 1А и 1Б показывает, что наибольшая активность после 13.05.2002 г. переместилась из центральной части рассматриваемой территории на восточную и западную области. Исходя из этого, территория была разделена на 3 зоны с условными названиями “Запад”, “Центр” и “Восток”. Их южные и северные границы имели координат 42.48 и 42.8 с.ш. Границы зон по долготе

проходили по координатам 74.4 – 74.7 – 75.1 – 75.42 в.д.

Данные GPS представляют собой временные последовательности горизонтальных компонент перемещений в направлении С-Ю (ось Y) и в направлении В-З (ось X) для 14 станций. Данные охватывают период с 23.07.1997 по 25.05.2007. Средний интервал наблюдений составляет 19 дней.

Очаги большинства землетрясений данного региона располагаются на глубинах 5 - 25 км, в то время как деформации определяются по данным космической геодезии (GPS) на поверхности земли. Взаимное влияние этих двух полей является проблематичным. Совместный анализ затрудняется небольшим количеством станций GPS и невысокой сейсмичностью.

Для построения карт деформаций были выполнены следующие операции. Временные последовательности измерения компонент перемещений С-Ю и В-З на станциях приведены путем интерполирования кубическим сплайном к синхронным временным рядам с шагом в 10 суток. Следующим шагом было сглаживание гауссовским фильтром с декрементом затухания 180 суток, т.е. повторялась процедура. Далее, по значениям рядов на неперекрывающихся 10-суточных интервалах рассчитаны компоненты скоростей перемещения С-Ю ( $V_x$ ) и В-З ( $V_y$ ) перемещения станций GPS. В целом, все станции на интервале 1997- 2007 гг. показывали движение на северо-восток под углами 23-45° относительно направления на север и со скоростями 1.4- 3.2 мм/год.

В системе ГеоТайм временные отсчеты рядов на всех станциях GPS для каждого временного среза пространственно интерполировались в 3D сеточный слой с помощью метода инверсных расстояний. При этом для произвольного временного среза значение поля в точке  $x$  определяется как

$$f(x) = \frac{\sum_{n=1}^N u_n \rho(x, x_n)^{-p}}{\sum_{n=1}^N \rho(x, x_n)^{-p}}, \quad (1)$$

где  $N$  – число станций,  $u_n$  – наблюдение на станции  $n$ ,  $\rho(x, x_n)$  – евклидово расстояние между станцией  $n$  и точкой  $x$ ,  $p$  – степень (в данном эксперименте бралось  $p=2$ ). По сеточным слоям компонент скоростей  $V_x$  и  $V_y$  были вычислены векторные 3D слои скоростей, а также 3D слои скоростей деформаций  $\frac{\partial V_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V_y}{\partial y}$ ,

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

Анализ выполнялся с помощью одновременной анимационной визуализации изменения нескольких слоев: слоя эпицентров землетрясения на интервале от 0.5 года до одного года, векторного слоя скоростей, представленных в виде стрелочек и одного из слоев скорости деформации.

Векторное поле скоростей  $V$  на дату 01.06.1998 г. отражает согласованное движение на северо-восток под углами 20-30° с повышенной скоростью на участке 74.6 – 74.8 в.д. Значительное изменение направлений и амплитуд  $V$  произошло в 2000-2001 гг. На момент сильного на рассматриваемой территории землетрясения 16.01.2004 г.,  $K = 13.7$ , координаты эпицентра [42,54 с.ш.- 75.29 в.д.], глубина  $H = 13$  км (большой кружок на рис.2), скорости движения  $V$  сильно возросли восточнее градуса 75.2 в.д. и направлены на север. Проявилась существенная разница в движении этого участка по сравнению с предыдущими периодами. В зоне “Запад” отмечена область несогласных движений между станциями.

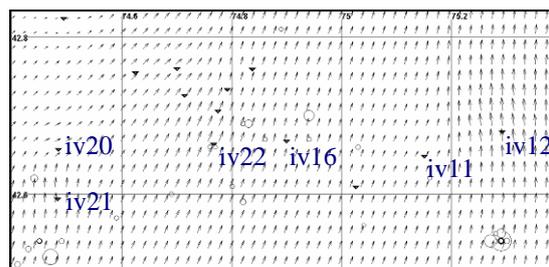


Рис. 2. Карта векторов скорости движений по данным GPS на 17.01.2004 и эпицентры землетрясений за годичный интервал до этой даты.

Следующая карта (рис. 3) относится к интервалу до 01.03.2006 г. При сопоставлении с предыдущей картой выявляются существенные отличия. Наибольшие изменения в поле  $V$  отмечены в зоне “Восток”, где произошел поворот векторов на восток практически на 90°.

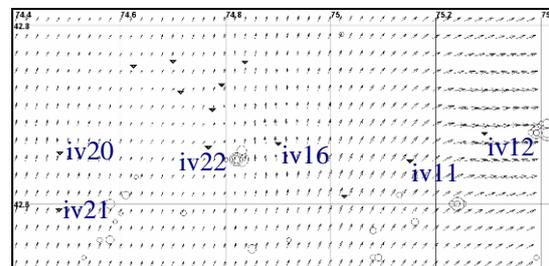


Рис. 3. Карта векторов скорости движений по данным GPS на 01.03.2006 и эпицентры землетрясений за годичный интервал до этой даты.

Здесь отмечены землетрясения 28.12.2005,  $K = 11.9$  и 01.01.2006,  $K = 11.0$ . Кроме того, в конце

2006 г. на юго-востоке зоны случилось событие  $K = 13.4$  с координатами [42,56 с.ш.- 75.35 в.д.] на глубине  $H = 18$  км (на рис. 3 не показано).

Из анализа модели векторных полей скорости  $\mathbf{V}$  следует, что в некоторых участках рассматриваемой территории появлялись и исчезали области несогласованных по направлению и амплитуде движений земной поверхности. Это могло означать, что во время повышения сейсмической активности и появления сильных землетрясений возрастал градиент поля скоростей деформаций  $\mathbf{V}$  между станциями GPS.

Для количественного изучения динамики связи горизонтальных деформаций земной поверхности и сейсмичности были вычислены 3D сеточные поля дивергенции

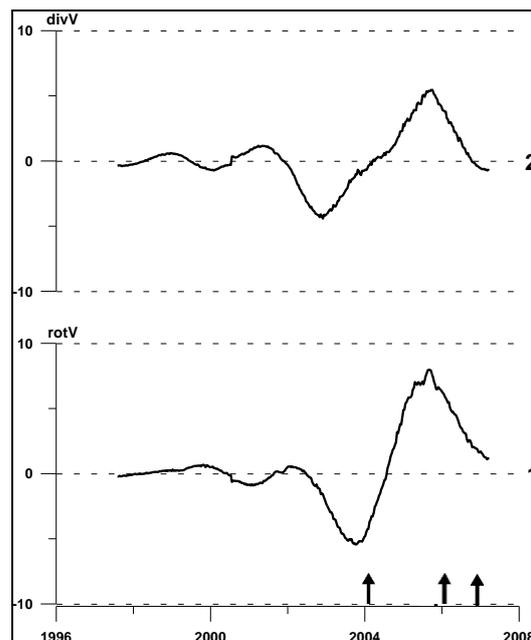
$$\text{div}(\mathbf{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad \text{ротора}$$

$$\text{rot}(\mathbf{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad \text{поля} \quad \text{скорости}$$

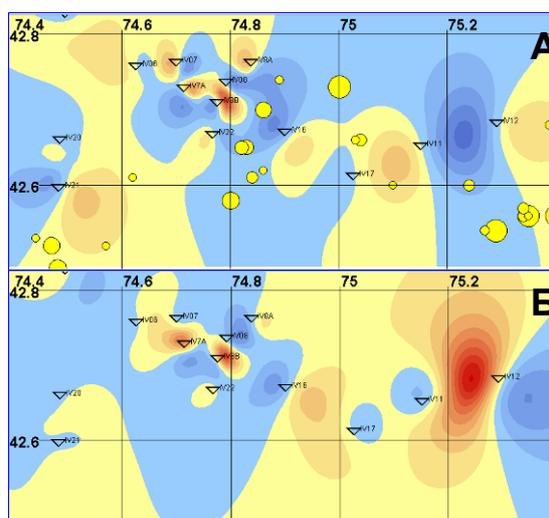
деформаций

В условиях небольшого количества станций GPS некорректно исследовать динамику этого процесса в удаленных от станций областях исследуемой территории. Продемонстрируем результаты расчетов для точек, находящихся посередине между станциями: 1) iv11 – iv12, “Восток”; 2) iv16 – iv22, “Центр”; 3) iv20 – iv21, “Запад”, где отмечалось несогласие поля скоростей.

На рис. 4 представлены графики  $\text{div}(\mathbf{V})$  и  $\text{rot}(\mathbf{V})$  для точки с координатами [42.66 с.ш. – 75.23 в.д.] между станциями iv11, iv12. Значительные вариации отмечены после 2003 года, что в целом отвечает усилению сейсмической активности в зоне “Восток” (графики 1,2 рис. 4) и возникновению там сильных землетрясений. Последние, начиная с классов  $K > 10$ , обозначены на рис. 4 стрелками. Экстремумы графиков указывают на большие градиенты поля амплитуд  $\mathbf{V}$  и направлений движений. Местоположение минимума на дату 30.11.2002 г. и максимума – 28.09.2005 г. параметра  $\text{div}(\mathbf{V})$  изображено на рис. 5 А, Б; они располагаются между станциями iv11 и iv12. На остальной территории полигона столь ярких экстремумов в этот период не наблюдалось. Минимум 2003 г. и максимум 2005 г. параметра  $\text{rot}(\mathbf{V})$  также приурочены к этой области (рис. 6А,Б). Они превосходят по амплитуде другие экстремумы на территории полигона. Переход от минимума к максимуму графика 1 рис. 4 в 2004-2005 гг. соответствует быстрому изменению направления движения от северного к восточному станции GPS iv12 (рис.2-3).



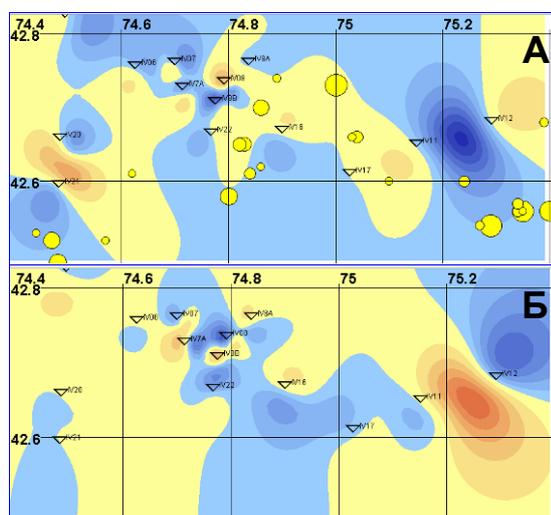
**Рис. 4.** Вариации  $\text{div}(\mathbf{V})$  (а) и  $\text{rot}(\mathbf{V})$  (б) в зоне “Восток”; точка с координатами [42.66 с.ш. – 75.23 в.д.] между станциями GPS iv11, iv12. Стрелками обозначены времена землетрясений энергетического класса  $K > 10$  в этой зоне.



**Рис. 5.** Карта значений  $\text{div}(\mathbf{V})$  и эпицентры землетрясений с  $K \geq 10$  на 30.11.2002 г. (а) и 28.09.2005 г.(б).

Графики  $\text{div}(\mathbf{V})$  и  $\text{rot}(\mathbf{V})$  в зоне “Центр” для точки с координатами [42.67 с.ш. – 74.83 в.д.] между станциями iv16 и iv22 показаны на рис. 7. Экстремумы 1999 г. и 2000 г. совпадают с усилением сейсмической активности. В этот период в данной зоне произошли 4 из 9 событий  $K \geq 10$ . Остальные сильные землетрясения в зоне “Центр” случились в 2004-2006 годах. Параметр  $\text{rot}(\mathbf{V})$  испытывал столь же резкие изменения, как и в 1999 - 2000 г., но график  $\text{div}(\mathbf{V})$  демонстрирует лишь постепенное возрастание.

Экстремумы  $\text{rot}(\mathbf{V})$  в 1999-2000г и 2004-2006 г., а также минимум  $\text{div}(\mathbf{V})$  в 1999 г. располагались по площади в полосе несогласованных движений между станциями iv16 и iv22.



**Рис. 6.** Карта значений  $\text{rot}(\mathbf{V})$  и эпицентры землетрясений с  $K \geq 10$  на 16.09.2003 г. (а) и 28.08.2005 г. (б).

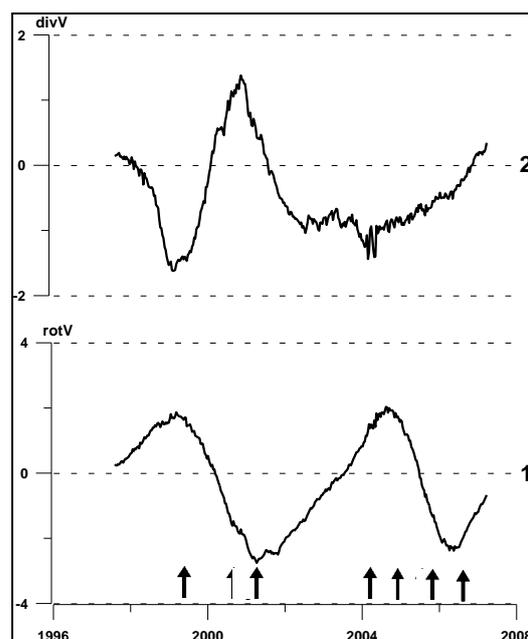
На рис. 8 даны графики  $\text{div}(\mathbf{V})$  и  $\text{rot}(\mathbf{V})$  в зоне “Запад” для точки с координатами [42.64 с.ш. – 74.48 в.д.] между станциями iv20 и iv21. Серия землетрясений  $K > 10$  продолжалась с конца 2002 г. по май 2004 г. Начиная с 2003 г., параметр  $\text{div}(\mathbf{V})$  испытывал быстрое понижение, а параметр  $\text{rot}(\mathbf{V})$  находился в области широкого максимума. Местоположение обоих экстремумов находилось в полосе несогласованных движений широтного простираения между станциями iv20 и iv21.

Рис. 4,7,8 позволяют предположить, что сильные землетрясения в основном происходили в периоды быстрого изменения  $\text{div}(\mathbf{V})$  и  $\text{rot}(\mathbf{V})$  или их экстремальных значений в рассматриваемых 3-х зонах. Проведем небольшой статистический анализ.

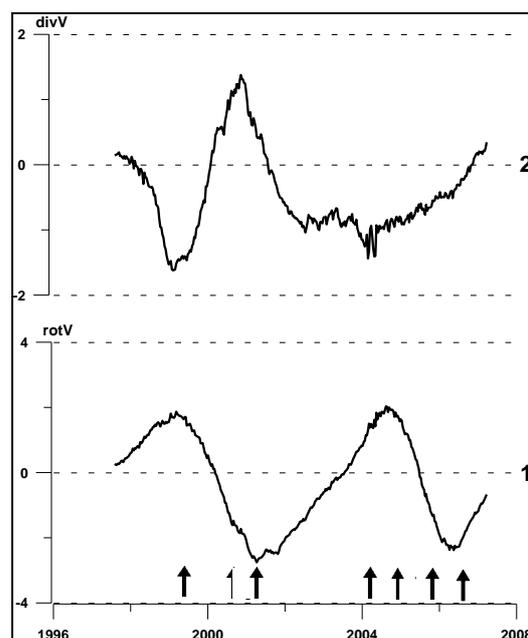
Предположим, что наблюдается пуассоновский поток событий. Выделим на интервале наблюдения  $T$  временной необязательно односвязанный подинтервал  $T_1$  (т.е. подинтервал может состоять еще из нескольких подинтервалов). Пусть на интервале  $T$  всего было  $N$  событий. Из них  $N_1$  попало на интервал  $T_2$ . Если события «выпадают» на интервал случайно и независимо в совокупности, то вероятность попадания  $N_1$  событий из  $N$  подчиняется биномиальному распределению и определяется по формулам

$$p_N(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}, \quad (2)$$

$$\text{где } p = \frac{T_1}{T}, \quad C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$



**Рис. 7.** Вариации  $\text{div}(\mathbf{V})$  (а) и  $\text{rot}(\mathbf{V})$  (б) в зоне “Центр”; точка с координатами [42.67 с.ш. – 74.83 в.д.] между станциями GPS iv16, iv22. Стрелками обозначены времена землетрясений энергетического класса  $K > 10$  в этой зоне.



**Рис. 8.** Вариации  $\text{div}(\mathbf{V})$  (а) и  $\text{rot}(\mathbf{V})$  (б) в зоне “Запад”; точка с координатами [42.64 с.ш. – 74.48 в.д.] между станциями GPS iv20, iv22. Стрелками обозначены времена землетрясений энергетического класса  $K > 10$  в этой зоне.

Уровень значимости того, что число «успехов»  $N_1$  не подчиняется биномиальному распределению, и попадание в интервал  $T_1$  не является случайным, равен

$$\alpha = \sum_{n=N_1}^N p_N(n) \quad (3)$$

В таблицу 1 включены землетрясения  $K > 10$  без афтершоков, попавшие в зоны “Восток”, “Центр” и “Запад” в период 1998 - 2006 гг. (когда имеются данные станций GPS). Каждое землетрясение, естественно, учитывалось только 1 раз (в соответствующей зоне).

В каждой зоне выделены главные максимумы и минимумы и не учитывались экстремумы, амплитуда которых составляла менее 1/3 от главных экстремумов. В зоне “Восток” выделены 2 экстремума rot V: 16.09.2003 (минимум), 28.08.2005 (максимум) и 2 экстремума div V: 30.11.2002 (минимум), 28.09.2005 (максимум), что соответствует рис. 8. В зоне “Центр” выделены 4 экстремума rot V: 06.03.1999 (максимум), 07.04.2001 (минимум), 12.08.2004 (максимум), 26.06.2006 (минимум) и 3 экстремума div V: 04.02.1999 (минимум), 09.11.2000 (максимум), 24.02.2004 (минимум), что соответствует рис.12. В зоне “Запад” выделены 3 экстремума rot V: 23.09.1999 (максимум), 18.04.2001 (минимум), 14.02.2004 (максимум) и 1 экстремум div V: 05.01.2004. (минимум), что соответствует рис. 8. В качестве “тревожных” рассматривались интервалы продолжительностью 1 год по 0.5 года назад и вперед от даты соответствующего экстремума.

**Таблица 1.** Землетрясения  $K \geq 10$  в 3-х зонах и их попадание в область экстремумов rot(V) и div(V)

Дата	Время	Широта	Долгота	Глубина	Класс	Rot(V)	Div(V)
Зона “Восток”, Lat [42.48-42.8], Long [75.1-75.42]							
2004.01.16	09:06:17	42.54	75.29	13	13.7	+	-
2005.12.28	01:52:48	42.68	75.41	12	11.9	+	+
2006.01.01	08:56:53	42.60	75.24	22	11.0	+	+
2006.11.08	02:21:26	42.56	75.35	18	13.4	-	-
Зона “Центр”, Lat [42.48 - 42.8], Long [74.7 - 75.1]							
1999.05.24	07:39:21	42.66	75.04	6	10.7	+	+
2000.07.28	08:56:26	42.58	74.80	16	11.2	-	+

2000.12.14	23:47:48	42.62	74.86	12	10.2	+	+
2001.02.21	12:15:16	42.73	75.00	1	11.7	+	+
2004.02.13	02:01:08	42.74	74.89	19	10.3	+	+
2004.11.27	12:42:54	42.61	74.84	15	10.6	+	-
2005.07.07	19:22:05	42.65	74.83	11	10.9	-	-
2005.10.03	09:28:26	42.65	74.82	11	10.8	-	-
2006.08.15	18:58:22	42.60	75.10	10	10.2	+	-
Зона “Запад”, Lat [42.48 - 42.8], Long [74.4 - 74.7]							
2002.12.08	22:00:59	42.53	74.44	14	10.1	-	-
2003.02.21	10:35:22	42.52	74.47	13	11.7	-	-
2003.10.06	16:42:13	42.49	74.48	16	11.9	+	+
2004.13.22	22:37:09	42.61	74.62	12	10.2	+	+

Полный временной интервал по трем непересекающимся областям за 1998-2006 включительно составил  $9 \cdot 3 = 27$  лет. Всего в пределах 3-х зон случилось 17 землетрясений  $K \geq 10$ . В тревожные интервалы параметра rot(V) (за 9 лет) попало 11 событий. В тревожные интервалы параметра div(V) (за 6 лет) попало 9 событий. Знаками + в таблице 1 отмечены события, попавшие в тревожный интервал и знаками - не попавшие. Расчеты показали, что величина параметра уровня значимости  $\alpha = 0.0019$  для rot(V), и  $\alpha = 0.0012$  для div(V). Это означает, что с вероятностью  $> 99\%$  можно принять гипотезу 1: сильные землетрясения не случайно происходили в периоды экстремальных значений указанных параметров.

Отметим, что только 6 из 11 попавших в тревожные интервалы землетрясений случились после экстремумов rot(V) и 6 из 9 – после экстремумов div(V). Соответственно, нет оснований считать появление экстремума rot V или div V надежным прогностическим признаком. Возможно, прогностическую вероятность можно будет оценить при более длительных и обширных наблюдениях. Это является перспективной задачей, так как комплексирование разных признаков и полей повышает надежность прогноза землетрясений [3].

#### 4. Обнаружение предвестников землетрясений

При решении задач прогноза природных катастроф требуется оценить пространственно-

временные и энергетические характеристики возможного события, такие как, например, время и координаты события, зону воздействия, распределение энергии и спектральные характеристики воздействия. Прогноз землетрясений основан на том, что процесс подготовки сопровождается пространственно-временными аномалиями характеристик геологической среды в некоторой окрестности будущего события. Эти аномалии связаны с накоплением потенциальной энергии и постепенным переходом геологической среды от фазы упругих деформаций в фазу пластических деформаций. Аномалии проявляются в результате изменения физических свойств геологической среды и, прежде всего, в изменении ее структуры и отклика на динамические воздействия. Для измерения динамических свойств геологической среды используются системы сейсмологического, геофизического, гидрогеологического, геохимического и геодезического мониторинга. Наиболее распространенным типом данных являются каталоги землетрясений. Для каждого события они содержат три пространственные координаты эпицентра землетрясения, время, энергетическую характеристику (обычно магнитуду) землетрясения и некоторые дополнительные параметры.

Сейсмологами разработан ряд функционалов, с помощью которых по последовательностям землетрясений оцениваются временные ряды параметров сейсмического потока [2,3]. Прогноз землетрясений основан на выявлении аномалий в этих временных рядах. Аномалии, которые предшествуют землетрясениям, называются предвестниками.

Основная идея технологии анализа пространственно-временных процессов в системе GeoТайм состоит в дополнении традиционного анализа отдельных временных рядов 3D сеточных (растровых) динамических полей [4]. Здесь под сеточным динамическим полем понимается функция двух или трех пространственных и временной координат, заданная на регулярной сетке (3D или 4D растре). Динамические поля вычисляются по каталогам землетрясений и по временным рядам измерений, регистрируемых станциями геофизического, гидрогеологического, геохимического и геодезического мониторинга. Представление данных в виде пространственно-временного растра позволяет более полно по сравнению с представлением динамики подготовки землетрясения в виде временных рядов наблюдать процессы, развивающиеся во времени и в пространстве.

Выявление предвестников землетрясений в технологии GeoТайм 2.0 базируется на предположении о том, что геологическая среда неоднородна в пространстве, но в обычном

состоянии имеет стационарную динамику, которая нарушается при подготовке геологической катастрофы. Считается, что анализируемые последовательности стационарны, а в процессе подготовки землетрясения изменяются некоторые их статистические характеристики. Для обнаружения аномалий анализируется временная последовательность значений каждого элемента пространственного растра. При этом текущий временной интервал значений временного ряда в элементе растра разбивается на два последовательных подынтервала, длительности, которых задаются пользователем, исходя из контекста решаемой задачи. Тем самым задача сводится к сравнению двух случайных выборок, относящихся к подынтервалам. Каждая выборка считается стационарной и однородной в вероятностном смысле. На каждом интервале выборки подчиняются некоторому вероятностному распределению. Проверка гипотезы о совпадении параметров этих распределений осуществляется с помощью некоторой статистики, вид которой зависит от статистической модели анализируемых динамических полей. Тем самым задача сводится к проверке гипотезы о совпадении (различии) параметров этих распределений. В ГИС GeoТайм 2.0 проверка такой гипотезы осуществляется с помощью статистики, которая равна отношению разности средних значений в двух окнах к среднеквадратичному отклонению этой разности. Среднее значение в заднем во времени окне характеризует квазистационарный фон. Для получения более точной оценки длительность заднего окна выбирается достаточно большой. Значения, попадающие в переднее окно, могут относиться к фону или к аномалии. В первом случае среднее значение в переднем окне будет мало отличаться от среднего значения в заднем окне. Во втором случае разность средних будет более значимой. Для нормировки разность средних делится на дисперсию этой разности. Тогда при отсутствии аномалии в переднем окне значения статистики будут флуктуировать с нулевым средним и единичной дисперсией. При наличии в переднем окне аномальных значений можно ожидать значимых положительных или отрицательных отклонений. Длительность переднего окна обычно выбирается соизмеримой с длительностью возможного аномального сигнала. В ГИС GeoТайм 2.0 реализованы несколько методов оценивания обсуждаемой статистики: оценивание для модели с независимыми гауссовскими последовательностями, для модели марковского процесса и метод эмпирического оценивания.

Визуализация пространственно-временной аномалии дает качественное представление о

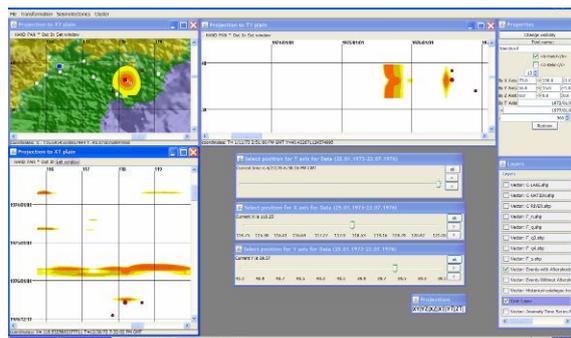
предвестнике землетрясения. Однако при прогнозе землетрясения с заданной магнитудой надо формально предсказать место и время события. Предположим, что значения аномалии отражают механизм развития очага подготовки ожидаемого события. Пусть амплитуда аномалии максимальна в центре зоны подготовки очага землетрясения и экспоненциально уменьшается по пространству к краям. В ГИС ГеоТайм 2.0 в каждом временном срезе 3D сеточного слоя аномалий ищется область, значения в которой с достаточной малой ошибкой аппроксимируются гауссианом. Подбираемыми параметрами гауссиана являются координаты центра, высота и декремент затухания. Для оценки степени уверенности в наличии искомой аномалии используется нормированная величина точности аппроксимации аномалии гауссианом, которая изменяется от 0 до 1.

Рассмотрим пример обнаружения предвестников Таншаньского землетрясения 28.07.1976, магнитуда  $M=7.9$  [1].

Входными данными являлись 10 координатно-локализованных временных рядов, представляющих ежесуточные геофизические, геодезические и геохимические измерения с 1972 по 1976 гг.

На первом шаге ряды были нормализованы и стандартизованы. После этой операции ряды интерпретировались единообразно: как отклик геологической среды на изменение ее напряженного состояния. На втором шаге с помощью инверсной интерполяции вычислено 3D сеточное поле отклика геологической среды. На третьем шаге вычислено 3D сеточное поле аномалий отклика геологической среды [4]. Срезы этого поля в проекциях на плоскости  $XU$ ,  $XT$ ,  $YT$  (ось  $X$  соответствует долготе, ось  $Y$  – широте и ось  $T$  – времени), представляющие зону пространственно-временной аномалии, предшествующей Таншаньскому землетрясению, представлены на рис. 9. На рисунке аномалии показаны оранжевым цветом. Белыми кружками показаны станции гео мониторинга. Красными кружками показаны эпицентры землетрясений с магнитудой  $M \geq 6.8$ . Кроме аномалии, предшествующей Таншаньскому землетрясению, на проекциях  $XT$ ,  $YT$  можно видеть региональные аномалии, обусловленные сезонными циклами.

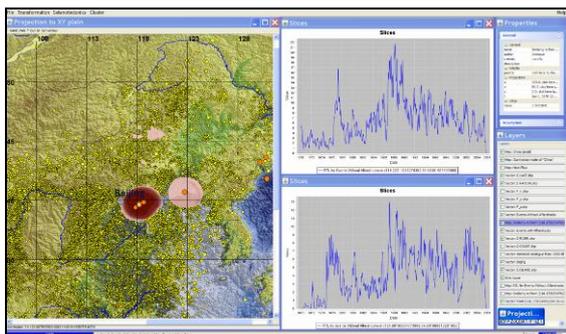
Таншанское землетрясение является одним из сильнейших землетрясений Китая. Представляет интерес сопоставить динамику сейсмического потока в окрестности эпицентра Таншаньского землетрясения с динамикой сейсмичности всех точек Северо-Восточного Китая.



**Рис. 9.** Образ предвестника Таншаньского землетрясения в проекциях на плоскости  $XU$ ,  $XT$ ,  $YT$  (зона оранжевого цвета в окрестности эпицентра Таншаньского землетрясения). Белыми кружками показаны станции гео мониторинга. Красными кружками показаны эпицентры землетрясений с магнитудой  $M \geq 6.8$ . Кроме аномалии, предшествующей Таншаньскому землетрясению, на проекциях  $XT$ ,  $YT$  можно видеть региональные аномалии, обусловленные сезонными циклами.

Для анализа использовался каталог землетрясений Института наук о землетрясениях Китайской Администрации по землетрясениям. Каталог был очищен от афтершоков и состоял из 101447 событий с 1970 по 2007 гг. каталог являлся представительным с магнитуды  $M \geq 2.0$ . В данном примере для анализа использовалась 3D сеточная модель поля плотности эпицентров землетрясений. Значения поля пропорциональны числу эпицентров в цилиндре радиуса 100км и образующей 200 дней. Сходство оценивалось по величине коэффициента корреляции временных рядов плотности эпицентров землетрясений между точкой, представляющей эпицентр Таншаньского землетрясения и всем остальными точками карты.

Результат представлен на рис 10. На рисунке показана модель рельефа, желтым нанесены эпицентры землетрясений, красным цветом выделены области, в которых сходство динамики сейсмического процесса с его динамикой в эпицентре Таншаньского землетрясения (белый кружок с координатами,  $x^*=118.222^\circ$ ,  $y^*=39.663^\circ$ ) более 0.4. К востоку от Таншаньского землетрясения выделена большая область в центре которой находится эпицентр сильного землетрясения с магнитудой  $M = 7.4$ . Справа показаны два графика: верхний график показывает значения временного ряда плотности эпицентров землетрясений в эпицентре Таншаньского землетрясения, нижний график показывает аналогичные вариации плотности землетрясения в точке  $x=124.082^\circ$ ,  $y=39.902^\circ$ , относящейся к выделенной области. Коэффициент корреляции между временными рядами плотности эпицентров составляет 0.59.



**Рис. 10.** Пространственные области, в которых динамика сейсмического процесса сходна с его динамикой в эпицентре Таншаньского землетрясения (белый кружок с координатами,  $x^*=118.222^\circ$ ,  $y^*=39.663^\circ$ ). Желтые кружки – эпицентры землетрясений. Области со значениями сходства более 0.4 выделены красным цветом. Справа показаны два графика: верхний график показывает значения временного ряда плотности эпицентров землетрясений в эпицентре Таншаньского землетрясения, нижний график показывает аналогичные вариации плотности землетрясения в точке  $x=124.082^\circ$ ,  $y=39.902^\circ$ . Коэффициент корреляции между временными рядами плотности эпицентров составляет 0.59.

Второй пример относится к анализу пространственно-временных предвестников Сусамырского землетрясения.

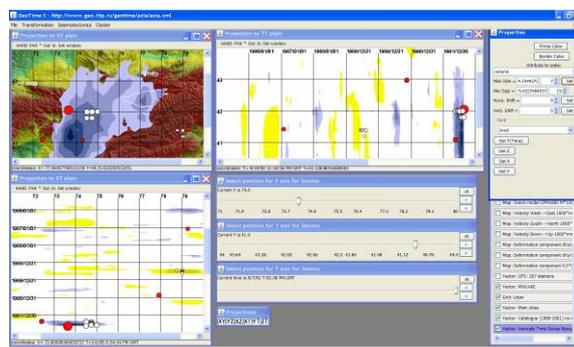
Сусамырское землетрясение произошло 19.08.1992 г. Энергетический класс землетрясения  $K=17$  (это соответствует магнитуде землетрясения 7.2), координаты эпицентра  $\lambda=73.63^\circ$  ВД и  $\varphi=42.06^\circ$  СШ. Для анализа использовался каталог со снятыми афтершоками землетрясений. Предварительная обработка каталога выполнена в ИФЗ РАН. Каталог покрывает территорию  $40.4^\circ - 44^\circ$  СШ и  $71^\circ - 81^\circ$  ВД и относится к периоду 1980 - 2001 гг. В каталоге представлено 16329 событий энергетического класса  $K$  от 7 до 17. Для исследования предвестников Сусамырского землетрясения использовался подкаталог, который заканчивался за 1 день до землетрясения.

Для анализа мы использовали плотность эпицентров землетрясений, которая равна отношению числа землетрясений в окне оценивания к произведению площади окна на его временной интервал. При оценивании использовались следующие параметры цилиндрического окна: радиус окна  $R=100$  км, образующая  $T=10$  дней. 3D сеточное поле плотности эпицентров построено в сетке с шагом по долготе  $\Delta\lambda=0.3^\circ$ , по широте  $\Delta\varphi=0.2^\circ$  и по времени  $\Delta T=10$  дней. Далее вычислен 3D сеточный слой аномалий.

На следующем шаге производится оценивание временных рядов параметров 3D сеточного слоя

аномалий: степени уверенности в том, что на соответствующем временном срезе присутствует одна аномалия, которая достаточно хорошо аппроксимируется гауссианом, координат центра гауссиана, декремента затухания гауссиана, амплитуды и объема гауссиана.

На рис 11. показаны результаты анализа аномалий в проекциях на плоскости  $XU$ ,  $TU$  и  $XT$ .



**Рис. 11.** Образ предвестника Сусамырского землетрясения. Окна  $XU$ ,  $XT$ ,  $TU$  представляют проекции 3D поля аномалий. Интенсивности желтого и синего цветов соответствуют значимости значений положительных и отрицательных аномалий. Увеличение интенсивности тона соответствует увеличению значимости аномалии. Проекция  $XU$  соответствует моменту времени  $T=28.07.1992$  (21 день до землетрясения), проекция  $XT$  соответствует значению координаты  $Y=41^\circ$ , проекция  $TU$  соответствует значению координаты  $X=74^\circ$ .

Проекция на плоскость  $XU$  показывает сильную отрицательную аномалию. Землетрясения с  $M \geq 5.5$  показаны на всех проекциях красными кружками. Круг наибольшего размера соответствует Сусамырскому землетрясению. Белые кружки показывают координаты гауссианов, которые аппроксимируют аномалии с достаточно высокой точностью. На рисунке можно видеть две такие аномалии. Малые белые кружки соответствуют положительной аномалии, которая не связана с сильным землетрясением. Большие белые кружки соответствуют положительной аномалии, которая предшествует Сусамырскому землетрясению. Данный подход может быть использован для прогноза землетрясений.

## 5. Заключение

Сетевая геоинформационная технология разрабатывается для исследования пространственно-временных процессов. Существенными характеристиками технологии являются: (1) сетевой доступ к распределенной географической информации (ГИ), которая может

распределена на различных сетевых серверах и на компьютере пользователя, (2) современные методы извлечения существенной информации из пространственно-временных данных, реализованные с помощью операций, не требующих от специалиста проблемной области специальной подготовки в области геоинформатики, (3) высокая интерактивность и наглядность анализа, повышающая эффективность принятия решений.

В работе рассмотрены элементы технологии применения сетевой ГИС ГеоТайм 2.0 для анализа взаимодействия геофизических полей. Методы проиллюстрированы несколькими примерами решения задач поиска связей между различными геофизическими процессами: задачей сопоставления сейсмичности с горизонтальными деформациями земной поверхности, сопоставлением данных геомониторинга с процессом подготовки сильного землетрясения Северо-Западного Китая и с сопоставлением пространственно-временной оценки плотности сейсмического потока с процессом подготовки сильного землетрясения в Центральной Азии. Во всех трех примерах найдены значимые связи между процессами. Результаты показывают эффективность разработанной технологии.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что реализованная в ГеоТайм 2.0 поддержка параллельных вычислений на многопроцессорных или многоядерных ПК пользователя не всегда обеспечивает приемлемое время анализа 3D и 4D массивов геоданных. Кроме того существует тенденция к увеличению потоков данных от систем мониторинга Земли, которые в ряде случаев необходимо обрабатывать в реальном времени. Это указывает на необходимость создания новой сетевой

геоинформационной технологии, которая наряду с ПК пользователя использует для интенсивных вычислений распределенные платформы с высокопроизводительными вычислительными ресурсами. Современный подход к решению данной проблемы состоит в погружении аналитического инструментария геоинформационных сетевых систем в грид-инфраструктуру. Это позволит создать интегрированную геоинформационную среду, которая обеспечит возможность анализа распределенных информационных потоков данных с помощью распределенных вычислительных ресурсов и инструментальных средств.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-07-12077-офи\_м и 09-07-00154-а. Авторы выражают благодарность сотрудникам ИФЗ РАН и Научной станции РАН Н. А. Закржевской, К. Н. Акатовой, В. Д. Брагину, Н. Сычевой и С. И. Кузикову за предоставленные данные и полезные замечания.

## 6. Литература

- [1] Пономарев А.В., Соболев Г.А., Гитис В.Г., Чжан Чжаочэн, Ван Гусюан, Чин Синси, «Комплексный анализ геофизических полей для обнаружения пространственно-временных предвестников землетрясений», *Вестник ОГГГН РАН*, 4 (10), 1999. [http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h\\_dgggms/4-99/komp-an.zip](http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h_dgggms/4-99/komp-an.zip)
- [2] Соболев Г.А., *Основы прогноза землетрясений*, М.: Наука, 1993, с.313.
- [3] Соболев Г.А., Пономарев А.В., *Физика землетрясений и предвестники*, М.: Наука, 2003, с. 270.
- [4] V.G. Gitis, B.V. Osher, S.A. Pirogov, A.V. Ponomarev, G.A. Sobolev, E.F. Jurkov, "A System for Analysis of Geological Catastrophe Precursors", *Journal of Earthquake Prediction Research*, vol. 3, 1994, pp. 540-555.

# НЕМАНИПУЛИРУЕМЫЕ МЕХАНИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ НА ГРАФОВЫХ МОДЕЛЯХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Коргин Н.А.

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва*

[nkorgin@ipu.ru](mailto:nkorgin@ipu.ru)

## Аннотация

*Типовой задачей управления в социально-экономических (в т.ч. организационных) системах является задача распределения ограниченных ресурсов для обеспечения эффективного функционирования и развития системы. В настоящее время достаточно популярным является подход, когда исследуемая организационная система представляется в виде графа (например, когнитивной карты для сценарного моделирования). В докладе формулируются постановка задачи распределения ресурсов на графовой модели, проблема манипулируемости и оптимальности механизмов распределения ресурсов, результаты, полученные ранее при решении задач распределения ресурсов в организационных системах, распространяются на графовые модели.*

## 1. Введение

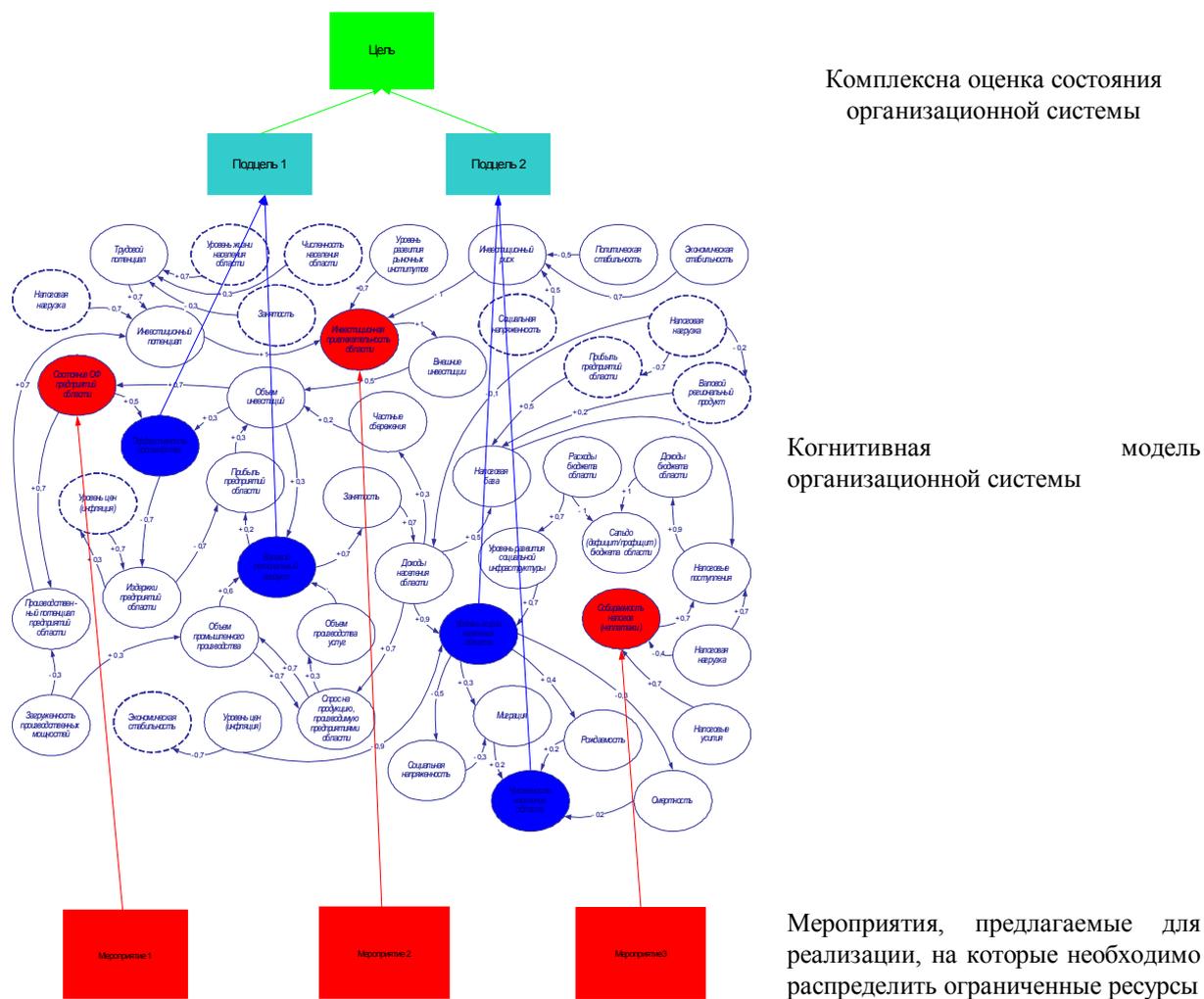
Одной из типовых задач управления в социально-экономических (в т.ч. организационных) системах является задача распределения ограниченных ресурсов для обеспечения эффективного функционирования и развития системы. Проблеме построения эффективных механизмов распределения ресурсов в организационных системах посвящено много работ, а результаты, полученные в них стали уже «классическими». В настоящее время достаточно популярным является подход, когда исследуемая организационная система представляется в виде графа – когнитивные карты и карты причинно-следственных связей для сценарного моделирования, сетевые модели социальных сетей, вычислительные сети и т.д. В докладе формулируются постановка задачи распределения ресурсов на графовой модели, проблема манипулируемости и оптимальности механизмов распределения ресурсов, результаты,

полученные ранее при решении задач распределения ресурсов в организационных системах, распространяются на графовые модели.

## 2. Постановка задачи

Программно-целевое управление [6,9,10] является частным случаем прикладного направления системного подхода к управлению сложными целеустремленными организационно-техническими системами. Основное внимание уделяет комплексу инструментов (механизмов) целеполагания, анализа и выбора средств достижения целей, «заземления» их до конкретных программ и управления реализацией календарных планов работ. Методы и приложения программно-целевого управления (ПЦУ) развивались во всем мире, особенно в СССР, шестидесятых – семидесятых годах в первую очередь в обороне, а также и для управления развитием народного хозяйства. Их применение дает возможность при использовании всех преимуществ системного подхода снять «проклятие размерности» за счёт фокусировки на достижение цели. Оно дает регулярный механизм четкой формулировки целей, задач, выбора основных средств их достижения, целевых программ и конкретных мероприятий, сконцентрировать на них все ресурсы и повысить эффективность (результативность) их использования. Один из основных принципов ПЦУ – «сквозное» планирование от конечных целей для всей организации до программ конкретных работ для конкретных исполнителей – «что и кому сейчас делать».

Одна из значительных проблем, возникающих в рамках концепции ПЦУ, – проблема определения результативности отдельных мероприятий и их вклада в достижение целей функционирования всей системы в целом – проблема взаимосвязи выхода (непосредственного результата) и исхода (влияния на целевые показатели) мероприятия. Результативность каждого мероприятия является



Комплексна оценка состояния организационной системы

Когнитивная модель организационной системы

Мероприятия, предлагаемые для реализации, на которые необходимо распределить ограниченные ресурсы

Рис. 1. Задача распределения ресурсов на когнитивной модели организационной системы.

для определения перечня мероприятий, предназначенных для достижения поставленных целей в условиях ограниченных ресурсов. В целевых программах, существующих в реальности, этот вклад не очевиден, так же, как не очевидно, на какие именно показатели, влияют отдельно взятые мероприятия. Например, как влияет покупка каждой новой скорой помощи на показатель смертности в регионе, на что влияет еще, и какие еще мероприятия влияют на этот показатель.

### 3. Описание модели

Перспективным аппаратом для моделирования сложных организационных систем, такие, как субъекты РФ, являются когнитивные карты [1,6]. Анализ когнитивной карты, связывающий как факторы, отражающие целевые установки системы, так и факторы, являющиеся непосредственными выходами программных

мероприятий позволяет решить задачу оценки влияния предполагаемых мер на оценку результативности функционирования системы и степень достижения заявленных целей в рамках ПЦУ. Рисунок 1 иллюстрирует когнитивную модель организационной системы на примере региона.

Для оценки состояния организационной системы могут быть использованы методы комплексного оценивания [2,4], позволяющие на основе значений набора целевых факторов формировать интегральную оценку состояния системы. Пример подобной оценки приведен на рисунке 1. Данный подход хорошо зарекомендовал себя на практике для оценки состояния сложно формализуемых объектов.

Задача распределения ресурсов между мероприятиями, предлагаемыми к реализации, может быть сформулирована, как задача максимизации комплексной оценки. В случае, если лицо, принимающее решение (ЛПР) о

распределении ресурсов, считает используемую модель и информацию о мероприятиях, предлагаемых к реализации адекватной, то данную задачу можно рассматривать, как оптимизационную, см. рисунок 1. Для практических целей, актуальна дискретная постановка данной задачи, когда имеется конечный набор мероприятий с определенным требуемыми затратами и ожидаемым эффектом от их реализации [6]. Данная задача может быть решена методами дискретной оптимизации, в частности – сетевого программирования [3].

В работе исследуется ситуация, когда ЛПР не обладает полной информацией, необходимой для принятия эффективных управленческих решений, в том числе, для решения эффективного распределения ресурсов. Для устранения неполноты информации предлагаются механизмы распределения ресурсов с сообщением информации. ЛПР собирает недостающую информацию от своих подчиненных (агентов), отвечающих за функционирование отдельных подсистем (например – здравоохранение, образование и т.д. в рамках модели регионального развития), на основании которой будет приниматься решение о распределении ресурсов. Предполагается, что каждый из агентов заинтересован в максимизации функционирования той подсистемы, за которую он отвечает. Т.е. в максимизации тех показателей (или комплексной оценки на основе данных показателей) на когнитивной модели, которые характеризуют эффективность функционирования его подсистемы. Процесс взаимодействия ЛПР и подчиненных, которые являются целенаправленными агентами, на когнитивной карте может быть описан как когнитивная игра [8]. При этом задача распределения ресурсов с сообщением информации может быть сформулирована, как задача многокритериальной «активной экспертизы»[5], когда каждый агент сообщает наилучшее с его точки зрения распределение ресурсов в системе, с помощью заранее объявленной процедуры агрегирования данных сообщений определяет итоговое распределение ресурсов.

Существенной проблемой, возникающей при использовании механизмов управления с сообщением информации, является проблема их манипулируемости – агенты могут исказить свои

сообщения с целью максимизации своей полезности, уменьшая тем самым эффективность функционирования всей системы в целом. В работе иллюстрируется, как теоретические результаты, полученные в области построения неманипулируемых многокритериальных механизмов «активной экспертизы»[5], могут быть использованы для решения поставленной задачи.

#### 4. Литература

1. Авдеева З.К., Коврига С.В. и др., "Когнитивный подход в управлении" // *Проблемы управления*. - 2007. - №3.
2. Анохин А.М., Гусев В.Б., Павельев В.В. *Комплексное оценивание и оптимизация на моделях многомерных объектов* – М.: ИПУ РАН, 2003.
3. Бурков В.Н., Буркова И.В., Овчинникова Т.И., Попок М.В. *Метод сетевого программирования*. – «Проблемы управления» научно технический журнал, № 3, 2005. С.25-27.
4. Бурков В.Н., Грацианский Е.В. и др. *Модели и механизмы управления безопасностью* – М.: Синтег, 2001.
5. Бурков В.Н., Исакаев М.Б., Коргин Н.А. "Применение обобщенных медианных схем для построения неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы" // *Проблемы управления*. - 2008. - №4. - С. 38-47.
6. Ириков В.А. *Методы программно-целевого управления, включая бюджетирование, ориентированное на результат*. – М., Стелс, 2007. – 84 с.
7. Макаренко Д. И., Хрусталева Е. Ю. *Концептуальное моделирование военной безопасности государства*. – М.: Наука, 2008.
8. Новиков Д.А. "Когнитивные игры: линейная импульсная модель" // *Проблемы управления*. - 2008. - № 3.- С. 14 – 22.
9. Поспелов Г.С., Ириков В.А. *Программно-целевое планирование и управление*. – М.: Сов.радио, 1976.
10. *Программно-целевое управление социалистическим производством*. Под ред. Аганбегяна А.Г. – М.: Экономика, 1980.

## Проблемы оценки параметра Херста потоков требований мультисервисных сетей

Иван Цитович<sup>1</sup>, Михаил Ноздрачев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН

<sup>2</sup> Московский технический университет связи и информатики  
cito@iitp.ru

### Аннотация

*Проводится исследование свойств оценки параметра Херста в случае, когда процесс, описывающий поток требований на звене мультисервисной сети, представляет собой смесь нескольких самоподобных диффузионных процессов с различными значениями параметра Херста. Показано, что стандартные оценки не позволяют обнаружить наличие смеси, т.е. оценивают поток требований как однокомпонентный поток.*

### 1. Введение

Развитие и внедрение технологий мультисервисных сетей связи приводит к тому, что изменяются системы передачи и принципы построения сетей. Вместе с ними изменяется и характер сетевой нагрузки: речевой трафик, транспортируемый при помощи коммутации каналов, постепенно вытесняется трафиком новых приложений, использующих технологию коммутации пакетов. Сейчас параллельно с речью в мультисервисных сетях связи передаются видео и данные, что не позволяет использовать для описания трафика классическую математическую модель телефонии – теорию Марковских процессов.

Разные виды трафика имеют различное происхождение и никак не связаны между собой. Это обстоятельство дает возможность в качестве модели общей сетевой нагрузки использовать сумму нескольких независимых случайных процессов, где каждый из них описывает трафик определенного типа; например, одно слагаемое – это голосовая передача, второе – передача данных и т.д. [1].

Один из современных подходов состоит в том, чтобы представить каждую компоненту трафика как фрактальное броуновское движение (ФБД) со своим значением параметра Херста, лежащим в пределах  $0.5 < H < 1$ . Нагрузке, которая создается передачей данных в реальном масштабе времени, будет соответствовать процесс с меньшим  $H$ , а нагрузке, передаваемой с временной

задержкой, – процесс с большим  $H$ . Таким образом, суммарный трафик мультисервисных сетей связи будет задаваться линейной комбинацией самоподобных процессов с различными значениями параметра Херста.

Анализировать свойства смеси самоподобных процессов гораздо сложнее, чем свойства одного процесса. Необходимо измерять не только параметры Херста отдельных компонент, но и их интенсивности. Теоретически эта задача выполнима, но на практике при помощи стандартных оценок она не решается.

Далее будет проиллюстрирован следующий факт. Если к двухкомпонентной смеси самоподобных процессов применить стандартные оценки параметра Херста, применяемые для однокомпонентных процессов, то по получающимся результатам нельзя понять, присутствуют ли в потоке различные компоненты. Все будет выглядеть практически так, словно исследуется траектория чистого самоподобного процесса.

В следующем разделе приводится постановка задачи, где вводится двухкомпонентная смесь независимых фрактальных броуновских движений. В разделе 3 описан используемый в работе метод моделирования ФБД. Далее приводится описание метода оценивания параметра Херста ФБД, который обеспечивает устойчивую оценку параметра Херста ФБД. В разделе результаты численного моделирования проведен сравнительный анализ свойств оценки параметра Херста при различных соотношениях между компонентами наблюдаемого процесса.

### 2. Постановка задачи

Пусть суммарная сетевая нагрузка состоит из двух компонент, различающихся интенсивностью и происхождением. В качестве модели используем смесь двух самоподобных процессов с разными параметрами Херста, построенную следующим образом

$$Y_t = k_1 W_t^{H_1} + k_2 W_t^{H_2},$$

где  $W_t^H$  – фрактальное Броуновское движение с параметром Херста  $H$ , а  $k_1, k_2$  – интенсивности каждой компоненты трафика.

Таким образом, общий трафик задается четырьмя параметрами:  $k_1, k_2, H_1, H_2$ . Возникает задача их измерения.

Каждый процесс  $W_t^H$  порождает свою меру  $P^H$ , причем у процессов с разными значениями  $H$  меры будут сингулярными между собой, что следует из определения фрактального Броуновского движения. Точно также мера  $P^Y$ , порожденная смесью  $X_t$ , будут сингулярной по отношению к  $P^H$  при условии, что  $k_1 \neq 0$  и  $k_2 \neq 0$ .

В нашем случае получаем

$$P^{H_1} \perp P^Y \perp P^{H_2}.$$

Это означает, что теоретически со 100-процентной вероятностью можно отличить друг от друга как отдельные процессы  $W_t^{H_1}$  и  $W_t^{H_2}$ , так и их смесь  $Y_t$ , т.е. решение задачи не должно бы вызывать затруднения. В действительности те события, на которых обнаруживается ортогональность мер, являются недоступными для измерений. На наблюдаемых событиях все меры являются гауссовскими с невырожденными матрицами ковариации, т.е. оказываются абсолютно непрерывными друг относительно друга, и задача их различения оказывается содержательной.

### 3. Математическая модель

Для построения траекторий ФБД используем метод, основанный на преобразовании Фурье [2]. С его помощью можно получить последовательность чисел, представляющую собой реализацию фрактального Гауссовского шума (ФГШ) с заданной величиной параметра Херста  $H$  и дисперсией  $\sigma^2 = 1$ . А затем можно проинтегрировать по времени полученную траекторию, и тем самым получить реализацию  $W_t^H$ .

Идея метода состоит в построении функции времени, имеющей такую же спектральную плотность, что и траектория ФГШ. Эта спектральная плотность вычисляется на основе выражения для спектра мощности ФГШ. Причем выражение используется не точное, а приближенное, но позволяющее получить корректные результаты.

Точный спектр мощности ФГШ имеет вид

$$f(\lambda) = \mathcal{A}(\lambda) \left[ |\lambda|^{-2H-1} + \mathcal{B}(\lambda) \right] \quad (1)$$

для частот  $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ , где

$$\mathcal{A}(\lambda) = 2 \sin(\pi H) \Gamma(2H + 1) (1 - \cos \lambda),$$

$$\mathcal{B}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (2\pi j + \lambda)^{-2H-1} + (2\pi j - \lambda)^{-2H-1} \right].$$

Главная проблема этого метода состоит в невозможности точно вычислить бесконечную сумму в выражении для  $\mathcal{B}(\lambda)$ . Для нее не существует никакой свернутой формы, поэтому будем применять следующее приближение

$$\mathcal{B}(\lambda) = \sum_{j=1}^3 \left[ (2\pi j + \lambda)^{-2H-1} + (2\pi j - \lambda)^{-2H-1} \right] + \frac{1}{8\pi H} \times \sum_{j=3}^4 \left[ (2\pi j + \lambda)^{-2H} + (2\pi j - \lambda)^{-2H} \right].$$

Далее приведен пошаговый алгоритм метода преобразования Фурье для последовательности  $W^H = \{W_j^H, 0 \leq j \leq N\}$ , где  $N = 2^n, n \in \mathbb{N}$ .

1. Строим последовательность значений спектра мощности  $\{f_j\}$  по формуле (1).

$$f_j = f(\lambda_j) \text{ при } 0 \leq j \leq N/2,$$

$$\text{где } \lambda_j = \frac{2\pi(j+1)}{N}.$$

В качестве примера на рис. 1 приведены графики последовательностей  $\{f_j\}$  для значений параметра Херста  $H = 0.6$  и  $H = 0.8$ .

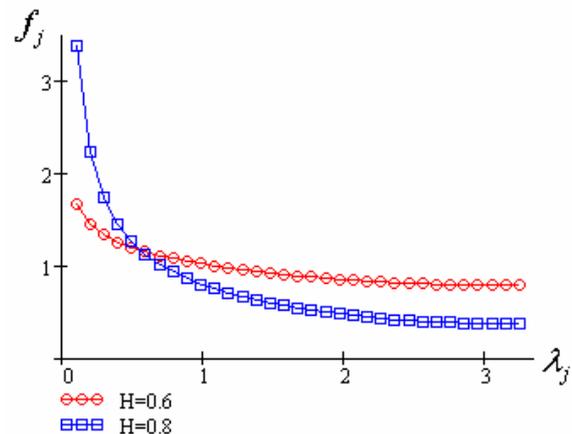


Рис. 1. Спектр мощности фрактального Гауссовского шума

2. Умножаем каждое значение последовательности  $\{f_j\}$  на независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному

закону с параметром  $\lambda = 1$ . Получаем последовательность  $\{f'_j\}$ , в которой

$$f'_j \sim \text{Ex}\left(\frac{1}{f_j}\right).$$

Это действие сделано на основании того, что значение спектральной плотности траектории ФГШ при заданной частоте ( $f'_j$ ) как раз является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону со средним, равным значению спектра мощности ФГШ на той же частоте ( $f_j$ ).

3. Строим последовательность комплексных чисел  $\{z_j\}$  следующим образом

$$z_j = \sqrt{f'_j} e^{i\varphi_j} \text{ при } 0 \leq j \leq N/2,$$

где  $\varphi_j \sim R(0; 2\pi)$  и являются независимыми для каждого  $j$ .

4. Извлекаем обратное преобразование Фурье из последовательности  $\{z_j\}$  при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) и получаем последовательность  $\{X_j\}$ , где  $0 \leq j \leq (N-1)$ , являющуюся реализацией фрактального Гауссовского шума.

5. Берем интеграл по времени у последовательности  $\{X_j\}$ , причем

$$W_0^H = 0,$$

$$W_{j+1}^H = W_j^H + \frac{X_j}{N^H}$$

для всех  $0 \leq j \leq (N-1)$ .

В результате получаем последовательность  $\{W_j^H\}$ , являющуюся реализацией фрактального Броуновского движения.

Нормировочный множитель  $\frac{1}{N^H}$  был введен исходя из выражения для дисперсии приращений ФБД

$$D(\Delta W_{\Delta t}^H) = D(W_{t+\Delta t}^H - W_t^H) = \sigma^2 |\Delta t|^H,$$

где в нашем случае  $\Delta t = \frac{1}{N}$ .

Далее при построении смеси следует подобрать коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  так, чтобы суммарный процесс  $Y_t$  имел ту же дисперсию, что и от-

дельные компоненты  $W_t^{H_1}$  и  $W_t^{H_2}$ . Для этого должно выполняться условие

$$k_1^2 + k_2^2 = 1.$$

На рис. 2 приведены диаграммы траекторий  $W_t^{H_1}$  и  $W_t^{H_2}$  при  $H_1 = 0.6$  и  $H_2 = 0.8$ , а также их смеси  $Y_t$  при  $k_1 = k_2 = 0.707$ .

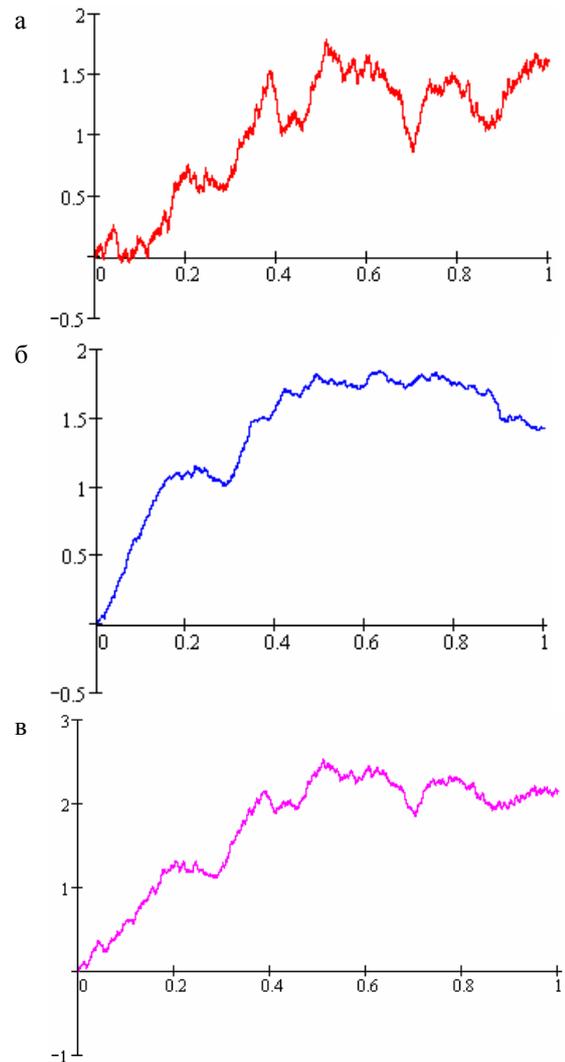


Рис. 2. Траектории фрактального Броуновского движения  $W_t^{H_1}$  (а) и  $W_t^{H_2}$  (б) и их смеси (в)

#### 4. Оценка параметра Херста

По реализации самоподобного процесса можно найти оценку параметра Херста. Для этого существует несколько методов. Один из них основан на соотношении

$$m^{2-2H} \sigma_m^2 = \sigma^2,$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия ФГШ, а  $\sigma_m^2$  – дисперсия агрегированного процесса  $X_t^{(m)}$ , т.е. процесса  $X_t$ , усредненного по непересекающимся блокам длины  $m$ . Его компоненты определяются равенством

$$X_n^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{m(n-1)+i}.$$

Этот способ оценивания параметра Херста получил название «дисперсионно-временной оценки» [3].

Обозначим  $(2-2H)$  как коэффициент  $\beta$  и прологарифмируем обе части равенства. Получим

$$\lg(\sigma_m^2) = -\beta \lg(m) + \lg(\sigma^2).$$

Таким образом, зависимость логарифма дисперсии агрегированного процесса  $-\lg(\sigma_m^2)$  от логарифма длины блоков  $-\lg(m)$  является линейной. Причем угловой коэффициент прямой равен  $(-\beta)$ .

Идея этого метода состоит в том, чтобы для полученной реализации самоподобного процесса построить по точкам график зависимости  $\lg(\sigma_m^2)$  от  $\lg(m)$ , затем вычисленные точки аппроксимировать прямой и тем самым найти значение  $\beta$ . А дальше от  $\beta$  перейти к параметру Херста.

Ниже приведен алгоритм дисперсионно-временной оценки.

1. По реализации ФГШ  $\{X_j\}$ , где  $0 \leq j \leq (N-1)$ , вычисляем траекторию агрегированного процесса  $\{X_j^{(m)}\}$ , где  $0 \leq j \leq (N/m-1)$ .

2. Вычисляем среднее значение реализации  $\{X_j\}$  (в идеальном случае оно равно 0) по формуле

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i.$$

3. Находим дисперсию агрегированного процесса  $\{X_j^{(m)}\}$  по формуле

$$DX^{(m)} = \frac{1}{N/m} \sum_{i=0}^{N/m-1} (X_i^{(m)} - \bar{X})^2.$$

4. Получаем точку с координатами  $(\lg(m), \lg(DX^{(m)}))$ .

5. Повторяем пп. 1 – 4 для значений  $2 \leq m \leq N/2$ .

6. Аппроксимируем полученные точки методом наименьших квадратов (МНК). По найденной оценке  $\hat{\beta}$  вычисляем оценку параметра Херста  $\hat{H} = 1 - \frac{\hat{\beta}}{2}$ .

На рис. 3 показана дисперсионно-временная зависимость для самоподобной последовательности с параметром Херста  $H = 0.8$ .

Как видно из графика, при больших значениях  $m$  линейная зависимость нарушается, поэтому при аппроксимации нужно рассматривать только часть точек. Экспериментально было установлено, что следует использовать первые  $\sqrt{N}$  точек.

На рис. 4 показаны первые  $\sqrt{N}$  точек той же зависимости и их аппроксимация.

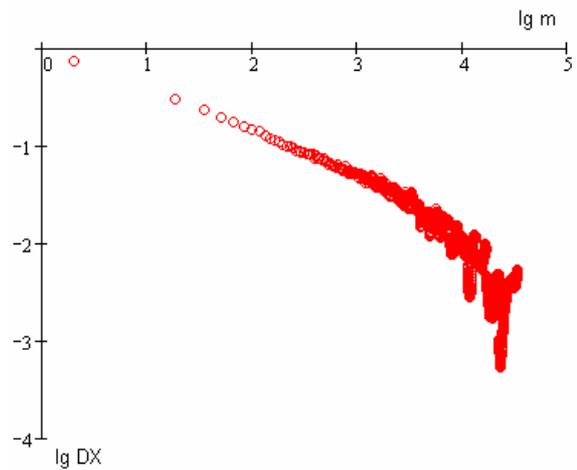


Рис. 3. Дисперсионно-временная зависимость

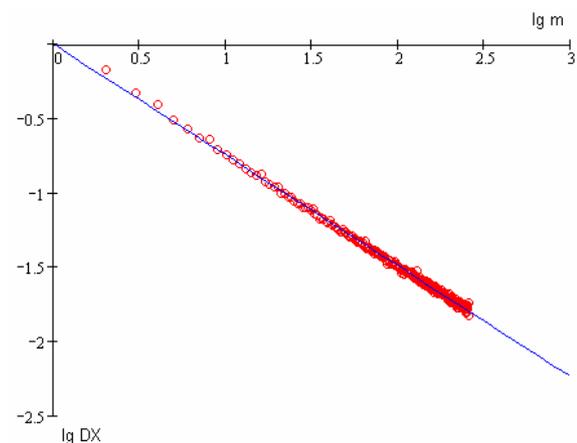


Рис. 4. Дисперсионно-временная зависимость и ее аппроксимация

## 5. Результаты численного моделирования

Применим оценку параметра Херста к трем смесям вида.

$$Y_t^{(1)} = 0.949 \cdot W_t^{H_1} + 0.316 \cdot W_t^{H_2},$$

$$Y_t^{(2)} = 0.707 \cdot W_t^{H_1} + 0.707 \cdot W_t^{H_2},$$

$$Y_t^{(3)} = 0.316 \cdot W_t^{H_1} + 0.949 \cdot W_t^{H_2},$$

где  $H_1 = 0.6$ ,  $H_2 = 0.8$ .

На рис.5 приведена диаграмма, полученная при оценке одной из реализаций смеси  $Y_t^{(2)}$ . Внешне этот график ничем принципиально не отличается от аналогичного графика для чистого самоподобного процесса. По оценке параметра Херста нельзя понять, принадлежит ли заданная траектория одиночному самоподобному процессу или же их смеси.

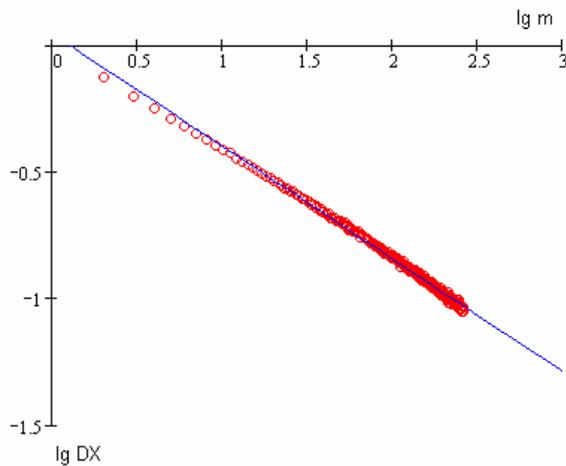


Рис. 5. График дисперсионно-временной оценки смеси самоподобных процессов

В табл. приведены результаты оценивания параметра Херста для смесей  $Y_t^{(1)}$ ,  $Y_t^{(2)}$ ,  $Y_t^{(3)}$ . Для каждого из наблюдений строились независимые реализации  $W_t^{H_1}$  и  $W_t^{H_2}$  и по ним строились траектории смесей.

Анализ результатов показывает следующее:

1. Разброс значений оценок параметра Херста по траектории для каждого из рассматриваемых процессов невелик. Все значения лежат в пределах двух среднеквадратичных отклонений. То же происходит и при оценке  $H$  чистого самоподобного процесса.

2. Оценка параметра Херста смеси находится в интервале между параметрами Херста самоподобных процессов, составляющих смесь,  $H_1 < \hat{H} < H_2$ .

На рис. 6 приведен график зависимости оценки параметра Херста смеси  $\hat{H}$  от доли процесса  $W_t^{H_1}$  в составе смеси  $\alpha_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2}$ .

Таблица. Оценки параметра Херста смеси самоподобных процессов

№ наблюдения	$Y_t^{(1)}$	$Y_t^{(2)}$	$Y_t^{(3)}$
1	0.619	0.635	0.706
2	0.591	0.598	0.649
3	0.590	0.602	0.657
4	0.598	0.61	0.662
5	0.628	0.627	0.656
6	0.597	0.614	0.681
7	0.586	0.59	0.64
8	0.614	0.625	0.689
9	0.608	0.617	0.671
10	0.614	0.627	0.687
<b>с.з.</b>	<b>0.605</b>	<b>0.615</b>	<b>0.670</b>
<b>с.к.о.</b>	<b>0.014</b>	<b>0.015</b>	<b>0.021</b>

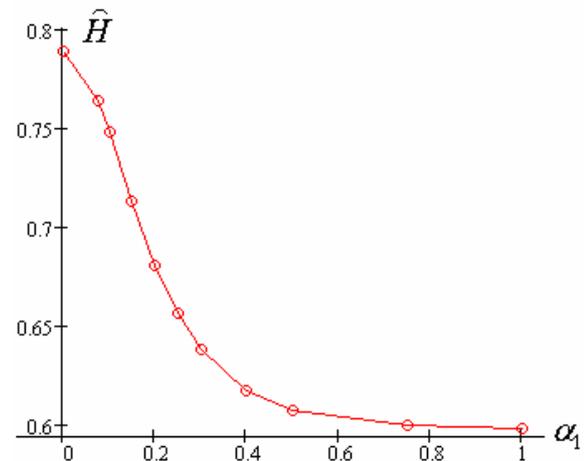


Рис. 6. График зависимости  $\hat{H}$  от доли процесса  $W_t^{H_1}$  в составе смеси

Из этой диаграммы хорошо видно, что по мере уменьшения присутствия  $W_t^{H_1}$  в смеси оценка  $\hat{H}$  приближается к  $H_2$  и зависимость эта носит нелинейный характер.

В крайних точках, когда  $\alpha_1 = 0$ , т.е. смесь вырождается в процесс  $W_t^{H_2}$ , оценка  $\hat{H}$  становится равной  $\hat{H}_2 \approx H_2 = 0.8$ , и, соответственно, когда  $\alpha_1 = 1$ , т.е. остается только процесс  $W_t^{H_1}$ , оценка  $\hat{H}$  становится равной

$\hat{H}_1 \approx H_1 = 0.6$ . Последнее обстоятельство говорит о том, что используемая оценка параметра Херста работает корректно при работе с процессом с одной компонентой и не обнаруживает наличие смеси различных ФБД.

## 6. Выводы

Основной вывод состоит в том, что с позиции оценивания параметра Херста смесь самоподобных процессов ведет себе так же, как одиночный самоподобный процесс. Таким образом, не имеет никакого смысла оценивать параметр Херста у экспериментально полученной траектории, если заранее неизвестно, что это чистый самоподобный процесс. В противном случае можно получить внешне корректный результат, не отражающий истинного положения вещей. Поэтому актуальна постановка задачи в [1], где предлагалось основное внимание уделять источникам нагрузки для того, чтобы агрегированный трафик имел заданные параметры, а не рассчитывать на оценку параметров трафика по результатам его измерений.

## 7. Литература

[1] Цитович И.И. Устойчивые модели трафика мультисервисных сетей // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С.Попова. Серия: научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск: LX-2. Москва. 2005. Т. 2. С. 271-273

[2] Paxson V. Fast Approximation of Self-Similar Network Traffic. Berkeley. University of California. Lawrence Berkeley Laboratory and EECS Division. 1995. 13 p.

[3] Шелухин О.И., Тенякшев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. М.: Радиотехника. 2003. 480 с.

## Применение различных моделей на основе когнитивных карт для анализа и моделирования сложных проблемных ситуаций

З.К. Авдеева, В.И. Максимов

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
*ziron@mail.ru*

### Аннотация

*Различные формальные модели на основе когнитивных карт применяются при анализе и моделировании сложных проблемных ситуаций более 30 лет. Качество решения задач управления в некоторой сложной проблемной ситуации может улучшиться за счет одновременного применения различных формальных моделей (линейных, нечетких, нелинейных и пр.) на основе когнитивных карт. В докладе представлен один из возможных вариантов использования различных когнитивных моделей, который построен в рамках ряда практических работ исследовательской группы лаборатории 51 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.*

### 1. Введение

Характерной чертой современных социально-экономических объектов (компаний, регионов, отраслей и секторов экономики и т.п.) является их слабая структурируемость, обусловленная такими свойствами этих объектов, как уникальность, трудная формализуемость, неопределенность, невозможность полного описания, динамичность и др. В то же время среда (политическая, социально-экономическая и др.), в которой функционируют социально-экономические объекты, изменяется нарастающими темпами, а возникающие ситуации практически не поддаются прогнозированию и не имеют аналогов в прошлом. Речь идет о сложных проблемных ситуациях (СПС).

В таких условиях методы, применяемые при поддержке управлении СПС должны:

- учитывать все существенные разнородные факторы, определяющие функционирование и развитие СПС;
- исследовать СПС в условиях дефицита информации о процессах, влияющих на их развитие;
- проводить исследование СПС в сжатые сроки.

Сегодня разработаны и успешно применяются методы качественного анализа СПС, основанные

на построении и анализе когнитивных карт<sup>1</sup> [2, 7, 9]. Эти методы позволяют уточнить: в чем состоит проблема, какие факторы внешней среды оказываются важными, что можно сделать или почему нельзя справиться с проблемой и др. (в частности, [1]).

Различные формальные модели на основе когнитивных карт применяются уже более 30 лет [ в работах 2,7 приведены обзоры] при решении различных задач управления в СПС. Можно выделить основные направления, отличающиеся применяемым математическим аппаратом: линейные, нелинейные, нечеткие, алгебраические, вероятностные, логические и пр. Применение того или иного аппарата при решении задач, формально представимых в виде когнитивной карты, связано с определенной постановкой задачи пользователем, наличием и качеством данных и знаний, динамическими свойствами исследуемой СПС.

*Качество решения задач управления в некоторой СПС может улучшиться за счет применения различных моделей на основе когнитивных карт.* Предположение обосновано тем, что использование разных моделей позволит исследовать различные аспекты структурных особенностей и динамического поведения ситуации, моделировать разнотипные сценарии и т.п.

В докладе представлен один из возможных вариантов использования различных когнитивных моделей, который построен в рамках ряда практических работ исследовательской группы лаборатории 51 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

### 2. Общая схема когнитивного анализа и моделирования СПС.

*Когнитивное моделирование в задачах анализа и управления СПС* – это исследование функционирования и развития слабоструктурированных систем и ситуаций посредством построения

---

<sup>1</sup> Когнитивная карта (КК) – это модель представлений знаний экспертов о ПС в виде структуры причинно-следственных связей между характеризующими ее базисными факторы.

модели СПС (ситуации) на основе когнитивной карты. Важно отметить, что модель включает когнитивную карту как обязательный элемент наряду с возможными другими параметрами. Во многих публикациях, развивающих когнитивный подход к управлению СС, когнитивную карту часто отождествляют с когнитивной моделью. Однако следует помнить, что в психологических исследованиях понятие “когнитивная модель” связывается ментальной моделью субъекта, порожденной под воздействием его познавательных возможностей. В этой модели когнитивная карта отражает субъективные представления (индивидуальные или коллективные) исследуемой проблемы, ситуации, связанной с функционированием и развитием СС. Основными элементами когнитивной карты являются базисные факторы<sup>2</sup> (или просто факторы) и причинно-следственные связи между ними и формально представляет собой взвешенный ориентированный граф. Под ситуацией понимается состояние исследуемой системы (объекта) и окружающей ее среды в определенном момент времени. [2]

Приведем одну из развиваемых методик исследования СПС на основе построения и анализа когнитивных карт. Схема методики когнитивного моделирования предполагает следующие этапы анализа СПС (рис. 1) [6, 9, 2].

1. Проводится **системное концептуальное исследование** существующей ситуации. В ходе исследования определяются базисные факторы, определяющие развитие ситуации, и характер взаимосвязи между ними, формулируются цели, которые надлежит достигнуть в результате развития управляемой ситуации, определяются "рычаги управления", то есть управляющие воздействия, которые можно применять к управляемой ситуации.

В основе когнитивного моделирования лежит когнитивная структуризация знаний эксперта об исследуемой ситуации, предполагающая сбор, анализ и синтез (структуризацию) информации и построение когнитивной карты, описывающей механизм и условия функционирования исследуемого объекта.

Построение модели аналитик начинает с качественного описания проблемной ситуации, которое включает структуризацию первичных представлений управленческой группы об СПС и привлечение знаний из документальных источников. На этом этапе формируется концептуальная схе-

ма (например, PEST3-схема) исследуемой ситуации, которая включает важные предметные области для задач исследования. Наиболее удачной эмпирической схемой, используемой для выделения важных процессов и тенденций во внешней среде, является SWOT<sup>4</sup>. Для этого используются методики экспертной оценки SWOT-элементов по выделенным критериям и деление их на классы важности, направленных на выделение факторов и формирование сценариев исследования проблем под влиянием. [1,5,9]

2. Строится и исследуется **когнитивная модель ситуации**:

- исследуется сама необходимость управления развитием ситуации (возможно, что поставленные цели достигаются "сами по себе" без применения управляющих воздействий);
- исследуется принципиальная достижимость (без учета ресурсных ограничений) поставленных целей (если цель принципиально недостижима, то исследуются причины такого положения);
- если поставленные цели принципиально достижимы, генерируются альтернативные принципиально возможные пути достижения целей;
- по структурным особенностям модели анализируются причины, осложняющие достижимость поставленных целей;
- по результатам генерации принципиально возможных путей достижения целей и с учетом выявленных структурных особенностей модели вырабатываются (совместно с ЛПР и/или аналитиком) компромиссные (с учетом ресурсных ограничений) пути управления ситуацией и исследуется (моделируется) развитие ситуации под воздействием этих управлений;

3. Среди выработанных на предыдущем этапе компромиссных путей управления ситуацией выделяются наилучшие (в соответствии с предпочтениями ЛПР) варианты для последующего принятия решения по выбору управления ситуацией.

<sup>2</sup> Фактор (от лат. factor – делающий, производящий) представляет собой движущую силу какого-либо явления или процесса, определяющую его характер или отдельные его черты. Факторы, с помощью которых описывается исследуемая ситуация называются базисными.

<sup>3</sup> Political (политические) Economic (экономические) Social (социальные) Technology (технологические)

<sup>4</sup> Strengths – сильные стороны, Weaknesses – недостатки, слабые стороны, Opportunities – возможности, Threats – угрозы

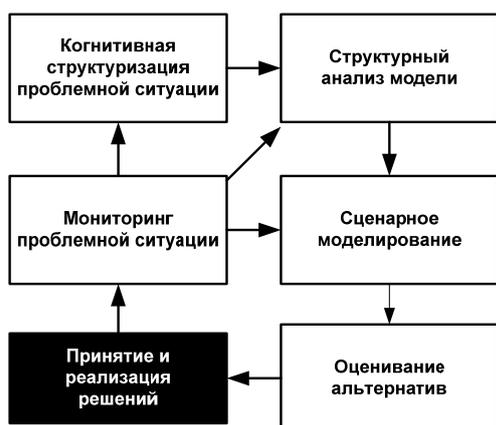


Рис. 1. Схема исследования СПС

Особенностью метода когнитивного моделирования, отличающей его от традиционных – операционных методов, является то, что благодаря использованию лингвистических переменных и различных алгоритмов, он позволяет эффективно исследовать поведение сложных, плохо определенных систем, не поддающихся точному математическому анализу.

Для анализа структурных особенностей ситуации, представленной когнитивной картой, динамических свойств на этапах анализа структуры и сценарного исследования используются формальные модели, отражающие те или иные характеристики исследуемой ситуации. Как правило, используется одна модель линейная или нечеткая для реализации целей исследования. Но в процессе работы с СПС оказывается интересным и целесообразным работа с разными моделями. И если для уточнения обобщенных свойств ситуации можно использовать линейную модель, в которой влияния всех факторов на другие суммируются, то более глубокий анализ требует более точного описания динамики. Идея заключается в том, что линейная модель позволяет в общем исследовать СПС, выявить ее особенности, проблемные области, проиграть сценарии, а дальнейший анализ, направленный на исследование выявленных особенностей, требует подключения более сложных моделей и алгоритмов.

## 2.1. Комплексное использование различных моделей на основе когнитивной карты СПС

В этом разделе представлена эмпирическая интеграция различных методов, применяемых в ходе когнитивного моделирования СПС, общая схема методики которой описана в предыдущем разделе.

В рамках ряда практических работ лаборатории 51 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН [ в 1-3, 5, 9 приведены примеры использования методики] для исследования

одной СПС (например, социально-экономическое развитие г. Кронштадта (2004), анализ влияния государственной политики на развития ОАО «Газпром» (2003) и ряда других ) одновременно применялись: линейная динамическая модель для структурно-целевого анализа, сценарного исследования и решения обратной задачи; нечеткая модель для поиска доминирующих путей влияния на целевые факторы и анализа положительных (отрицательных) путей влияния; нелинейная модель для анализа развития ситуации с учетом временных задержек и блок многокритериального иерархического оценивания для выбора наилучших сценариев развития ситуации.

На рис. 2. изображена схема комплексного использования **линейного, нечеткого, нелинейного блока моделирования** и блока оценивания альтернатив.

Формально в линейном блоке используется линейная динамическая модель Корноушенко Е.К., Максимова В.И., в которой исследуются импульсные воздействия, и изменение значения фактора в следующий момент времени в зависимости от смежных определяется как взвешенная сумма. Предполагаются причинно-обусловленные изменения факторов и обусловленные внешними воздействиями (например, управления). Значения переменных задаются в шкале [-1,1]. Переходный процесс в импульсной модели имеет конечное состояния и есть возможность решать обратные задачи («Что надо сделать чтобы...»). [2, 6, 9]

В нечетком блоке используются алгоритмы, моделирующие рассуждения эксперта о проблемной ситуации [8]. Для моделирования динамических процессов используется нечеткая лингвистическая продукционная модель ситуации на основе нечетких продукций «ЕСЛИ А, ТО В...», где А и В лингвистические переменные. При расчете значений строятся максимальные (в терминах модели) положительные и отрицательные пути распространения влияния. На каждом шаге берется максимум из приходящих значений, но при этом могут быть равные значения и выбирается первое из них. Такие алгоритмы моделирования целесообразно использовать для исследования таких ситуаций, в которых в каждый момент времени можно сосредоточиться на главных "наиболее влиятельных" факторах исследуемой ситуации и пренебречь остальными. Анализ КК в линейном блоке позволяет выяснить насколько суммарное влияние всех факторов несущественно по сравнению с влиянием так называемых «максимальных» значений. И если это так, то можно рассматривать результаты имитационного моделирования на основе такой модели корректными и их можно использовать для выбора управлений.

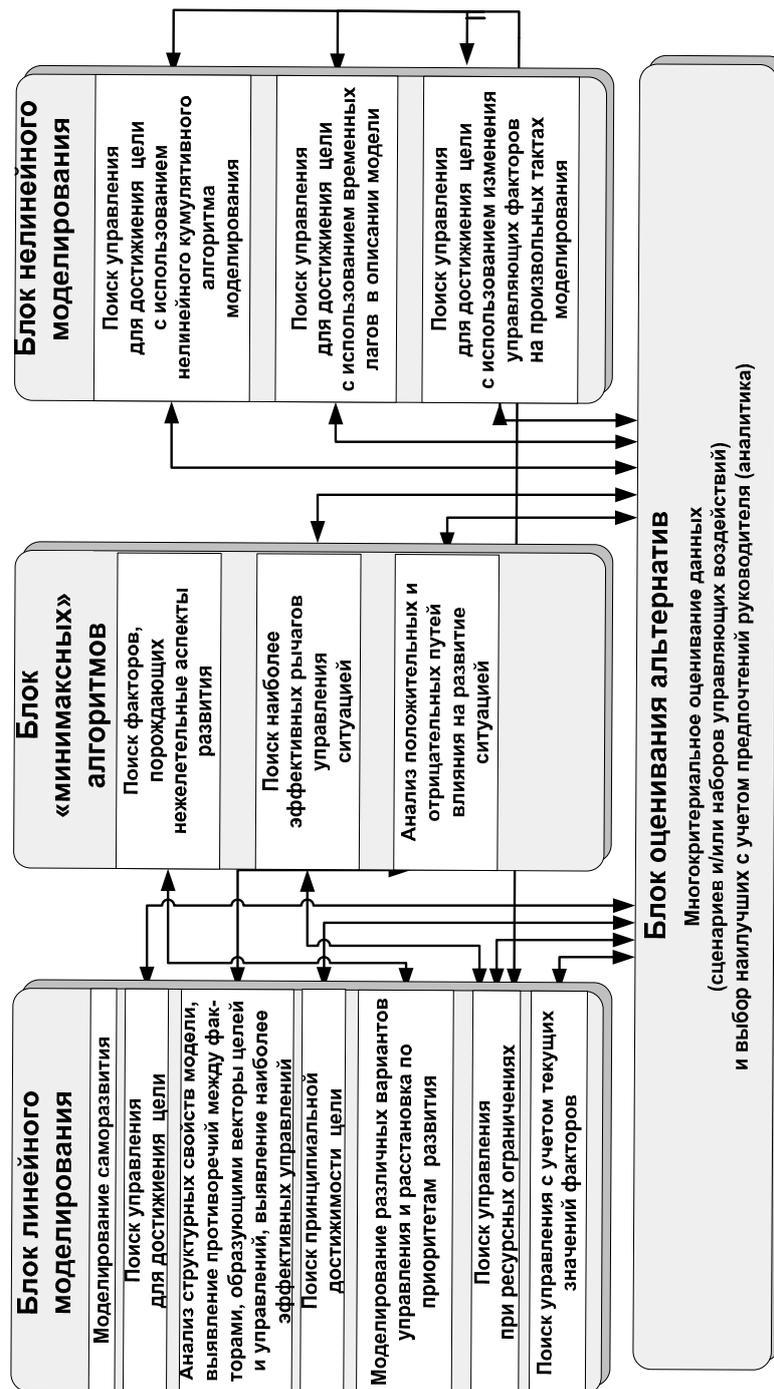


Рис. 2. Схема взаимодействия аналитических блоков когнитивного моделирования

В нелинейном блоке моделирования реализована возможность применения временных лагов<sup>5</sup>. Это необходимо для моделирования асинхронного влияния факторов друг на друга, и осуществления изменения управляющих факторов на произвольном такте моделирования.[3]

В блоке оценки альтернатив применяются методы многокритериального иерархического оценивания результатов имитационного моделирования [4].

Перечисленные блоки имеют одинаковое предназначение (когнитивное моделирование и анализ развития ситуации), но реализуют различные алгоритмы моделирования и потому каждый из них позволяет получать результаты не достижимые в других. Кроме того, конечные (или промежуточные) результаты моделирования в различных блоках могут быть использованы в качестве входных друг для друга. Каждый из перечисленных блоков имеет свою программную реализацию. На данный момент в лаборатории продолжается развитие такого многомодельного подхода и его реализации на современных программных платформах.

## 2.2. Принципы взаимодействия различных моделей при когнитивном моделировании СПС

Взаимодействие блоков в ходе исследования СПС происходит следующим образом (рис. 2).

1. Прежде всего, выясняется благоприятно или нет для руководства развивается ситуация. Анализ тенденций изменения факторов в процессе саморазвития ситуации производится в линейном блоке. Существующие тенденции изменения факторов ситуации отображаются в модели ситуации в виде ее начального состояния. Если моделируемый процесс саморазвития происходит в желательном для руководителя направлении, то «всё хорошо» и не требуется никакого вмешательства в ситуацию. Если же моделирование показывает, что процесс саморазвития идет «не в ту сторону» или «не в том темпе», то необходимо принимать меры по управлению ситуацией.

2. Перед тем как выбирать способы управления ситуацией, необходимо разобраться в первопричинах её неудовлетворительного развития, т.е. найти факторы, порождающие нежелательные направления развития. Поиск таких факторов и анализ цепочек максимальных влияний от этих факторов к факторам, изменения которых интересуют руководителя в первую очередь,

производится в блоке нечеткого моделирования. Результатом работы блока является вывод о необходимости смены тенденций тех или иных конкретных факторов модели путем введения управлений в модель (т.е. определенных изменений её управляющих факторов) и оценка «степени доверия» (консонанса) к сделанному выводу.

3. В линейном блоке проводится сценарное моделирование развития ситуаций. На этом этапе

- моделируются различные варианты управления, которые упорядочиваются по стратегическим направлениям развития ситуации;
- если необходимо при помощи нечеткого блока ищутся факторы, порождающие нежелательные аспекты развития ситуации.

При большом количестве управляющих факторов выбор подходящих управлений является непростой задачей. В этом случае целесообразно определить целевые факторы и задать желательные тенденции изменения этих факторов (т.е. определить цель управления) и найти те изменения управляющих факторов (управления), при которых заданное начальное состояние модели будет смещаться «в сторону цели» и, быть может, достигнет заданной цели. Другими словами, для поиска подходящих управлений целесообразно перейти к решению обратной задачи, для чего в линейном блоке решается обратная задача. Решением обратной задачи является вектор, координаты которого указывают номера управляющих факторов и величины их изменений (управляющие воздействия). При этом, как и ранее, найденные управляющие воздействия являются импульсами, подаваемыми только в начальный момент времени.

Если вариант, полученный при решении обратной задачи, реально не осуществим из-за ресурсных ограничений, то возможны следующие (не исключающие друг друга) действия:

- корректируются результаты, полученные при решении обратной задачи, с учетом реальных ограничений на ресурсы;
- определяются (при помощи нечеткого блока) точки наиболее эффективных воздействий на ситуацию;
- в исследуемую модель ситуации (в нелинейном блоке) вводятся временные лаги, описывающие задержку передачи непосредственного влияния одного фактора на другой фактор, и производится моделирование;
- ищется возможность достижения цели при использовании изменения управляющих факторов (возможно многократное) на произвольных тактах моделирования.

Указанные возможности весьма важны при моделировании быстро меняющихся ситуаций.

<sup>5</sup> Собственно в этом блоке реализована модификация линейной модели Корноушенко Е.К., Максимова В.И.

В линейном блоке проводится структурный анализ исследуемой ситуации для выявления:

- несогласованности между целевыми факторами, то есть случаев, когда улучшение одних целевых факторов приводит к ухудшению других целевых факторов.
- несогласованности между управляющими и целевыми факторами, то есть случаев, когда изменение кого-либо управляющего фактора, произведенное для улучшения одних целевых факторов, приводит к ухудшению других целевых факторов;
- конфликтных ситуаций.

На этапе структурного анализа для выработки наиболее эффективного решения можно воспользоваться нечетким блоком для анализа положительных и отрицательных цепей влияния на развитие ситуации.

Во всех случаях получения нескольких сравнимых результатов (сценариев, вариантов наборов управляющих воздействий и других случаев, ставящих аналитика перед тем или иным выбором) можно воспользоваться процедурой многокритериального оценивания данных и выбора наилучших с учетом предпочтений лиц принимающих решения.

### 3. Заключение

В докладе представлен один из возможных вариантов комплексного применения моделей на основе когнитивных карт и основан он на опыте применения методики когнитивного анализа и моделирования СПС в лаборатории 51 ИПУ РАН.

Комплексное использование разных формальных моделей на основе когнитивных карт является существенным шагом в развитии возможностей исследования слабоструктурированных ситуаций. По сути, представленная эмпирическая схема интеграции моделей на основе когнитивной карты является демонстрацией многомодельного подхода к исследованию СПС.

Развитие многомодельного подхода является одним из перспективных направлений теоретических и прикладных исследований исследовательского коллектива лаборатории. Для разработки теоретически обоснованной и эффективной прикладной многомодельной схемы анализа и исследования сложных проблемных ситуаций необходимо решить много проблем. Необходимо разработать:

- критерии выбора той или иной формальной модели в зависимости от знаний эксперта о СПС и решаемых задачах,
- формальную схему интеграции различных математических моделей на основе

КК для решения задач исследования СПС

- гибкий интерфейс работы с пользователем прикладных систем, реализующих такой подход
- и решить другие проблемы, что и станет целью исследований авторов в ближайшие годы.

### 4. Литература

- [1] Авдеева З. К. «Методы формирования стратегий решения слабоструктурированных проблем на основе когнитивных моделей» *Автореф. дис. канд. техн. наук.* Воронеж: ВГТУ, 2006. – 23 с.
- [2] Авдеева З.К., Коврига С.В., Макаренко Д.И., Максимов В.И. «Когнитивный подход в управлении», *Проблемы управления*, 2007, №3. – С. 2-8.
- [3] Авдеева З.К., Максимов В.И., Рабинович В.М. «Интегрированная система "КУРС" для когнитивного управления развитием ситуаций», *Труды Института. Том XIV.* М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2001 С. 89-114.
- [4] Давыдов С.В., Максимов В.И. «Многокритериальное иерархическое оценивание ситуации при когнитивном моделировании», *Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC'2001). Материалы 1-й Международной конференции.* Т. 1, 2001.
- [5] Коврига С.В. «Методические и аналитические основы когнитивного подхода к SWOT-анализу», *Проблемы управления*, 2005, №5. - С. 58-63
- [6] Корноушенко Е.К., Максимов В.И. «Управление ситуацией с использованием структурных свойств ее когнитивной карты», *Труды Института. Том XI.* М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2000. С.85-90.
- [7] Кузнецов О.П., Кулинич А.А. и др. «Анализ влияний при управлении слабо структурированными ситуациями на основе когнитивных карт», *Человеческий фактор в управлении.* под. ред. Абрамовой Н.А., Новикова Д.А., М.: Комкнига, 2006. - с.313-344.
- [8] Кулинич А.А., Максимов В.И. «Система концептуального моделирования социально-политических ситуаций «Компас»», *В сб. Современные технологии управления.* М: Фонд «Проблемы управления», 1998.
- [9] Максимов В.И. «Структурно-целевой анализ развития социально-экономических ситуаций», *Проблемы управления*, 2005, №3. – С. 30–38.

## Метод нахождения состояний гонки в потоках, функционирующих на разделяемой памяти

Кудрин М.Ю., Прокопенко А.С., Гормасов А.Г.

*Московский физико-технический институт (государственный университет)*

*E-mail: artjom.prokopenko@gmail.com*

### Аннотация

*В работе описан метод, позволяющий гарантированно обнаружить все состояния гонки в программе, причем необходимые расчеты минимизированы за счет объединения вариантов исполнения потоков программы в классы и проведения вычислений только для одного выбранного специальным образом представителя каждого из классов.*

### 1. Введение

С массовым переходом на персональные компьютеры, поддерживающие многопоточные вычисления, возросла важность корректного написания многопоточных программ. Написать и протестировать многопоточные программы значительно сложнее в силу плохой предсказуемости порядка выполнения и синхронизации потоков [1]. При параллельном программировании на авансцену выходят проблемы тупиков, логических гонок, потерь сигналов. Логических гонок (race condition) - ситуаций, возникающих, когда несколько потоков одновременно обращаются к одному и тому же ресурсу, причем порядок обращений точно не определен, нужно избегать, поскольку они могут стать причиной трудных для обнаружения и отладки ошибок. Существующие методики поиска состояний гонок обычно разделяют на статический, динамический анализ, проверку на основе моделей и доказательства корректности программ [2].

Формальное доказательство корректности программы является очень трудоемкой процедурой [3], сложность которого еще и возрастает в случае параллельного программирования и практически не применяется промышленной разработки программного обеспечения.

В основе статического и динамического подходов лежит одна общая идея – выявление и контроль за ключевыми моментами, такими как захват или освобождение блокировок [5]. Но

методы детектирования – разные. Статический анализ — это анализ кода без исполнения программы. А при динамическом анализе ведется поиск ошибок по результатам конкретного запуска приложения, но тогда симптомы наличия логически гонок могут проявиться только когда два потока получают доступ к некорректно защищенной области памяти почти в одно и тоже время, то есть программа может корректно<sup>1</sup> работать в течение долгих месяцев пока не проявится логическая гонка! Это обстоятельство объясняет тот факт, что если речь заходит о проверки программы на многопроцессорной машине, то положительные отчеты динамических анализаторов стали восприниматься с большим скепсисом. А статический анализ в случае параллельных приложений крайне сложен и часто невозможно предсказать поведение программы, так как неизвестен допустимый набор входных значений для различных функций и способ их вызова. Эти значения можно прогнозировать на основе остального кода, но крайне ограниченно, так как возникает огромное пространство возможных состояний и объем проверяемой информации (вариантов) увеличивается до недопустимых значений [7]. Также средства статического анализа часто дают большое количество ложных сообщений о потенциальных ошибках и требуют немалых усилий для их минимизации. Из всех средств статического анализа приложений наиболее популярны Prefix, Prefast и FxCop [2].

Проверка на основе модулей представляет собой метод верификации правильности работы конечного автомата, в котором применяется параллельная обработка. Этот метод позволяет формально обосновать отсутствие дефектов в тестируемой части кода, на основе заданной разработчиком правил преобразования данных. Примерами инструментом проверки на основе моделей наличия гонок в программах является

<sup>1</sup> Параллельная программа называется корректной по Лэмпорту, если поведение параллельной программы в точности соответствует ситуации последовательного исполнения с чередованием параллельных блоков этой программы [5].

Zing[2], KISS и SLAM[6]. Проверка на основе моделей относительно эффективна лишь на небольших блоках программ. В большинстве случаев невероятно сложно автоматически вывести модель из программного кода, а создание моделей в ручную является ничуть не более простым занятием. Построение таких моделей по сути означает переписывание алгоритмов преобразования данных, но уже в другом представлении. Точно также как и в случае статического анализа возникает проблема быстрого расширения пространства состояний. Расширение пространства состояний можно в частично контролировать, применяя методы редукции со сложной эвристической логикой, но это приводит к тому, что некоторые дефекты будут пропущены [7].

Для анализаторов, реализованных на базе статического анализа или анализа на основе моделей, характерно наличие следующих этапов: построение графа потока управления (control flow graph), использование анализа псевдонимов (alias analysis) или/и анализа «указывает на» (points to analysis), вычисление при помощи набора состояний. Встречаются интересные работы [8][9] в которых граф потока исполнения преобразован в сеть Петри. Но в этом исследовательском поле, называемым «доказательство корректности программ», сегодня можно доказать отсутствие логических гонок только для небольших и относительно простых программ [10]. Проблема – построить метод, который позволяет обнаружить все состояния гонок, приводящие к некорректной работе программы (далее – неразрешенное состояние гонки), без ложных срабатываний.

## 2. Обзор основных результатов

В данной работе кратко описан такой метод для программ: предложен способ представления работы потоков; используя данное представление, была продемонстрирована техника нахождения состояний гонки. Принципиально важным моментом выполненной научной работы является тот факт, что полученный способ создан для проверки программ, построенных с использованием как классических структур синхронизации, так и структур, не требующих синхронизации при параллельном доступе (non-blocking structures).

Задачу построения метода, отвечающего на вопрос наличия неразрешенного состояния гонки исходя из значений ячеек памяти после завершения работы потоков и, возможно, ранее считанных значений, которые хранят потоки, рассмотрели в ситуации, когда оперируют два потока, каждый из которых исполняет заданный

набор команд; некоторые из операций, выполняемых потоками, затрагивают общие ячейки памяти. Были выделены четыре группы примитивов, ответственные за взаимодействие с разделяемыми ячейками памяти: W(примитив записи), R(чтение), V(операции хранения и модификации ранее считанного значения), X(прочие операции).

После ввели состояние исполнения двух потоков относительно ячейки памяти – вектор, содержащий три компоненты (a,b,c), где a – это значение ячейки памяти в данный момент времени, b – считанное значение ячейки, которым оперирует первый поток, c – считанное значение ячейки, которым оперирует второй поток. Компоненты этого вектора изменяются при чтении и записи, а также, когда один из потоков модифицирует считанное значение.

Состояние исполнения потоков изменяется, если хотя бы одна из операций относилась к операции записи. Точнее, если существует хотя бы одна общая ячейка памяти, что состояние исполнения потоков относительно её после выполнения двух операций может зависеть от их порядка, то мы называем эти операции некоммутирующими, и такие операции мы называем коммуницирующими.

Теперь пусть первый поток совершает k операций, а второй – n операций. Под графом совместного исполнения потоков будем понимать ориентированный граф  $G := (V, A)$ ,  $V = \bigcup_{\substack{i=1, k+1 \\ j=1, n+1}} v_j^i$ ,

$$A = \bigcup_{\substack{i=1, k \\ j=1, n+1}} (v_j^i, v_j^{i+1}) \cup \bigcup_{\substack{i=1, k+1 \\ j=1, n}} (v_j^i, v_{j+1}^i). \quad \text{Такое}$$

представление исполнения двух потоков описывает всевозможные сценарии исполнения программ. При движении из одной вершины

графа в  $v_y^x$  в другую  $v_{n+1}^{k+1}$  преобразовываем операции исполнения потоков согласно операциям, которые эти дуги представляют.

Если, дойдя до вершины  $v_{n+1}^{k+1}$ , мы получим одинаковые состояния и это верно при рассмотрении любой из общих ячеек памяти, то будем считать эти пути эквивалентными. Таким

образом, все возможные пути из вершины  $v_y^x$  в вершину  $v_{n+1}^{k+1}$  разбиваются на классы эквивалентности. Тогда два пути из вершины  $v_y^x$  в вершину  $v_{n+1}^{k+1}$ , которые отличаются друг от друга только парой дуг –  $(v_j^i, v_j^{i+1})$ ,  $(v_j^{i+1}, v_{j+1}^{i+1})$

в одном и  $(v_j^i, v_{j+1}^i)$ ,  $(v_{j+1}^i, v_{j+1}^{i+1})$  в другом, принадлежат одному классу эквивалентности, если  $i$ -я операция первого потока и  $j$ -я операция второго коммутируют между собой. Для нахождения всех классов эквивалентности нам понадобится обойти весь граф равномерно следя за изменением, причем число классов эквивалентности мы высчитаем за  $O(k \cdot n)$  операции. Оно равно  $f(1,1)^2$ , где на графе совместного исполнения потоков определена функция  $f(i, j)$ ,  $1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq n+1$ . Здесь  $k$  – число операций, выполняемых первым потоком, а  $n$  – число операций, выполняемых вторым потоком.

$$1. \quad f(i, j) = 1 \quad \text{при} \quad i = k+1, j = 1, \dots, n+1$$

$$2. \quad f(i, j) = 1 \quad \text{при} \quad j = n+1, i = 1, \dots, k$$

$$3. \quad f(i, j) = f(i+1, j) + f(i, j+1), \quad \text{если}$$

$i$ -я операция первого потока и  $j$ -я операция второго потока являются некоммутирующими, в противном случае

$$f(i, j) = f(i+1, j) + f(i, j+1) - f(i+1, j+1)$$

Далее представлен наш алгоритм построения классов эквивалентности:

Алгоритм:

1.  $V_s = \emptyset, i = 1, j = 1, class = s$
2. while (  $j \leq n+1$  ) {
3.     while (1) {
4.          $V_s = V_s \cup v_j^i$ ;
5.         if (  $i == k+1$      ||  
 $f(i+1, j) < class$  ) break;
6.          $i = i+1$ ;
7.         }
8.         if (  $j < n+1$  )
9.              $class = class - (f(i, j) - f(i, j+1))$ ;
10.          $j = j+1$ ;
11.     }

Нетрудно заметить, что построение пути требует  $O(n+k)$  действий.

После того, как мы построили классы эквивалентности, нам достаточно вычислить результирующие состояния исполнения только для одного представителя каждого из классов.

Удалим из графа дуги, которые не входят в полные пути, соответствующие выбранным представителям классов. Мы получим редуцированный граф совместного исполнения

потоков. При этом результирующее состояние исполнения должно остаться тем же самым. Результирующие состояния мы предлагаем искать методом неопределенных коэффициентов.

## 6. Пример. Задача о транзакции

Дано два потока, две ячейки памяти и некоторое число  $k$ . Первый поток выполняет следующую транзакцию:

- Считывает значение первой ячейки памяти
- Вычитает из считанного значения  $k$
- Записывает результат в первую ячейку памяти
- Считывает значение второй ячейки памяти
- Прибавляет к считанному значению  $k$
- Записывает результат во вторую ячейку памяти

Второй поток контролирует значения ячеек памяти. Он делает следующее:

- Считывает значение первой ячейки памяти
- Считывает значение второй ячейки памяти

Необходимо найти значения, считанные вторым потоком. Исходя из требования константности данных значений, определить возможно ли возникновение неразрешенного состояния гонки.

Тогда представление работы потоков будет следующее: первый поток выполняет операции  $R_1^1 V_1^1(f) W_1^1 R_2^1 V_1^2(g) W_1^2, f(x) = x - k, g(x) = x + k$ ;

Второй поток выполняет операции  $R_2^2 R_2^1$ .

После построения графа совместного исполнения потоков, нахождения классов эквивалентности, перехода к редуцированному графу, будем искать результирующее состояние исполнения потоков в неопределенных коэффициентах.

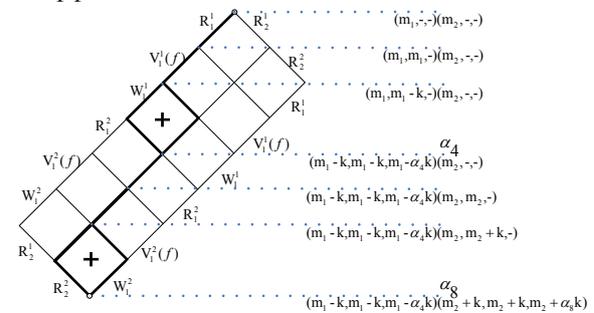


Рисунок 1. Вычисление результирующего состояния исполнения потоков

<sup>2</sup> В силу ограничения на объем статьи результаты приводим без доказательств.

Итак, мы получили, что второй поток считает из первой ячейки значение  $m_1 - \alpha_4 k$ , а из второй -  $m_2 + \alpha_8 k$ . Сумма считанных значений равна  $m_1 + m_2 + (\alpha_8 - \alpha_4)k$ . Существуют наборы значений неопределенных коэффициентов, подстановка которых даст различный результат (например,  $\alpha_8 = 1, \alpha_4 = 0$  и  $\alpha_8 = 0, \alpha_4 = 1$ ), а значит возможно неразрешенное состояние гонки.

Относительно данной задачи это означает, что наблюдатель может увидеть результат транзакции в некотором промежуточном состоянии, когда сумма значений ячеек памяти не равна сумме значений ячеек до исполнения потоков. Заметим, что мы также можем найти сумму значений ячеек после исполнения потоков  $m_1 - k + m_2 + k = m_1 + m_2$ , и она не зависит от значений неопределенных коэффициентов.

## 6. Заключение

В работе была описана актуальность поставленной задачи; описан подход, позволяющий гарантированно обнаружить все состояния гонки в программе, приводящие к неправильной работе программы. При этом необходимые расчеты минимизированы за счет объединения вариантов исполнения потоков программы в классы и проведения вычислений только для одного выбранного специальным образом представителя каждого из классов. На примере было продемонстрировано применение данного метода для поиска неразрешенных состояний гонки в конкретных задачах. Поле дальнейших исследований связано с увеличением функциональности метода до уровня доказательства любого алгоритма, даже lock-free реализации структур.

## 7. Список литературы

[1] A. R. Moshtaghi. "Modeling Multithreaded Programs Using Petri Nets." *International Journal of Parallel Programming*, Volume 30, Number 5, October 2002, pp. 353-371(19)

[2] R. V. Patil, G. B. "Concurrency: Tools And Techniques to Identify Concurrency Issues." – MSDN Magazine, June 2008

[3] B. Davies. "Whither Mathematics?" *Notices of the American Mathematical Society*, dec. 2005, vol. 52, №11.

[4] R. O'Callahan, Jong-Deok Choi. Hybrid Dynamic Data Race Detection. PPOPP'03, June 11–13, 2003, San Diego, California, USA.

[5] L. Lamport. "How to make multiprocessor computer that correctly executes multiprocess programs", *IEEE Tr. On Computers*, September 1979, pp 241-248.

[6] S. Qadeer and D. Wu. KISS: keep it simple and sequential. In PLDI, USA, 2004.

[7] Карпов А. Тестирование параллельных программ. <http://www.software-testing.ru/library/testing/functional-testing/581-parallelprogramtesting>

[8] K. M. Kavi, A. Moshtaghi, "Modeling threaded Applications Using Petri Nets", *International Journal of Parallel Programming*, Kluwer Academic Publishers, USA, pp. 353-371.

[9] Yin Wang St'ephane Lafortune. Terence Kelly. "The Theory of Deadlock Avoidance via Discrete Control". *Proceedings of the 36th annual ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages*, USA, pp. 252-263.

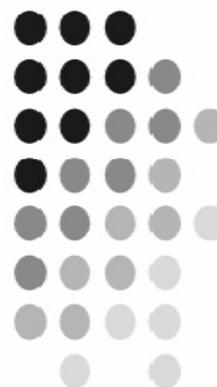
[10] Х.М.Дейтел, П.Дж. Дейтел, Д.Р.Чофнес. *Операционные системы. Основы и принципы*: Третье издание. Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2007 г. – 1024 с.: ил.

[11] T. Ball and S. Rajamani. "The SLAM project: debugging system software via static analysis." In *Proceedings of the 29th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'02)*, p. 1–3. ACM Press, 2002.

[12] M. Das. "Unification-based pointer analysis with directional assignments." In *Proceedings of the ACM SIGPLAN 2000 Conference on Programming Language Design and Implementation (PLDI'00)*, p. 35–46. ACM Press, 2000.

# Раздел 3

Передача, защита  
и обработка информации



## Сигнально-кодовые конструкции на базе эквидистантных кодов в системе множественного доступа с каскадным кодированием.

Зяблов В.В.  
ИППИ РАН  
zyablov@iitp.ru

Осипов Д.С.  
ИППИ РАН  
d\_osipov@iitp.ru

### Аннотация

*Предложено семейство моделей систем множественного доступа, использующих сигнально-кодовые конструкции на базе эквидистантных кодов. Рассматривается квазисинхронная передача по “восходящему” каналу с оптимальным контролем мощности. Сигнально-кодовые конструкции описываемого типа могут рассматриваться как внутренний код в каскадной системе. Целью работы является отыскание верхних границ для вероятностей отказа от декодирования внутреннего кода (стирания символа внешнего кода) и ошибочного декодирования внутреннего кода (ошибки в принятом слове внешнего кода), которые обеспечиваются такими сигнально-кодовыми конструкциями. Полученные оценки могут использоваться для выбора внешнего кода в вышеупомянутой каскадной системе.*

### 1. Введение

В настоящее время, все более интенсивное внедрение информационных технологий во все сферы жизни и сопутствующее этому процессу повышение ценности информации, передаваемой по беспроводным сетям, а также возникновение новых информационных угроз обуславливают необходимость создания новых методов приема и передачи данных, которые позволили бы защитить информацию от несанкционированного доступа или подавления. В то же время технические ограничения делают все более актуальной проблему разработки методов, которые бы позволили многим пользователям совместно использовать частотные диапазоны.

В работе [1] была описана (а в [2] подробно исследована) модель системы множественного доступа, использующая новый принцип передачи: частотно-позиционное кодирование в динамически выделяемом частотном диапазоне с пороговым когерентным приемом. Ниже будет описан класс систем, полученных в результате модификации этой модели: системы квазисинхронного множественного доступа,

использующие сигнально-кодовую конструкцию на базе эквидистантных кодов с некогерентным пороговым приемом. Настоящая работа посвящена проблеме отыскания границ для вероятностей, описывающих поведение моделей такого типа.

### 2. Описание системы и сигнально-кодовой конструкции

Как уже было сказано выше, в работах [1], [2] была рассмотрена система асинхронного множественного доступа, в которой ортогональное мультиплексирование было дополнено частотным манипулированием в динамически выделяемом частотном диапазоне и пороговым когерентным приемом.

Рассмотрим систему множественного доступа без управления, в которой  $K' = K + 1$  активных пользователей одновременно осуществляют передачу на базовую станцию по каналу, разбитому при помощи технологии OFDM на  $Q$  подканалов. Будем предполагать, что в системе введена синхронизация по времени. На практике идеальная синхронизация по времени невозможна, поэтому мы будем предполагать, что пользователи в рассматриваемой системе передают данные в квазисинхронном режиме, что означает, что длина циклического префикса выбирается большей, чем наибольшая задержка распространения сигнала. В результате принятые отсчеты оказываются сдвинутыми по фазе. Кроме того, мы будем предполагать, что в системе налажен идеальный контроль мощности. В действительности можно говорить лишь о субоптимальном контроле мощности, однако это предположение упрощает анализ и часто используется в работах, посвященных системам множественного доступа. В рассматриваемом случае контроль мощности близкий к идеальному можно обеспечить путем использования технологии TDD с прекомпенсацией [4]. Мы будем предполагать, что рассматриваемая система использует именно такой механизм контроля мощности. При этом здесь будет рассмотрена система без ограничения на мощность передатчика - обобщение полученных

результатов на случай таких ограничений будет предметом дальнейших исследований, которые выходят за рамки настоящей работы.

Каждый из рассматриваемых пользователей оснащен специализированным генератором, который выбирает  $q$  подканалов из всего множества  $Q$  подканалов. Как и в работе [1] мы будем предполагать, что все пользователи выбирают подканалы некоординированно (т. е. ни один из пользователей не располагает информацией о других пользователях).

Базовая станция также оснащена генератором номеров подканалов засинхронизованным с генератором рассматриваемого пользователя. В работе [1] рассматривалась система с частотно-позиционным кодированием, т.е. каждому символу ставился в соответствие один из  $q$  подканалов и для того чтобы передать некоторый символ необходимо было передать сигнал по соответствующему подканалу. На приемном конце был организован пороговый когерентный прием. В случае превышения порога по одному из подканалов принимался символ, поставленный в соответствие этому подканалу. В противном случае принималось решение о стирании.

Естественным обобщением такой модели является система с некогерентным приемом. Такая система характеризуется существенно большей устойчивостью к подавлению. В то же время можно заметить, что относительное расстояние используемого системой кода заметно уменьшается с ростом  $q$ . Поэтому естественным развитием вышеописанной системы является использование кода с большим относительным расстоянием. В настоящей работе в качестве основы для построения такого кода будут использоваться эквидистантные коды с постоянным весом. В качестве примера такого рода кодов мы рассмотрим подкод кода Рида-Малера первого порядка, который будет строиться следующим образом: выберем случайным образом любое кодовое слово кода Рида-Малера первого порядка за исключением нулевого и кодового слова состоящего из одних единиц, затем выберем кодовое слово ортогональное выбранному (т.е. такое, что их сумма дает кодовое слово из  $q$  единиц), затем вновь выберем случайным образом любое кодовое слово кода Рида-Малера первого порядка за исключением нулевого, кодового слова состоящего из одних единиц и кодовых слов, выбранных ранее, и кодовое слово ортогональное этому слову и повторим эту операцию еще  $m-2$  раза. Полученный нелинейный код содержит  $m$  пар ортогональных кодовых слов и при этом не содержит ни нулевого кодового слова, ни ортогонального ему кодового слова

состоящего из  $q$  единиц, все кодовые слова этого кода имеют длину  $q$  и одинаковый вес  $m$ , минимальное расстояние кода равно  $m$ , а относительное расстояние (т.е. отношение минимального расстояния к длине кода) постоянно и равно  $\frac{1}{2}$ . Теперь каждому передаваемому

нами символу будет поставлено в соответствие кодовое слово полученного нами кода. Поясним это на примере: пусть  $q = 16$ , генератором номеров подканалов в данный момент был выбран вектор номеров подканалов  $(n_1, n_2, \dots, n_{16})$  и пользователю необходимо передать символ, которому в соответствие поставлено кодовое слово  $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ . На практике это означает, что пользователю следует передать сигнал в подканалах с номерами  $n_2, n_3, n_6, n_7, n_9, n_{12}, n_{13}$  и  $n_{16}$ .

Помимо того, что выбрасывание нулевого кодового слова, и кодового слова состоящего из одних единиц заметно упрощает анализ (т.к. при использовании такого кода каждый из активных пользователей передает сигналы ровно в  $m$  подканалах) оно также позволяет отличить “логический ноль” (т.е. передачи кодового слова, поставленного в соответствие нулевому элементу поля) от “физического нуля” (т.е. ситуации в которой пользователь, находящийся в системе по какой-либо причине не передает информацию). В то же время результирующий код имеет более низкую скорость чем собственно код Рида-Малера первого порядка (скорость используемого кода равна скорости частотно-позиционного кода и составляет  $\log_2(q)$ , в то время как скорость кода Рида-Малера первого порядка есть  $\log_2(q)+1$ ). В рассматриваемой системе возможна ситуация когда некоторые из подканалов, выбранные генератором номеров рассматриваемого пользователя будут использованы для передачи другими пользователями. Такую ситуацию мы в дальнейшем будем называть коллизией (заметим, что данное здесь определение коллизии несколько отличается от определения принятого в [1] где коллизией называлась только ситуация, в которой один или более пользователей передавали информацию в одном и том же подканале). Следует отметить, что определение коллизии распространяется не только на случай, когда передача информации одним из пользователей создает помехи другим пользователям, так как коллизия может быть и следствием намеренных действий направленных на блокирование передачи информации пользователями системы.

Как и ранее в [1], [2] мы будем предполагать, что базовая станция располагает генератором номеров подканалов, засинхронизированным с генератором номеров подканалов рассматриваемого пользователя. Таким образом, базовой станции известен вектор номеров подканалов, по которым могла вестись передача. Базовая станция вычисляет мощности принятых сигналов и сравнивает их с некоторым порогом, причем превышению порога ставится в соответствие символ 1, а отсутствию превышения соотносится символ 0. Приемник принимает решение по методу максимума правдоподобия. Следует отметить, что основной интерес для нас представляют  $q = 2^c$   $3 \leq c \leq 5$  поэтому сложность декодирования сравнительно невысока, даже, несмотря на то, что используется декодирование по методу наибольшего правдоподобия (следует также учитывать, что в приведенном примере полное вычисление метрик необходимо лишь для половины слов т.к. для ортогональных им кодовых слов метрики могут быть вычислены с использованием уже вычисленных значений).

Рассмотренные выше конструкции являются частными случаями большого класса систем множественного доступа на базе двоичных эквидистантных кодов постоянного веса. Каждый такой код характеризуется весом кодовых слов, длиной кодового слова и расстоянием, которое напрямую зависит от числа позиций, в которых совпадают каждые два кодовых слова. Перечисленные нами параметры кода определяют мощность и, следовательно, скорость кода. Расстояние кода и его длина определяют относительное расстояние кода, характеризующее его корректирующую способность. В то же время необходимо учитывать, что увеличение веса используемых кодовых слов равносильно увеличению вероятности коллизии. Поэтому выбор конкретного кода определяется как решение задачи максимизации пропускной способности за счет выбора вышеперечисленных параметров. В настоящей работе мы сконцентрируемся на решении другой, более общей задачи, суть которой будет более подробно изложена ниже.

Для того, чтобы обеспечить вероятность корректного приема, удовлетворяющую требованиям современных систем необходимо использовать внешний код. Таким образом, возникает каскадная система, в которой предложенная сигнально-кодовая конструкция играет роль внутреннего кода. Как и всегда в таких случаях мы будем различать три исхода:

- корректное декодирование (для внешнего кода оно аналогично корректному приему)

- отказ от декодирования (для внешнего кода оно равносильно стиранию символа)
- ошибочное декодирование (приводит к ошибочному приему символа внешнего кода).

Таким образом, для того, чтобы оценить вероятность ошибки и стирания для выбора внешнего кода полезно уметь вычислять вероятности отказа от декодирования и ошибочного декодирования внутреннего кода или, по крайней мере, уметь оценивать их "сверху". В дальнейшем мы сконцентрируемся на решении именно этой задачи. Для простоты рассмотрим вывод этих оценок на примере сигнально-кодовой конструкции на базе кода Рид-Малера, описанной выше (границы, которые будут получены ниже, позволяют без труда обобщить полученные результаты на случай любой конструкции из вышеописанного класса).

### 3. Классификация подканалов и условные вероятности ошибок.

Подканалы будем классифицировать по трем признакам: по наличию или отсутствию в подканале сигнала, по тому произошла ли в подканале коллизия и по тому произошла ли в подканале ошибка. Пусть коллизии произошли в  $\beta$  подканалах, в которых рассматриваемым пользователем передавался сигнал и ровно  $\alpha$  подканалах, которые были выбраны генератором номеров подканалов, но не были использованы для передачи сигналов. Оценим теперь вероятность такого события.

Выбор подканалов каждым из пользователей есть последовательность из  $m$  выборов (без возвращения) из  $Q$  т.е. вероятность каждого следующего выбора зависит от исхода предыдущего. В то же время назначение пользователями подканалов происходит независимо. По этой причине прямое вычисление требуемой вероятности приводит к весьма громоздким формулам (фактически оно включает суммирование по всем возможным исходам). В то же время, известно, что вероятность любого результата  $m$  выборов (без возвращения) из  $Q$  объектов хорошо аппроксимируется вероятностью такого же результата  $m$  выборов из  $Q$  объектов (с возвращением) в случае если  $m \leq 0.1Q$ . В рассматриваемом случае  $m \ll 0.1Q$  и потому вероятности возникновения соответствующих исходов могут быть вычислены с высокой степенью точности как вероятности исходов серии из  $m$  независимых испы-

таний, каждое из которых имеет вероятность

$$p = \frac{1}{Q}.$$

Вероятность того, что ни один из  $K$  пользователей (за исключением быть может рассматриваемого) не использовал некоторый подканал есть

$p_0 = \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^K$ , а вероятность того, что в системе произошло ровно  $\alpha + \beta$  коллизий есть

$$p_c(\alpha + \beta) = C_{2m}^{\alpha+\beta} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^K\right)^{\alpha+\beta} \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{(2m-\alpha-\beta)K}$$

Наконец вероятность того, что из  $\alpha + \beta$  коллизий имевших место в  $q = 2m$  подканалах ровно  $\alpha$  произойдет в подканалах, которым в соответствие поставлены 0, есть

$$p_{col}(\alpha, \beta) = \frac{C_m^\alpha C_m^\beta}{C_{2m}^{\alpha+\beta}} p_c(\alpha + \beta) = C_m^\alpha C_m^\beta \left(1 - \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^K\right)^{\alpha+\beta} \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{(2m-\alpha-\beta)K} \quad (1)$$

т.к. всего существует  $C_m^\alpha$  способов “размещения”  $\alpha$  коллизий по  $m$  подканалам и  $C_m^\beta$  способов “размещения”  $\beta$  коллизий по  $m$  подканалам и эти размещения независимы.

Пусть в  $b$  подканалах, в которых рассматриваемым пользователем передавался сигнал, и в  $a$  подканалах, в которых рассматриваемым пользователем не передавался сигнал, произошли ошибки. Пусть, кроме того, в  $x$  из  $\beta$  подканалов, в которых рассматриваемым поль-

зователем передавался сигнал и произошла коллизия, и в  $y$  из  $\alpha$  подканалов, которые были выбраны генератором номеров подканалов, но не были использованы для передачи сигналов и в которых произошла коллизия произошли ошибки. Ясно, что  $y \ll \min(\alpha, a)$  и  $x \ll \min(\beta, b)$

Ниже приведена таблица, в которой описываются все три ситуации:

	Ош.	Кол.	Сиг.	Число подканалов
1	0	0	0	$m - \alpha - a$
2	1	0	0	$a$
3	1	1	0	$y$
4	0	1	0	$\alpha - y$
5	0	0	1	$m - \beta - b$
6	1	0	1	$b$
7	0	1	1	$\beta - x$
8	1	1	1	$x$

Условная вероятность каждого такого набора есть:

$$p(a, b, x, y, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, m | \alpha, \beta) = \left( p_1^{(m-a-\alpha)} \cdot p_2^a \cdot p_3^y \cdot p_4^{(\alpha-y)} \cdot p_5^{(m-b-\beta)} \cdot p_6^b \cdot p_7^{(\beta-x)} \cdot p_8^x \right) \quad (2)$$

где  $p_j$  - условные вероятности, соответствующие  $j$ -ой строке таблицы

Пусть рассматриваемый пользователь передает кодовое слово  $x_i$ . Рассмотрим принятое слово  $y_i = x_i \oplus e$ , где  $e$  - вектор ошибки, а оператор  $\oplus$  означает суммирование по модулю 2. Рассмотрим все вектора ошибки  $e$ , такие что на  $a$  позициях из  $m$  позиций, на которых в слове переданном рассматриваемом пользователем стоят единицы, и на  $b$  позициях из  $m$  позиций, на которых в слове переданном рассматриваемом пользователем стоят нули, в них стоят единицы т.е. на  $a$  из  $m$  позиций первого типа и на  $b$  из  $m$  позиций второго типа в принятом слове будут стоять ошибки. Будем обозначать их  $e(a, b)$ .

Рассмотрим теперь принятые слова вида  $y_i = x_i \oplus e(a, b)$  Тогда, для любых допустимых значений  $a$  и  $b$  каждому  $x_i$  соответствуют три множества:

-мн-во принятых слов, которые будут декодированы правильно

$$S_C(x_i, a, b) \quad d(y_i, x_i) < d(y_i, x_j) \quad \forall j \neq i$$

-мн-во принятых слов, декодирование которых приводят к отказу

$$S_S(x_i, a, b) \quad \exists j \neq i \quad d(y_i, x_i) = d(y_i, x_j)$$

-мн-во принятых слов, декодирование которых приводит к ошибке

$$S_E(x_i, a, b) \quad \exists j \neq i \quad d(y_i, x_j) < d(y_i, x_k) \quad \forall k \neq j$$

Заметим, что это формальные обозначения т.к. при определенных значениях  $a$  и  $b$  некоторые из этих множеств могут оказаться пустыми (так при  $\forall a, b$  таких что  $a + b < \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$   $S_s(x_i, a, b) = \emptyset$  и  $S_E(x_i, a, b) = \emptyset$ )

Используя введенные обозначения, запишем условные вероятности ошибки и отказа от декодирования

$$p_{ers}(x_i) = \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^m \left( p_{col}(\alpha, \beta) \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^m \sum_{x=0}^{\min(\alpha, a)} \sum_{y=0}^{\min(\beta, b)} |S_s(x_i, a, b)| p(a, b, x, y, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, m | \alpha, \beta) \right) \quad (3)$$

$$p_{err}(x_i) = \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^m \left( p_{col}(\alpha, \beta) \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^m \sum_{x=0}^{\min(\alpha, a)} \sum_{y=0}^{\min(\beta, b)} |S_E(x_i, a, b)| p(a, b, x, y, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, m | \alpha, \beta) \right) \quad (4)$$

Для того, чтобы оценить вероятности отказа от декодирования (стирания символа в принятом слове внешнего кода) и ошибочного декодирования (ошибки в принятом слове внешнего кода) необходимо уметь оценивать условные вероятности  $p_j$ , фигурирующие в формуле (2).

Рассмотрим, прежде всего, те подканалы, в которых не произошла коллизия. Вероятность того, что в подканале, в котором не передавался сигнал, произойдет ошибка, есть вероятность того, что порог будет превышен даже при отсутствии сигнала. Эта вероятность описывает хорошо известный в теории принятия решений случай, который часто называют “ложной тревогой” или “ложным обнаружением” по аналогии с ситуацией такого типа возникающей в радиолокационных системах при которой локализатор сигнализирует об обнаружении объекта в зоне локализации в то время, как объекта в действительности нет.

По этой причине в англоязычной литературе эту вероятность часто называют “вероятностью ложной тревоги” (probability of false alarm) и обозначают  $p_F$ . Для рассматриваемого случая (сравнение переменной имеющей распределение  $\chi^2$  с некоторым порогом  $\theta$ ) хорошо известно аналитическое выражение для этой вероятности:

$$p_F = e^{-\left(\frac{\theta}{2\sigma^2}\right)}.$$

Следовательно

$$p_2 = p_F = e^{-\left(\frac{\theta}{2\sigma^2}\right)}. \quad (5)$$

Вероятность дополнительного события находится из условия нормировки

$$p_1 = 1 - p_2 = 1 - e^{-\left(\frac{\theta}{2\sigma^2}\right)} \quad (6)$$

Вероятность того, что в подканале, в котором есть сигнал, произойдет ошибка (иными словами порог не будет превышен) часто называют также заимствованным из радиолокации

термином “вероятность пропуска цели” (probability of miss) и обозначают  $p_M$ . Для рассматриваемого случая эта вероятность равна

$$p_6 = p_M(\mu, \theta) = \int_0^{\theta} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\left(\frac{y+\mu^2}{2\sigma^2}\right)} I_0\left(\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) dy \quad (7)$$

Вероятность дополнительного события (называемая “вероятностью обнаружения”) находится из условия нормировки

$$p_5 = 1 - p_M = 1 - \int_0^{\theta} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\left(\frac{y+\mu^2}{2\sigma^2}\right)} I_0\left(\frac{\mu\sqrt{y}}{\sigma^2}\right) dy \quad (8)$$

Таким образом, известны точные значения вероятностей  $p_1, p_2, p_5$  и  $p_6$ . Рассмотрим теперь вопрос об отыскании вероятностей ошибок для подканалов с коллизиями. Выход каждого из подканалов, в которых имела место коллизия кратности  $i$  ( $i > 1$ ) представляет собой сумму векторов с амплитудой  $A$  и случайной фазой распределенной на окружности  $[0, 2\pi]$ .

Распределение суммы даже двух таких слагаемых имеет крайне сложный вид [4] поэтому вычисление точных значений для соответствующих вероятностей представляется крайне затруднительным. По этой причине нашей целью в дальнейшем станет отыскание верхних границ для условных вероятностей в подканалах с коллизиями. Для этой цели мы используем уже упомянутые выше функции  $p_F(\theta)$  и  $p_M(\mu, \theta)$ .

#### 4. Границы для вероятностей ошибки в подканалах с коллизиями

Пусть в некотором подканале, по которому рассматриваемым пользователем передавался сигнал, произошла коллизия кратности  $i$ . Оце-

ним вероятность того, что в этом подканале произошла ошибка.

Как уже было сказано выше, выход подканала представляет собой сумму  $i$  векторов с одинаковой амплитудой и фазами равномерно распределенными на окружности от  $[0, 2\pi]$ .

Заметим, что

$$p\left(\left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 < A^2\right) = p\left(\left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right| < A\right) = \frac{1}{i+2}. \quad (9)$$

И соответственно

$$p\left(\left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2\right) = p\left(\left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right| \geq A\right) = \frac{i+1}{i+2}. \quad (10)$$

Кроме того, очевидно, что

$$(i+1)A^2 \geq \left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 \geq 0.$$

Рассмотрим случай

$$0 < \left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 < A^2$$

Левая часть неравенства соответствует “худшему случаю” – взаимной компенсации всех сигналов, которые были переданы по подканалу. В этом случае выход подканала будет, очевидно, является переменной, распределенной по закону  $\chi^2$ . Вероятность ошибки есть вероятность того, что мощность сигнала, пришедшего по данному подканалу, окажется меньше порога и, в данном случае, будет равна:

$$p\left( err \mid s=1, n_{col}=i, 0 < \left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 < A^2 \right) < 1 - p_F(\theta) \quad (11)$$

Так как  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} p_M(\mu, \theta) = 0$  выражение (11)

задает верхнюю границу (для рассматриваемого случая). По той же причине нижняя граница условной вероятности ошибки достигается при  $\mu = |x_1| = A$  и равна  $p_M(A, \theta)$ .

$$p\left( err \mid s=1, n_{col}=i, 0 < \left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 < A^2 \right) > p_M(A, \theta) \quad (12)$$

Рассмотри теперь случай  $iA^2 > \left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2$ .

Как уже было сказано,  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} p_M(\mu, \theta) = 0$  поэтому можно записать

$$p_M(A, \theta) \geq p\left( err \mid s=1, n_{col}=i, (i+1)A^2 > \left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2 \right)$$

$$p\left( err \mid s=1, n_{col}=i, (i+1)A^2 > \left|\sum_{k=1}^{i+1}\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2 \right) > p_M(\sqrt{i+1}A, \theta). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой один или более пользователей передают сигнал по подканалу, в котором рассматриваемый пользователь не передавал сигнал. В случае если такой пользователь ровно один вероятность ошибки есть

$$p(err \mid s=0, n_{col}=1) = 1 - p_M(A, \theta)$$

Если же кратность коллизии больше из свойств  $p_M(A, \theta)$  и  $p_F(\theta)$  и определения ошибки (для данного случая это превышение порога т.к. рассматриваемый пользователь не передавал сигнал в подканале следует

$$1 - p_M(A, \theta) > p\left( err \mid s=0, n_{col}=i, 0 < \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 < A^2 \right)$$

$$p\left( err \mid s=0, n_{col}=i, 0 < \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 < A^2 \right) > p_F$$

(13)

$$1 - p_M(\sqrt{i}A, \theta) > p\left( err \mid s=0, n_{col}=i, iA^2 \geq \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2 \right)$$

$$p\left( err \mid s=0, n_{col}=i, iA^2 \geq \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2 \right) > 1 - p_M(A, \theta)$$

(14)

Заметим что

$$\sum_{i=2}^K p\left( err, \mid s=0, n_{col}=i, \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2 \right) p^s_{col}(i) = p\left( err, \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2 \mid s=0, i > 1 \right)$$

(15)

$$\sum_{i=2}^K p\left( err, \mid s=0, n_{col}=i, \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 < A^2 \right) p^s_{col}(i) = p\left( err, \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 < A^2 \mid s=0, i > 1 \right)$$

(16)

Фигурирующая в формулах (15)-(16) вероятность коллизий  $p^s_{col}(i)$  находится как вероятность того, что в серии из  $K$  испытаний с вероятностью “успеха”  $p = \frac{1}{Q}$  произошло ровно  $i$

“успешных” испытаний и равна

$$p^s_{col}(i) = C_K^i \left(\frac{1}{Q}\right)^i \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{K-i}$$

Учитывая что

$$p(err \mid s=0) = p\left( err, \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 \geq A^2 \mid s=0, i > 1 \right) + p\left( err, \left|\sum_{k=1}^i\bar{x}_k\right|^2 < A^2 \mid s=0, i > 1 \right) + p(err \mid s=0, i=1) \quad (17)$$

$$\text{и } p(\text{err} | s = 0, i = 1) = 1 - p_M(A, \theta)$$

и суммируя неравенства (13-14), получим границу сверху и снизу для  $p_3$  и тем самым границу сверху для  $p_4$  как  $\bar{p}_4 = 1 - \underline{p}_3$ .

$$\begin{aligned} \bar{p}_3 = & \left( (1 - p_M(A, \theta)) p_{col}^s(1) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^K \left( p_{col}^s(i) \left( \frac{1 - p_M(A, \theta)}{i+1} + i \frac{(1 - p_M(\sqrt{i}A, \theta))}{i+1} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_4 = & 1 - \left( (1 - p_M(A, \theta)) p_{col}^s(1) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=2}^K \left( p_{col}^s(i) \left( i \frac{(1 - p_M(A, \theta))}{i+1} + \frac{p_F}{i+1} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Сходным образом получим границы для  $p_8$  и  $p_7$ .

$$\bar{p}_8 = \sum_{i=1}^K \left( p_{col}^s(i) \left( \frac{1 - p_F(\theta)}{i+2} + (i+1) \frac{p_M(A, \theta)}{i+2} \right) \right) \quad (20)$$

$$\bar{p}_7 = 1 - \sum_{i=1}^K \left( p_{col}^s(i) \left( \frac{p_M(A, \theta)}{i+2} + (i+1) \frac{p_M(\sqrt{i+1}A, \theta)}{i+2} \right) \right) \quad (21)$$

Подставляя выражения (18)-(21) в (3) и (4) получим искомые границы сверху для вероятности отказа от декодирования (стирания символа в принятом слове внешнего кода) и ошибочного декодирования (ошибки в принятом слове внешнего кода).

## 5. Заключение: вывод и программа будущих исследований.

Выше нами были получены верхние границы для вероятностей отказа от декодирования внутреннего кода (стирания символа внешнего кода) и ошибочного декодирования внутреннего кода (ошибки в принятом слове внешнего кода) в системе множественного доступа, использующей каскадное кодирование. Полученные оценки могут использоваться для выбора внешнего кода в вышеупомянутой каскадной системе.

Дальнейшее развитие полученных результатов предполагает несколько направлений исследований. Важнейшим из них является учет ограничений на мощность передатчика, так как в реальных системах мощность передатчика всегда ограничена. Поэтому полученные границы применимы лишь в том случае если мощность передатчика и характеристики канала таковы, что, находясь в пределах зоны обслуживания, каждый пользователь может обеспечить требуемую мощность на выходе любого из подканалов. Для случая, когда это не так необходимо рассматривать декодирование внутреннего кода со стираниями, причем вероятность стирания будет зависеть от типа и параметров канала.

Кроме того, можно заметить, что даже полученные при помощи используемого нами простого метода границы имеют сравнительно громоздкий вид. Поэтому дальнейшее упрощение полученных выражений (без значительного увеличения отклонения от истинных значений) также представляется весьма важным. Одним из возможных путей для дальнейшего упрощения полученных границ является замена функций фигурирующих в (1),(2),(18)-(21) соответствующими верхними или нижними границами.

## 6. Библиография.

- [1] Зяблов В. В., Осипов Д. С., "Об оптимальном выборе порога в системе множественного доступа, основанной на перестроении ортогональных частот." *Проблемы передачи информации* т.44, №2, 2008г. стр. 23-31
- [2] Осипов Д.С. *Множественный доступ с каскадным кодированием. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.17(Теоретические основы информатики) (на правах рукописи)* ИППИ РАН М. 2008 г.
- [3] Cosovic I., Schnell M., "Time Division Duplex MC-CDMA for Next Generation Mobile Radio Systems." In Proc. of TELFOR 2002, 10th Telecommunications forum (TELFOR 2002), Belgrade, Yugoslavia, November 2002. pp. 26-28.
- [4] A. Abdi, H. Hashemi, S. Nader-Esfahani "On the PDF of the Sum of Random Vectors" *IEEE Transactions on Communications* vol. 48 N. 1, January 2000

## Исследование пропускной способности системы множественного асинхронного доступа с пороговым приемом

Грошев Ф.В.  
ИППИ РАН  
groshev@iitp.ru

Осипов Д.С.  
ИППИ РАН  
d\_osipov@iitp.ru

### Аннотация

*В работе рассматривается система множественного доступа, в которой несколько пользователей передают информацию одному из пользователей по каналу, разбитому при помощи технологии OFDM на множество подканалов, причем передача является асинхронной и некоординированной.*

*Исследуется изменение пропускной способности в зависимости от числа активных пользователей при фиксированном уровне шума. Полученные в работе результаты могут быть использованы для оценки верхней границы числа активных пользователей в такой системе.*

### 1. Введение

Данная система интересна, потому что последние годы растет число пользователей, а число каналов, которыми они располагают ограничено.

Эта система так же хороша для защиты от прослушивания. Пример новой модели такой системы рассмотрен в [3].

Для такой системы возникает важный вопрос - это пропускная способность и зависимость ее от параметров системы. Особенно важно исследование зависимости пропускной способности от числа активных пользователей, так как она позволяет определить максимальное число активных пользователей, которые могут одновременно работать в системе. Такое исследование также позволит определить момент, когда система начнет отклонять заявки от новых пользователей и оценить необходимую избыточность кодирования.

Основная задача данной работы исследовать изменение пропускной способности описанной системы в зависимости от числа активных пользователей при фиксированном уровне шума.

### 1. Описание системы

Рассмотрим систему множественного доступа [3], в которой  $K$  активных пользователей передают информацию на приемное устройство пользователя по каналу, разбитому с помощью технологии OFDM на  $Q$  частотных подканалов, причем передача является асинхронной и не координированной (последнее означает, что ни один из пользователей не располагает информацией о других парах пользователей, но взаимодействующая пара пользователей синхронизирована). Рассмотрим передачу  $q$ -ичного символа одним из пользователей. Генератор номеров подканалов случайным образом выбирает из всего множества  $Q$  доступных для передачи подканалов  $q$  подканалов, которые рассматриваемый пользователь может использовать для передачи этого символа. Каждому из подканалов ставится в соответствие один из  $q$  символов.

При передаче некоторого символа по подканалу, соответствующему передаваемому символу, передается сигнал, амплитуда которого выбирается таким образом, чтобы амплитуда сигнала от данного пользователя на приемном конце была равна некоторому заранее заданному значению (в дальнейшем без ограничения общности мы будем предполагать, что амплитуда каждого из сигналов на приемном конце равна единице). Заметим, что предположение о равенстве амплитуд на приемном конце означает, что в системе используется идеальный механизм контроля мощности.

Приемник рассчитывает проекции сигнала из каждого подканала на направление, задаваемое фазой, которую имел бы сигнал от рассматриваемого пользователя в бесшумном канале (здесь и далее мы будем предполагать, что приемнику известны фазовые характеристики всех подканалов). Приемник сравнивает вычисленные проекции с некоторым порогом.

В случае, если на приемнике превышение порога регистрируется лишь по одному из

подканалов, принимается символ, поставленный в соответствие тому из подканалов, для которого было зарегистрировано превышение порога. В противном случае принимается решение о стирании. В случае, если принят символ, отличный от переданного, говорят об ошибке.

Вероятности ошибок и стираний зависят от фонового шума и от числа активных пользователей.

Описанную систему можно рассматривать как  $q$ -й дискретный канал со стираниями без памяти, в котором стирания и ошибки происходят независимо (см. рис.1).

## 2. Описание канала передачи

Пусть  $p_e$  - вероятность ошибки в канале,  $p_x$  - вероятность стирания в канале,  $q$  - число подканалов, которые доступны пользователю.

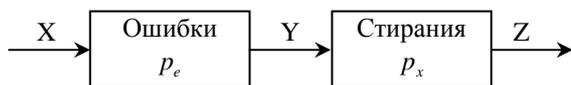


Рис.1 Структура канала передачи

Такое представление канала соответствует физической реализации описанной системы, т.к. ошибки происходят во время передачи, а стирания вносятся в приемном устройстве. В дальнейшем будем считать пропускную способность системы как пропускную способность такого канала.

Рассматриваемый канал является симметричным в терминах [1], где под симметричным каналом понимается следующее:

*Определение 1.* Дискретный канал без памяти называется симметричным, если множество выходов может быть разбито на подмножества таким образом, что для каждого подмножества матрица переходных вероятностей (используя входы как строчки и выходы подмножества как столбцы) обладает тем свойством, что каждая строка является перестановкой любой другой строки и каждый столбец (если их больше чем один) является перестановкой любого другого столбца.

Схематическая диаграмма состояний канала для  $q = 4$  (см. рис. 2).

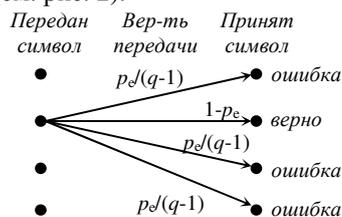


Рис.2 Диаграмма состояний симметричного канала

## 2. Формула пропускной способности

Обозначим пропускную способность канала с ошибками за  $C$ , пропускную способность канала с ошибками и стираниями  $C(e)$ , причем  $C(0) = C$ . Тогда согласно [2]:

$$C(e) = C - p_x \cdot C \quad (1)$$

Пропускная способность  $q$ -го канала с ошибками может быть найдена как:

$$C = \log(q) - H,$$

$$\text{где } H = - \left[ (1-p_e) \log(1-p_e) + \frac{p_e}{q-1} \log \frac{p_e}{q-1} (q-1) \right]$$

Таким образом, можно выписать интересующую пропускную способность

$$C(e) = [\log_2 q + (1-p_e) \log_2(1-p_e) + p_e \log_2 p_e - p_e \log_2(q-1)] \cdot (1-p_x) \quad (2)$$

где  $C(e)$  пропускная способность исследуемого канала на бит. Откуда пропускная способность на символ равна

$$C_s = \frac{C}{\log_2 q}. \quad (3)$$

## 3. Моделирование вероятностей ошибок и стираний

Для вычисления пропускной способности рассматриваемого канала и системы воспользуемся формулой (3). Для этого проведем моделирование вероятностей  $p_e$  и  $p_x$ . Структура модели представлена на рис.3.

По окончании работы модели вероятности  $p_e$  и  $p_x$  вычисляются из счетчиков ошибок и стираний. Модель была реализована в среде MATLAB.

## 4. Результаты моделирования

Значения основных параметров: диапазон изменения числа активных пользователей  $K$  от 10 до 300, алфавит  $q = 4$ , общее число подканалов  $Q = 4096$  и диапазон изменения отношения сигнал/шум от 8 до 12 дБ.

Для детектирования принятого символа использовался жесткий порог. В работе [3] приведено уравнение, позволяющее вычислить величину оптимального (в смысле максимума апостериорной вероятности) порога, используемого приемником в указанной системе:

$$\frac{p(y|1)}{p(y|0)} - q + 1 = 0, \text{ где } L = \frac{p(y|1)}{p(y|0)} - \text{отношение}$$

правдоподобия,  $p(y|1)$  - условная вероятность принятия  $y$  при условии, что было послано 1.



Рис.3 Блок схема модели

Величина порога  $\hat{y}$  получена из этого уравнения численными методами с использованием специализированных программных пакетов.

При моделировании рассматривались коллизии (в терминах [3]) кратности два. В работе [3] показано, что вероятность коллизий большей кратности в такой системе существенно меньше, чем вероятность коллизии кратности два.

Результаты моделирования представлены на рис.4,5.

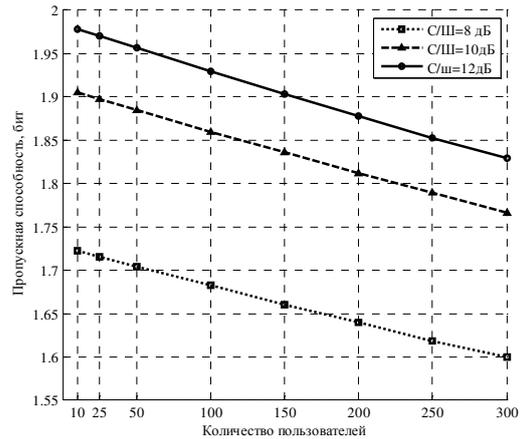
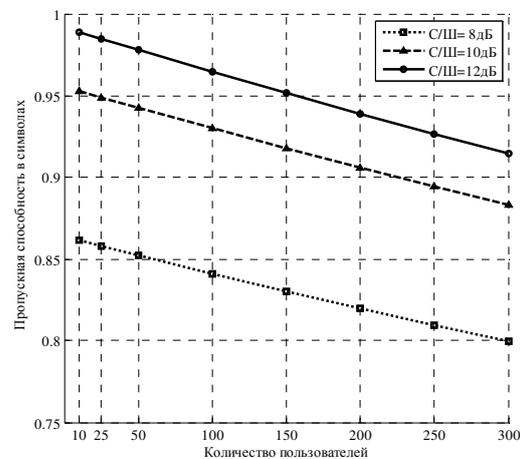


Рис.4. Пропускная способность, бит

Рис. 5 Пропускная способность в символах  $q = 4$ 

## 5. Заключение

В работе исследовано изменение пропускной способности описанной системы в зависимости от числа активных пользователей при фиксированном уровне шума. Из полученных результатов видно, что пропускная способность с ростом пользователей уменьшается практически линейно. При увеличении количества пользователей с 10 до 300 пропускная способность на символ падает на 7% при 10дБ. Это хороший показатель устойчивой работы системы.

Пропускная способность в битах определяет информационную скорость передачи. Например, для 50 пользователей при отношении сигнал шум 10 дБ пропускная способность в битах равна 1,885. В канале без шума, при таких же параметрах, она равна 2 бита.

Пропускная способность в символах определяет нижнюю границу для избыточности кода. Например, для 50 пользователей при отношении сигнал шум 10 дБ пропускная

способность в символах ( $q = 4$ ) равна 0.9426. Это означает, что в такой системе не могут использоваться коды с избыточностью менее  $1 - C_s$ , т.е. менее 6%.

## 6. Благодарности

Авторы выражают глубокую признательность Зяблову В.В. за неоценимую помощь при подготовке работы.

## 7. Литература

- [1] Галлагер Р., *Теория информации и надежная связь*, Советское радио, Москва, 1974.
- [2] S. Verdu, T. Weissman, "The Information Lost in Erasures", *IEEE Transactions On Information Theory*, IEEE, USA, VOL. 54, #11, pp. 5030-5058, November 2008.
- [3] В. Зяблов, Д.Осипов, "Об оптимальном выборе порога в системе множественного доступа, основанной на перестроении ортогональных частот", *Проблемы Передачи Информации*, ИППИ РАН, Москва, Том 44, Вып.2, 2008.

## Две конструкции сверточных МПП-кодов

В. В.Зяблов

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*  
zyablov@iitp.ru

К. А. Кондрашов

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*  
k\_kondrashov@iitp.ru

### Аннотация

В настоящей работе предлагаются две новые конструкции  $q$ -ных сверточных МПП-кодов, предназначенные для построения из коротких слов с малым кодовым расстоянием и простой проверкой длинных каскадных кодов с хорошими дистанционными свойствами. Конструкции строятся на основе 2-х и 4-х кодов с одной  $q$ -ной проверкой на четность. Описывается структура кодов и алгоритм кодирования, исследуются дистанционные свойства представленных кодов.

### 1. Введение

Двоичные сверточные коды с малой плотностью проверок на четность (сверточные МПП-коды) были предложены в [1]. Как и блочные МПП-коды, сверточные  $(J, K)$ -МПП-коды описываются проверочной матрицей  $\mathbf{H}$ , имеющей ровно  $J$  единиц в каждом столбце и  $K$  единиц в каждой строке. В случае полей  $GF(q)$ , где  $q \neq 2$ , на месте единиц могут стоять любые ненулевые элементы поля.

Частным случаем сверточных МПП-кодов являются плетеные коды [2], использующие определенную геометрическую компоновку  $J = 2$  кодов-компонентов. Предлагаемые нами конструкции можно рассматривать, как расширение плетеных кодов. В обеих конструкциях в качестве кодов-компонентов используются простые  $q$ -ные коды с одной проверкой на четность. В первой конструкции количество кодов-компонентов оставлено неизменным и она представляет из себя сверточный  $(2,4)$ -МПП-код. Во второй конструкции количество кодов-компонентов увеличено до 4-х, полученный код является сверточным  $(4,8)$ -МПП-кодом.

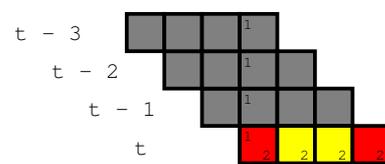


Рис. 1. Представление кодового слова  $(2,4)$ -плетеного МПП-кода с помощью массива. Индексами 1 и 2 обозначена принадлежность символов к одному из двух компонентных кодов – вертикальному или горизонтальному. Серым цветом выделены закодированные участки, желтым – места для информационных символов, красным – для проверочных.

### 2. Первая конструкция

Первая конструкция является прямым обобщением плетеных кодов [2] на случай  $q$ -ных кодов с одной  $q$ -ной проверкой на четность. Предлагаемую конструкцию  $(2,4)$ -МПП-кода удобно представить с помощью бесконечного двумерного массива (Рис.1). Кодовые символы помещаются в ячейки массива и проверяются по строкам и по столбцам горизонтальным и вертикальным кодами-компонентами соответственно. В каждый момент времени  $t$  символы принятого информационного вектора  $\mathbf{u}_t = [u_t^0 \ u_t^1]$  помещаются в выделенную серым область. Вертикальный код кодирует задержанные символы и довершает информационное слово для горизонтального кода. Горизонтальный код кодирует выходной вектор  $\mathbf{v}_t = [v_t^0 \ v_t^1 \ v_t^2 \ v_t^3]$ . Скорость кода  $R = 0,5$ .

### 3. Вторая конструкция

В плетеных кодах [2] используются два сильных кода-компонента. Двух слабых кодов-

компонентов может быть недостаточно для получения кода с хорошими корректирующими свойствами, поэтому мы предлагаем расширенную конструкцию (Рис.2) с увеличенным числом кодов-компонентов. Мы используем 4 кода-компонента длины 8, что позволяет сохранить общую скорость кода  $R = 0,5$ . В общем случае скорость сверточного  $(J, K)$ -МПП-кода с кодами-компонентами с одной  $q$ -ной проверкой на четность определяется как  $1 - \frac{J}{K}$ . Кодирование выполняется по аналогии с  $(2, 4)$ -кодом: проверочные символы вертикального и диагональных кодов, полученные при кодировании сохраненных в памяти за предыдущие моменты времени символов, вместе с информационными символами образуют информационное слово для горизонтального кода, который завершает кодирование.

#### 4. Кодирование

С предложенными кодами можно работать как с обычными сверточными-МПП кодами, в частности, их можно описать в терминах оператора задержки. Если для всех кодов-компонентов в качестве проверочной матрицы выбрать  $\mathbf{H} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$ , то проверочная матрица внешнего  $(4, 8)$ -кода будет иметь вид:

$$\mathbf{H}^T(D) = \begin{pmatrix} 1 & D^4 & D^6 & 1 \\ D & 1 & D^5 & 1 \\ D^2 & D^5 & D^4 & 1 \\ D^3 & D & D^3 & 1 \\ D^4 & D^6 & D^2 & 1 \\ D^5 & D^2 & D & 1 \\ D^6 & D^7 & 1 & 1 \\ D^7 & D^3 & D^7 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

При выборе других коэффициентов для любой из проверок на четность эти коэффициенты появятся в соответствующих позициях в столбце, отвечающем за проверку. Легко увидеть, что представленный сверточный код имеет следующие характеристики:  $m_s = 7$ ,  $b = 4$ ,  $c = 8$ . Опишем его с помощью полубесконечной проверочной матрицы:

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0^T & \mathbf{H}_1^T & \dots & \mathbf{H}_{m_s-1}^T & \mathbf{H}_{m_s}^T \\ & \mathbf{H}_0^T & \mathbf{H}_1^T & \dots & \mathbf{H}_{m_s-1}^T & \mathbf{H}_{m_s}^T \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где подматрицы  $\mathbf{H}_i^T$  –  $q$ -ные матрицы раз-

мера  $c \times (c - b)$ , которые легко получить из (1).

$$\mathbf{H}_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \mathbf{H}_7^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кодирование  $(m_s, J, K)$ -кода осуществляется следующим образом. Пусть  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t, \dots]$  – кодовая последовательность, где  $\mathbf{v}_t = [v_t^0, v_t^1, \dots, v_t^c]$  и  $v_t^{p_i} = u_t^i$  для  $i = 0, \dots, b - 1$ ,  $p_i \neq p_j$  при  $i \neq j$ . В любой момент времени эта последовательность должна удовлетворять условию:

$$\mathbf{v}_t \mathbf{H}_0^T + \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{H}_1^T + \dots + \mathbf{v}_{t-m_s} \mathbf{H}_{m_s}^T = 0. \quad (3)$$

Если из матрицы  $\mathbf{H}_0^T$  исключить строки, отвечающие за информационные символы  $u^i, i = 0, \dots, b - 1$ , то полученная  $(c - b) \times (c - b)$  матрица  $\mathbf{H}_0'^T$  будет иметь полный ранг и решение (3) будет единственным:

$$\mathbf{v}_t \mathbf{H}_0'^T = -(\mathbf{v}_{t-1} \mathbf{H}_1^T + \dots + \mathbf{v}_{t-m_s} \mathbf{H}_{m_s}^T). \quad (4)$$

Для прямого кодирования по нулевому синдрому требуется  $cm_s + b$  ячеек памяти. Этот объем можно уменьшить, используя частичные синдромы. Для кодовой последовательности верно следующее:

$$\mathbf{v}_{[0, t-1]} \mathbf{H}_{[0, t+m_s-1]}^T = [\mathbf{0}_{[0, t-1]} | \mathbf{s}_t], \quad (5)$$

где  $\mathbf{s}_t = [s_t^0, s_t^1, \dots, s_t^{m_s-1}]$

– вектор частичных синдромов. Обновление частичных синдромов происходит в соответствии с рекуррентными соотношениями:

$$s_t^i = \begin{cases} s_{t-1}^{i+1} + \mathbf{v}_t \mathbf{H}_{i+1}^T, & i = 0, \dots, m_s - 2 \\ \mathbf{v}_t \mathbf{H}_{i+1}^T, & i = m_s - 1 \end{cases} \quad (6)$$

А кодовый блок  $\mathbf{v}_{t+1}$  получается из следующего уравнения:

$$\mathbf{v}_{t+1} \mathbf{H}_0^T = -s_t^0. \quad (7)$$

В такой реализации для кодирования потребуется  $(c - b)m_s$  ячеек памяти.

#### 5. Дистанционные свойства кодов

Одной из важных характеристик кода, определяющих его корректирующие способности, является минимальное кодовое расстояние  $d_{min}$  – минимальное Хеммингово расстояние между кодовыми словами. Так как сверточные коды имеют кодовые слова различной

длины, для них определяется аналог кодового расстояния – свободное расстояние  $d_{free}$ . Свободное расстояние – это минимальное расстояние между любыми кодовыми последовательностями сверточного кода. Чтобы определить свободное расстояние кода, мы будем исследовать его активное расстояние

$$d_j = \min \{ \omega_H(\mathbf{v}_{[1,j]}) \} : \mathbf{v}_{[1,j]} \mathbf{H}_{[1, j+m_s-1]}^T = \mathbf{0} \quad (8)$$

– минимальный вес кодовой последовательности, приводящей кодер в нулевое состояние (нулевые частичные синдромы) после  $j$  информационных блоков. В таком случае свободное расстояние определяется как минимальное активное расстояние:  $d_{free} = \min_j \{ d_j \}$ . Для нахождения активных расстояний мы будем для различных  $j$  решать систему линейных уравнений

$$\mathbf{x} \mathbf{H}_{[1, j+m_s-1]}^T = \mathbf{0}, \quad (9)$$

из которой исключены первые несколько строк, отвечающие нулевым символам диагональных кодов первого кодового блока. Система (9) имеет или единственное нулевое решение или множество решений. В последнем случае линейно независимые решения образуют фундаментальную систему решений (ФСР), а все остальные решения получаются из их линейных комбинации. В общем случае минимальный вес решения системы (9) при заданном  $j$  определяет точное значение  $d_j$ , а минимальный вес векторов ФСР – ее верхнюю границу. Можно показать, что в случае двоичных кодов минимальный вес векторов ФСР будет также давать точное значение  $d_j$ . Для этого воспользуемся следующей леммой.

**Л е м м а 1.** *Кодовые слова двоичных кодов обладают циклическостью.*

Если  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_j]$ , где

$\mathbf{v}_t = [v_t^1, v_t^2, \dots, v_t^{c-1}, 0]$  – кодовое слово, то и

$\mathbf{v}' = [\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_j]$ , где

$\mathbf{v}'_t = [0, v_t^1, v_t^2, \dots, v_t^{c-1}]$  – решение.

### Д о к а з а т е л ь с т в о .

В силу построения, все проверки  $x_1 + x_2 + \dots + x_{c-1} + 0 = 0$  кодов-компонент при единичном сдвиге примут вид  $0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{c-1} = 0$ . Так как все исходные проверки удовлетворены, то и результирующие проверки будут также удовлетворены. ■

Так как решениями двоичных кодов будут являться вектора ФСР и их сдвиги, а при сдвигах вес слова не меняется, то минимальный вес векторов ФСР будет точным значением активного расстояния  $d_j$ . К сожалению, для  $q$ -ных кодов этого утверждать нельзя, так как из выполнения условия  $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_{c-1} \alpha_{c-1} + 0 = 0$ ,

не следует выполнение  $0 + x_1 \alpha_2 + x_2 \alpha_3 + \dots + x_{c-1} \alpha_c = 0$  и сдвиги не являются решением.

При решении системы линейных уравнений (9) оказалось, что до некоторого  $k$ :  $j = 1..k$  у системы нет других решений кроме тривиального. Это означает, что у кодов на длинах  $j \leq k$  информационных блоков нет кодовых слов, поэтому мы будем считать активное расстояние на этих длинах равным бесконечности. Вычисленные активные расстояния для двоичных и  $q$ -ных кодов представлены в Табл. 1 и 2.

Q \ j	1	2	3	4	5
2	$\infty$	4	6	8	
8	$\infty$	$\infty$	$\leq 8$	$\leq 9$	$\leq 11$

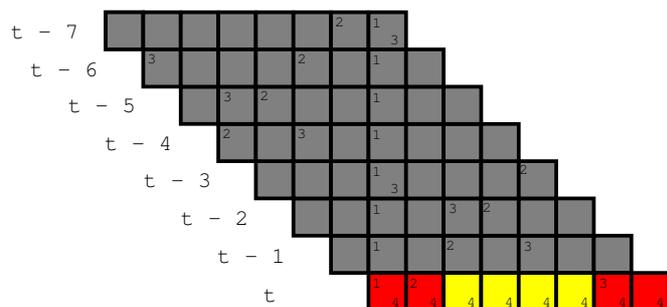
**Таблица 1.** Активные расстояния (2,4)-кодов

Q \ j	3	4	5	6	7
2	$\infty$	12	12	14	
8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\leq 32$	$\leq 34$

**Таблица 2.** Активные расстояния (4,8)-кодов

## 6. Заключение

Рассмотрены две кодовые конструкции, представляющие собой обобщения двоичных сверточных МПП-кодов на случай недвоичных конечных полей, описаны алгоритмы кодирования, получены свободные расстояния или их граница сверху. В силу построения оказалось, что двоичные (2,4) и (4,8) коды при декодировании не могут сгенерировать пакеты ошибок длиной вплоть до 1-го и 3-х информационных блоков соответственно, их восмеричные аналоги – до 2-х и 5-и.



**Рис. 2.** Представление кодового слова  $(4,8)$ -плетеного МПП-кода с помощью массива. Индексами 1 - 4 обозначена принадлежность символов к одному из компонентных кодов. Серым цветом выделены закодированные участки, желтым – места для информационных символов, красным – для проверочных.

### Список литературы

- [1] A. Jiménez Feltström and K. S. Zigangirov Time-varying periodic convolutional codes with low-density parity-check matrix // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. V. IT-45. № 6. P. 2181–2191.
- [2] A. Jiménez Feltström, D. Truchachev, M. Lentmaier, K. S. Zigangirov Braided Block Codes // IEEE Trans. Inform. Theory submission. May 2008.

## Сравнение корректирующей способности МПП-кодов с кодами-компонентами разной избыточности

А. А. Фролов

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*  
alexey.frolov@iitp.ru

В. В. Зяблов

*Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*  
zyablov@iitp.ru

### Аннотация

Рассматриваются МПП-коды со следующими параметрами: скорость  $R=0.5$ , длина  $n=2000$ , длина кода-компонента  $n_0=16$  над полем Галуа  $GF(16)$ . В первом случае используется код-компонент с одним проверочным символом, во втором - с двумя. Определяется корректирующая способность таким образом построенных МПП-кодов при итеративном декодировании.

### 1. Введение

Метод конструирования длинных кодов из коротких кодов-компонентов, основанный на двудольных графах, был предложен Таннером в [1]. В этом методе одному из двух множеств вершин ставятся в соответствие кодовые символы, в то время как другому - блочные коды-компоненты с длиной, равной степени вершины. Конструкция кода, предложенная Таннером, унифицирует множество известных семейств кодов, которые могут быть получены путем выбора разных двудольных графов и разных компонентных кодов. В данной работе будут рассмотрены МПП-коды с кодом-компонентом Рида-Соломона. Ранее подобные коды были рассмотрены в [2].

Проверочная матрица МПП-кода строится следующим образом: рассмотрим блочную матрицу, на главной диагонали которой находятся  $b$  проверочных матриц кода-компонента:

$$\mathbf{H}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

где  $b$  очень велико.

Размерность матрицы -  $b \cdot (n_0 - k_0) \times bn_0$ . Пусть  $\pi(\mathbf{H}_b)$  обозначает матрицу, полученную из матрицы  $\mathbf{H}_b$  произвольной перестановкой столбцов. Тогда проверочная матрица МПП-кода получается при использовании таких перестановок как слоев

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1(\mathbf{H}_b) \\ \pi_2(\mathbf{H}_b) \\ \vdots \\ \pi_l(\mathbf{H}_b) \end{pmatrix} \quad (2)$$

представляет собой разреженную матрицу размерности  $lb(n_0 - k_0) \times bn_0$ .

Определим ансамбль МПП-кодов следующим образом: элементы ансамбля  $E(n_0, l, b)$  получаются путем независимого выбора перестановок  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Нижняя оценка скорости кода  $C \in E(n_0, l, b)$  такова:

$$R \geq 1 - \frac{lb(n_0 - k_0)}{n} = 1 - l(1 - R_0) \quad (3)$$

Равенство достигается в случае полного ранга матрицы  $\mathbf{H}$ .

В обоих случаях  $R = 0.5$   $q = 16$   $n = 2000$   $n_0 = 16$ . Отличие заключается лишь в используемых кодах-компонентах. В первом случае используется код-компонент с одним проверочным символом. Его проверочная матрица выглядит следующим образом:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^{14} & 1 \end{pmatrix}$$

Во втором случае используется код-компонент со следующей проверочной матрицей:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^{14} & 0 \end{pmatrix}$$

Воспользовавшись соотношением (3), получим, что число слоев в первом случае равно 8, а во втором – 4.

## 2. Описание метода передачи

На Рис. 1 приведена блок-схема метода передачи.

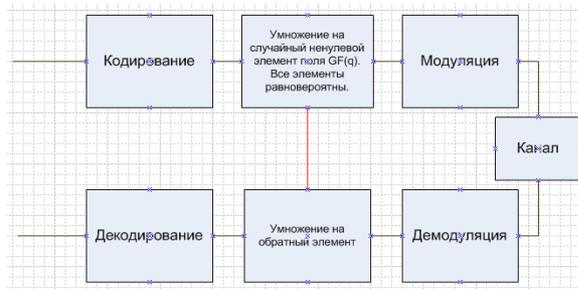


Рис. 1. Блок-схема метода передачи

В канале используется модуляция КАМ-16. Вероятность ошибки на символ вычисляется следующим образом:

$$P_{\sqrt{M}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3}{2 \cdot (M-1)} \cdot 10^{\frac{\text{SNR}}{10}}} \right)$$

$$P_{\text{error}} = P_M = 1 - \left(1 - P_{\sqrt{M}}\right)^2$$

Зависимость вероятности ошибки на символ от отношения сигнал/шум представлена на Рис. 2

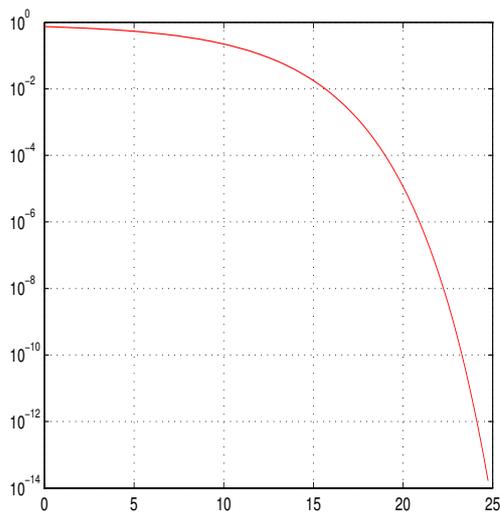


Рис. 2. Зависимость вероятности ошибки на символ от отношения сигнал/шум

Вероятность правильного приема символа  $P_{\text{correct}} = 1 - P_{\text{error}}$ . Из-за умножения на случай-

но выбранный (с равной вероятностью) ненулевой элемент поля  $GF(16)$ , а затем обратного преобразования, вероятность перехода символа во все остальные одинакова и равна  $\frac{P_{\text{error}}}{q-1}$ .

## 3. Описание алгоритмов декодирования

В данной работе мы будем использовать два разных алгоритма декодирования для случаев кодов-компонентов с одним и двумя проверочными символами. Оба алгоритма являются итеративными алгоритмами декодирования с жестким решением. До начала работы алгоритмов вычисляется обобщенный синдром МПП-кода.

### Алгоритм $\mathcal{A}_{d=2}$

Применяется в случае кода-компонента с одним проверочным символом. Каждая итерация состоит из следующих трех шагов:

1. Проходим по всем символам из вектора  $r(i)$ , где  $r(1)$  – это принятый вектор, и для каждого из них выполняем следующее:

- **Вычисляем решения**

Рассматриваются синдромы  $\ell$  кодов-компонентов, в которые входит данный символ. Если синдром кода-компонента ненулевой, то есть этот код-компонент обнаружил ошибку, то вычисляем *решение*. *Решением* назовем значение, которое нужно добавить к данному символу, чтобы синдром кода-компонента стал нулевым. Кодам-компонентам с нулевыми синдромами соответствуют нулевые *решения*.

- **Критерий замены**

Выбирается подмножество одинаковых ненулевых *решений* максимальной мощности  $\ell'$ . Если  $\ell'$  больше числа нулевых *решений*, то проверяется приведет ли замена символа к уменьшению синдрома. Если это так, то позиция данного символа и значение решения заносятся в список символов на исправление, переходим к следующему символу, иначе переходим к следующему по мощности подмножеству решений. Если таких подмножеств больше нет, то переходим к следующему символу.

2. К каждому символу, позиция которого сохранена в списке символов на исправление, добавляем сохраненное там же значение решения. Пересчитываем синдром.
3. Если вес синдрома равен нулю, то выдается исправленный вектор. Иначе сравниваются веса синдрома до и после итерации. Если вес уменьшился, то переходим к следующей итерации, иначе – отказ от декодирования.

#### Алгоритм $\mathcal{A}_{d=3}$

Применяется в случае кода-компонента с двумя проверочными символами. Каждая итерация состоит из следующих трех шагов:

1. Отдельно декодируем коды-компоненты с ненулевыми синдромами и заносим величины ошибок в список *решений* для соответствующих символов. Также для каждого символа сохраняем число попаданий в коды, обнаружившие ошибку (имеются ввиду коды, которые мы смогли декодировать, и коды выдавшие отказ от декодирования).
2. После предыдущего шага для каждого символа у нас имеется следующая информация: список *решений* и число попаданий в коды с ненулевыми синдромами. Выбирается подмножество одинаковых ненулевых *решений* максимальной мощности  $\ell'$ . Если  $\ell'$  больше числа нулевых *решений* (легко определяется, если учесть, что для каждого символа есть  $\ell$  *решений*, а число ненулевых *решений* мы знаем), то проверяется приведет ли замена символа к уменьшению синдрома и, если это так, то к символу добавляется значение *решения*, синдром пересчитывается, переходим к следующему символу, иначе переходим к следующему по мощности подмножеству решений. Если таких подмножеств больше нет, то переходим к следующему символу.
3. Если вес синдрома равен нулю, то выдается исправленный вектор. Иначе сравниваются веса синдрома до и после итерации. Если вес уменьшился, то переходим к следующей итерации, иначе – отказ от декодирования.

## 4. Результаты моделирования

Моделирование проводилось начиная с отношения сигнал/шум равного 3 дБ. После 10 отказов от декодирования отношение сигнал/шум увеличивалось на 0,1 дБ. Для каждого алгоритма было проведено порядка  $10^6$  испытаний.

Полученные результаты моделирования представлены на Рис. 3.

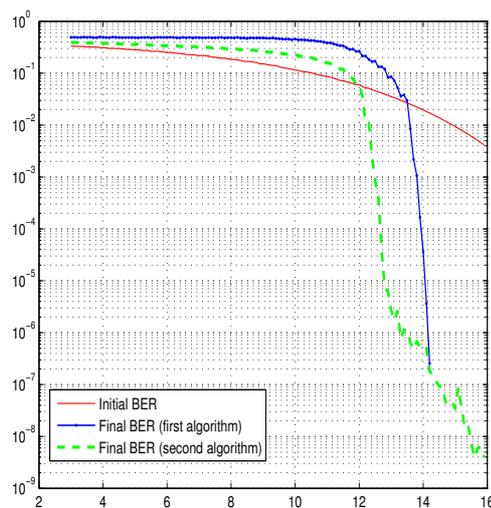


Рис. 3. Полученные зависимости вероятностей ошибки на бит для кода-компонента с одним и двумя проверочными символами

При малых значениях отношения сигнал/шум лучше оказывается использование кода-компонента с двумя проверочными символами и второго алгоритма, в то время как при больших значениях отношения сигнал/шум – использование кода-компонента с одним проверочным символом и первого алгоритма декодирования.

Этот результат интересен, так как ожидалось, что один из кодов (и соответствующий алгоритм) окажется лучше при всех значениях отношения сигнал/шум.

## 5. Заключение

Результаты:

1. Для каждого кода разработан алгоритм итеративного декодирования с жестким решением, учитывающий параметры конкретного кода-компонента.
2. Показано, что вероятность ошибки для кода с кодом-компонентом с большей кор-

ректирующей способностью (но с меньшим числом слоев) меньше вероятности ошибки для кода с кодом-компонентом с меньшей корректирующей способностью (но с большим числом слоев) лишь при определенных величинах отношения сигнал/шум.

### Список литературы

- [1] M. Tanner, "A recursive approach to low complexity codes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 27, no. 5, pp. 533–547, 1981.
- [2] N. Miladinovic, M. Fossorier, "Generalized LD-PC Codes with Reed-Solomon and BCH Codes as Component Codes for Binary Channels", *Proc. IEEE Global Conf. on Communication (GLOBECOM)*, St. Louis, USA, November. 2005.
- [3] Y. Bilu, S. Hoory, "On Codes from Hypergraphs", *European J. Combinatorics*, vol. 25, pp. 339–354, 2004.

## Применение исправления стираний для кодирования МПП-кодов

Зяблов В.В.  
ИППИ РАН  
zyablov@iitp.ru

Рыбин П.С.  
ИППИ РАН  
prybin@iitp.ru

### Аннотация

В статье рассматриваются методы кодирования кодов с малой плотностью проверок (МПП-кодов) Галлагера. Впервые предложен алгоритм кодирования, основанный на итеративном просто реализуемом алгоритме исправления стираний. Кодирование заключается в восстановлении стертых символов предварительно найденной комбинации стираний максимальной кратности для заданной проверочной матрицы. Для восстановления стертых символов используется алгоритм исправления стираний, сложность которого линейна относительно количества стираний. Оставшиеся проверочные символы определяются решением системы линейных уравнений со сложностью порядка квадрата от количества проверочных символов. Приведен сравнительный анализ сложности предложенного алгоритма декодирования и рассматриваемых ранее для некоторых параметров МПП-кода.

### 1. Введение

Код с малой плотностью проверок (МПП-код) Галлагера [1] определяется разреженной проверочной матрицей  $\mathbf{H}$ , на строках которой стоят проверочные матрицы кода с проверкой на четность  $\mathbf{H}_0$  для символов кодов-компонентов. Проверочная матрица кода с проверкой на четность представляет собой  $\mathbf{H}_0 = \underbrace{(111\dots 1)}_{n_0}$ , где

$n_0$  -длина кода-компонента.

Для построения МПП-кода рассмотрим диагональную блочную матрицу  $\mathbf{H}_b$  на главной диагонали, которой стоят  $b$  проверочных матриц кода с проверкой на четность (см.(1.1)):

$$\mathbf{H}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Обозначим теперь через  $\pi(\mathbf{H}_b)$  случайную перестановку столбцов матрицы  $\mathbf{H}_b$ . Тогда проверочная матрица  $\mathbf{H}$  МПП-кода получается при использовании  $\ell > 2$  таких перестановок в качестве слоев (см.(1.2)):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1(\mathbf{H}_b) \\ \pi_2(\mathbf{H}_b) \\ \vdots \\ \pi_\ell(\mathbf{H}_b) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Таким образом,  $\mathbf{H}$  представляет собой разреженную матрицу  $\ell b \times n$ , где  $n = \ell n_0$  - длина МПП-кода. Для заданного кода-компонента с проверочной матрицей  $\mathbf{H}_0$ , независимо выбирая случайные перестановки  $\pi_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, \ell$ , которые все равновероятны, определим ансамбль МПП-кодов, который обозначим, как  $\chi(n_0, \ell, b)$ . Нижняя оценка на скорость  $R$  кода из  $\chi(n_0, \ell, b)$  определяется следующей формулой (см. (1.3)):

$$R \geq 1 - \frac{\ell}{n_0} = 1 - \ell(1 - R_0). \quad (1.3)$$

Равенство достигается только в случае, когда  $\mathbf{H}$  имеет полный ранг.

В литературе часто рассматривают эффективные и просто реализуемые алгоритмы декодирования, основанные на структуре МПП-кодов и позволяющие производить параллельное и независимое вычисление отдельных блоков. В тоже время кодирование МПП-кодов остается открытой задачей и в настоящее время во многих случаях является более трудоемкой, чем декодирование.

В статье [2] было предложено каскадное построение МПП-кодов с компонентным кодом Рида-Соломона, которое позволяло использовать оригинальный алгоритм кодирования, сложность которого имеет порядок  $O(\delta D^2)$ , где  $D$  - кодовое расстояние МПП-кода, с константной в интервале  $0,09 \leq \delta \leq 0,25$ .

В [3] было показано, что существует МПП-код с заданным компонентным кодом, который гарантированно исправляет долю стираний, растущую линейно с длиной кода  $O(\omega n)$ , где  $\omega$  - некоторая константа, при декодировании со сложностью порядка  $O(n \log n)$ . Также был представлен метод и результаты оценки доли гарантированно исправимых стираний, из которых следовало, что большей корректирующей способностью обладают МПП-коды Галлагера.

В этой статье впервые предложен алгоритм кодирования, основанный на алгоритме исправления стираний, аналогичном алгоритму декодирования, рассматриваемому в [3]. Кодирование заключается в восстановлении стертых символов предварительно найденной комбинации стираний максимальной кратности для заданной проверочной матрицы. Для восстановления стертых символов используется алгоритм исправления стираний, сложность которого линейна относительно количества стираний. Оставшиеся проверочные символы определяются решением системы линейных уравнений со сложностью порядка квадрата от количества проверочных символов. В заключение приведен сравнительный анализ сложности предложенного алгоритма и рассматриваемых ранее для некоторых параметров МПП-кода.

## 2. Классический метод кодирования

Классическим методом кодирования для линейных кодов является использование уравнений, выражающих проверочные символы через заданные информационные.

Для получения уравнений, выражающих проверочные символы через заданные информационные, представим проверочную матрицу  $\mathbf{H}$  размера  $m \times n$ , где  $m = \ell b$ , в систематическом виде  $\mathbf{H}'$ :

$$\mathbf{H}'_{m \times n} = (\mathbf{P}, \mathbf{I})_{m \times n},$$

где  $\mathbf{I}$  - тождественная матрица.

Как известно, элементарные преобразования проверочной матрицы не изменяют свойств линейного кода. Следовательно, мы можем рассматривать линейный код  $C'$ , порожденный

проверочной матрицей  $\mathbf{H}'$ , как тождественный коду  $C$ , порожденному матрицей  $\mathbf{H}$ .

Для любого кодового слова  $\mathbf{c}' \in C'$  должно выполняться следующее тождество:

$$\mathbf{H}'_{m \times n} \mathbf{c}'_{1 \times n} = \mathbf{0}.$$

Тогда представим  $\mathbf{c}'$  как:

$$\mathbf{c}' = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-m} \ c_{n-m+1} \ \dots \ c_n),$$

где  $c_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = 1, n$ .

Следовательно,

$$(\mathbf{P}, \mathbf{I})_{m \times n} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-m} \\ c_{n-m+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_{m \times 1} = \mathbf{0}.$$

Откуда можно получить, что:

$$\begin{pmatrix} c_{n-m+1} \\ c_{n-m+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = -\mathbf{P} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-m} \end{pmatrix},$$

или для двоичного случая, т.к.  $c = -c$ , если  $c \in \{0, 1\}$ :

$$\begin{pmatrix} c_{n-m+1} \\ c_{n-m+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-m} \end{pmatrix},$$

где  $(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-m})$  - информационные символы, а

$(c_{n-m+1} \ c_{n-m+2} \ \dots \ c_n)$  - проверочные символы.

Таким образом, количество операций сложения для вычисления кодового слова по заданным информационным пропорционально "плотности", т.е. количеству ненулевых элементов, матрицы  $\mathbf{P}$ . Обозначим "плотность" матрицы  $\mathbf{P}$ , через  $[\mathbf{P}]$ .

Грубую оценку на "плотность" матрицы  $\mathbf{P}$  проверочной матрицы МПП-кода можно записать как:

$$[\mathbf{P}_{m \times (n-m)}] \sim O(m^2).$$

### 3. Алгоритм исправления стираний

Рассмотрим алгоритм исправления стираний, каждая  $i$ -ая итерация которого состоит из следующих шагов:

- для декодируемой последовательности  $\mathbf{r}^{(i)}$ , где  $\mathbf{r}^{(1)}$  - это изначальная комбинация стираний  $\mathbf{r}$ , выбираем коды-компоненты, в которые вошло ровно одно стирание;
- для каждого стирания оставляем только один код-компонент из выбранных на предыдущем шаге и содержащих данное стирание;
- для каждого кода-компонента, выбранного на предыдущем шаге, определяем значение на позиции стирания, суммируя по модулю два нестертые символы:

$$r_k = \bigoplus_{j \neq k}^{n_0} r_j,$$

где  $k$  - позиция стирания. Таким образом, получаем следующую декодируемую последовательность  $\mathbf{r}^{(i+1)}$ .

Алгоритм останавливается, если либо все стирания были исправлены (в этом случае изначальная комбинация стираний называется исправимой), либо не было найдено ни одного кода-компонента с ровно одним стиранием (в этом случае изначальная комбинация стираний называется неисправимой).

Предположим, что исправимая комбинация стираний существует. Очевидно, что даже в случае, когда каждое стирание исправляется  $\ell$  кодами, для определения значения на стертой позиции необходимо выполнить количество операций сложения пропорциональное длине кода-компонента  $n_0$ . Эти операции надо выполнить для каждого стирания, количество которых обозначим через  $W$ . Таким образом, количество операций сложения для декодирования пропорционально  $Wn_0$ .

### 4. Кодирования с исправлением стираний

Идея кодирования с исправлением стираний заключается в следующих двух этапах. При этом подготовительный этап выполняется всего один раз для заданной проверочной матрицы  $\mathbf{H}$ , а этап кодирования – каждый раз для заданного информационного слова  $\mathbf{u}$ .

#### 4.1. Подготовительный этап

На подготовительном этапе определяется хотя бы одна исправимая комбинация стираний  $\mathbf{e} = (e_1 e_2 \dots e_W)$  кратности  $W$ , например такая:

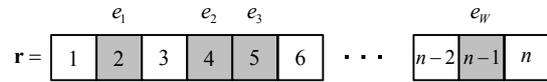


Рис. 1. Исправимая комбинация стираний

Как следует из Рис. 1 стирания исправимой комбинации расположены на позициях 2, 4, 5, ...,  $n-1$  (помечены серым цветом). Данным позициям соответствуют столбцы проверочной матрицы  $\mathbf{H}$  (см. Рис. 2):

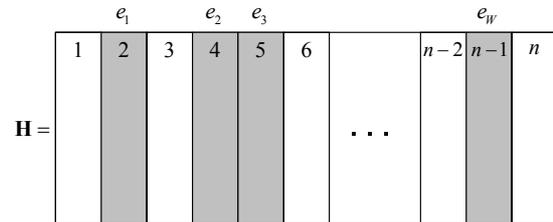


Рис. 2. Проверочная матрица  $\mathbf{H}$  с помеченными столбцами, соответствующими позициям стираний исправимой комбинации

Применяя перестановку столбцов  $\pi_e$ , переставим столбцы, соответствующие позициям стираний, в конец матрицы  $\mathbf{H}$ , что даст матрицу  $\mathbf{H}''$ :

$$\mathbf{H}'' = \pi_e(\mathbf{H}) = (\mathbf{A}, \mathbf{W}),$$

где  $\mathbf{W}$  - подматрица, состоящая из столбцов, расположенных на позициях стираний в найденной исправимой комбинации стираний, а  $\mathbf{A}$  - подматрица, состоящая из остальных столбцов матрицы  $\mathbf{H}$ .

Суммированием и перестановкой строк матрица  $\mathbf{W}$  преобразуется в тождественную матрицу, что дает матрицу  $\mathbf{H}'''$ :

$$\mathbf{H}''' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{I}_{W \times W} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{(m-W) \times (n-W)} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{I}_{W \times W}$  - тождественная матрица (результат преобразования матрицы  $\mathbf{W}$ ),  $\mathbf{0}$  - нулевая матрица (т.к. в общем случае  $W < m$ ), а матрицы  $\mathbf{A}'$  и  $\tilde{\mathbf{H}}_{(m-W) \times (n-W)}$  содержат соответствующие оставшиеся столбцы матрицы  $\mathbf{H}'''$ .

Матрицу  $\tilde{\mathbf{H}}_{(m-W) \times (n-W)}$  приводим к систематическому виду, выполняя элементарные преобразования только над строками:

$$\tilde{\mathbf{H}}^I = (\tilde{\mathbf{P}}_{(m-W) \times (n-m)}^I, \mathbf{I})$$

В результате мы получаем матрицу  $\mathbf{H}^{IV}$  следующего вида (см. Рис. 3):

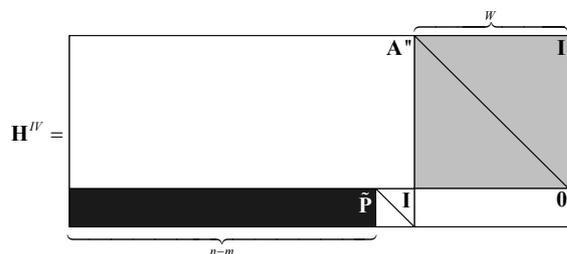


Рис. 3. Схематическое изображение полученной матрицы  $\mathbf{H}^{IV}$

#### 4.2. Этап кодирования

На этапе кодирования, используя классический метод кодирования, по заданному информационному вектору  $\mathbf{u}$  для проверочной матрицы  $\tilde{\mathbf{H}}$  определяем кодовое слово  $\tilde{\mathbf{c}}$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_{n-m+1} \\ \tilde{c}_{n-m+2} \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-W} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-m} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{u} = (u_1 u_2 \dots u_{n-m})$ , а

$$\tilde{\mathbf{c}} = (u_1 u_2 \dots u_{n-m} \tilde{c}_{m-n+1} \tilde{c}_{m-n+2} \dots \tilde{c}_{n-W}).$$

Нахождение  $\tilde{\mathbf{c}}$  при грубой оценке потребует  $O((m-W)^2)$  операций.

Используя символы найденного вектора  $\tilde{\mathbf{c}}$ , для матрицы  $\mathbf{H}^{IV}$  построим вектор  $\mathbf{c}^{IV}$ , последние  $W$  символов которого пометим как стертые:

$$\mathbf{c}^{IV} = (c_1^{IV} c_2^{IV} \dots c_n^{IV}),$$

где  $(c_1^{IV} c_2^{IV} \dots c_{n-W}^{IV}) = \tilde{\mathbf{c}}$ , а  $(c_{n-W+1}^{IV} c_{n-W+2}^{IV} \dots c_n^{IV}) = \mathbf{e}$ , т.е. символы  $c_i^{IV}$ ,  $i = n-W+1..n$ , стерты.

Поскольку все преобразования над матрицами, кроме первого, производились путем сложения и перестановки строк матриц, то, применяя обратную перестановку  $\pi_e^{-1}$  к полученному вектору  $\mathbf{c}^{IV}$ , найдем вектор  $\mathbf{r}$  с исправимой комбинацией стираний:

$$\mathbf{r} = \pi_e^{-1}(\mathbf{c}^{IV}).$$

Далее по алгоритму исправления стираний определяем значения на стертых позициях

исправимой комбинации, что дает кодовое слово  $\mathbf{c}$  для проверочной матрицы  $\mathbf{H}$ . Стоит отметить, что комбинация стираний является исправимой при любых значениях нестертых символов, что позволяет использовать всего одну комбинацию стираний для кодирования любых информационных последовательностей.

Как отмечалось выше, алгоритм исправления стираний потребует  $O(Wn_0)$  операций сложения. Таким образом, приведенный алгоритм кодирования потребует  $O((m-W)^2) + O(Wn_0)$  операций сложения.

Следовательно, чем больше кратность исправимой комбинации стираний, тем больший выигрыш в сложности мы можем получить.

#### 5. Исправимая комбинация стираний

На данный момент неизвестно детерминированного алгоритма, отличного от полного перебора, построения исправимой комбинации стираний для заданного алгоритма исправления стираний. Поэтому было решено использовать следующий вероятностный алгоритм поиска исправимой комбинации стираний как можно большей кратности.

Поиск исправимой комбинации стираний производился в два этапа. На первом этапе определялась случайная исправимая комбинация. На втором этапе найденная комбинация расширялась до тех пор, пока возможно ввести хотя бы одно новое стирание и получить исправимую комбинацию большей кратности.

Первый этап поиска исправимой комбинации стираний состоит из следующих шагов:

- генерируется случайная комбинация стираний  $\mathbf{r}_i$  кратности  $W_i$ , где  $W_1 = 1$ ;
- если сгенерированная на предыдущем шаге комбинация стираний исправима по алгоритму, описанному в пункте 3, то она запоминается, а  $W_{i+1} = W_i + 10$ , если нет – то  $W_{i+1} = W_i$ .

Первый этап поиска исправимой комбинации останавливается, если  $10^4$  подряд сгенерированных комбинаций одной кратности оказались неисправимыми. В этом случае на следующий этап переходила исправимая комбинация  $\mathbf{r}$ , найденная при меньшей кратности (на предыдущем шаге).

Второй этап поиска исправимой комбинации стираний состоит из следующих шагов:

- для исправимой комбинации стираний  $\mathbf{r}_i$ , где  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}$ , находим все позиции символов, стирание любого одного из которых приводит к исправимой комбинации;

- среди найденных на предыдущем шаге позиций случайно выбираем одну и стираем ее, получаем новую исправимую комбинацию стираний  $r_{i+1}$  большей кратности.

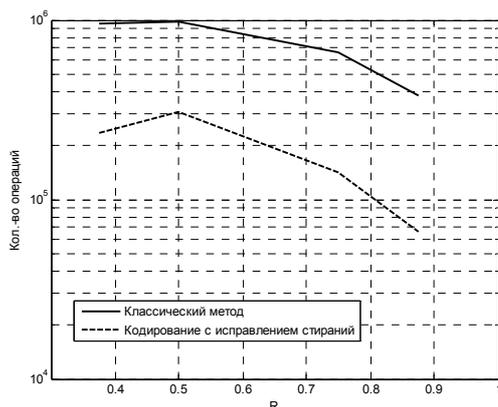
Второй этап поиска исправимой комбинации стираний останавливается, если невозможно внести ни одно новое стирание, чтобы получить исправимую комбинацию. В таком случае мы считаем, что мы нашли исправимую комбинацию стираний максимальной кратности  $r_{\max}$ .

## 6. Численные результаты

Для оценки количества операций сложения при кодировании по классическому методу проверочная матрица, задающая случайный МПП-код, приводилась к систематическому виду, после чего вычислялась “плотность” матрицы  $P$ , которая и является оценкой на количество необходимых операций.

В качестве оценки количества необходимых операций сложения бралась сумма произведения кратности  $W$  найденной исправимой комбинации и длины  $n_0$  кода компонента и “плотности” матрицы  $\tilde{P}$ .

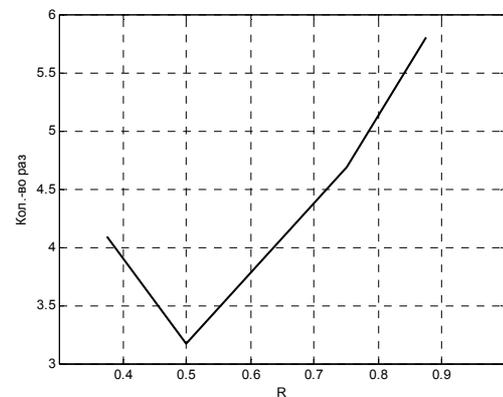
На Рис. 4 представлен график количества необходимых операций сложения для кодирования МПП-кода с фиксированной длиной  $n = 3000$  и количеством слоев  $\ell = 5$  в зависимости от скорости кода  $R$  для классического метода и для кодирования с исправлением стираний, предложенного в данной статье:



**Рис. 4.** График количества операций сложения для кодирования МПП-кода длины  $n = 3000$  и с количеством слоев  $\ell = 5$  в зависимости от скорости кода  $R$

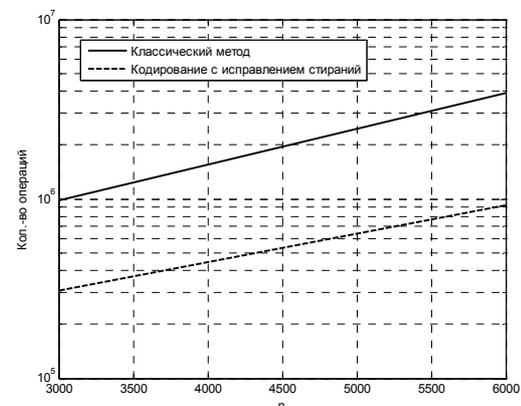
На Рис. 5 представлен график отношения количества необходимых операций сложения для

кодирования МПП-кода классическим методом к количеству операций, требуемых кодированием с исправлением стираний, в зависимости от скорости кода  $R$ :



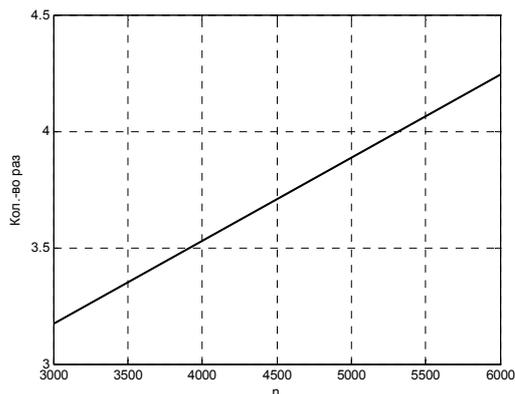
**Рис. 5.** График отношения количества операций сложения для кодирования МПП-кода классическим методом и с исправлением стираний в зависимости от скорости кода  $R$

На Рис. 6 представлен график количества необходимых операций сложения для кодирования МПП-кода с фиксированной скоростью  $R = 0.5$  в зависимости от длины  $n$  МПП-кода для классического метода и кодирования с исправлением стираний:



**Рис. 6.** График количества операций сложения для кодирования МПП-кода с фиксированной скоростью  $R = 0.5$  в зависимости от длины  $n$  МПП-кода

На Рис. 7 представлен график отношения количества необходимых операций сложения для кодирования МПП-кода классическим методом к количеству операций сложения, требуемых кодированием с исправлением стираний, в зависимости от длины кода  $n$ :



**Рис. 7. График отношения количества операций сложения для кодирования МПП-кода классическим методом и с исправлением стираний в зависимости от длины кода  $n$**

Таким образом, предложенный алгоритм кодирования позволяет более чем в 3 раза уменьшить количество необходимых операций сложения для кодирования МПП-кодов с длиной  $n = 3000$ , а для кодирования МПП-кодов с длиной  $n = 6000$  - уже более чем в 4 раза.

Необходимо учесть, что на данный момент все чаще используются МПП-коды с длиной в несколько десятков тысяч символов. Следовательно, можно ожидать, что предложенный подход кодирования МПП-кодов позволит получить значительный выигрыш в сложности кодирования при таких длинах. Открытым вопросом остается эффективный поиск исправимых комбинаций стираний максимальной кратности. Это является предметом дальнейших исследований.

## 7. Литература

- [1] R. G. Gallager, "Low-Density Parity-Check Codes", *MIT Press*, Cambridge, MA, USA, 1963.
- [2] В. Б. Афанасьев, А. А. Давыдов, В. В. Зяблов, "Каскадное построение низкоплотностных кодов с компонентным кодом Рида-Соломона", 2008.
- [3] В. В. Зяблов, П. С. Рыбин, "Исправление стираний кодами с малой плотностью проверок", *Проблемы передачи информации*, т. 43, №3, 2009.

## Декодирование обобщенных кодов с локализацией ошибок.

Кобозева И. Г.  
ИППИ РАН  
kobozeva-ira@yandex.ru

Зяблов В. В.  
ИППИ РАН  
zyablov@iitp.ru

### Аннотация

В работе рассмотрен алгоритм декодирования обобщенных кодов с локализацией ошибок. Получены результаты моделирования для кодов длиной 256, также было проведено сравнение полученных данных с результатами теоретических расчетов.

### 1. Введение

К передаче по современным оптическим каналам связи предъявляются жесткие требования. Необходимыми условиями являются достаточно низкая вероятность искажения информации при передаче и относительно небольшая избыточность используемых кодов. В данной работе предлагается использовать обобщенные коды с локализацией ошибок на основе кодов Рида-Соломона (далее обозначены как ОЛО-коды). Многоуровневое строение этих кодов позволяет подобрать структуру кода, обеспечивающую оптимальные значения для скорости передачи и корректирующей способности.

### 2. Структура ОЛО-кода

При кодировании ОЛО-кодами, информационные символы записываются в левую часть матрицы, обладающей ступенчатой структурой, изображенной на рис. 1.

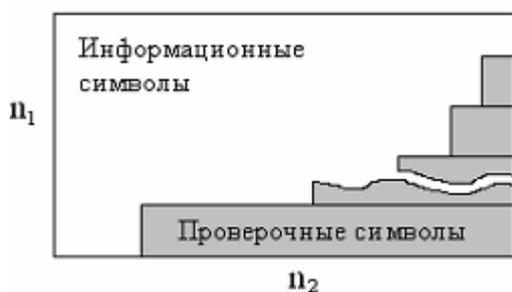


Рис. 1. Кодовое слово ОЛО-кода.

В правую часть матрицы записываются проверочные символы ОЛО-кода, полученные при помощи внутренних кодов длины  $n_1$  и

внешних кодов длины  $n_2$ . Порядок ОЛО-кода  $m$  определяет количество используемых при кодировании внутренних и внешних кодов. В качестве внутренних и внешних кодов выступают коды Рида-Соломона длины 16.

### 3. Кодирование ЛО-кодами.

Коды с локализацией ошибок (ЛО-коды) можно рассматривать как ОЛО-коды порядка 1.

При кодировании ЛО-кодами кодирование последовательно осуществляется сначала внутренним кодом, затем внешним. ЛО-код определяется следующей схемой кодирования:

1. Информационные символы разбиваются на  $n_2$  подблоков, из которых  $k_2$  первых подблоков имеют длину  $n_1$ , а  $r_2 = n_2 - k_2$  оставшихся – длину  $k_1$ .

2. Каждый из  $r_2$  подблоков длины  $k_1$  кодируется внутренним кодом Рида-Соломона с параметрами  $(n_1, k_1, d_1)$ . В результате получаем  $r_2$  векторов длины  $n_1$ , являющихся кодовыми словами внутреннего кода.

3. Для каждого из первых  $k_2$  подблоков длины  $n_1$  находим вектор длины  $r_1 = n_1 - k_1$  по формуле  $\bar{s}_\mu^t = v_\mu \cdot H_1^T$ , где  $H_1^T$  - проверочная матрица кода первой ступени в приведенно-ступенчатой форме, а  $v_\mu$  -  $\mu$ -ый подблок.

4. Представляя векторы  $\bar{s}_\mu^t, \mu = \overline{1, k_2}$  как элементы  $GF(2^{n_1})$ , получаем вектор из  $k_1$  символов над  $GF(2^{n_1})$  и кодируем его внешним кодом Рида-Соломона с параметрами  $(n_2, k_2, d_2)$ . В результате получаем кодовое слово внешнего кода. Затем, к полученным в п. 2 проверочным символам внутреннего кода, рассматриваемым как элементы  $GF(2^{n_1})$ , прибавляем соответствующие проверочные символы внешнего кода. Полученное в результате слово длины  $n = n_1 n_2$  является кодовым словом ЛО-кода.

#### 4. Кодирование ОЛО-кодами.

Проверочная матрица внутренних кодов ОЛО-кода имеет вид:

$$H = \begin{pmatrix} H_B^{(1)} \\ H_B^{(2)} \\ \vdots \\ H_B^{(L)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0^{(1)} & I^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ Q_0^{(2)} & Q_1^{(2)} & I^{(2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Q_0^{(L)} & Q_1^{(L)} & \dots & Q_{L-1}^{(L)} & I^{(L)} \end{pmatrix},$$

где  $L$  - количество внешних  $A$  и внутренних  $B$  кодов.

Вначале информационные символы записываются в левую часть матрицы  $C$ , изображенной на рисунке 1, в левую часть записываются нули. Процесс кодирования осуществляется в  $L$  итераций. На первом шаге алгоритм кодирования ЛО-кода применяется к матрице  $C$  и  $L$ -ым внешнему и внутреннему кодам. После первой итерации в правый нижний подблок матрицы  $C$ , прежде заполненный нулями, записываются проверочные символы  $p^{(1)}$ . На следующем шаге алгоритм кодирования ЛО-кода применяется к модифицированной матрице  $C$  и  $L-1$ -ым внешнему и внутреннему кодам. Таким образом, с каждым следующим шагом в правую часть матрицы записываются новые проверочные символы. Из структуры проверочной матрицы  $H$  следует, что для того, чтобы сохранить выполнение соотношений  $H^{(s)}C = \overline{a}_s^t \in A^{(s)}$  на  $l$ -ой итерации, необходимо изменить все подматрицы  $Y_s, s \in \{l+1, \dots, L\}$ . Для этого необходимо вычесть из последних  $r_2^{(l)}$  столбцов  $Y_s$  матрицу

$$\Delta_s^l = Q_l^{(s)}(p^{(l)}) + \sum_{i=l+1}^{s-1} Q_i^{(s)}(\Delta_i^l).$$

#### 5. Декодирование ОЛО-кода

Аналогично с кодированием, декодирование ОЛО-кода осуществляется в несколько этапов, количество которых равно порядку ОЛО-кода  $m$ . При передаче по каналу с шумом к кодовому слову ОЛО-кода  $C$  добавляется некоторая ошибка  $E$ , таким образом полученная комбинация  $Y$  задается как  $Y = C \oplus E$ . Вначале декодирования вычисляются синдромы соответствующего данному шагу внутреннего кода, необходимые для определения символов внешнего кода

$\overline{a}^{(L)} = H_B^{(L)}Y$ , после чего происходит декодирование соответствующим внешним кодом, в результате которого получаем  $\tilde{a}^{(L)}$ . Предполагая, что декодирование внешним кодом было успешным, происходит декодирование каждого столбца  $\overline{b}_j$  принятой комбинации  $Y$  внутренним кодом таким образом, что  $\tilde{a}_j^{(L)} = H_B^{(L)}\overline{b}_j$ . На каждом шаге для соответствующего внутреннего кода происходит как обнаружение, так и исправление стираний и ошибок. Таким образом, если количество обнаруженных ошибок или число стираний в кодовом слове внутреннего кода превышает корректирующую способность этого кода, то для соответствующего этому слову символа внешнего кода выносится вердикт «стирание». Если же в кодовом слове внутреннего кода, неверно исправленном на предыдущем шаге, на текущем шаге вновь обнаружены ошибки, то это слово становится таким, каким оно было на предыдущем шаге. Затем происходит вычисление добавочного члена, необходимого для получения синдромов следующего внутреннего кода  $\overline{a}^{-(L-1)}$ . При декодировании на каждом следующем шаге используется информация о стертых символах, полученная на предыдущем шаге. Аналогичные действия производятся на всех последующих шагах. Можно отметить, что при неправильном декодировании хотя бы одного внешнего кода, все последующие вычисления будут неверными, поэтому очень важно правильно подобрать избыточность внешних кодов. Ниже представлена теоретическая оценка и результаты моделирования для данного алгоритма.

#### 6. Теоретическая оценка отказа от декодирования

В начале каждого шага производится обнаружение ошибок с помощью внутреннего кода. Будем считать, что обнаружение ошибок для кода Рида-Соломона происходит, только если выполняется неравенство  $e + \tau \leq d - 1$ , хотя на самом деле таких случаев больше. Затем производится исправление ошибок и стираний. Поскольку на каждом следующем шаге кодирование осуществляется при помощи кода Рида-Соломона, то для успешного декодирования необходимо выполнение неравенства  $2e + \tau \leq d - 1$ . Если же при исправлении ошибок и стираний при избыточности  $d$  на текущем шаге, произошла ошибка декодирования, то на следующем шаге при избыточности  $d + 1$

ошибки будут обнаружены, только в том случае, если  $e + \tau = d$ .

Более подробно о получении теоретической оценки написано в работе [5]. Ниже приведены используемые для вычислений формулы вероятностей ошибки и стирания кодов Рида-Соломона, которые имеют следующий вид:

$$P_{err} = \sum_{e=0}^n C_n^e p_e^e \sum_{t=d-2e}^{n-e} C_{n-e}^t p_t^t (1 - p_e - p_t)^{n-t-e}$$

$$P_{eras} = \sum_{e=0}^n C_n^e p_e^e \sum_{t=d-e}^{n-e} C_{n-e}^t p_t^t (1 - p_e - p_t)^{n-t-e}$$

## 7. Моделирование

В данной работе было проведено моделирование передачи закодированной информации по оптическому каналу в среде Matlab. Количество проведенных испытаний для каждого значения отношения сигнал/шум равно  $10^6$ . Передача ведется на 8 значений  $\lambda$  таким

образом, что за один символ передается 4 бит. Был рассмотрен ОЛО-код с параметрами (256, 226) порядка 4. В качестве внутренних кодов были взяты коды Рида-Соломона с параметрами (16, 15, 2), (16, 14, 3), (16, 13, 4), (16, 12, 5), в качестве внешних кодов соответственно были взяты (16, 4, 13), (16, 7, 10), (16, 10, 7), (16, 14, 3). Количество шагов и избыточность внешних кодов выбраны в соответствии со схемой, описанной в работе [5], обеспечивающей оптимальное соотношение корректирующей способности и скорости передачи. На рис. 2 приведена зависимость вероятности отказа от декодирования от отношения сигнал/шум в канале. Для сравнения на нем также изображена теоретическая оценка зависимости вероятности отказа от декодирования для того же ОЛО-кода от отношения сигнал/шум в канале при передаче данных по оптическому каналу связи. Вероятности ошибки и стирания в канале, необходимые для теоретических расчетов, вычисляются по заданному отношению сигнал/шум в канале.

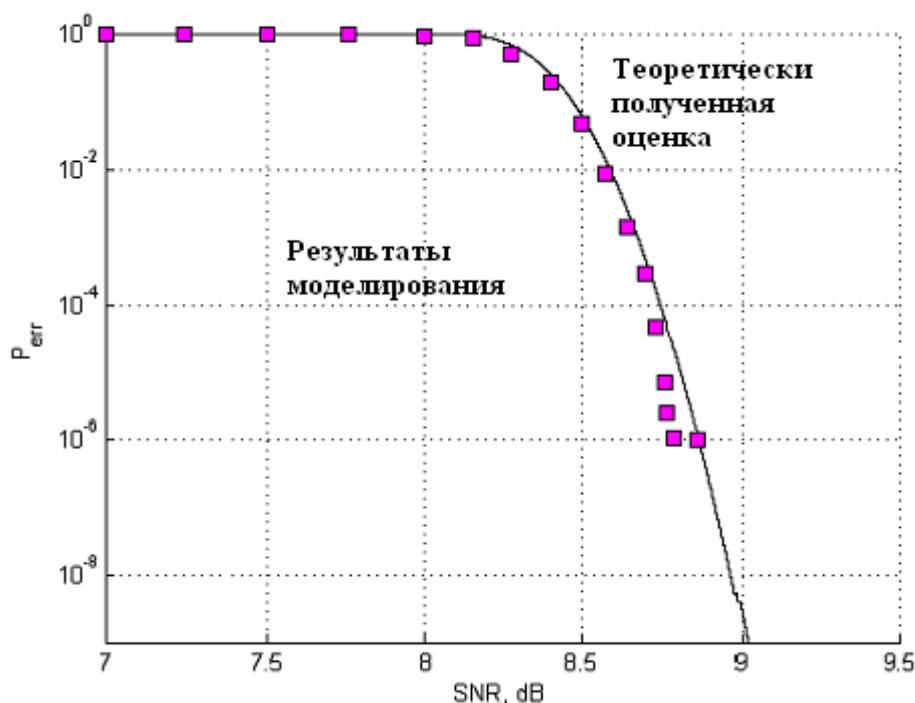


Рис. 2. Зависимость вероятности отказа от декодирования от отношения сигнал/шум в канале

## 8. Выводы

В работе было произведено моделирование передачи закодированной информации по оптическому каналу связи. Полученная зависимость вероятности отказа от декодирования ОЛО-кода сравнивалась с рассчитанной теоретически. В результате было

установлено, что при рассматриваемых значениях отношения сигнал/шум полученная зависимость близка к теоретической. Можно также отметить, что полученная теоретическая оценка является оценкой сверху. Расхождения между этими двумя зависимостями можно объяснить тем, что при теоретической оценке вероятности отказа были учтены не все

конфигурации ошибок, обнаруживаемые внутренними кодами .

## 9. Список литературы

- [1] Блох Э. Л., Зяблов В. В., “Линейные каскадные коды”, М.: Наука, 1982, 230 с.  
[2] Зяблов В. В. “Новая трактовка кодов для локализации ошибок, их корректирующие

свойства и алгоритмы декодирования.”, М.: Наука, 1972, 10 с.

- [3] Блох Э. Л., Зяблов В. В., “Обобщенные каскадные коды”, М.: Связь, 1976. 240 с.  
[4] Афанасьев В. Б., Габидулин Э. М., “Кодирование в радиоэлектронике.”, М.: Радио и связь, 1986, 176 с.  
[5] Kobozeva I., Zyablov V., “Using GEL Codes for Optical Channel”, труды XII симпозиума по проблеме избыточности в информационных системах, 2009, с. 126-129

## Исправление малого числа ошибок и стираний с использованием кодов Рида-Соломона

Александр Давыдов  
Институт Проблем Передачи Информации  
[adav@iitp.ru](mailto:adav@iitp.ru)

Рустам Калимуллин  
Институт Проблем Передачи Информации  
[rustamka@iitp.ru](mailto:rustamka@iitp.ru)

### Аннотация

Для кодов Рида-Соломона с небольшим числом проверок разработаны специальные алгоритмы исправления ошибок и стираний, которые максимальным образом учитывают особенности рассматриваемых кодов РС. Алгоритмы разработаны с целью максимального уменьшения объема вычислений. В работе производится сравнение числа операций в предложенных специализированных алгоритмах и в стандартных алгоритмах декодирования кодов РС, исправляющих ошибки и стирания (алгоритм Форни). При числе проверок не более шести, специальные алгоритмы дают существенный выигрыш в производительности.

### 1. Введение

В работе рассматривается канал передачи информации, в котором ошибки менее вероятны, чем стирания. Вероятность ошибки пропорциональна квадрату вероятности стирания. Таким образом, при числе проверок не более шести, среди вычислительно затратных наиболее вероятными на практике являются случаи с шестью стираниями без ошибок, а также случаи с четырьмя стираниями и одной ошибкой.

#### 1.1. Используемые обозначения

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{n-5} & \alpha^{n-8} & \dots & \alpha^9 & \alpha^6 & \alpha^3 & 1 \\ 0 & \alpha^{n-3} & \alpha^{n-7} & \dots & \alpha^6 & \alpha^4 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-2} & \dots & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ + & n-2 & n-3 & \dots & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} S_6 \\ S_5 \\ S_4 \\ S_3 \\ S_2 \\ S_1 \end{matrix} \quad (1)$$

Выше приведен пример проверочной матрицы для кодового слова длиной  $n$  символов.

$+$  - «номер» позиции проверки на четность,  $0, 1, \dots, n-2$  - номера «обычных» позиций.

$k = 1, 2, \dots, n$ .

$\rho$  - количество стираний.

$\nu$  - количество ошибок.

$r$  - число проверочных символов.

При этом  $r \geq \rho + 2\nu$ .

$U_w = \alpha^{j_w}$  - локатор стирания на позиции с номером  $j_w$ ,  $w = 1, \dots, \rho$ .

$U^+ = \alpha^+ = 0$  по определению.

$Z_w$  - значение стертого символа на позиции с локатором  $U_w = \alpha^{j_w}$ ,  $w = 1, \dots, \rho$ .

$X_k = \alpha^{i_k}$  - локатор ошибки на позиции с номером  $i_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ .

$X^+ = \alpha^+ = 0$  по определению.

$Y_k$  - величина ошибки на позиции с локатором

$$X_k = \alpha^{ik} \quad k = 1, \dots, v.$$

$S_j$  - полный синдром стираний и ошибок.

$c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_+)$  - кодовое слово.

$v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-2}, v_+)$  - принятое слово.

$f = (f_0, f_1, \dots, f_{n-2}, f_+)$  - вектор стираний.

$e = (e_0, e_1, \dots, e_{n-2}, e_+)$  - вектор ошибок.

$$v = c + e + f, \quad Z_w = f_{j_w}, \quad Y_k = e_{i_k}.$$

## 1.2. Правила Коррекции

Коррекция стирания с локатором  $U_w = \alpha^{j_w}$  и значением стертого символа  $Z_w$ :

$$c_{j_w} = v_{j_w} + Z_w \quad (2)$$

Коррекция ошибки с локатором  $X_k = \alpha^{ik}$  и значением ошибки  $Y_k$ :

$$c_{i_k} = v_{i_k} + Y_k \quad (3)$$

## 2. Случай с шестью стираниями без ошибок

$\rho = 6$  (шесть стираний на позициях с локаторами  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ ). Полагаем, что кроме стираний больше никаких искажений не произошло. Исходная система для определения  $Z_i$  имеет вид

$$\left\{ \sum_{i=1}^6 U_i^{k-1} Z_i = S_k, \right. \quad (4)$$

$k = 1, 2, \dots, 6.$

Введем в рассмотрение симметрические многочлены – многочлены вида

$$\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_k}, \text{ оп}$$

ределенные для  $k = 1, 2, \dots, n$ . Они представляют сумму всех возможных произведений чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  по  $k$  сомножителей.

Умножив каждое из первых пяти уравнений на  $U_1$  и сложив со следующим, получаем

$$\left\{ \sum_{i=2}^6 (U_1 + U_i) U_i^{k-1} Z_i = U_1 S_k + S_{k+1}, \right. \quad (5)$$

$k = 1, 2, \dots, 5.$

Умножив каждое из первых четырех уравнений на  $U_2$  и сложив со следующим, получаем

$$\left\{ \sum_{i=3}^6 U_i^{k-1} Z_i \prod_{j=1}^2 (U_j + U_i) = \sum_{i=1}^3 \sigma_{3-i}(U_1, U_2) S_{i+k-1}, \right. \quad (6)$$

$k = 1, 2, 3, 4.$

Умножив каждое из первых трех уравнений на  $U_3$  и сложив со следующим, получаем

$$\left\{ \sum_{i=4}^6 U_i^{k-1} Z_i \prod_{j=1}^3 (U_j + U_i) = \sum_{i=1}^4 \sigma_{4-i}(U_1, U_2, U_3) S_{i+k-1}, \right. \quad (7)$$

$k = 1, 2, 3.$

Умножив каждое из первых двух уравнений на  $U_4$  и сложив со следующим, получаем

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=5}^6 U_i^{k-1} Z_i \prod_{j=1}^4 (U_j + U_i) = \\ & = \sum_{i=1}^5 \sigma_{5-i}(U_1, U_2, U_3, U_4) S_{i+k-1}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$k = 1, 2.$

Умножив первое уравнение на  $U_5$  и сложив со следующим, получаем

$$Z_6 = \frac{A}{B}, \quad (9)$$

где

$$A = \sum_{i=1}^6 \sigma_{6-i}(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5) S_i,$$

$$B = \sum_{i=1}^6 \sigma_{6-i}(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5) U_6^{i-1}$$

Аналогично, получаем формулы для всех остальных значений стираний.

Для увеличения производительности в сравнении со стандартным алгоритмом при вычислении многочлена  $B$  используется схема Горнера. Кроме того, вычисленные на промежуточных шагах значения коэффициентов многочлена  $A$ , являющиеся всевозможными симметрическими функциями от локаторов

ошибок, запоминаются в памяти и дважды не вычисляются. Многочлен  $B$  также вычисляется лишь однажды и сохраняется в памяти.

Каждое вычисленное значение стирания подставляется в исходную систему, и поиск следующего значения стирания производится путем решения системы меньшей размерности, что также упрощает конечные формулы и дает выигрыш в производительности.

### 3. Случай с четырьмя стираниями и одной ошибкой

$\rho = 4$  (четыре стирания на позициях с локаторами  $U_1, U_2, U_3, U_4$ ). Полагаем, что кроме стираний произошла одна ошибка неизвестной величины  $Y_1$  на позиции с неизвестным локатором  $X_1$ .

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 U_i^{k-1} Z_i + Y_1 = S_k, k = 1, 2, \dots, 6. \end{cases} \quad (10)$$

Умножив каждое из первых пяти уравнений (10) на  $U_1$  и сложив со следующим, получаем

$$\begin{cases} \sum_{i=2}^4 (U_1 + U_i) U_i^{k-1} Z_i + (X_1 + U_1) Y_1 = U_1 S_k + S_{k+1}, \\ k = 1, 2, \dots, 5. \end{cases} \quad (11)$$

Умножив каждое из первых четырех уравнений (11) на  $U_2$  и сложив со следующим, получаем

$$\begin{cases} \sum_{i=3}^4 U_i^{k-1} Z_i \prod_{j=1}^2 (U_j + U_i) + (X_1 + U_2)(X_1 + U_1) Y_1 =, \\ = \sum_{i=1}^3 \sigma_{3-i}(U_1, U_2) S_{i+k-1}, \\ k = 1, 2, \dots, 4. \end{cases} \quad (12)$$

Умножив каждое из первых трех уравнений (12) на  $U_3$  и сложив со следующим, получаем

$$\begin{cases} U_i^{k-1} Z_4 \prod_{j=1}^3 (U_j + U_4) + Y_1 \prod_{j=1}^3 (U_j + X_1) = \\ = \sum_{i=1}^4 \sigma_{4-i}(U_1, U_2, U_3) S_{i+k-1}, \\ k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (13)$$

Умножив каждое из первых трех уравнений (13) на  $U_4$  и сложив со следующим, получаем систему из двух

уравнений:

$$\begin{cases} Y_1 \prod_{j=1}^4 (U_j + X_1) = \sum_{i=1}^5 \sigma_{5-i}(U_1, U_2, U_3, U_4) S_i \\ X_1 Y_1 \prod_{j=1}^4 (U_j + X_1) = \sum_{i=1}^5 \sigma_{5-i}(U_1, U_2, U_3, U_4) S_{i+1}. \end{cases} \quad (14)$$

Отсюда находим

$$X_1 = \frac{\sum_{i=1}^5 \sigma_{5-i}(U_1, U_2, U_3, U_4) S_{i+1}}{\sum_{i=1}^5 \sigma_{5-i}(U_1, U_2, U_3, U_4) S_i}.$$

После нахождения локатора ошибки действуем также так же, как и в случае с пятью стираниями (неизвестное значение ошибки ищется аналогично поиску значений стираний).

### Заключение.

Для описанного выше специализированного алгоритма и для алгоритма Форни (изложенного в [2]), был произведен теоретический расчет числа операций в случае шести стираний без ошибок с последующим обобщением для любого числа стираний  $\rho$ . Общее число операций для специализированного алгоритма составляет  $4\rho^2 - 6\rho$ , в то время как для алгоритма Форни оно имеет вид  $6\rho^2 - 4\rho$ .

Анализ работы программ, реализующих описанные выше алгоритмы в случае шести стираний без ошибок, показал что, число операций в программах, реализующих разработанные специализированные алгоритмы декодирования кодов РС, значительно меньше, чем в программах, реализующих стандартные алгоритмы декодирования кодов РС. В первом случае в программе производится 108 операций, против 196 операций во втором случае. Таким образом, специализированные алгоритмы дают примерный выигрыш в числе операций порядка 44,8%.

### Список литературы

[1] Ю.Л. Сагалович, Введение в алгебраические коды, Москва 2007.

[2] E. Blahut, Theory and practice of error control codes, Addison-Wesley publishing company reading, 1984.

## Многопоточная реализация алгоритмов кодирования и декодирования кодов с малой плотностью проверок

Крещук А. А.  
ИППИ РАН, МФТИ  
krsch@iitp.ru

Зигангиров Д. К.  
ИППИ РАН  
zig@iitp.ru

### Аннотация

*В данной работе рассматривается способ ускорения алгоритмов кодирования и декодирования кодов с малой плотностью проверок (МПП) (LDPC - low-density parity check code) для исследования характеристик корректирующей способности кода в области малой вероятности ошибки на бит за счет выполнения части вычислений на графическом процессоре (GPU) с использованием Compute Unified Device Architecture (CUDA). Современная программно-аппаратная архитектура CUDA позволяет осуществлять параллельные вычисления с использованием сопроцессоров GPGPU. Модификация алгоритмов кодирования и декодирования кодов с малой плотностью проверок в соответствии со спецификацией CUDA позволяет использовать аппаратную многопоточность GPU для параллельной обработки всех проверочных символов кодовой последовательности. Оптимизация параметров многопоточности и доступа к памяти позволяет добиться существенного (до 10 раз) ускорения алгоритмов кодирования и декодирования для систем связи или систем хранения данных.*

### 1. Введение

Центральные процессоры разработаны для решения самого широкого круга задач и ограничено используют возможности параллельного вычисления. Увеличение их производительности в основном связано с увеличением тактовой частоты и размеров высокоскоростной кеш-памяти. Программирование на CPU для ресурсоемких научных вычислений подразумевает тщательное структурирование данных и порядка инструкций для эффективного использования кеш-памяти всех уровней. Под параллельными вычислениями в этом случае

понимается либо вычисление частей задачи на отдельных ядрах многоядерного CPU, либо использование распределенной вычислительной сети с пакетной передачей данных между отдельными компьютерами.

Графические процессоры изначально спроектированы для параллельной обработки данных и представляют собой потоковый процессор, который использует явный параллелизм по данным для увеличения скорости вычислений и имеет несколько разнородных видов памяти, позволяющих добиться высокой производительности для различных шаблонов доступа.

В концепции потоковых вычислений, данные представляются в виде потоков из независимых элементов, а независимые стадии обработки - в виде ядер. Ядра представляют собой функции преобразования потоков входных элементов в потоки выходных. Такое представление позволяет применять такие ядра сразу ко многим входным потокам. Таким образом, идеология параллельной обработки данных на графических процессорах сводится к разбиению задачи на отдельные элементы, в которых часть потоков данных обрабатываются одинаково.

Имеющиеся в литературе примеры эффективного использования вычисления на графических процессорах можно условно разделить на несколько групп:

- Численные вычисления линейной алгебры для плотных и разреженных матриц;
- Алгоритмы компьютерной обработки данных;
- Моделирование процессов в прикладной физике;
- Вычисления для баз данных.

В задачах моделирования телекоммуникационных систем, использование GPGPU (General

Purpose Graphics Processing Unit — графический процессор общего назначения) также приводит к значительному ускорению при решении таких задач как:

- Помехоустойчивое кодирование и декодирование с использованием итеративных методов, например кодов с малой плотностью проверок;
- Моделирование систем с несколькими передающими и приемными антеннами (ММО);
- Оценка и предсказание состояния канала передачи в системах с OFDM.

Традиционно, для эффективного и полного исследования этих алгоритмов кроме компьютерного моделирования используются реализации на ПЛИС, либо специальных интегральных схемах (ASIC). При этом реализации содержат уже predetermined параметры и алгоритмы, изменение которых приводят к почти полной замене программного кода ПЛИС или изменения архитектуры заказной микросхемы.

Альтернативное применение GPGPU в таких задачах позволяет обрабатывать алгоритмы параллельных вычислений для дальнейшей реализации на интегральных микросхемах и ПЛИС, при этом, не используются дорогостоящее специальное оборудование и средства отладки.

Многие задачи телекоммуникации изначально являются параллельными и вычислительно трудоемкими, что позволяет эффективно и “естественным образом” использовать преимущества вычислений на GPGPU.

Сами разрабатываемые параллельные алгоритмы эффективно обрабатываются на GPGPU с использованием большого числа потоковых процессоров, обрабатывающих большие объемы данных.

Таким образом, несмотря на то, что реализации на ASIC и ПЛИС обладают преимуществом в значительном быстродействии в задачах телекоммуникации, реализации на GPGPU не на много им уступают, обладая существенным преимуществом в цене и возможно заменят в будущем заказные микросхемы в мобильных устройствах и приборах, кроме этого реализации на GPGPU в отличии от реализаций на ASIC обладают преимуществом в простоте программирования и смены алгоритмов “на лету”.

Однако, для достижения максимального выигрыша от применения параллельных вычислений на GPGPU требуется существенная

доработка стандартных алгоритмов на использование аппаратных функций и возможно даже переход на другие алгоритмы, более приспособленные для обработки на GPGPU. К сожалению, современные GPU обладают малым объемом быстрой локальной и разделяемой памяти, в то время как и латентность, и пропускная способность основной памяти недостаточны для большинства приложений, многие алгоритмы, например демодулятор сигналов расположенных на сфере или списочные детекторы, не вписываются в архитектуру существующих GPGPU.

Наиболее эффективными помехоустойчивыми кодами являются коды с малой плотностью проверок (МПП).

В соответствии с определением двоичных кодов МПП, данным Галлагером в 1960 году, рассматривается  $(J, K)$ -код[1] с проверочной матрицей  $\mathbf{H}$  размера  $L \times N$ , имеющих  $J$  единиц в каждом столбце и  $K$  единиц в каждой строке. Размерности  $L$  и  $N$  выбраны таким образом, что  $N = KM$  и  $L = JM$ , где  $M > 0$  — некоторое целое. Проверочная матрица  $\mathbf{H}$  может быть представлена как композиция  $J$  подматриц  $\mathbf{H}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^{(1)} \\ \mathbf{H}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(J)} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Подматрицы  $\mathbf{H}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ , размерности  $M \times N$  имеют одну единицу в каждом столбце и  $K$  единиц в каждой строке. Конструктивная скорость<sup>1</sup> такого кода  $R = 1 - J/K$ .

В частном случае таких кодов, подматрица  $\mathbf{H}^{(1)}$  или так называемая проверочная матрица первого уровня, может быть представлена композицией из  $K$  единичных подматриц

$$\mathbf{H}^{(1)} = \left( \mathbf{I}^{(M)} \mathbf{I}^{(M)} \dots \mathbf{I}^{(M)} \right), \quad (2)$$

где  $\mathbf{I}^{(M)}$  единичная матрица размера  $M \times M$ .

Полученная проверочная матрица  $\mathbf{H}$  является сильно разреженной, и для ускорения работы программной реализации кодирования/декодирования таких кодов, справедливо использование стандартных алгоритмы и методов, например библиотек Sparse BLAS (Intel). Кроме этого процедура вычисления проверочных символов при кодировании и синдромов при декодировании может быть реализована с использованием параллельных методов [2][3][4].

<sup>1</sup>Реальная кодовая скорость может быть несколько выше, чем конструктивная скорость, если в матрице  $\mathbf{H}$  существуют линейно зависимые строки.

В ряде работ [5][6] уже проведены эксперименты по выполнению части параллельных операций различных алгоритмов декодирования (sum-product и parallel belief propagation) для кодов МПП на GPU с использованием Compute Unified Device Architecture (CUDA) и получен существенный выигрыш в скорости.

Задачей данной работы было исследование перспективности использования GPGPU на примере NVIDIA CUDA для ускорения разрабатываемых процедур кодирования/декодирования МПП кодов большой длины.

## 2. Многопоточковые вычисления на GPU

Современные технологии симуляции физической реальности, часто используемые в играх, требуют огромной вычислительной мощности, из-за чего производителям графических плат потребовалось разработать эффективную архитектуру для произвольных вычислений (GPGPU - general purpose graphic processing unit). Графические приложения всегда требовали высокопараллельной обработки данных, поэтому современные графические процессоры содержат до 240 процессорных элементов. Сейчас многие программы, не связанные с играми, используют GPGPU, как быстрый векторный сопроцессор. Например, Photoshop использует GPGPU для быстрого применения некоторых фильтров.

### 2.1. Архитектура GPU

Рассмотрим архитектуру современных GPU на примере графических плат NVIDIA[10]. Основные её особенности лучше всего описываются иерархической структурой. Каждый вычислительный блок состоит из нескольких элементов обработки (EP, Processing Element). Вычислительная система может содержать одну или несколько графических плат, на каждой из графических плат расположены один или несколько графических чипсетов. Микроархитектура этих чипсетов содержит до 30 мультипроцессоров, состоящих из 8 процессорных элементов, разделяемой памяти и набора регистров. Один мультипроцессор способен выполнять 16 инструкций за такт, но в ближайшем будущем это число должно возрасти до 32.

GPGPU содержит 6 видов памяти, доступных для прикладных программ: глобальная память, память констант, текстурная память, разделяемая память, локальная память потока и

регистры. Каждый мультипроцессор содержит свой блок разделяемой памяти, доступной для всех выполняемых на нём потоков, и собственные локальную память и набор регистров для каждого потока. Глобальная память является некешируемой и расположена на графической плате. Память констант и текстурная память так же расположена на графической плате, но кешируется на каждом мультипроцессоре. Одно чтение из памяти, расположенной на графической плате, занимает от 100 до 300 тактов, поэтому для эффективной работы программа должна обладать локальным доступом к памяти или выполнять большое количество арифметически инструкций за одно обращение к памяти.

Потоки организованы в блоки, и все потоки блока исполняются на одном мультипроцессоре. Набор из нескольких одновременно запущенных блоков называется ядром.

Учёт этих особенностей архитектуры позволяет повысить эффективность используемых алгоритмов и увеличить быстродействие программ.

### 2.2. Эффективность

Сравнение производительности реализаций умножения разреженной матрицы на вектор а поле GF(2) на CPU Intel i7 и GPU NVIDIA GeForce показало семикратное преимущество реализации на графической карте, с учётом издержек на перемещение данных между оперативной памятью компьютера и графической картой. Если производить все остальные вычисления так же на GPU, то различие достигнет 20 раз. К сожалению, для полноценного использования ресурса графической платы необходимо использовать очень большие матрицы или производить много операций одновременно, что не всегда возможно.

### 2.3. Развитие отрасли GPGPU

Использование графической платы для вычислений становится всё более популярным, а инструменты для разработки соответствующих приложений - всё более удобными. Примерами последнего является выход стандарта OpenCL. OpenCL - это стандарт для создания приложений, использующих графическую плату. Его поддержка реализована в интегрированных средах разработки и драйверах графических плат от компаний NVIDIA и AMD. Можно ожидать появление его поддержки другими производителями в ближайшее время.

Не менее важным является развитие гра-

фических плат. NVIDIA выпускает графический процессор GT300, в котором содержатся значительные улучшения архитектуры по сравнению с GT212. Очень перспективным выглядит выпуск AMD новых GPU, которые теперь поддерживают OpenCL.

### 3. Работа с разреженными матрицами

С самого начала появления возможности решения неграфических задач на GPGPU ведутся работы по ускорению работы простейшей алгебраической функции - умножения разреженной матрицы на вектор. В качестве тестовых матриц используется набор из 20 образцов из различных областей (акустики, астрофизики, химии, биологии и т.д.) различного размера с различным числом ненулевых элементов. Последние результаты по ускорению получены в [7] и [8], при этом для различных матриц пальма первенства принадлежит различным авторам, и "неудобные" для каждого данного метода матрицы просто не рассматриваются. По результатам работ можно сделать вывод о эффективности проведения данных вычислений на GPGPU и выигрыш для различных задач составляет от 2х до 10х раз. Отметим, что время работы процедуры можно измерять двумя различными способами: как время работы только ядра, или как время работы всей процедуры, включающее также и время копирования данных в память устройства и обратно. К сожалению, при копировании данных имеет место большая задержка, вызванная, скорее всего, долгой инициализацией передачи. Например, время копирования 64000 байт составляет 0,049 мс, в то время как 6400 байт копируются за 0,045 мс.

Возникающие при помехоустойчивом кодировании МПП кодом, разреженные матрицы не относятся ни к одному из рассматриваемых стандартных типов, однако применение лучшего из рассматриваемых для матрицы кода с размерами 3200х3200 и 80х3200 ненулевыми элементами, алгоритма умножения дало 8х кратное ускорение в вычислении произведения, без учета процедуры занесения в память GPGPU проверочной матрицы кода. Этими накладными расходами можно пренебречь, так как эта операция делается один раз в процессе инициализации кодера/декодера.

Отметим, что рассматриваемые в литературе алгоритмы ориентированы на формат данных либо с плавающей точкой, либо двойной точностью. При кодировании/декодировании кода МПП такой формат является избыточ-

ным, так как данные можно рассматривать в виде булевских величин, использовать упакованный формат данных при обмене CPU ↔ GPGPU и быстрые двоичные операции в вычислениях. Предварительный анализ показал, что при некоторых модификациях в алгоритме реализации умножения можно получить дополнительный выигрыш.

### 4. Коды МПП с исправлением стираний

Известно, что корректирующая способность МПП кодов в канале со стираниями линейно растет с длиной кода, и пользуясь результатами [9] зафиксируем параметры кода  $K = 80$ ,  $J = 8$  и  $M = 400$ , то есть проверочная матрица имеет размер  $3200 \times 32000$ .

#### 4.1. Вычисление синдрома

Вычисление синдрома может выполняться сотни раз во время кодирования или декодирования, поэтому данная операция нуждается в тщательной оптимизации. При написании быстрого вычислителя синдрома мы столкнулись различными аппаратными ограничениями, преодоление которых часто оказывалось нетривиальным. К таким ограничениям относятся высокие издержки на копирование данных на графическую плату. Время копирования практически не зависит от объема данных, а каждая операция занимает столько же времени, сколько требуется для самого вычисления.

Наибольший прирост производительности удалось получить оптимизацией работы с памятью. Вектор входных данных размещается в разделяемой памяти. Так как копирование данных из глобальной памяти в разделяемую занимает значительное время, вектор хранится в упакованном виде: 8 соседних значений хранятся как 8 бит одного байта. Хотя это и усложняет обработку и увеличивает количество коллизий при обращении к вектору, выигрыш во времени начального копирования компенсирует все эти недостатки. Для исключения коллизий при доступе к входному вектору можно было бы поместить его в текстурную память, но стандарт CUDA не поддерживает использование массива текстур, что не даёт реализовать одновременный запуск нескольких ядер. В новом графическом процессоре GT300 данную проблему планируют решить.

Размер проверочной матрицы не позволяет хранить её в разделяемой памяти даже в сжатом виде, поэтому для достижения полной пропускной способности глобальной памя-

ти матрица хранится в специальном формате, учитывающем такие её особенности, как разреженность, бинарность и постоянство количества единиц во всех строках и во всех столбцах. Преобразование матрицы удобно разбить на 2 этапа. На первом этапе матрица преобразуется в формат, очень похожий на CSR (Compressed Sparse Row). Это один из самых популярных форматов для хранения разреженных матриц. Представленные в нём данные хранятся в трёх массивах: **indices**, **data** и **ptr**. В массиве **indices** хранятся номера столбцов ненулевых ячеек, отсортированные по номеру строки. В массиве **data** хранятся значения этих ячеек. В массиве **ptr** хранятся индексы первых элементов массива **indices**, относящихся к соответствующему номеру строки. Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий данное представление:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{ptr} = ( 0 \ 2 \ 4 \ 7 \ 9 )$$

$$\mathbf{indices} = ( 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 2 \ 3 \ 1 \ 3 )$$

$$\mathbf{data} = ( 1 \ 7 \ 2 \ 8 \ 5 \ 3 \ 9 \ 6 \ 4 ) .$$

В нашем случае это представление данных можно сократить. Так как все элементы матрицы принадлежат полю  $GF(2)$ , то единственное значение ненулевой ячейки проверочной матрицы — 1, поэтому массив **data** состоящий из единиц можно не хранить. Так как количество ненулевых ячеек в одной строке проверочной матрицы фиксировано и заранее известно, то значение  $i$ -той ячейке массива **ptr** будет равно  $iK$ , где  $K$  — количество ненулевых элементов в каждой строке. Таким образом хранить массив **ptr** также необязательно. Поэтому мы храним только массив **indices**. Для удобства, его можно представить как матрицу **E** размера  $LK$ , такую что  $\mathbf{E} = \mathbf{indices}^T$ .

Для эффективного использования пропускной способности глобальной памяти все потоки должны читать данные последовательно. Но в нашем алгоритме каждый поток вычисляет произведение отдельной строки на столбец, и одновременно читаются все ячейки одного столбца матрицы **E**. Поэтому приходится преобразовать матрицу **E** следующим образом: матрица “разрезается” на слои толщиной  $N_t$ , где  $N_t$  — количество потоков в одном блоке ядра. Затем каждый слой записывается в память “вдоль столбцов”, то есть сначала в память помещаются ячейки первого столбца с первой стро-

ки по последнюю, потом ячейки второго столбца и т.д. В результате, несмотря на повышение сложности алгоритма, производительность значительно повышается.

К другим проблемам можно отнести очень медленное выделение блоков памяти размером более 4095 байт на графической плате. Для увеличения производительности необходимо заранее выделять память под входной и выходной вектора, что ограничивает гибкость алгоритма.

Очевидным шагом для увеличения производительности является интеграция процедуры вычисления синдрома в процедуры кодирования и декодирования. В таком случае исчезает необходимость в копировании данных из глобальной памяти в начале каждого вычисления синдрома. Так же исчезает необходимость в многократном копировании данных между оперативной памятью и памятью графической платы. Данный шаг эффективен даже для плохо распараллеливаемых алгоритмов кодирования и декодирования.

#### 4.2. Ядро многопоточкового кодера

Операция кодирования в общем случае определена как

$$\mathbf{xG} = \mathbf{v}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{x}$  - информационное слово,  $\mathbf{v}$  - кодовое слово,  $\mathbf{G}$  - порождающая матрица, связанная с проверочной матрицей  $\mathbf{H}$  соотношением

$$\mathbf{GH}^T = 0. \quad (4)$$

Матрица  $\mathbf{G}$  не является разреженной и сложность кодирования будет иметь порядок  $LN^2$ . Ускорение алгоритма кодирования можно добиться, рассматривая его как процедуру исправления стираний

$$\mathbf{rH}^T = \mathbf{s}, \quad (5)$$

$\mathbf{r}$  — кодовый вектор со стираниями в местах, где должен стоять проверочный символ,  $\mathbf{s}$  - синдром. Сложность (5) имеет порядок  $LK^2$ , и к ней можно применить процедуру многопоточкового умножения, получив дополнительный выигрыш.

В качестве проверочной матрицы, в этом случае, следует рассматривать некую другую эквивалентную матрицу  $\mathbf{H}'$ , полученную из  $\mathbf{H}$  путем перестановок строк и столбцов, имеющую вид

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}$  - разреженная матрица,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  - плотные матрицы, размер которых существенно меньше размера исходной матрицы. Значение синдрома определяет значение проверочного символа.

### 4.3. Ядро для многопоточкового декодера

По принятой последовательности декодер МПП кода вычисляет синдром по (5), что является наиболее трудоемкой с вычислительной точки зрения частью декодера, ведь эта операция выполняется всякий раз, даже если ошибок или стираний не произошло.

Таким образом процедура декодирования может быть разделена на две задачи, задачу вычисления синдрома, которая эффективно исполняется на GPGPU, и задачу исправления стираний или ошибок исполняемую на CPU. Процедура вычисления синдрома является базовой и используется при любом алгоритме декодирования. Большой производительности можно достичь, перенеся исполнение задач кодирования и декодирования на GPU, но это потребует дополнительного исследования.

## 5. Выводы

Реализации алгоритмов кодирования и декодирования состоят из двух частей: работающей на ЦП и выполняемой на GPU. На вторую возложена задача вычисления произведения разреженной матрицы на вектор, т.е. вычисление синдрома, на исполнение которой тратится большая часть времени работы программы. Для достижения высокой производительности разреженная матрица хранится в текстурной памяти, а входной вектор копируется в разделяемую память. Каждый поток вычисляет произведение одной строки матрицы на вектор. Дополнительный выигрыш получен фиксированием количества единиц в строке. Была проведена оптимизация по размеру блока потоков.

Проведенные эксперименты показывают эффективность применения GPGPU в задачах моделирования систем связи с МПП кодами, при этом достигается ускорение в 10 раз наиболее трудоемких вычислений. Продолжением работы в этом направлении может стать разработка универсальной SPARSE библиотеки для среды программирования Matlab, позволяющей работать с разреженными матрицами с использованием GPGPU.

## Список литературы

- [1] Галлагер Р. Коды с малой плотностью проверок на четность. М.: Мир, 1966.
- [2] C. Howland, A. Blanksby, Parallel decoding architectures for low density parity check codes, The 2001 IEEE International Symposium on

- Circuits and Systems, 2001. ISCAS 2001. vol. 4, pp. 742 - 745, May 2001
- [3] K. Shimizu, T. Ishikawa, et al, A parallel LSI architecture for LDPC decoder improving message-passing schedule, Proceedings. 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2006. ISCAS 2006. pp. 5099-5102, May 2006
- [4] Oh. Daesun, K.K Parhi, Efficient Highly-Parallel Decoder Architecture for Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check Codes, IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2007. ISCAS 2007. pp. 1855 - 1858, May 2007.
- [5] S. Wang, S. Cheng, Q. Wu, A Parallel Decoding Algorithm of LDPC Codes using CUDA, in Proc. Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, October 2008.
- [6] G. Falcao, L. Sousa, V. Silva Massive parallel LDPC decoding on GPU, Proceedings of the 13th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and practice of parallel programming, Salt Lake City, UT, USA 2008
- [7] M.M. Baskaran, R. Bordaweker Optimizing sparse matrix-vector multiplication on GPUs. IBM Reserch Report RC24704, IBM, April 2009
- [8] N. Bell, M. Garland Implementing Sparse Matrix-Vector Multiplication on Throughput- Oriented Processors, in Proc. Supercomputing, August 2009
- [9] Pavel Rybin, Victor Zyablov, Decoding with erasures insertion of binary LDPC codes, XII INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON PROBLEMS OF REDUNDANCY IN INFORMATION AND CONTROL SYSTEMS, pp/ 150-154, May 2009
- [10] NVIDIA Corporation. 2007. NVIDIA CUDA Compute Unified Device Architecture Programming Guide. Version 2.3.

## Автоматическое обнаружение и выделение стабильных изменений в видеопоследовательностях

И.Б. Кондратенков, Л.И. Рубанов

Лаборатория методов анализа и цифровой обработки изображений

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия

*ivankond@mail.ru*

### Аннотация

*Рассматривается задача автоматического обнаружения и выделения стабильных изменений, возникающих в динамической видеопоследовательности. Целью является распознавание в наблюдаемой сцене среднемасштабных временных изменений, которые сохраняются как в условиях шумов и быстрых изменений сюжета, так и при медленных изменениях освещенности. Предлагается алгоритм, основанный на параллельной оценке и последующем совместном анализе динамики изменений, возникающих в каждой точке изображения во времени. Наблюдая за изменениями элемента изображения во времени, мы имеем возможность оценить как фоновое значение, так и искажающую его помеху. Для повышения надежности такой предварительной оценки далее проводится фильтрация и совместный анализ в пространственной области изображения. Таким образом, появляется реальная возможность отделить полезный сигнал в среднем масштабе времени от шума и относительно медленно изменяющегося фонового уровня, а также локализовать его в изображении. Для программной реализации алгоритма использовалась система математического моделирования MATLAB.*

### 1. Введение

В последнее десятилетие бурными темпами развивается индустрия компьютерных систем наблюдения за ситуациями на динамических сценах, основанных на использовании видеокамер и персональных компьютеров в качестве средств обработки и визуализации изображений. Компьютерные системы наблюдения используются для контроля доступа на охраняемые объекты и территории, предотвращения противоправных действий, включая террористические акты, а также для дистанционного наблюдения за участками местности и т. д. В настоящее время систе-

мы наблюдения переориентируются с постоянно замкнутых на операторе, на полуавтоматические системы, привлекающие внимание оператора только в действительно нужных ситуациях. Некоторые разработчики компьютерных систем наблюдения, осуществляющих полуавтоматический контроль за изменением ситуации на наблюдаемой сцене, используют термин «интеллектуальные системы наблюдения» [6].

Под динамической сценой понимается пространство, в котором происходит появление, перемещение или изменение структуры объектов. Динамика на наблюдаемой сцене передается последовательностью статических изображений, которую в системах наблюдения иногда называют видеопоследовательностью или видеопотоком.

Источником информации в компьютерных системах наблюдения является телевизионная камера. Анализ ситуации на динамической сцене сводится к тематической обработке последовательности изображений. Отдельное изображение видеопоследовательности называют видеокадром (кадром). Универсальных методов обработки последовательности изображений, сравнимых по эффективности с интеллектуальными возможностями человека, в настоящее время не существует. В развитых странах наметился рост публикаций в области создания интеллектуальных систем, снабженных техническим зрением.

### 2. Постановка задачи

Имеется множество практически важных ситуаций, в которых возникает задача автоматического обнаружения, локализации и классификации стабильных изменений, имеющих место в обрабатываемой последовательности кадров. При этом решение необходимо принимать в реальном масштабе времени, т.е. в темпе поступления кадров изображения с запаздыванием порядка постоянной времени интересующего масштаба. В

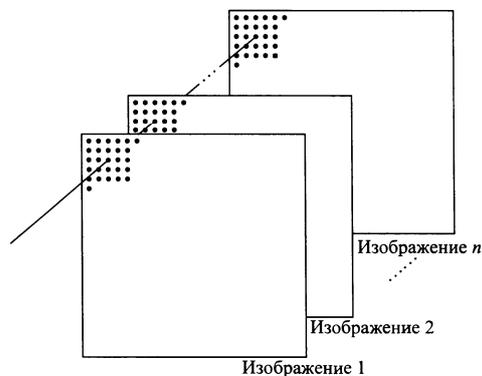
качестве объектов могут выступать люди, автомашины, детали на конвейере и т.п.

В данной работе задача обнаружения и выделения движущегося фрагмента решается на основе анализа изменений фоновой и шумовой составляющих наблюдаемой сцены в последовательности кадров. Предполагается, что система представляет собой неподвижную видеокамеру, подключенную к компьютеру, и следовательно, сдвиг изображения в целом отсутствует.

Считаем, что дискретное изображение объекта представляет собой связанное множество точек с неизвестными яркостями. Под связностью здесь и далее будем понимать расположение точек объекта в соседних ячейках дискретного раstra [4].

При наблюдении за объектом, перемещающимся на сложном фоне, наиболее характерной является ситуация, когда фоновое изображение расположено в пространстве дальше, чем объект. В этом случае на наблюдаемом изображении объект слежения, перемещаясь, закрывает собой участок фона, расположенный за ним.

В основу алгоритма автоматического обнаружения и выделения стабильных изменений, возникающих в последовательности кадров, легла идея оценки и последующего анализа стабильных изменений, возникающих в каждой точке изображения во времени Рисунок 1 [2,3,5].



**Рисунок 1:** Последовательность статических изображений

Наблюдая за изменениями, имеющими место на изображении во времени, мы имеем возможность оценить как сам фон, так и искажающую его помеху. Таким образом, появляется реальная возможность отделить полезный сигнал, создаваемый динамическим объектом, от шума и относительно стабильного фонового уровня. Поэтому, в разработанном алгоритме применяется параллельное вычисление оценок уровней яркости точек фона и оценок величины изменения уровней яркости точек фона.

### 3. Решение задачи

Оценки уровней яркости точек фона  $g(i, j, n)$  формируем путем рекуррентного межкадрового усреднения одноименных точек. Т.е. получаем сглаженное («эталонное») изображение фона [1]:

$$g(i, j, n) = \beta_1 \cdot g(i, j, n-1) + (1 - \beta_1) \cdot l(i, j, n), \quad (1)$$

где  $l(i, j, n)$  - уровень яркости точки  $(i, j)$  в  $n$ -ом кадре наблюдаемой сцены;  $\beta_1$ -параметр экспоненциального рекурсивного фильтра, выбираемый в диапазоне  $0 \div 1$ . Для выяснения характера возможных изменений уровней яркости точек фона во времени, вычисляем оценки величины изменения уровней яркости точек фона  $\hat{\Delta}$ .

$$\Delta(i, j, n) = (g(i, j, n) - l(i, j, n))^2, \quad (2)$$

$$\hat{\Delta}(i, j, n) = \beta \cdot \hat{\Delta}(i, j, n-1) + (1 - \beta) \cdot \Delta(i, j, n), \quad (3)$$

где  $\beta$  - параметр экспоненциального рекурсивного фильтра, выбираемый в диапазоне  $0 \div 1$ . При  $\beta = 1$  в качестве оценки величины изменения уровней яркости точек фона выбирается величина изменения уровней яркости точек фона взятая из первого кадра, при  $\beta = 0$  осуществляется покадровая смена оценок величины изменения уровней яркости точек фона, а при  $0 < \beta < 1$  оценки величины изменения уровней яркости точек фона формируются путем межкадрового усреднения. При проведении вычислений выбиралось равным 0,98 т.к. при этом удается оптимально сочетать возможность обновления эталона с подавлением помех, имеющих место на обрабатываемом изображении.

Расчет оценок изменения величины уровня яркости наряду с оценками уровня яркости, ведется независимо для каждой точки наблюдаемого изображения. Таким образом, на основе полученных оценок уровня яркости и оценок величины изменения уровня яркости, в каждой точке принимается решение о принадлежности ее к фону или предположительно, объекту. Т.е. можно записать

$$l(i, j, n) = \begin{cases} g(i, j, n), & \text{если } |g(i, j, n-1) - l(i, j, n)| \leq \\ & \leq k \cdot \sqrt{\hat{\Delta}(i, j, n-1)}, \\ h(i, j, n) & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (4)$$

где  $h(i, j, n)$  - уровень яркости точки, принадлежащей изображению объекта;  $k$  - некоторый пороговый коэффициент. Так как  $\hat{\Delta}$ , по существу, представляет собой оценку дисперсии величины изменения уровня яркости, то значение  $k$  целесообразно принимать на уровне 3.

#### 4. Этапы алгоритма

Таким образом, основные этапы эвристического алгоритма автоматического обнаружения и выделения стабильных изменений, возникающих в последовательности кадров, включают в себя следующие операции:

1. Формирование оценок уровней яркости в каждой точке фона путем предварительной межкадровой фильтрации яркостей одноименных точек в последовательности изображений.
2. Аналогичным образом, параллельно с выполнением первого этапа алгоритма, формируются оценки величины изменения уровня яркости в каждой точке фона.
3. Поэлементное сравнение сглаженного («эталонного») изображения фона с текущим изображением с учетом полученных оценок величины изменения уровня яркости в одноименных точках. Гипотеза о принадлежности точки к объекту принимается в соответствии с правилом (4). В остальных точках оценки уровней яркости и оценки величины изменения уровня яркости рекурсивно уточняются. По результатам сравнения формируется бинарное изображение с элементами 0 и 1, в котором значение 1 соответствует гипотезе о принадлежности точки объекту.
4. Выделение и параметризация компактных областей насыщенных точками бинарного изображения.
5. Выполнение дополнительной обработки параметров полученного списка сегментов, включающей в себя так же и накопление информации о поведении сегмента во времени. Это позволяет удалить сегменты бинарного изображения, не удовлетворяющие заданным условиям (например, таким как: ограничения на площадь сегмента, отношение линейных размеров, коэффициент формы, коэффициент заполнения, повторяемость параметров сегмента в последовательности кадров, смещение центра масс сегмента за кадр и т.п.).
6. Принятие решения об обнаружении объекта в текущем кадре.

#### 5. Результаты работы алгоритма

Предложенный алгоритм был реализован в среде Matlab 7.6.0. Экспериментальная проверка алгоритма проводилась на двух тестовых видео-

последовательностях. Размер обрабатываемых изображений пикселей 720x480 (рисунок 2).



Рисунок 2: Кадры из тестовых сюжетов

Первые 25 кадров видеопоследовательности использовались для получения стартовых значений оценок уровней яркости и оценок величины изменения уровней яркости точек изображения. Затем включался разработанный алгоритм обнаружения и выделения в видеопоследовательности кадров изменений.

Пример работы, приведен на рисунке 3 показывает выделение объектов. На рисунке 3а приведен исходный кадр тестового сюжета, на рисунках 3б — выделенные объекты, фон замаскирован черным.

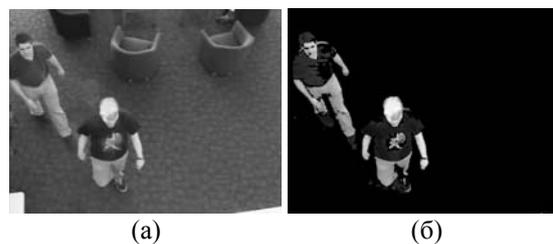


Рисунок 3: Пример работы алгоритма

#### 6. Заключение

В данной статье рассматривалась задача автоматического обнаружения и выделения стабильных изменений, возникающих в динамической видеопоследовательности. Был предложен эвристический алгоритм, основанный на параллельной оценке и последующем совместном ана-

лизе динамики изменений, возникающих в каждой точке изображения во времени.

## 7. Библиография

[1] Алпатов Б.А., Блохин А.Н. Модели и алгоритмы обнаружения и выделения движущихся фрагментов изображений // Автометрия.– 1995.– № 4.–С. 100 – 104

[2] Гонсалес Р., Вудс Р. “Цифровая обработка изображений”, 2006, страниц 1072.

[3] Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods, Steven L. Eddins “Digital Image Processing using MATLAB”, 2004, 12 chapters, 624 pages.

[4] Прэрт У. Цифровая обработка изображений. Кн.2./ М.: Мир, 1982. – 784 с.

[5] Ziou, D. and Tabbone, S.: Edge Detection Techniques An Overview, International Journal of Pattern Recognition and Image Analysis, 8(4):537--559, 1998.

[6] Мурашко Н.И. Особенности обработки полутоновых изображений в компьютерных системах наблюдения // Информатика: Сб. науч. тр. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – С. 57-67.

# Impact of the DEM Resolution on the Outdoor RF Propagation Models

Pavel Boyko  
*boyko@iitp.ru*

Denis Fakhriev  
*fakhriev@iitp.ru*

Mikhail Musienko  
*michael.musienko@iitp.ru*  
*Institute for Information Transmission Problems*

## Abstract

*Some outdoor RF propagation models require the Digital Elevation Model (DEM) as input for operation. These DEMs can be obtained from several sources with different precision, resolution and land coverage. The best DEMs freely available covers only US territory, while worldwide DEMs are much less accurate. In this article we studied the impact of DEM resolution on the outdoor RF propagation models and found that worldwide freely available DEMs are suitable for RF propagation loss prediction at flat or hilly terrain with elevation dispersion less than 100 meters.*

## 1. Background

Modeling RF propagation loss is important step in wireless network planning or simulation. There are several models for propagation loss prediction that are suitable for different scenarios.

While modeling wireless network operating at rural scenarios propagation of electromagnetic waves depends mainly on the topography and the land usage (clutter). Buildings and other separate objects are usually not considered in such scenarios.

There are several models for RF propagation loss predictions, some of which being empirical models based only on the result of statistic processing of experimental data (such as Hata-Okumura Model) while other takes into account the detailed information about terrain profile along the propagation path. The benefits of first class of models are their simplicity and simple tastes to calculation resources. Models of the sec-

ond class produce quite more accurate propagation results, but require the information about topography of terrain, which is not always available.

There are two diffraction models that are mostly often used nowadays. They are Model based on ITU-R “Propagation by diffraction” recommendation (see section 1.1) and Longley-Rice Model (see section 1.2).

### 1.1. ITU Model

According to ITU-R P.526 [9], diffraction losses on irregular terrain are calculated using approximation of the terrain profile of propagation path with three knife edges using Deygout’s method.

This method is recommended for the diffraction loss over irregular terrain which forms one or more obstacles to line-of-sight propagation. The calculation takes Earth curvature into account via the concept of an effective Earth radius (see [10], § 4.3). This method is suitable in cases where a single general procedure is required for terrestrial paths over land or sea and for both line-of-sight and transhorizon.

A profile of the radio path should be available consisting of a set of samples of ground height above sea level ordered at intervals along the path, the first and last being the heights of the transmitter and receiver above sea level, and a corresponding set of horizontal distances from the transmitter.

The method is based on a procedure which is used from 1 to 3 times depending on the path profile. The procedure consists of finding the point within a given section of the profile with the highest value of the geometrical parameter  $\nu$  as de-

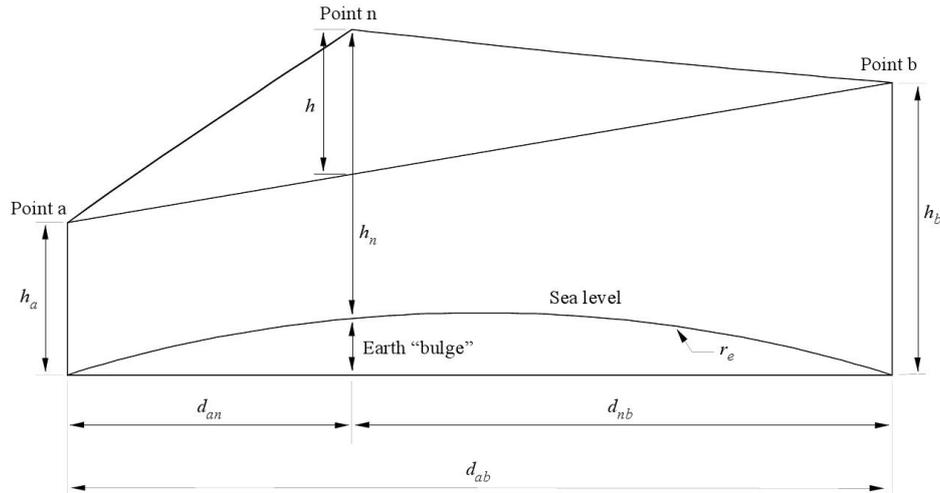


Figure 1. Geometry for a single edge

scribed in [9] at § 4.1. The section of the profile to be considered is defined from point index  $a$  to point index  $b$  ( $a < b$ ). If  $a + 1 = b$  there is no intermediate point and the diffraction loss for the section of the path being considered is zero. Otherwise the construction is applied by evaluating  $v_n$  ( $a < n < b$ ) and selecting the point with the highest value of  $v$ . The value of  $v$  for the  $n$ -th profile point is given by:

$$v_n = h\sqrt{2d_{ab}/\lambda d_{an}d_{nb}}, \quad (1)$$

where

$$h = h_n + [d_{an}d_{nb}/2r_e] - [(h_a d_{nb} + h_b d_{an})/d_{ab}] \quad (2)$$

$h_a, h_b, h_n$  heights as shown in Fig. 1  
 $d_{an}, d_{nb}, d_{ab}$  distances as shown in Fig. 1  
 $r_e$  effective Earth radius  
 $\lambda$  wavelength

and all  $h$ ,  $d$ ,  $r_e$  and  $\lambda$  are in self-consistent units.

The diffraction loss is then given as the single knife-edge diffraction loss  $J(v)$  as described in [9] at § 4.1 for  $v > -0.78$ , and is otherwise zero.

The geometry of equation (2) is illustrated in Fig. 1. The second term in equation (2) is a good approximation to the additional height at point  $n$  due to Earth curvature.

The above procedure is first applied to the entire profile from transmitter to receiver. The point with the highest value of  $v$  is termed the principal edge,  $p$ , and the corresponding loss is  $J(v_p)$ . If  $v_p > -0.78$  the procedure is applied twice more:

- from the transmitter to point  $p$  to obtain  $v_t$  and hence  $J(v_t)$ ;
- from point  $p$  to the receiver to obtain  $v_r$  and hence  $J(v_r)$ .

The excess diffraction loss for the path is then given by:

$$\begin{aligned} L(dB) &= J(v_p) + T[J(v_t) + J(v_r) + C] & \text{for } v_p > -0.78 \\ L(dB) &= 0 & \text{for } v_p \leq -0.78 \end{aligned} \quad (3)$$

where  $C$  is empirical correlation coefficient

$$C = 10.0 + 0.04D \quad (4)$$

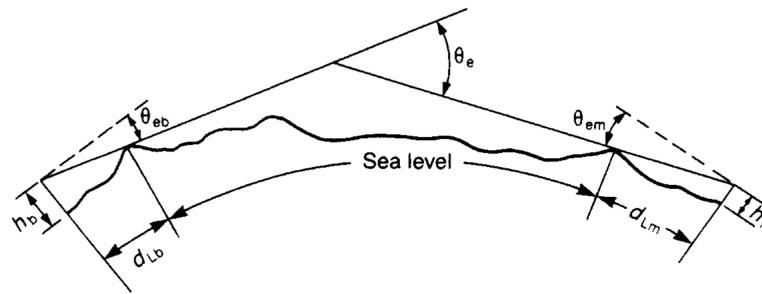
where  $D$  is full distance from transmitter to receiver and

$$T = 1.0 - \exp[-J(v_p)/6.0] \quad (5)$$

The above procedure, for transhorizon paths, is based on the Deygout method limited to a maximum of 3 edges. For line-of-sight paths it differs from the Deygout construction in that two secondary edges are still used in cases where the principal edge results in a non-zero diffraction loss.

## 1.2. Longley-Rice Model

The Longley-Rice model date from 1968 and the publication of an ESSA technical report [11] which introduced the methods and a computer program for predicting the median path loss over irregular terrain. The method may be used either with detailed terrain profiles for actual paths (point-to-point mode), or with profiles representative of median terrain characteristics for a given



**Figure 2. Transhorizon path geometry**

area (area mode). It includes estimates of variability with time and location, and a method of computing service probability. The ranges of system parameters over which the models are applicable are

Frequency (MHz)	20 to 20 000
Range (km)	1 to 2000
Antenna heights (m)	0.5 to 3000
Polarisation	vertical or horizontal.

Five further inputs are required by the program:

- Antenna heights above local ground;
- surface refractivity (250 to 400 N-units);
- effective Earth radius;
- ground constants;
- radio-climate.

In addition it is necessary to provide a number of path-specific

- Effective antenna heights;
- horizon distances of the antennas,  $d_{Lb}$  and  $d_{Lm}$ ;
- horizon elevation angles,  $\theta_{eb}$  and  $\theta_{em}$ ;
- angular distance for a transhorizon path,  $\theta_e$ ;
- terrain irregularity parameter,  $\Delta h$ .

The definitions of some of these parameters are illustrated in Figure 2.

If a terrain data map is available the parameters for model operation can be determined for any particular path, the prediction technique operates in a “point-to-point” mode. However, if the terrain profile is not available, the report gives techniques for estimating these path-related parameters for use in an “area” mode.

To predict the median transmission loss, the reference attenuation below free space is first calculated as a continuous function of distance from

the transmitter: the free space loss at each distance is then added. The reference attenuation is computed in three different ways depending on the distance from the transmitter:

- For distances less than the smooth earth horizon distance  $d_{LSb}$ , the computation is based on two-ray rejection theory (plane earth) and an extrapolated value of diffraction loss.
- For distances just beyond the horizon from  $d_{Lb}$  to  $d_X - d_X$  being the distance where diffraction and scatter losses are equal – the reference attenuation is a weighted average of knife-edge and smooth earth diffraction calculations. The weighting factor is a function of frequency, terrain irregularity and antenna heights. For highly irregular terrain the horizon obstacles as seen from the terminals are considered as sharp ridges and the diffraction loss is calculated over a double knife-edge path using the Epstein-Peterson approximation [12].
- For transhorizon paths where the range is greater than  $d_X$ , the reference attenuation is calculated either as a diffraction loss or as a forward scatter loss, whichever is the smaller.

It should be noticed that diffraction losses are calculated alike they do in ITU diffraction Model. Additional information about Longley-Rice Model can be found at [1] and references within. Information about input parameters for Longley-Rice Model can be found at [2], [3], [7], [5], [6], and others.

## 2. Digital Elevation Model

As mentioned above, precise models such as ITU model and Longley-Rice model require topology information about terrain profile between transmitter and receiver for accurate propagation loss prediction. This information can be obtained

from *Digital Elevation Model*, *DEM*. DEM is a digital representation of ground surface topography or terrain, excluding features such as vegetation, buildings, bridges, etc. It is also widely known as a *digital terrain model*, *DTM*. A DEM can be represented as a raster (a grid of squares) or as a triangular irregular network.

Digital elevation models may be prepared in a number of ways, but they are frequently obtained by remote sensing rather than direct survey [4]. One powerful technique for generating digital elevation models is interferometric synthetic aperture radar: two passes of a radar satellite, or a single pass if the satellite is equipped with two antennas, suffice to generate a digital elevation map tens of kilometers on a side with a resolution of around ten meters. Alternatively, other kinds of stereoscopic pairs can be employed using the digital image correlation method, where two optical images acquired with different angles taken from the same pass of an airplane or an Earth Observation Satellite.

Nowadays several sources of DEMs with full or partial Earth surface cover are presented. Table 1 shows brief summary of available sources, all of them being described below.

**Table 1. DEM sources summary**

Name	Coverage	$\Delta x$ , m	$\Delta h$ , m
GTOPO	global	1000	varies
SRTM 3as	between 60 degrees North and 56 degrees South latitude	90	$\pm 10$
SRTM 1as	United States	30	$\pm 10$
NED 1as	United States, Hawaii and Puerto Rico	30	$\pm 7$
NED 1/3as	United States, Hawaii	10	$\pm 7$
NED 1/9as	Some regions of United States	3	$\pm 1$

where  $\Delta x$  is a grid step and  $\Delta h$  is vertical accuracy, as stated by DEM source.

## 2.1. USGS GTOPO30

Global 30 Arc-Second Elevation Data Set (GTOPO30) is a global raster Digital Elevation Model with a horizontal grid spacing of 30 arc seconds (approximately 1 kilometer). GTOPO30 was derived from a variety of raster and vector sources. The data is expressed in geographic coordinates (latitude/longitude) and is referenced to the World Geodetic Survey (WGS) system of 1984

(WGS84). The files are available in generic binary (16-bit signed integer) format and are distributed freely.

GTOPO30, completed in late 1996, was developed over a three year period through a collaborative effort led by staff at the U.S. Geological Survey's Center for Earth Resources Observation and Science (EROS).

But the precision of DEM obtained from GTOPO30 varies greatly from region to region and at some regions is not appropriate for calculations.

## 2.2. Shuttle Radar Topography Mission (SRTM)

The Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) is a joint project between NASA and NGA (National Geospatial-Intelligence Agency) to map the world in three dimensions. SRTM utilized dual Spaceborne Imaging Radar (SIR-C) and dual X-band Synthetic Aperture Radar (X-SAR) configured as a baseline interferometer, acquiring two images at the same time. These images, when combined, can produce a single 3-D image. Flown aboard the NASA Space Shuttle Endeavour February 11–22, 2000, SRTM successfully collected data over 80% of the Earth's land surface, for all area between 60 degrees North and 56 degrees South latitude.

SRTM data is being used to generate a digital topographic map of the Earth's land surface with data points spaced every 1 arc second for the United States of latitude and longitude (approximately 30 meters).

The editing, also referred to as finishing, consisted of delineating and flattening water bodies, better defining coastlines, removing "spikes" and "wells", and filling small voids. This set is publicly available at two postings: 1 arc-second for the United States and its territories and possessions, and 3 arc-seconds for regions between 60 degrees North and 56 degrees South latitude.

The method NGA uses to produce 3 arc-second data from the 1 arc-second set is "sub sampling", namely selecting the center value from the set of nine centered on a particular posting location. This is the method that has been used to produce the 3 arc-second edited data that are available through The USGS National Map Seamless Server [8].

The SRTM "finished" data meet the absolute horizontal and vertical accuracies of 20 meters (circular error at 90% confidence) and 16 meters (linear error at 90% confidence), respectively, as specified for the mission. The vertical accuracy is actually significantly better than the 16 meters. It

is closer to  $\pm 10$  meters.

### 2.3. The National Elevation Dataset (NED)

The National Elevation Dataset (NED) is a raster product assembled by the U.S. Geological Survey (USGS). NED is designed to provide National elevation data in a seamless form with a consistent datum, elevation unit, and projection.

NED data is collected from various sources with a variety of elevation units, horizontal datum, and map projections. In the NED assembly process the elevation values are converted to decimal meters as a consistent unit of measure, NAD83 is consistently used as horizontal datum, and all the data are recast in a geographic projection.

NED has a resolution of one arc-second (approximately 30 meters) or 1/3 arc-second (approximately 10 meters) with accuracy of  $\pm 7$  meters for the conterminous United States, Hawaii, and Puerto Rico, a resolution of two arc-seconds for Alaska, and a resolution of 1/9 arc-second (approximately 3 meters) with accuracy of  $\pm 1$  meter for some regions of United States.

NED data is available for freely download via The USGS National Map Seamless Server [8].

### 2.4. Other sources

In a number of countries national geological agencies and commercial companies offers Digital Elevation Models of various resolutions and precision, but their high price make them available only for governments or big companies.

## 3. Impact of DEM resolution on RF propagation loss prediction

As described above, for different countries DEMs with different resolution and precision are available. The best sources of DEMs freely available for entire Earth surface are the results of Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) with a resolution of 3 arc-seconds (approximately 90 meters).

DEMs with best resolution and precision are ones obtained from USGS National Elevation Dataset, but short coverage of this DEMs make their usage impossible for the variety of tasks.

In this work the impact of DEM resolution on the result of outdoor RF propagation loss prediction have been analyzed to decide if freely available SRTM 3as is appropriate for propagation loss prediction. It is obvious that this impact differs for different types of Earth terrain. This work is contented oneself with examining of plain ter-

rain (with elevation dispersion less than 30 meters), hilly terrain (with elevation dispersion less than 200 meters) and low mountains (with elevation dispersion from 200 to 1000 meters).

### 3.1. Analysis method

On the territory of North Carolina state 5 regions sized 15x15 kilometers have been chosen. These regions are suitable for definition above: 2 plain terrain regions, 2 hilly terrain regions and 1 low mountain region.

For each region DEMs with different resolution have been downloaded: SRTM 3as, SRTM 1as, NED 1as, NED 1/3as, and NED 1/9as.

As it have been noticed, both propagation loss models described above account diffraction losses in the same way. And the impact of DEM resolution on the results of modeling is expected to be alike. So, this work in contented oneself with using only ITU Model.

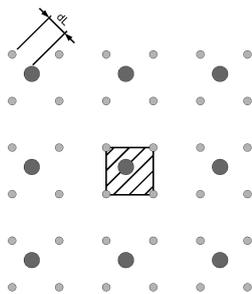
For each scenario the RF propagation loss from transmitter placed in the center of scenario to receivers at the nodes of the DEM grid was modeled using ITU-R model.

The following parameters were chosen:

- Frequency – 300 MHz;
- transmitter height – 2 meters;
- receiver height – 2 meters.

For each scenario the comparative analysis of data obtained using low-resolution DEMs with data obtained using highest-resolution DEM, which is NED 3m. The analysis included next steps:

1. Although downloaded DEMs are describing the same area of Earth surface, offset was detected because of different projection, making necessary corresponding corrections to be done.
2. At each node of lower-resolution grid of DEMs the RF propagation loss calculated with higher-resolution DEM was calculated using bilinear approximation by four nearest values. Figure 3 displays the situation, with small dots being data points of higher-resolution DEM and big dots being data points of lower-resolution DEM.
3. At each node of lower-resolution grid the difference between obtained propagation loss values was calculated.
4. Using obtained propagation loss difference values the difference histograms were drawn.



**Figure 3. Interpolation geometry**

5. For each obtained empirical distribution of calculated propagation losses difference the mean value, describing systematic error due to systematic error of input data, and standard deviation, describing impact of DEM resolution on RF propagation loss prediction model, was calculated.

### 3.2. Results

The results of comparative analysis are shown at Tables 2 and 3.

There are two histograms for comparison of elevation and propagation loss dispersions between best available DEM (NED 1/9as) and SRTM 3as for three selected scenarios of different types are shown at figures 4 – 6.

It may be observed that standard deviation of elevation difference at the same point obtained using different DEMs lies inside stated vertical accuracy of this DEMs.

### 4. Conclusion

It also may be observed that in case of plain or hilly terrain standard deviation of propagation loss calculated using SRTM 3as and NED 1/9as difference lies in ranges of 5 ~ 6 dB. This means that SRTM 3as is appropriate for practical use in case of plain or hilly terrain.

However, standard deviation of propagation loss calculated using SRTM 3as and NED 1/9as in case of low mountain terrain is greater than 10 dB. This is likely to be the result of high elevation difference between this two DEMs at chosen scenario. This why it may be concluded that using of SRTM 3as is not recommended in case of high elevation dispersion if high accuracy of modeling results is expected. In this case one should obtain DEM of better resolution and precision.

### References

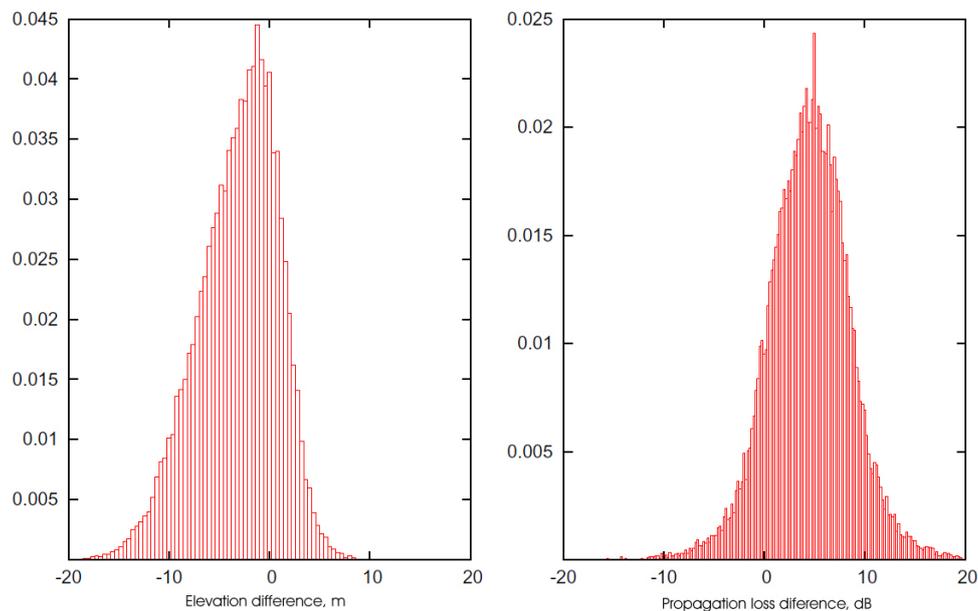
- [1] <http://flattop.its.blrdoc.gov/itm.html>.
- [2] <http://flattop.its.blrdoc.gov/itm/qkpfman.txt>.
- [3] <http://flattop.its.blrdoc.gov/itm/uareaman.txt>.
- [4] [http://en.wikipedia.org/wiki/Digital\\_elevation\\_model](http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_elevation_model).
- [5] Map of effective ground conductivity in the usa. <http://www.fcc.gov/mb/audio/m3/>.
- [6] Notes on longley-rice propagation. [http://www.softwright.com/faq/engineering/prop\\_longley\\_rice.html](http://www.softwright.com/faq/engineering/prop_longley_rice.html).
- [7] Relative dielectric permittivity. <http://mysite.du.edu/~lconyers/SERDP/RDP.htm>.
- [8] The usgs national map seamless server. <http://seamless.usgs.gov/index.php>.
- [9] ITU-R Recommendation P.526: Propagation by diffraction. Technical report, 2003.
- [10] ITU-R Recommendation P.452-13: Prediction procedure for the evaluation of microwave interference between stations of the surface of the Earth at frequencies above about 0.7 GHz. Technical report, 2007.
- [11] A. Longley and P. Rice. ESSA Technical report: Prediction of tropospheric radio transmission loss over irregular terrain. A computer method. Technical report, 1968.
- [12] J. Parsons. *The Mobile Radio Propagation Channel*. John Wiley, 2000.

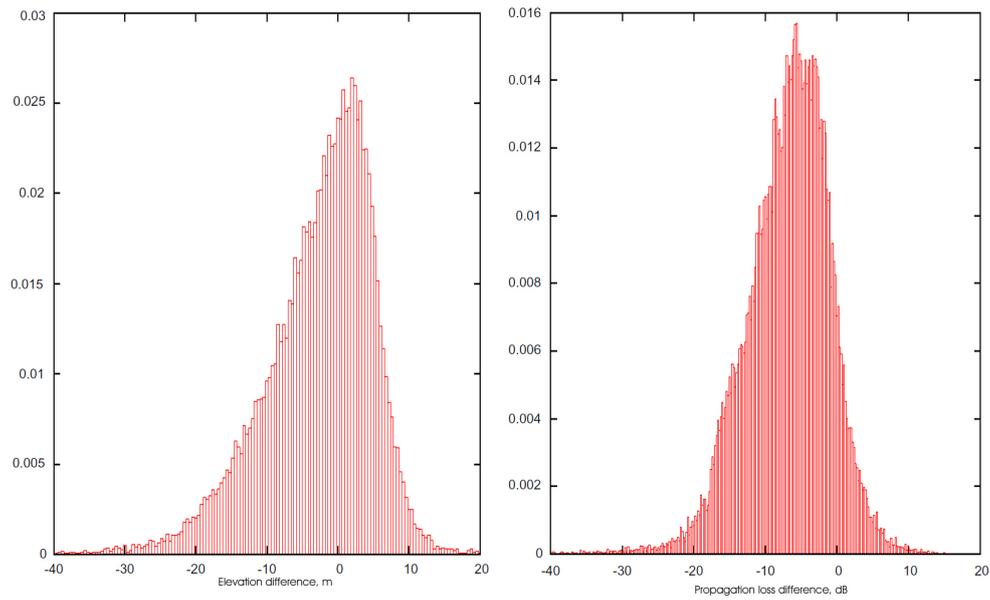
**Table 2. Comparative analysis of propagation loss difference results, dB. See discussion in text**

DEM	Plain Terrain				Hilly Terrain				Low Mountain	
	mean	var	mean	var	mean	var	mean	var	mean	var
NED 1/3as	-0.05	0.37	-0.11	0.39	-1.17	1.26	-0.77	1.99	-0.49	3.25
NED 1as	-0.57	0.72	-0.40	0.77	-3.69	3.13	-0.86	3.16	-1.52	5.94
SRTM 1as	4.62	4.49	7.35	4.12	-2.37	4.74	-2.99	4.89	-3.41	8.11
SRTM 3as	1.23	3.75	4.61	4.05	-6.96	5.25	-6.70	5.88	-5.79	10.81

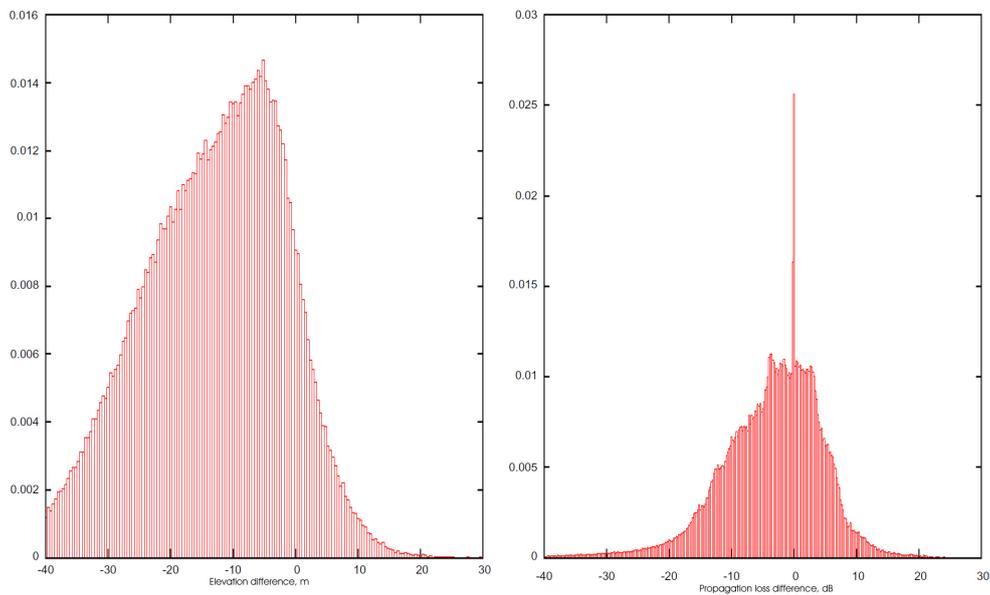
**Table 3. Comparative analysis of elevation difference results, meters. See discussion in text**

DEM	Plain Terrain				Hilly Terrain				Low Mountain	
	mean	var	mean	var	mean	var	mean	var	mean	var
NED 1/3as	0.01	0.21	0.01	0.26	0.02	0.33	-0.00	0.56	0.14	2.17
NED 1as	0.02	0.29	0.02	0.50	0.07	1.14	0.09	2.66	0.20	5.58
SRTM 1as	-2.25	3.01	-2.94	3.99	-3.27	4.23	-2.74	5.45	-12.59	11.02
SRTM 3as	-2.22	3.07	-2.92	4.00	-3.07	5.18	-2.44	7.69	-6.98	17.67

**Figure 4. Histograms of comparison SRTM 90m with NED 3m for plain terrain**



**Figure 5. Histograms of comparison SRTM 90m with NED 3m for hilly terrain**



**Figure 6. Histograms of comparison SRTM 90m with NED 3m for low mountain terrain**

## Реализация и валидация моделей распространения радиосигнала

Кирилл Андреев  
andreev@iitp.ru

Павел Бойко  
boyko@iitp.ru

Андрей Мазо  
mazo@iitp.ru

Денис Фахриев  
fakhriev@iitp.ru

*Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича.*

### Аннотация

*Рассматриваются реализованные в симуляторе ns-3 модели распространения радиосигнала: модель двухлучевого распространения, Longley-Rice и модель ITU "Propagation by Diffraction". Приводится краткое описание каждой из моделей, сравниваются результаты рассчитанных с их помощью значений ослаблений сигнала на различных типах ландшафта. Представлены результаты экспериментальных измерений ослабления радиосигнала, на основе которых была произведена валидация реализованных моделей. Приводятся выводы об области применимости каждой из моделей.*

### 1. Введение

Моделирование распространения радиосигнала является одним из наиболее важных направлений при построении имитационных моделей и проектировании реальных беспроводных сетей передачи данных. В настоящее время существует множество моделей, позволяющих с разной степенью точности предсказывать ослабление мощности передаваемого сигнала. Одни из них являются чисто эмпирическими, основанными на усреднении большого количества экспериментальных измерений (например модель Okumura-Nata), в то время как другие получены из аналитических расчетов и содержат в себе лишь небольшие экспериментальные поправочные коэффициенты (напри-

мер ITU "Propagation by Diffraction" и Longley-Rice).

Данная статья посвящена изучению особенностей распространения радиосигнала на естественном ландшафте в отсутствии зданий. Наиболее используемыми для этого случая являются модель двухлучевого распространения, предполагающая наличие прямой видимости между приемником и передатчиком, и модели Longley-Rice и ITU "Propagation by Diffraction", позволяющие оценивать ослабление радиосигнала при распространении за линию горизонта.

### 2. Теория

В случае, если передающая и принимающая антенны находятся в свободном пространстве, отношение мощностей радиосигнала на них описывается формулой Фрииса (Friis):

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2, \quad (1)$$

где  $G_T$  и  $G_R$  – соответственно усиление передающей и принимающей антенны,  $\lambda$  – длина волны несущей,  $d$  – расстояние между антеннами. Откуда ослабление мощности радиосигнала для двух изотропных антенн  $L_B$  представляется как:

$$L_B(dB) = 32.44 + 20 \log_{10} f_{MHz} + 20 \log_{10} d_{km}. \quad (2)$$

Однако в реальных линиях беспроводной передачи данных всегда существуют препят-

ствия на пути распространения сигнала или поверхности, от которых радиоволна может отражаться. Начинают проявлять себя дифракция и интерференция радиоволн, и даже в самом простейшем случае, когда передающая и принимающая антенны располагаются вдоль линии прямой видимости над поверхностью Земли, законы распространения радиосигнала существенно изменяются.

## 2.1. Модель двухлучевого распространения

Для расстояний менее нескольких десятков километров можно приближенно рассматривать поверхность Земли как плоскую отражающую поверхность. В этом случае сигнал на принимающей антенне представляет собой сумму прямой и отраженной волн (рисунок 1). В [6] показано, что в случае если расстояние между двумя антеннами  $d \gg h_T, h_R$ , отношение мощностей сигнала на приемнике и передатчике определяется выражением:

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left( \frac{h_T h_R}{d^2} \right)^2. \quad (3)$$

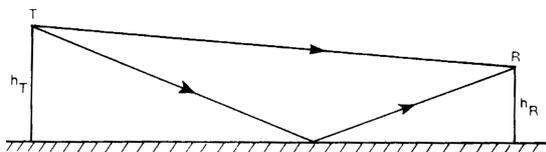


Рис. 1. Двухлучевое распространение сигнала.

Из данного выражения видно, что ослабление сигнала при двухлучевом распространении имеет два существенных отличия от ослабления в свободном пространстве. Во-первых, при достаточно больших расстояниях оно перестает зависеть от длины волны, а во-вторых, мощность сигнала в этом случае обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между антеннами, против обратно квадратичной зависимости в формуле Фрииса. Таким образом сигнал в этом случае затухает значительно быстрее.

Так как формула (3) справедлива лишь при больших расстояниях между антеннами, для расчета ослабления сигнала так же рассчитывают ослабление в свободном пространстве (1) и выбирают из них меньшее [7]:

$$\frac{P_R}{P_T} = \min \left( G_T G_R \left( \frac{h_T h_R}{d^2} \right)^2, G_T G_R \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \right). \quad (4)$$

Расстояние  $d_x$ , при котором происходит переход от свободного распространения сигнала к двухлучевому, составляет:

$$d_x = \frac{4\pi h_T h_R}{\lambda}. \quad (5)$$

По аналогии с (2) ослабление сигнала между двумя изотропными антеннами для модели двухлучевого распространения можно представить как:

$$L_B(dB) = 40 \log_{10} d - 20 \log_{10} h_T - 20 \log_{10} h_R. \quad (6)$$

## 2.2. Модель ITU “Propagation by Diffraction”

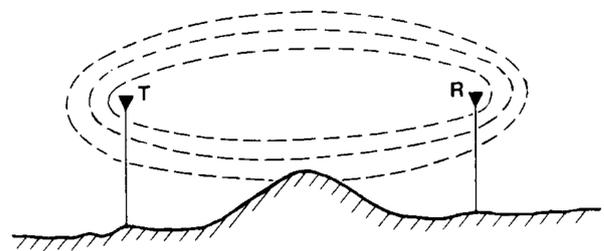


Рис. 2. Семейство эллипсоидов Френеля.

Данная модель основана на рекомендациях Международного Союза Электросвязи (International Telecommunication Union, ITU) ([1], [2], [3]) по расчету дифракционного распространения радиоволн. Она применима в случаях, когда длина волны радиосигнала много меньше по сравнению с размерами препятствия, то есть для УКВ и меньших волн ( $f > 30 \text{ MHz}$ ).

Для изучения распространения радиоволн между двумя точками T и R все пространство между ними разделяют на семейство эллипсоидов, называемых эллипсоидами Френеля (рис. 2). Фокусы их расположены в точках T и R, а для любой точки M, лежащей на эллипсоиде, справедливо равенство:

$$TM + MR = TR + \frac{n\lambda}{2}, \quad (7)$$

где  $n$  – целое число, характеризующее порядковый номер эллипсоида, а  $\lambda$  – длина волны. Радиус эллипсоида в точке между передатчиком и приемником определяется по формуле

$$R_n = \sqrt{\frac{n\lambda d_1 d_2}{d_1 + d_2}}, \quad (8)$$

где  $d$  – расстояние от передатчика до приемника,  $d_1$  и  $d_2$  – соответственно расстояния от передатчика и приемника до заданной точки.

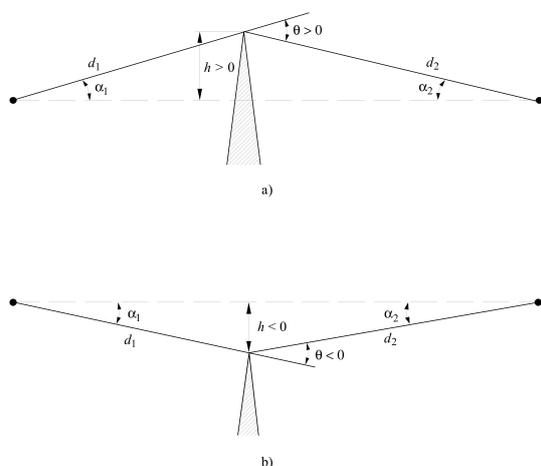


Рис. 3. Дифракция на остроконечном препятствии.

Рассмотрим дифракцию на примере остроконечного препятствия, расположенного между передатчиком и приемником (рис. 3). В этом идеализированном случае, можно воспользоваться классической теорией дифракции и заменить препятствие поглощающей полуплоскостью. Тогда уровень сигнала на принимающей антенне можно рассчитать с помощью интеграла Френеля. На рисунке 4 представлена полученная зависимость дифракционного ослабления сигнала  $L(\text{dB})$  от параметра Френеля-Кирхгофа

$$v = h \sqrt{\frac{2}{\lambda} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)}, \quad (9)$$

которую можно аппроксимировать как

$$J(v)(\text{dB}) = 6.9 + 20 \log \left( \sqrt{(v - 0.1)^2 + 1} + v - 0.1 \right). \quad (10)$$

Из графика видно, что при  $v = 0$ , когда препятствие находится точно на линии прямой видимости, и закрыта ровно половина всех зон Френеля, ослабление сигнала составляет 6 дБ. При дальнейшем увеличении параметра  $v$  все больше зон Френеля закрываются препятствием, и мощность принимаемого сигнала резко падает. И наоборот, при переходе в область прямой видимости, то есть при отрицательных значениях  $v$ , препятствие начинает уходить из зон Френеля, дифракционное ослабление сигнала осциллирует около нуля, а амплитуда этих колебаний уменьшается с уменьшением  $v$ . При

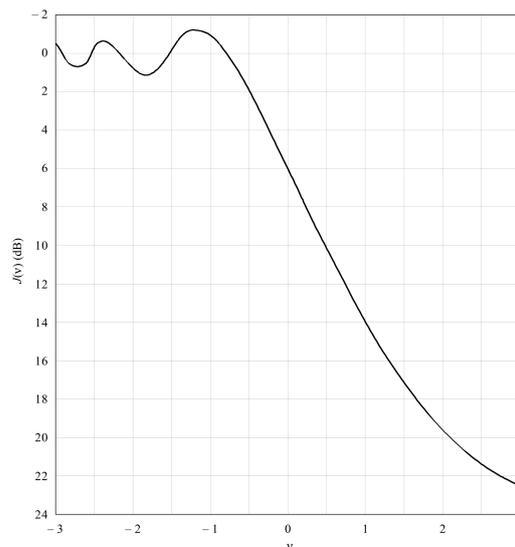


Рис. 4. Ослабление сигнала при дифракции на одиночном остроконечном препятствии.

$v = -0.78$ , что соответствует первой зоне Френеля, свободной примерно на 56%, ослабление сигнала становится равным нулю. Поэтому на практике при построении радиолиний антенны стараются делать достаточно высокими, чтобы большая часть первой зоны Френеля была свободна, и ослабление сигнала обуславливалось только потерями при распространении в свободном пространстве.

Формула (10) позволяет легко рассчитать дифракционное ослабление сигнала, однако она применима лишь в достаточно редком случае, когда на пути сигнала находится только одно изолированное остроконечное препятствие. Расширение же данной теории на случай двух и более препятствий является довольно сложной задачей.

В соответствии с рекомендацией ITU-R P.526 [3] дифракционное ослабление сигнала на рельефе произвольной формы рассчитывается путем его аппроксимации тремя остроконечными препятствиями в соответствии с методом Deugout'a. На первом этапе вдоль всего профиля рельефа между передатчиком и приемником находится главное препятствие (principal edge) с наибольшим значением дифракционного параметра  $v_p$ , и вычисляется соответствующее ему значение ослабления сигнала  $J_p$ . После этого процедура повторяется, но уже для двух отдельных участков профиля рельефа: от передатчика до главного препятствия и от главного препятствия до приемника, и рассчитываются соответствующие им значения ослабления сигнала  $J_t$  и  $J_r$ . Далее полное значение дифрак-

ционного ослабления сигнала рассчитывается в соответствии уравнением:

$$\begin{aligned} L(dB) &= J(v_p) + T[J(v_t) + J(v_r) + C] & \text{for } v_p > -0.78, \\ L(dB) &= 0 & \text{for } v_p \leq -0.78, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $C$  – эмпирический корректирующий коэффициент:

$$C = 10.0 + 0.04D, \quad (12)$$

$D$  – полное расстояние от передатчика до приемника, и

$$T = 1.0 - \exp[-J(v_p)/6.0]. \quad (13)$$

### 2.3. Модель Longley-Rice

Модель Longley-Rice была разработана в 1968 году и опубликована в отчете ESSA [5], содержащем описание метода и компьютерную программу по расчету ослабления сигнала на пересеченной местности. Модель может быть применима как при наличии детального рельефа местности, так и при наличии усредненных характеристик заданной территории. Область применимости данной модели ограничивается следующими значениями параметров системы:

частота несущей	20-20000 МГц,
расстояние	1-2000 км,
высота антенны	0.5-3000 м,
поляризация волны	горизонтальная/вертикальная.

Входными параметрами программы являются:

- высоты антенн над поверхностью земли,
- коэффициент преломления воздуха вблизи поверхности,
- эффективный радиус Земли,
- параметры грунта,
- радио-климат.

Кроме того, необходим набор параметров, характеризующих особенности пути распространения сигнала (рис. 5):

- эффективные высоты антенн,
- расстояния от антенн до горизонта,  $d_{Lb}$  и  $d_{Lm}$ ,
- углы возвышения горизонта,  $\theta_{eb}$  и  $\theta_{em}$ ,
- угловое расстояние для загоризонтных путей,  $\theta_e$ ,

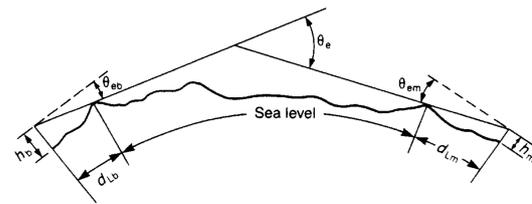


Рис. 5. Геометрия загоризонтного пути распространения.

- параметр неровности рельефа,  $\Delta h$ .

При наличии детального рельефа поверхности земли данные параметры могут быть легко рассчитаны для любого пути. Для случая, когда точный профиль местности неизвестен, модель содержит описание методик, позволяющих сделать оценку данных параметров.

Полученное по модели Longley-Rice ослабление сигнала является функцией расстояния от передатчика до приемника и рассчитывается тремя различными методами в зависимости от расстояния до приемника.

- Для расстояний меньше расстояния до горизонта  $d_{Lb}$  расчеты основаны на теории двухлучевого распространения (2.1) и на экстраполированном значении дифракционных потерь.
- Для расстояний от  $d_{Lb}$  до  $d_x$  – расстояние, при котором дифракционное ослабление и ослабление тропосферного перерасеивания радиосигнала равны – ослабление сигнала рассчитывается как взвешенная сумма дифракции на остrokонечных препятствиях и дифракции на плоской поверхности Земли. Соответствующий весовой коэффициент является функцией частоты несущей радиосигнала, неровности рельефа и высот передающей и принимающей антенн. Чем более неровная поверхность ландшафта, тем больший вклад в ослабление дает дифракция на остrokонечных препятствиях, которая считается в соответствии с методом Эпштейна-Патерсона [6].
- Для загоризонтных участков с расстоянием между антеннами больше  $d_x$  ослабление сигнала рассчитывается либо как дифракционное, либо как ослабление тропосферного перерасеивания, в зависимости от того, какое из них меньше.

### 3. Валидация

Одним из основных этапов разработки любой модели является ее валидация, то есть сравнение с реальностью. В первой части этой главы 3.1 проводится валидация двухлучевой модели распространения в пределах прямой видимости. Данная модель является достаточно простой и точной, а поэтому целью этих экспериментов является не только ее проверка, но и отработка основных методик экспериментальных измерений. Вторая часть 3.2 посвящена валидации моделей ITU “Propagation by Diffraction” и Longley-Rice и их сравнению между собой. Longley-Rice является законченной и наиболее широко используемой моделью, а по ее валидации была проделана достаточно большая работа, результатом которой стал отчет [4]. Однако основной акцент этих исследований был сделан на случаи, когда высота передающей антенны 10 и более метров, а расстояния между станциями от 1-2 до 60-120 км.

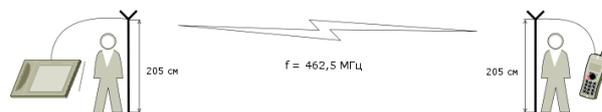
Поэтому основной задачей данной главы является исследование точности модели Logley-Rice путем ее сравнения с другими моделями и экспериментальными данными в тех случаях, когда высоты антенн порядка двух метров, а расстояния между станциями не превышают полутора километров. На основании этого делается вывод о применимости рассматриваемых моделей в тех или иных случаях.

#### 3.1. Распространение в пределах прямой видимости

В пределах прямой видимости затухание сигнала описывается двухлучевой моделью распространения, см. раздел 2.1. Напомним, что основной предпосылкой этой модели является полное отражение радиосигнала от поверхности земли, которая рассматривается как идеально проводящая плоскость. Для того, чтобы проверить насколько это предположение согласуется с действительностью мы провели две серии экспериментов в различных условиях. Далее в разделе 3.1.1 представлены результаты экспериментов, проведенных на поле, заросшем травой. В разделе 3.1.2 приводятся результаты экспериментов, проведенных на дороге с асфальтовым покрытием.

**3.1.1. Поле.** Схема экспериментов показана на Рис. 6. В качестве источника сигнала мы использовали портативную рацию Midland GXT-850, работающую на частоте 462.5 МГц со штатной антенной, размещенной на переносной мачте высотой 2.05 м. Приемником сигнала

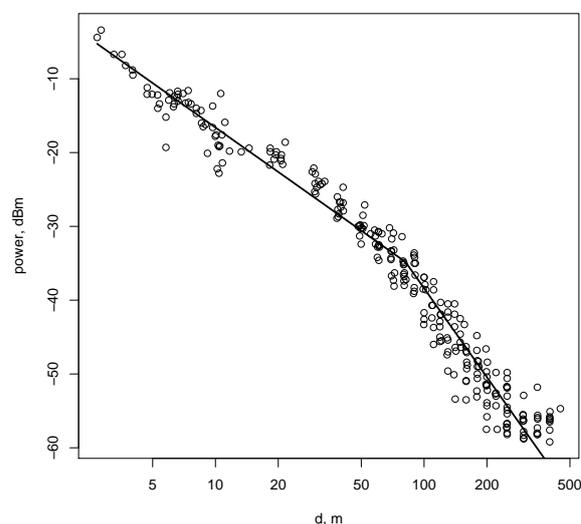
выступал спектроанализатор Anritsu Spectrum Master MS2721A, подключенный к антенне диапазона 450-470 МГц. Высота приемной антенны (до середины антенны) составляла 2.05 м. На спектроанализаторе измерялась интегральная мощность в полосе шириной 200 КГц вокруг несущей частоты радиостанции, инструментальная погрешность не превышает 1.5 дБ.



**Рис. 6.** Схема экспериментов по валидации двухлучевой модели распространения в поле.

Расстояние между передающей и принимающей антеннами измерялось при помощи:

- лазерного дальномера для расстояний меньше 10 м, инструментальная погрешность порядка 20 см,
- портативного GPS навигатора для расстояний от 10 до 500 м, инструментальная погрешность порядка 3 м.

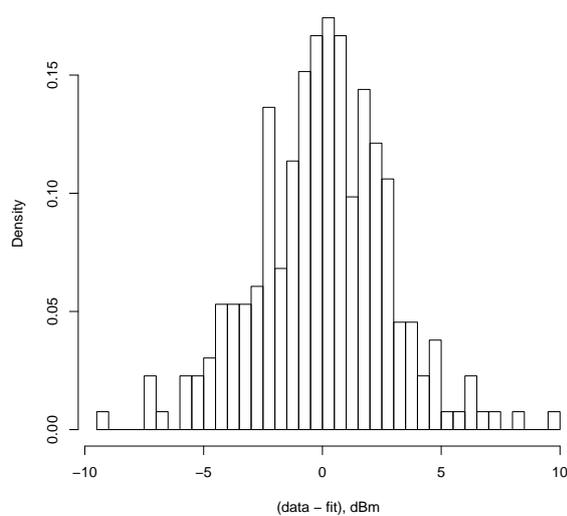


**Рис. 7.** Результаты измерений в поле (см. описание в тексте).

Всего было произведено 10 серий измерений зависимости уровня сигнала от расстояния между передатчиком и приемником при различных положениях приемника и мобильном

передатчике. Измерения проводились на двух относительно плоских полях московской области – перепад высот составлял порядка 1-2 метров на 1 км, что соответствует условиям плоской равнины. Высота травы колебалась от 10 до 100 см., также встречались отдельные растения высотой до 3 м. Все измерения проводились в ясный летний день.

Результаты экспериментов показаны на Рис. 7. Точками показана зависимость уровня сигнала (в dBm) от расстояния между антеннами передатчика и приемника (в метрах) для всех измерений. Линия соответствует лучшей подгонке данных двухлучевой моделью распространения (4). Первый прямолинейный (в двойной логарифмической шкале) сегмент соответствует падению мощности как  $1/d^2$ , второй – как  $1/d^4$ . Единственным подгоночным параметром являлась сумма мощности передатчика в диапазоне 200 КГц и коэффициентов усиления передающей и принимающей антенн, аддитивно входящая в выражение для мощности принимаемого сигнала.

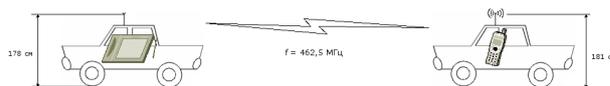


**Рис. 8.** Гистограмма распределения отклонений измеренных значений от предсказания двухлучевой модели. Поле.

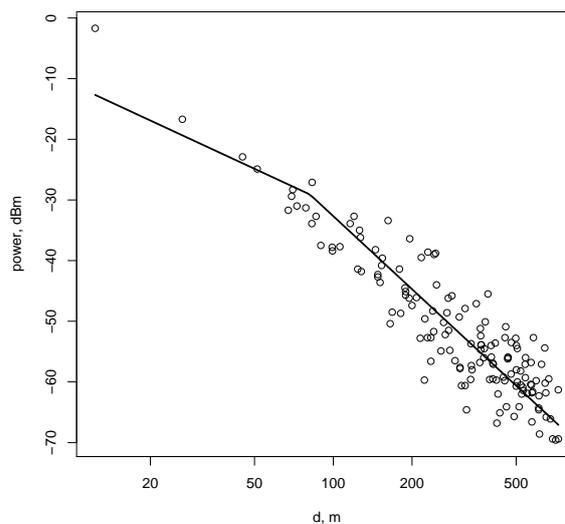
На Рис.8 показана гистограмма распределения отклонений измеренных значений от теоретического предсказания модели двухлучевого распространения. Среднее этого эмпирического распределения совместно с нулем, корень из дисперсии составляет 2.8 dB.

**3.1.2. Дорога.** Схема экспериментов на дороге показана на Рис. 9. Отличие от описанных

выше экспериментов в поле заключается в характере поверхности (асфальт вместо травы) и том, что антенны передатчика и приемника крепились непосредственно на крыши двух автомобилей. Автомобиль с передатчиком оставался неподвижным, в то время как автомобиль с приемником и GPS перемещался в пределах от 10 до 800 м. Отметим, что из-за значительных колебаний автомобильной антенны во время движения, проводить измерения на ходу оказалось неудобно и фактически уровень сигнала измерялся всегда в неподвижном автомобиле.



**Рис. 9.** Схема экспериментов по валидации двухлучевой модели распространения на дороге.



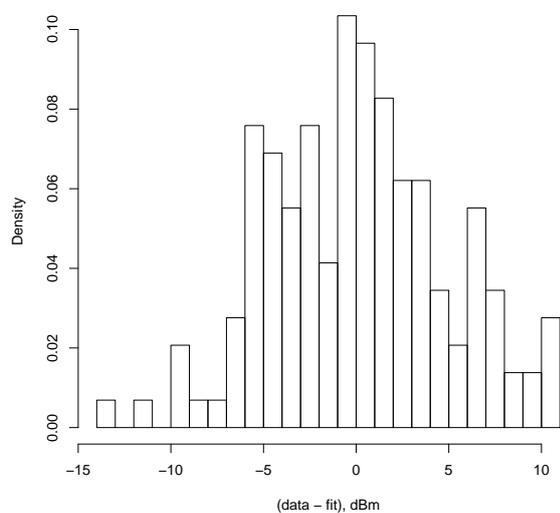
**Рис. 10.** Результаты измерений на дороге (см. описание в тексте).

В качестве источника сигнала мы использовали ту же портативную рацию Midland GXT-850, работающую на частоте 462.5 МГц, выведенную на внешнюю автомобильную антенну диапазона 450-470 МГц. Приемником сигнала выступал спектроанализатор Anritsu Spectrum Master MS2721A, подключенный к такой же антенне. Высоты (до середины длины) антенн составляли 181 и 178 см. На спектроанализаторе измерялась интегральная мощность в полосе

шириной 200 КГц вокруг несущей частоты радиостанции, инструментальная погрешность не превышает 1.5 dB. Расстояние между передающей и принимающей антеннами измерялось при помощи GPS, инструментальная погрешность не превышает 3м.

Всего было произведено 7 серий измерений зависимости уровня сигнала от расстояния между передатчиком и приемником на одной и той же относительно ровной и плоской загородной асфальтовой дороге. Все измерения проводились в ясный летний день.

Результаты экспериментов показаны на Рис. 10. Точками показана зависимость уровня сигнала (в dBm) от расстояния между антеннами передатчика и приемника (в метрах) для всех измерений. Линия соответствует лучшей подгонке данных двухлучевой моделью распространения (4). Единственным подгоночным параметром являлась сумма мощности передатчика в диапазоне 200 КГц и коэффициентов усиления передающей и принимающей антенн, аддитивно входящая в выражение для мощности принимаемого сигнала.



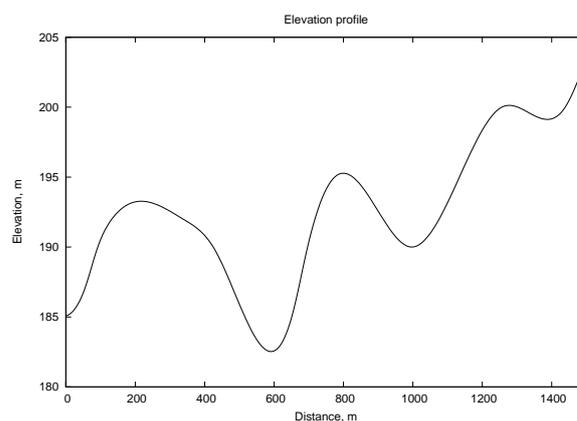
**Рис. 11. Гистограмма распределения отклонений измеренных значений от предсказания двухлучевой модели. Дорога.**

На Рис. 11 показана гистограмма распределения отклонений измеренных значений от теоретического предсказания модели двухлучевого распространения. Среднее этого эмпирического распределения составляет 0.1 dB, корень из дисперсии составляет 4.8 dB.

### 3.2. Распространение за горизонт

Как было сказано в главе 2 в случае, когда линию прямой видимости между передатчиком и приемником закрывает какое-либо массивное препятствие, законы распространения меняются: начинает проявлять себя дифракция – огибание препятствий радиосигналом. Модели, предназначенные для расчета ослабления сигнала в этом случае, требуют информации о рельефе местности между двух устройствами. Модель ITU “Propagation by Diffraction” является весьма идеализированной, так как учитывает лишь явление дифракции, и не учитывает например отражение от земли и переотражение от атмосферы. В свою очередь модель Longley-Rice гораздо более сложная и учитывает множество факторов, влияющих на распространение сигнала. Однако она изначально была разработана для развертывания телевидения в США, а поэтому валидировалась для случаев, когда высота передающей антенны несколько десятков метров и выше.

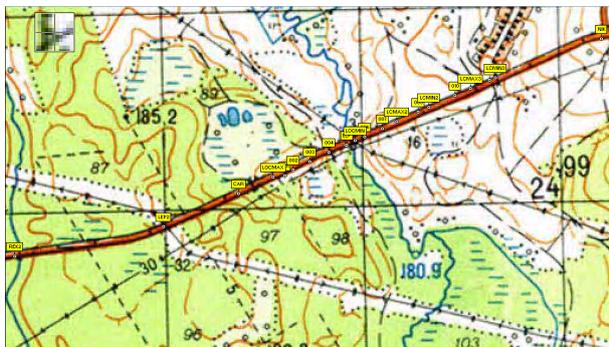
В данном разделе представлены результаты сравнения рассчитанных по моделям значений ослабления сигнала с данными экспериментальных измерений мощности сигнала. Эксперимент проводился на прямом холмистом участке дороги длиной порядка двух километров. Профиль дороги был заранее снят по топографической карте масштаба 1:50000, имеющей шаг горизонталей 5 метров, и представлен на Рис. 12.



**Рис. 12. Профиль дороги.**

В качестве источника сигнала мы использовали ту же портативную рацию MidlandGXT-850, работающую на частоте 462.5 МГц, с антенной, размещенной на переносной мачте высотой 2.05 м. Приемником сигнала выступал спектроанализатор Anritsu Spectrum Master

MS2721A, подключенный к автомобильной антенне. На спектроанализаторе измерялась интегральная мощность в полосе шириной 200 КГц вокруг несущей частоты радиостанции, инструментальная погрешность не превышает 1.5 dB. Машина со спектроанализатором была расположена в яме в начале координат на Рис. 12. Передатчик же последовательно отодвигался на расстояния 50, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 1000, 1200 и 1400 метров. Расстояние между передающей и принимающей антеннами измерялось при помощи GPS приемника, инструментальная погрешность которого не превышает 3 м. Для наиболее точной привязки координат GPS и топографической карты в GPS сохранялись точки, соответствующие естественным ориентирам (реки, ЛЭП, перекрестки), положениям приемника и передатчика, а так же положения локальных минимумов и максимумов рельефа дороги. На рисунке 13 представлены все эти точки, наложенные на используемую топографическую карту. В каждой из точек было сделано порядка 200-250 измерений уровня принимаемого сигнала, при этом положение передающей антенны незначительно изменялось (в пределах двух-трех метров) 30-40 раз для получения наиболее достоверной статистики измерений.



**Рис. 13. Топографическая карта и положения сохраненных в GPS точек.**

На рисунке 14 представлены полученные экспериментальные значения ослабления сигнала на холмистой дороге (медианное значение и дисперсия), а так же результаты аналитических расчетов для различных моделей.

Видно, что при расстоянии до 1км наиболее близкие к эксперименту значения дает модель распространения Longley-Rice (point-to-point) в то время, как модель ITU "Propagation by Diffraction" дает завышенные примерно на 10 dB значения. При расстоянии же более 1км экспериментальные значения превышают рассчитанные по модели Longley-Rice на 7-

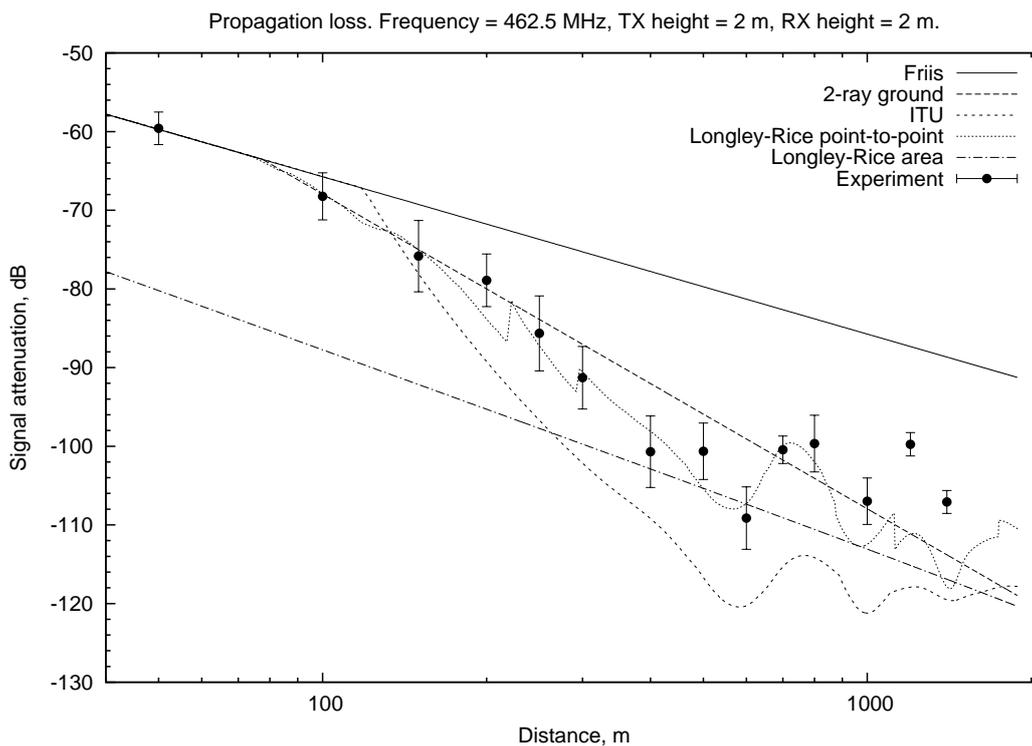
10 dB. Это может быть как следствием неточности непосредственно самой модели Longley-Rice, так и следствием погрешности имеющейся в наличии топографической карты. Как видно из рисунка 14, недостатком модели Longley-Rice является то, что в отличие от модели ITU "Propagation by Diffraction" зависимость ослабления от расстояния не является непрерывной функцией, а имеет резкие скачки на 3-6 dB.

#### 4. Заключение

Проведенные нами эксперименты показывают, что двухлучевая модель распространения с высокой точностью описывает среднее затухание сигнала в области прямой видимости при высотах подвеса около 2 м и частотах в районе 450 МГц. Оказалось, что приближение поверхности земли в виде идеально проводящей плоскости отлично работает как для заросшего травой поля, так и для асфальтового покрытия.

Следует, однако, отметить статистически значимые случайные отклонения от среднего значения уровня сигнала при фиксированном расстоянии между приемником и передатчиком. Важно понимать, что эти отклонения не являются погрешностью измерений, а являются неотъемлемой характеристикой беспроводного канала. Измеренное стандартное отклонение от среднего уровня сигнала составляет 2.8 dB для связи с мачты на мачту и 4.8 dB с машины на машину.

Исследование распространения сигнала за линию горизонта показало преимущество модели Longley-Rice над всеми остальными моделями. Так же важно отметить, что не смотря на свою простоту, двухлучевая модель распространения и в этом случае довольно хорошо аппроксимирует зависимость ослабления сигнала от расстояния. Ошибка при этом не превышает 10 dB (рис. 14). Таким образом данную модель можно использовать не только в случае распространения сигнала над плоской поверхностью, но и для приближенной оценки ослабления сигнала при перепадах высот порядка 10 метров. При этом стоит понимать, что данное утверждение справедливо лишь для частот близких к используемой в эксперименте (465.2 МГц), так как имеет значение не абсолютный размер препятствия, а его соотношение с длиной волны сигнала. Так при больших частотах (например 2.4 или 5.2 ГГц) ограничение на допустимый перепад высот, при котором двухлучевая модель распространения может быть использована для приближенных вычислений, будет уже значительно жестче.



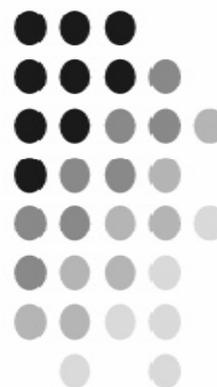
**Рис. 14.** Ослабление сигнала на холмистой дороге: аналитически рассчитанные значения и экспериментальные данные.

### Список литературы

- [1] ITU-R Recommendation P.525: Calculation of free-space attenuation. Technical report, 1994.
- [2] ITU-R Recommendation P.341: The concept of transmission loss for radio links. Technical report, 1999.
- [3] ITU-R Recommendation P.526: Propagation by diffraction. Technical report, 2003.
- [4] A. Longley and R. Reasoner. ESSA Technical report: Comparison of Propagation Measurements With Predicted Values in the 20 to 10,000 MHz Range. Technical report, 1970.
- [5] A. Longley and P. Rice. ESSA Technical report: Prediction of tropospheric radio transmission loss over irregular terrain. A computer method. Technical report, 1968.
- [6] J. Parsons. *The Mobile Radio Propagation Channel*. John Wiley, 2000.
- [7] J. S. Seybold. *Introduction to RF Propagation*. John Wiley, 2005.

# Раздел 4

Компьютерная лингвистика  
и моделирование  
естественного языка



## Глубоко аннотированный корпус русских текстов как обучающий электронный ресурс

Ольга Юрьевна Шеманаева

Лаборатория компьютерной лингвистики, ИППИ РАН  
shemanaeva@iitp.ru

### Аннотация

*В докладе рассматривается возможность использования глубоко аннотированного корпуса русских текстов (проекта, созданного в Лаборатории компьютерной лингвистики ИППИ РАН, и расположенного на том же, что и Национальный корпус русского языка (НКРЯ), сайте) для составления упражнений на синтаксис, пунктуацию, семантические отношения, перифразирование, изменение управления, как для иностранных студентов, так и для носителей русского языка. Особенный интерес для лингвистов представляет поиск в размеченном синтаксическом корпусе разного рода конструкций (выражений так называемого «микросинтаксиса»), недостаточно хорошо описанных в традиционных грамматиках.*

### 1. Введение

За последние 5 лет резко возросла освоенность Национального корпуса русского языка ([www.ruscorpora.ru](http://www.ruscorpora.ru)) как профессиональными лингвистами, так и преподавателями, студентами и школьниками. За то время, что корпус появился в открытом доступе (заметим, в отличие от многих других представительных известных корпусов НКРЯ является некоммерческим академическим проектом), появился сборник о составе корпуса и о направлениях деятельности вокруг НКРЯ [1], прошло несколько конференций и мастер-классов, посвященных использованию НКРЯ в преподавании. НКРЯ используется для обучения школьников, студентов, журналистов, редакторов, иностранцев русскому языку, в том числе для составления заданий международных конкурсов [2].

В составе НКРЯ различаются основной корпус, поэтический корпус, обучающий корпус, диалектный корпус, корпус устной речи и –

отдельно – синтаксический корпус. В глубоко аннотированном синтаксическом корпусе русских текстов содержится морфо-синтаксическая разметка: для каждого слова текста выдаются его морфологические признаки, а для каждого предложения – его **синтаксическая структура** в виде дерева зависимостей [3]. Корпус содержит 43 000 предложений (ок. 603 000 слов) с синтаксической структурой в виде отдельного pdf-файла.

Таким образом, лексико-грамматический поиск в синтаксическом корпусе устроен следующим образом: кроме точных форм, можно искать слово в словарной форме или по грамматическим признакам (часть речи, падеж, число, род, одушевленность, степень сравнения, краткость, вид, время, лицо, наклонение, залог, является ли слово частью сложного слова), то синтаксическое отношение, которыми это слово связано с другими словами, а также задавать расстояние между словами.

Возможность поиска по синтаксическим отношениям определяет поле для исследователя языка и для других пользователей: в частности, преподавателей русского языка и преподавателей русского как иностранного.

Так, в статье [4] приводятся следующие типы языковых заданий, составленных на материале основного корпуса: **лексические задания** (употребление архаизмов, историческое изменение значения слов) и **грамматические задания** (анализ употребления слова с точки зрения его одушевленности, разница в значении видо-временных форм глагола).

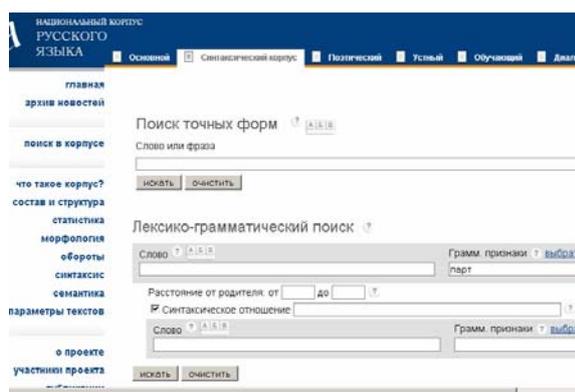


Рис.1. Лексико-грамматический поиск в глубоко аннотированном корпусе

Среди заданий для иностранцев есть легко составляемые по корпусу упражнения на определение приставки, выбор падежа субъекта при определенной форме глагола, и др.

Ниже мы рассмотрим, какие типы заданий можно легко составить, используя материал и возможности глубоко аннотированного синтаксического корпуса русского языка.

## 2. Упражнения

### 2.1. Упражнения на понимание эллиптических конструкций

Начнем с такого явления, как эллипсис в русских предложениях, приводящий к неоднозначности. По определению, данному в Лингвистическом энциклопедическом словаре, эллипсис – это «пропуск в речи или тексте подразумеваемой языковой единицы».

**Запрос:** ищутся любые предложения с эллиптической связью между любыми словами.

**Результат:** 153 вхождения.

#### Упражнение 1.

Восстановите пропущенные слова в предложении, достройте его так, чтобы не было эллиптического отношения между словами, а отношения были такими же, как между словами в предыдущей клаузе (слова, связанные эллиптическим отношением, выделены жирным; после фраз-заданий написан возможный ответ).

*Двое из пострадавших являются гражданами Норвегии, один - Франции и один – Ирландии.*

*Двое из пострадавших являются гражданами Норвегии, один является гражданином Франции и один является гражданином Ирландии.*

*При проведении обыска по месту жительства у одного из подозреваемых изъяты патроны, у другого – пистолет.* [Материал новостных лент Интернета 2002-2003]

*При проведении обыска по месту жительства у одного из подозреваемых изъяты патроны, у другого изъят пистолет.* [Материал новостных лент Интернета 2002-2003]

*Люда от полуголодной жизни похудела, а толстая Ася ничуть не похудела.* [Кафедра]

*Люда от полуголодной жизни похудела, а толстая Ася ничуть не похудела.* [Кафедра]  
*"Время новостей" со слов некоего господина пишет, что сейчас у Аксененко два конфликта с "Русалом" и Чубайсом, причем первый разрешим, а второй нет.* [Материал новостных лент Интернета 2002-2003]

*"Время новостей" со слов некоего господина пишет, что сейчас у Аксененко два конфликта с "Русалом" и Чубайсом, причем первый разрешим, а второй не разрешим.* [Материал новостных лент Интернета 2002-2003]

#### Упражнение 2.

Восстановите пропущенные слова в предложении, достройте его так, чтобы не было эллиптического отношения между словами (слова, связанные эллиптическим отношением, выделены жирным)

В этом случае эллипсис восстанавливается не по аналогии с предыдущей клаузой, а только по смыслу:

*Кормили хорошо – каждый день хлеб, каша и суп, витамины отдельно.* [Маленький Гарусов.]

*Кормили хорошо – каждый день был / выдавался хлеб, каша и суп, витамины были / давали отдельно.* [Маленький Гарусов.]

– *Мне заведующую,* – сказала я, – *меня, знаете, сюда направили на работу.* [Вдовый пароход]

– *Мне надо / нужно заведующую,* – сказала я, – *меня, знаете, сюда направили на работу.* [Вдовый пароход]

*Папку под мышку да к "первому" в обком.*

*Папку сунул под мышку да к "первому" в обком.*

### 2.2. Упражнения на пунктуацию

**Упражнение 3.**

**Запрос:** ищется сочетание «имя прилагательное» + *как* (например, *известный как, такой, как*), между ними – сравнительное отношение от прилагательного к *как*, расстояние 1

**Результат:** 69 вхождений.

Отметим, что словесный «шум» вроде **должны как можно скорее** не попадает, в то время как по аналогичному запросу, но без возможности указать синтаксическое отношение, в основном корпусе находится 98470 примеров, затрудняющих поиск нужных пользователю конструкций:

*Оккупационные власти вообще и войска в частности должны как можно быстрее создать такие условия, при которых они могли бы покинуть территорию оккупированного государства.* [В. В. Путин. Заявление для прессы по окончании российско-мексиканских переговоров // «Дипломатический вестник», № 7, 2004]

*Овцы невосприимчивы как к синему цветцу, так и к красному.* [Когда светофор будет черно-белым? // «Знание – сила», № 7, 2003]

**Упражнение 4.**

Расставьте знаки препинания в предложениях.

*Его полное имя – Иоаннес Вермеер ван Дельфт, но во всем мире он известен как Ян Вермеер. ["Премьера на канале Hallmark: «Столкновение с судьбой»"]*

*Подъезды, обширные как паперти, резные дубовые двери со львиными мордами, держащими кольца в зубах.* [Кафедра]

*Но само его существование и осуществление возможны как добровольное соединение сил, представляющих самые многообразные интересы людей, классов, наций, государств.*

*Списки с явным националистическим духом все как один провалились, та же судьба постигла и блок имени Сталина.* [Левостороннее движение к власти]

*А некоторые исследователи считают, что атлантологи вообще ломятся в открытую дверь и что огромный материк и бесчисленные острова существуют до сих пор и вообще никуда не исчезали, потому что Атлантида – это не что иное, как Америка.* [Атланты и атлантологи]

*А его заместитель Кравцов, самый главный, ткнул в Ляоду пальцем и сказал, что она*

*типичная двойка и что из-за таких, как она, им приходится долго сидеть.* [Кафедра]

*Если не принять срочных мер, отметил представитель ЮНИСЕФ, это может привести к распространению эпидемических заболеваний – таких, как дизентерия, холера, брюшной тиф.* [Материал новостных лент Интернета 2002-2003]

**2.3. Упражнения на смысловые отношения между частями сложного слова**

**Запрос:** Композитное отношение между частями слова, расстояние 1

**Упражнение 5.**

Определите, как связаны по смыслу части сложного слова, описывающего признак одного и того же предмета (разделить примеры по группам и проанализировать семантические отношения в каждой группе):

*Российско-украинская команда спелеологов официально признана первооткрывателем самой глубокой пещеры на планете.* [Земля наизнанку]

*Штурманом на нашей старенькой "Ниве" выступал сотрудник Мангистауского историко-культурного заповедника Андрей Астафьев.* [Игрушки богов]

*Как передает корреспондент Страны.Ру, одним из ключевых вопросов совещания станет обсуждение духовно-нравственного воспитания современных студентов.* [Материал новостных лент Интернета 2002-2003]

*Интересы всемирно-исторического прогресса настоятельно требуют ориентации не на ограниченные, локальные, подчас сиюминутные интересы, а на потребности и нужды долговременного порядка.*

*Меня окружала темнота, не безлично серая, а огненно-черная, что могло означать одно: я слепа.* [Вдовый пароход]

*За четыре дня хинду-мусульманских столкновений в Гуджарате в Сурате погибли 8 человек.* [Материал новостных лент Интернета 2002-2003]

*Среди погибших – замначальника тыла Минобороны генерал-лейтенант Павел Ярославцев и замначальника Главного военно-медицинского управления тыла Минобороны генерал-лейтенант Виктор Гуляев.* [Спаслись лишь четверо]

**Решение:**

*Российско-украинская команда спелеологов официально признана первооткрывателем самой глубокой пещеры на планете. (команда россиян и украинцев)*

*Штурманом на нашей старенькой "Ниве" выступал сотрудник Мангистауского историко-культурного заповедника Андрей Астафьев. (заповедник культурный и исторический)*

*Как передает корреспондент Страны.Ру, одним из ключевых вопросов совещания станет обсуждение духовно-нравственного воспитания современных студентов. (воспитание духовное и нравственное)*

*Интересы всемирно-исторического прогресса настоятельно требуют ориентации не на ограниченные, локальные, подчас сиюминутные интересы, а на потребности и нужды долговременного порядка. (прогресс всемирной истории)*

*Среди погибших - замначальника тыла Минобороны генерал-лейтенант Павел Ярославцев и замначальника Главного военно-медицинского управления тыла Минобороны генерал-лейтенант Виктор Гуляев. (управление военной медицины)*

*Меня окружала темнота, не безлично серая, а огненно-черная, что могло означать одно: я слепа. (не \*огненная и черная темнота)*

*За четыре дня хинду-мусульманских столкновений в Гуджарате в Сурате погибли 8 человек. (столкновения между хинду и мусульманами)*

**2.4. Упражнения на перифразирование****Упражнение 6.**

**Запрос:** ищется агентивное отношение между словами.

**Задание:** перефразировать предложение так, чтобы смысл остался прежним, а выделенное слово стало субъектом, подлежащим нового предложения, то есть было бы связано с глаголом предикативным отношением. Сформулируйте различия между исходным и смоделированным предложениями.

*Быт этих экспедиций подробно описан В. К. Арсеньевым, с которым они хорошо знакомы. [А он, мятежный, просит бури...] (В.К.Арсеньев подробно описал быт этих экспедиций...)*

*Еще один парадокс: самые фундаментальные и самые ценные сведения получены учеными, работающими над искусственным интеллектом – как ни странно, от специалистов по функциям головного мозга человека. [Эволюционная биология и высокие технологии: симбиоз будущего ] (Ученые, работающие над искусственным интеллектом, получили самые фундаментальные и самые ценные сведения...)*

*Например, общеизвестный принцип сложного целого, составленного простыми элементами, может быть использован для описания функционирования человеческого мозга (в этом случае "простыми" элементами будут нейроны). [Эволюционная биология и высокие технологии: симбиоз будущего] (...которое составляют простые элементы...)*

*Самым удивительным среди подарков оказался пришедший с обозом слон – "животное преогромное и предиковинное", горожанами никогда прежде не виданное. [ГОРОДСКОЕ СЛОНОВОДСТВО] (... которое горожане никогда прежде не видали)*

*Проект "Экодом" был рекомендован правительством РФ для включения в программу сотрудничества Госстроя РФ и Центра ООН по населенным пунктам (Habitat) и в Федеральную целевую программу "Свой дом". [Двое в декабре] (правительство РФ рекомендовало проект Экодом...)*

**Упражнение 7.**

**Запрос:** квазиагентивное отношение, расстояние между словами 1, следующее слово – предлог.

**Результат:** 160 примеров.

**Задание:** вставить в предложение подходящий предлог из списка, раскрыть скобки.

**Список предлогов:** *между, в, от, со стороны*

*Угроза экологической безопасности ... (терроризм) обсуждалась на прошедшей международной конференции в Ташкенте. [Ведущие военные эксперты США не отрицают возможности использования террористами биологического и химического оружия ]*

*Очевидна аналогичная взаимосвязь ... (фундаментальные и прикладные науки). [Эволюционная биология и высокие технологии: симбиоз будущего ]*

*Важно выявить разницу ... (мышечная боль и боль), вызванной сдавлением нерва или вещества спинного мозга. [Нобелевские премии: физики снова в почете]*

*Ученые заметили ряд особенностей ... (поведение организма в определенных метеоусловиях). [Здоровье на завтра]*

*Доставшийся в наследство ... (советский период времени) промышленный и интеллектуальный потенциал оказался благом и горем страны.*

*Во временные промежутки ... (снимки) возможно накопление ледником критической массы. [То в жар, то в холод]*

*Однако аналогия ... (события того времени и сегодняшние) вряд ли уместна. [Материал новостных лент Интернета 2002-2003]*

*В среднем такая услуга обходится в 5 процентов ... (страхуемая сумма). [И евро такой молодой]*

*В Минске я знаю случаи, когда в защиту исчезающего национального языка встали молодежные, так называемые неформальные объединения ("Тутэйшыя", "Талка", "Паходня" и некоторые другие), сразу же получившие отпор ... (часть руководства), немало повинного в том положении, которое создалось.*

*Однако мы наблюдаем определенные сезонные и межсезонные вариации ... (интенсивность и масштабы температурных аномалий), причины которых для нас не ясны". [Обратная реакция]*

Возможность использовать корпус текстов, размеченный синтаксическими отношениями, очень важна не только для машинного обучения, но и для обучения языку в разнообразии и многообразии его конструкций.

### 3. Литература

[1] Плунгян В. А. Зачем нужен Национальный корпус русского языка? Неформальное введение // Национальный корпус русского языка: 2003—2005. М.: Индрик, 2005.

[2] Муравенко Е. В. Использование НКРЯ при составлении и тестировании задач для Всероссийского конкурса по русскому языку «Медвежонок». // Добрушина Н.Р., ред. и сост. Национальный корпус русского языка и проблемы гуманитарного образования. Гос. ун-т – Высшая школа экономики. – М.: Теис, 2007.

[3] Апресян Ю. Д., Богуславский И. М., Иомдин Б. Л. Синтаксически и семантически аннотированный корпус русского языка: современное состояние и перспективы // Национальный корпус русского языка: 2003—2005. М.: Индрик, 2005.

[4] Добрушина Н. Р. Как использовать Национальный корпус русского языка в образовании? // Национальный корпус русского языка: 2003—2005. М.: Индрик, 2005.

[5] ЛЭС – Лингвистический энциклопедический словарь. М., 1990.

## Интерпретация и практическое применение текстовых данных о сочетаемости лексем (на материале прилагательных)<sup>1</sup>

Фролова Татьяна

Лаборатория компьютерной лингвистики ИППИ РАН  
tfrolova@cl.iitp.ru

### Аннотация

Информация о сочетаемости прилагательных, полученная из корпуса текстов, была учтена в словарях системы машинного перевода ЭТАП-3 и подвергнута лингвистическому анализу. Данные о сочетаемости этих прилагательных были автоматически извлечены из морфологически и синтаксически размеченного корпуса текстов «СинТагРус» объемом в 35 000 тысяч предложений, который был создан в Лаборатории компьютерной лингвистики ИППИ РАН. Полученные результаты позволяют добиться улучшения качества перевода и (в некоторых случаях) анализа в системе ЭТАП-3 путем пополнения словарных статей, как прилагательных, так и существительных. Эти результаты также представляют собой дополнительный материал для подтверждения гипотезы о семантической мотивированности выбора значений адъективных лексических функций, по крайней мере, для некоторых классов аргументов-существительных.

### 1. Аппарат лексических функций

Для описания некоторых свойств лексической сочетаемости лексем используется аппарат лексических функций-коллокатов (далее ЛФ). Такое название получили определенные значения, каждое из которых имеет в разных языках различные способы выражения, причем выбор конкретного способа определяется тем, при каком слове-аргументе выражается это значение. Так, например, значение ЛФ MAGN, ‘высокая степень’ выражается прилагательным ОТЪЯВЛЕННЫЙ при русском существительном ЛГУН, а при русском существительном ДУРАК прилагательным КРУГЛЫЙ. Такое же значение английских эквивалентов выражается

прилагательными OUTRIGHT (букв. ‘полный, откровенный’) при слове LIAR (‘лгун’) и PERFECT (букв. ‘совершенный, безупречный’) при существительном ДУРАК. В классической теории ЛФ, предложенной в [1, 2], имеется несколько десятков стандартных значений такого типа: ‘высокая степень’ (MAGN), ‘хороший’ (BON), ‘правильный (VER)’, ‘противоположный’ (ANTI), ‘начало’ (INCEP), ‘прекращение’ (FIN), ‘каузация’ (CAUS), ‘ликвидация’ (LIQU), ‘существование’ (FUNC), ‘нормальное использование’ (REAL), ‘нормальное функционирование’ (FACT), ‘проявление’ (MANIF) и т.п.

### 2. ЛФ и несвободные словосочетания в ЭТАПе

Значения ЛФ записаны в специальной зоне словарных статей слов-аргументов в комбинаторном словаре системы ЭТАП-3 (подробно о системе см. [3-5]). Информация о ЛФ используется в системе ЭТАП-3 для разрешения лексической и синтаксической омонимии и улучшения качества перевода.

#### 2.1. Разрешение лексической омонимии с помощью ЛФ

В предложении *Французский генерал летает на миге* значение ЛФ REAL1=ЛЕТАТЬ<НА> (‘Использовать X в соответствии с его предназначением’) позволяет интерпретировать форму *миге* как словоформу лексемы МИГ2 ‘тип самолета’ в отличие от МИГ1 ‘мгновение’.

#### 2.2. Разрешение синтаксической омонимии с помощью ЛФ

Пример разрешения синтаксической омонимии можно наблюдать во фразе *в возрасте Пушкина*. Предлог В, являющийся значением ЛФ

<sup>1</sup> Работа частично поддержана средствами гранта РФФИ № 08-06-00344

ADV1 для существительного ВОЗРАСТ позволяет интерпретировать в этой фразе синтаксическую связь между *возрасте* и *Пушкина* как 1-комплетивную ('возраст кого-то, равный возрасту Пушкина'), в противоположность квазиагентивной ('возраст самого Пушкина').

### 2.3. Корректировка перевода с помощью ЛФ

И, наконец, даже в неомонимичных контекстах ЛФ используются для улучшения качества перевода. Так, например, словосочетание *сильный мороз* вместо пословного перевода *strong frost* благодаря замене в процессе перевода значения ЛФ MAGN(МОРОЗ)=СИЛЬНЫЙ значением ЛФ MAGN(FROST)=SEVERE получит более корректный перевод *severe frost*.

### 2.3. Другие способы разрешения омонимии и корректировки перевода в ЭТАПе

Аппарат ЛФ не является единственным в ЭТАПе инструментом для разрешения омонимии и корректировки перевода несвободных словосочетаний. Для обработки несвободных словосочетаний, не подлежащих ЛФ-интерпретации, но имеющих схожую с ЛФ-сочетаниями синтаксическую структуру, используются параметризованные правила, ссылки на которые помещаются в словарные статьи лексем. Так, например, для обработки словосочетания *генеральный конструктор* в словарную статью существительного КОНСТРУКТОР ('профессия' в отличие от 'набор деталей') помещаются ссылки на трафаретное правило, усиливающее данный омоним в контексте указанного прилагательного-параметра (в данном случае, ГЕНЕРАЛЬНЫЙ), и на трафаретное правило, заменяющее указанное прилагательное-параметр (в данном случае, ГЕНЕРАЛЬНЫЙ) указанным нестандартным английским эквивалентом (в данном случае CHIEF, вместо стандартного перевода GENERAL).

## 3. Извлечение информации о сочетаемости из корпуса текстов

В последнее время информацию о ЛФ-сочетаниях и некоторых других несвободных словосочетаниях, неучтенных в существующих словарях, стало возможным получать из корпусов текстов. Корпусные данные удобно использовать и в сочетании с материалом словарей, для

взаимной верификации информации из этих двух источников.

Об одной попытке извлечения информации подобного рода из морфологически и синтаксически размеченного корпуса текстов «СинТагРус» см. [6]. Для поиска значений ЛФ данного существительного-аргумента задавались синтаксические контексты, характерные для данной ЛФ, например, контекст синтаксического определения для ЛФ MAGN.

## 4. Условия поиска

На предыдущей стадии работы осуществлялся поиск предположительных ЛФ-коллокаций по заданному *существительному-аргументу*. В предлагаемой работе задача поиска коллокаций была «перевернута», то есть проводился поиск словосочетаний по заданному *значению ЛФ*. Для лексем, являющихся значениями ЛФ от некоторого аргумента, задавались синтаксические контексты в «перевернутом» виде. То есть, например, если при поиске по существительному-аргументу формулируется задача поиска *синтаксических зависимых* заданного слова по определительному отношению, то при поиске по значению ЛФ, формулируется задача поиска *синтаксических хозяев* заданного слова по тому же отношению.

### 4.1. Формирование списка прилагательных

На предыдущем этапе работы были получены списки определительных словосочетаний, для которых был проверен анализ и перевод в системе ЭТАП-3. Некоторые словосочетания обрабатывались правильно, для других оказывалась необходимой корректировка при помощи внесения соответствующей информации в словарные статьи КС. Прилагательные, встретившиеся во второй группе словосочетаний, составили основу списка прилагательных для последующей работы.

В процессе работы этот список дополнялся (и продолжает дополняться) некоторыми другими прилагательными. Так, например, при рассмотрении словосочетаний с прилагательным БЛИЗКИЙ было обнаружено, что некоторые определительные словосочетания, в которых зависимое прилагательное проинтерпретировано в корпусе как форма превосходной степени указанного прилагательного, должны быть проанализированы по-другому. Так, например, в словосочетании *ближайшее время* форма БЛИЖАЙШИЙ должна быть отнесена к лексеме БЛИЖАЙШИЙ, а не БЛИЗКИЙ. Соответствующие исправления были внесены в

корпус, а исходный список пополнился прилагательным БЛИЖАЙШИЙ.

#### 4.2. Определение синтаксического контекста для поиска

Для каждого из прилагательных этого списка проводился поиск существительных, управляющих данным прилагательным по определительному синтаксическому отношению. Более сложные синтаксические контексты, такие позиция зависимого от определения по сочинительному отношению (как, например, позиция прилагательного АКТИВНЫЙ во фразе *постоянный и активный пользователь*) или предикативный контекст (как, например, позиция прилагательного АКТИВНЫЙ во фразе *пользователь был активным*) дают лишь очень небольшое количество дополнительных результатов (как было показано в [6]). Поэтому на данном этапе работы рассматривались только простые определительные словосочетания.

#### 4.3. Инструмент поиска

Поиск осуществлялся с помощью программы поиска, созданной П.В. Дяченко и описанной в [6]. Программа была дополнена некоторыми новыми настраиваемыми параметрами, самыми существенными из которых для данного этапа оказались тип и направление синтаксической связи между узлами контекста.

### 5. Результаты поиска и их обработка

Список прилагательных, по которым проводился поиск, состоит из нескольких десятков лексем. Результатом поиска стали списки определительных словосочетаний с данными прилагательными. Эти списки подвергаются ручной обработке в двух аспектах:

- 1) Проверка правильности анализа и перевода на английский язык при помощи ЭТАПа;
- 2) Установление корреляции между прилагательными-значениями ЛФ и классами аргументов-существительных.

Ниже приведены предварительные результаты ручной обработки полученных данных.

#### 5.1. Обработка словосочетаний для ЭТАПа

Для 8 прилагательных (АБСОЛЮТНЫЙ, АКТИВНЫЙ, АРИФМЕТИЧЕСКИЙ, БЕЗОГОВОРОЧНЫЙ, БЛИЖАЙШИЙ, БЛИЗКИЙ, БОЕВОЙ, БОЛЬШОЙ) в результате поиска было получено 424 определительных словосочетания (725 вхождений в корпус). Для всех этих словосочетаний проверена

правильность анализа и перевода на английский язык при помощи системы ЭТАП-3, при необходимости анализ и перевод скорректированы (84 случая). Результаты поиска распределены следующим образом: АБСОЛЮТНЫЙ: 32 вхождения – 27 словосочетаний (исправлено одно); АКТИВНЫЙ: 67 вхождений – 45 словосочетаний (исправлено 8); АРИФМЕТИЧЕСКИЙ: 4 вхождения – 4 словосочетания (исправлено одно); БЕЗОГОВОРОЧНЫЙ: 5 вхождений – 4 словосочетания (все обрабатываются удовлетворительно); БЛИЖАЙШИЙ: 69 вхождений – 15 словосочетаний (исправлено 10); БЛИЗКИЙ: 54 вхождения – 40 словосочетаний (все обрабатываются удовлетворительно); БОЕВОЙ: 56 вхождений – 33 словосочетания (исправлено 9); БОЛЬШОЙ: 438 вхождений – 256 словосочетаний (исправлено 55).

Среди 84 исправленных словосочетаний 29 были скорректированы внесением изменений в зону ЛФ словарных статей существительных. Так, например, русское словосочетание *большое давление* вместо перевода *large pressure* получило перевод *high pressure* благодаря добавлению в зону ЛФ словарной статьи ДАВЛЕНИЕ записи о значении ЛФ MAGN БОЛЬШОЙ (при наличии в зоне ЛФ словарной статьи английской леммы PRESSURE записи о значении ЛФ MAGN HIGH). Аналогичным образом в русском словосочетании *большой опыт* для формы опыт выбирается омоним 'накопленные знания' вместо омонима 'эксперимент', для самого словосочетания перевод *large experience* вместо перевода *large experiment* благодаря добавлению в зону ЛФ словарной статьи ОПЫТ ('накопленные знания') записи о значении ЛФ MAGN БОЛЬШОЙ.

Для других 23 словосочетаний корректировка анализа и/или перевода осуществлена за счет внесения в словарные статьи существительных словарных правил или ссылок на трафаретные правила, обеспечивающие выбор правильного омонима или правильный перевод прилагательного при данном существительном. Так, например, для русского словосочетания *боевой стиль* вместо перевода *battle style* выбирается перевод *fighting style* благодаря добавлению в словарную статью СТИЛЬ ссылки на параметризованное трафаретное правило, заменяющее указанное прилагательное (в данном случае, БОЕВОЙ) английским эквивалентом FIGHTING при данном существительном. Таким же образом, в словосочетании *ближайшее будущее* для интерпретации прилагательного выбирается лексема БЛИЖАЙШИЙ вместо БЛИЗКИЙ благодаря добавлению в словарную статью БУДУЩЕЕ ссылки на параметризованное трафаретное правило предпочтения связи данного

существительного с указанным прилагательным (в данном случае, БЛИЖАЙШИЙ); для перевода этого словосочетания выбирается английское словосочетание *immediate future* вместо *next future* благодаря добавлению ссылки на правило перевода указанного прилагательного (в данном случае, БЛИЖАЙШИЙ) указанным английским эквивалентом (в данном случае, IMMEDIATE).

Для корректировки анализа и перевода ещё восьми словосочетаний в словарные статьи существительных были добавлены словарные правила или ссылки на трафаретные правила предпочтения данного омонима существительного и данного перевода этого существительного в контексте указанного прилагательного. Так, для словосочетания *арифметическая задача* вместо перевода *arithmetical task* выбирается перевод *arithmetical problem* благодаря добавлению в словарную статью существительного ЗАДАЧА ссылки на трафаретное правило, заменяющее данное существительное нестандартным английским переводом в контексте указанного прилагательного (в данном случае, АРИФМЕТИЧЕСКИЙ). Таким же образом, в словосочетании *боевой опыт* форма существительного анализируется как форма лексемы со значением 'накопленные знания', а не 'эксперимент' (а само словосочетание обеспечивается соответствующим переводом *battle experience* вместо *battle experiment*) благодаря добавлению в словарную статью ОПЫТ 'накопленные знания' ссылки на трафаретное правила предпочтения связи указанного прилагательного (в данном случае, БОЕВОЙ) с данным существительным.

Для 9 словосочетаний правильный перевод был обеспечен добавлением в словарные статьи существительных ссылок на трафаретные правила, заменяющие нестандартными английскими переводами и данное существительное, и указанное прилагательное. Так, например, обстоит дело с переводом на английский словосочетаний *боевая раскраска* (*war paint* вместо *battle colorations*), *большой взрыв* (*big bang* вместо *large explosion*), *ближайшее время* (*near future* вместо *coming time*).

В четырех случаях исправления анализа и перевода осуществлялось за счет уточнения описания в словарных статьях прилагательных (БЛИЖАЙШИЙ и БОЛЬШОЙ). Так, в словосочетании *ближайшее заседание* выбор омонима БЛИЖАЙШИЙ (а не БЛИЗКИЙ) и соответствующий перевод *next session* (вместо *nearest session*) обеспечивается словарным правилом в статье БЛИЖАЙШИЙ, усиливающим

данный омоним и определительную связь с ним при существительных-названиях событий.

В 11 словосочетаниях исправления анализа и перевода оказались не связаны с исследуемыми прилагательными (ошибки в английском переводе русских существительных, корректировка словарных статей существительных в морфологическом словаре, добавление в словари отсутствующих лексем, изменение синтаксических признаков русских лексем в КС).

Дополнительными результатами работы стали исправления в англо-русском переводе словосочетаний (не подсчитывались). Так, например, при работе над русским словосочетанием *абсолютный чемпион* было получено и исправление перевода английского словосочетания *supreme champion* на русский язык: *абсолютный чемпион* (вместо *верховный чемпион*).

Другим побочным результатом работы стало уже упоминавшееся выше внесение в корпус исправлений, связанных с интерпретацией слова *ближайший* в текстах корпуса как форм превосходной степени прилагательного БЛИЗКИЙ или как форм прилагательного БЛИЖАЙШИЙ. Различение этих двух интерпретаций в корпусе было не всегда последовательным, так, например, словосочетания *ближайшее время*, *ближайшие годы*, *ближайшее заседание* в синонимичных употреблениях интерпретировались по-разному в разных текстах корпуса. Употребления тех или иных характеристик для данного слова были упорядочены, изменения внесены в 26 вхождений слова в корпус.

## 5.2. Классификация словосочетаний по классам существительных

Важной целью исследования определительных словосочетаний с данным прилагательным, найденных в корпусе, является проверка гипотезы о семантической мотивированности выбора значений ЛФ-коллокатов, сформулированной в [7-9]. Несмотря на то, что выбор значений ЛФ для данной лексемы не может быть предсказан точно, имеется тенденция к тому, чтобы определенные значения ЛФ сочетались с определенными классами слов-аргументов, обладающих общими семантическими признаками. Предварительные данные подтверждают указанное предположение. Так, среди рассмотренных прилагательных, АБСОЛЮТНЫЙ в ЛФ-значении сочетается с существительными, обозначающими свойства (БЕЗОПАСНОСТЬ, БЕЗНАДЕЖНОСТЬ, БЕСКОНТРОЛЬНОСТЬ, БЕСПОЩАДНОСТЬ,

ВЕРНОСТЬ, ВТОРИЧНОСТЬ, ГЕНИАЛЬНОСТЬ, ЕДИНСТВО, НЕОБХОДИМОСТЬ, ПОРЯДОК, СВОБОДА, СЕРЬЕЗНОСТЬ, ЧИСТОТА). Прилагательное АКТИВНЫЙ встречается с названиями видов деятельности (ДЕЙСТВИЯ, ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ, ИСПОЛЬЗОВАНИЕ, ОПЛАТА, ОСВЕЩЕНИЕ (в прессе), ОХОТА, ПОДДЕРЖКА, ПОИСКИ, ПОЛИТИКА, ПОПЫТКИ, ПРОКАЧИВАНИЕ, ПРОТИВОДЕЙСТВИЕ, РАБОТА, СТРОИТЕЛЬСТВО, УЧАСТИЕ); обозначениями лиц (НАРКОМАНЫ, ОБЩЕСТВЕННОСТЬ, ПОЛЬЗОВАТЕЛЬ, ПРОПАГАНДИСТ, СТОРОННИК, УЧАСТНИКИ); обозначениями процессов (ПОДЪЕМ (во фразе: ... ВВП рос бы несколько быстрее 4,5% за счет более АКТИВНОГО ПОДЪЕМА обрабатывающих производств), РОСТ (во фразе: ... именно после кризиса в России начался АКТИВНЫЙ РОСТ торговых сетей...), ПРОЦЕСС (во фразе: Напротив, лишь с XIII века начинается АКТИВНЫЙ ПРОЦЕСС стирания диалектных особенностей...), ВЫБРОСЫ (во фразе: Подземные толчки сопровождаются АКТИВНЫМИ ВЫБРОСАМИ пара и газа из жерла вулкана)). Прилагательное БЛИЖАЙШИЙ в ЛФ-значении встречается с обозначениями лиц, находящихся в определенных отношениях (ОКРУЖЕНИЕ, ПОМОЩНИКИ, СОРАТНИКИ, СОТРУДНИКИ, СПОДВИЖНИКИ).

## 6. Перспективы

Наиболее интересные результаты дальнейшей работы ожидаются в области лингвистической интерпретации полученных данных в рамках проверки гипотезы о семантической мотивированности ЛФ-коллокатов. При накоплении данных можно будет формулировать более конкретные наблюдения над этим явлением. В то же время, полученные данные и в дальнейшем могут быть применены на практике для усовершенствования автоматической

обработки слов и словосочетаний в системе ЭТАП-3.

## 6. Литература

- [1] А.К. Жолковский, И.А. Мельчук. «О семантическом синтезе», *Проблемы кибернетики. Вып. 19.* М.: Наука, 1967, с. 177-238.
- [2] И.А. Мельчук. *Опыт теории лингвистических моделей «Смысл – Текст».* М., Наука, 1974.
- [3] Ю.Д. Апресян, И.М. Богуславский, Л.Л. Иомдин, А.В. Лазурский, Н.В. Перцов, В.З. Санников, Л.Л.Цинман. *Лингвистическое обеспечение системы ЭТАП-2.* М: Наука, 1989.
- [4] Ю.Д. Апресян, И.М. Богуславский, Л.Л. Иомдин, А.В. Лазурский, Л.Г. Митюшин, В.З. Санников, Л.Л.Цинман. *Лингвистический процессор для сложных информационных систем.* М: Наука, 1992.
- [5] Ju.D. Apresian, I.M. Boguslavsky, L.L. Iomdin, A.V.Lazursky, V.Z. Sannikov, V.G. Sizov, L.L. Tsinman. «ETAP-3 Linguistic Processor: a Full-Fledged NLP Implementation of the MTT», *MTT 2003, First International Conference on Meaning – Text Theory.* Paris: École Normale Supérieure, 2003, p. 279-288.
- [6] Т.И. Фролова, П.В. Дяченко. «Извлечение информации о сочетаемости лексем из аннотированного корпуса текстов», *Информационные технологии и системы (ИТиС'08): сборник трудов конференции,* М.: ИППИ РАН, 2008, с. 206-210.
- [7] Ю.Д. Апресян. «О семантической непустоте и мотивированности глагольных лексических функций», *Вопросы Языкознания № 4,* 2004, с. 3-18.
- [8] Ю.Д. Апресян. «Лексические функции на службе компьютерной лингвистики» *Прикладна лінгвістика та лінгвістичні технології MEGALING-2006. Збірник наукових праць.* Київ, 2007, с. 7-20.
- [9] Ю.Д. Апресян. «О семантической мотивированности лексических функций-коллокатов», *Вопросы Языкознания № 5,* 2008, (в печати).

## Определение автора книги статистическими методами

Орлов Юрий Николаевич  
ИМП им. М.В. Келдыша РАН  
ov3159f@yandex.ru

Осмнин Константин Павлович  
OsmininK@yandex.ru

### Аннотация

*Использование методов анализа нестационарных временных рядов в задачах анализа литературных текстов позволяет с довольно высокой точностью классифицировать литературные тексты по различным параметрам, таким, как авторство, жанровая принадлежность. Определяется круг задач, решаемых с помощью предложенных методов. Решается задача определения автора произведения на основе меры расстояния между выборочными плотностными функциями однобуквенных распределений. Обозначаются пути дальнейшего развития методов и расширения круга задач.*

### 1. Введение

Вопрос определения авторства произведения весьма важен для литературоведения. Однако, если отсутствуют прямые доказательства того, кто именно писал то или иное произведение, то все косвенные соображения относительно авторства остаются более или менее правдоподобными рассуждениями (см. [1-3]). Можно сравнивать манеру изложения, наиболее употребляемые слова, частоту использования союзных слов и предлогов, информационную энтропию и т.д. Но, поскольку существует возможность изменения выбранных показателей «волевым усилием автора», то неизвестна вероятность, с которой тот или иной индикатор будет попадать в определенные границы в еще не рассмотренных (не написанных) произведениях того же автора. Поэтому вердикт должен звучать примерно так: «скорее всего, по нашим экспертным оценкам (но с неизвестной вероятностью) это произведение написано таким-то (или, напротив, такой-то его не писал)». Мы тоже не ставим перед собой цель предложить метод точного определения авторства, а лишь

обращаем внимание на некоторые закономерности в писательском творчестве, проявляющиеся в статистике используемых символов. Эти закономерности, впрочем, носят именно статистический характер, т.е. в отдельных случаях могут и нарушаться.

Не вторгаясь собственно в область литературы, т.е. не анализируя литературные приемы, схемы взаимодействий персонажей и т.д., рассмотрим математические аспекты этого творчества. С одной стороны, наибольшая статистическая информация о произведении заключается в функции распределения всех возможных символов, использованных при его написании: букв, включая пробелы и знаки препинания, и их сочетаний. Однако для статистического анализа следует брать лишь небольшое число сочетаний символов, поскольку реальный текст не имеет бесконечной длины. Например, анализ четырехбуквенных сочетаний потребует использования массива в  $33^4 \approx 10^6$  элементов, а текст в целом может даже и не иметь столько знаков, поэтому такой анализ не будет репрезентативным в смысле определения эмпирической вероятности использования букв. В тексте из  $N$  знаков (без учета пробелов) существует  $N$ -р цепочек из  $r$  знаков, идущих подряд, но для их анализа требуется массив в  $33^r$  элементов. Разумеется, не все сочетания знаков возможны, но учет этого обстоятельства является неформальным и требует знания правил языка. Таким образом, однобуквенное распределение текста является одновременно и простейшим, и наиболее достоверным в смысле определения эмпирических частот.

### 2. Однобуквенное распределение

Для получения однобуквенного распределение текста рассмотрим литературное произведение на примитивном с точки зрения читателя уровне – просто как последовательность букв, полностью игнорируя его смысловую составляющую и не

обращая внимания на те или иные литературные приемы, использованные автором. Пробелы, знаки препинания и прочие небуквенные символы не учитываем. Осью времени считаем нумерацию страниц в книге в направлении возрастания номеров, внутри страницы – по строкам сверху вниз, по строке – слева направо. Таким образом, рассматривается упорядоченная во «времени» цепочка символов, образованная сочетаниями 33 знаков (букв). Упорядочим сами буквы в соответствии с алфавитом, когда каждой букве отвечает ее порядковый номер в алфавите.

Построим плотностную функцию однобуквенного распределения текста, далее ПФР ([4]). Аргументом этой функции служат порядковые номера букв алфавита, а значением – частота данной буквы в рассматриваемом тексте. Полученная функция является неотрицательной и нормирована на единицу. Введем расстояние между двумя ПФР  $f$  и  $g$ :

$$\rho(f, g) = \sum_i |f(i) - g(i)| \quad (1)$$

Применим анализ ПФР к вопросу об объединении (кластеризации) произведений с близкими распределениями. Заметим, что возможность такой кластеризации заранее не очевидна. Хотя отличия в ПФР двух произведений могут быть близки (например, расстояние между ними меньше 0,05), это не означает, что если два текста близки третьему, то они близки и между собой.

### 3. Определение автора

Рассмотрим вопрос о том, существует ли статистическая связь между произведениями, написанными одним автором.

Для анализа были взяты десять произведений одного автора, написанные приблизительно в одинаковом жанре, определены попарные

расстояния между ними, а также среднее расстояние между произведениями данного автора. Такая процедура была проделана с произведениями десяти авторов: Ч. Айтматов, Б. Акунин (Г. Чхартишвили), М. Булгаков, Н. Гоголь, Д. Донцова, Ф. Достоевский, О. Маркеев, В. Набоков (однако, разные переводчики), Л. Толстой, И. Тургенев. Это не вполне репрезентативная выборка писателей, но она носит лишь иллюстративный характер.

Исследуем вопрос о кластеризации произведений, написанных одним автором. Построим однобуквенный полигон распределения частот в каждом романе и сравним попарные расстояния между полигонами в смысле (1). Выясним, можно ли сопоставить автору некоторую характерную именно для него ПФР. Такая ПФР получается путем смешения всех произведений данного автора в одно «среднее распределение автора». Задача состоит в определении средних расстояний между произведениями, написанными одним и, соответственно, разными авторами. Можно ли по расстояниям между текстами сгруппировать те из них, которые написаны одним писателем?

Построим «авторские» ПФР по анализу десяти произведений, объем которых гарантирует квазистационарность распределений. Некоторые авторские полигоны представлены на рис. 1.

В табл. 1 приведены наиболее и наименее встречаемые буквы в произведениях рассматриваемых писателей.

Среди десяти писателей Достоевский выделяется своим наиболее «пристрастным» отношением к буквам, т.е. «любимых» и «нелюбимых» букв по сравнению с другими писателями у него больше всего. Интересно отметить, что Маркеев ему в некотором смысле «наполовину ортогонален»: почти все те буквы,

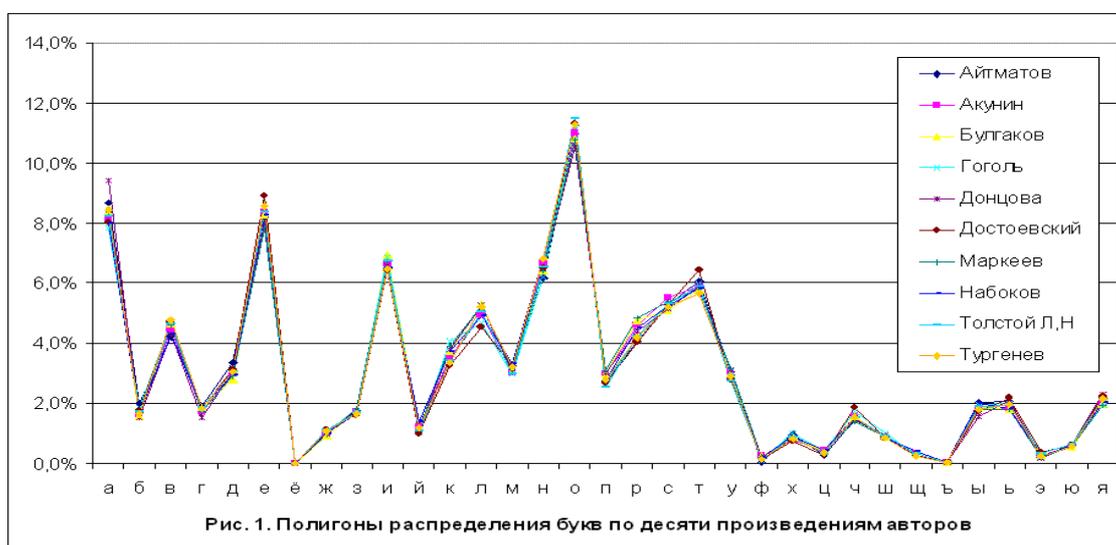


Рис. 1. Полигоны распределения букв по десяти произведениям авторов

Табл. 1. Наиболее и наименее часто встречаемые буквы в авторских ПФР

Автор	min	max
Айтматов	в, н, ф	б, г, ы
Акунин	-	с
Булгаков	с	и, л, ф
Гоголь	а	к, х, ш
Донцова	б, г, о, ы	а
Достоевский	й, к, л, р, х	е, ж, з, т, ч, ь, э, я
Маркеев	д, е, ж, з, ч, ь, э, я	п, р, у
Набоков	-	й, м, н, щ
Толстой Л.Н.	м, п, у	о
Тургенев	и, т, щ	в

которые больше всего в чести у Достоевского, Маркеевым употребляются по минимуму. Аналогичную пару образуют Донцова и Айтматов.

Из рис. 1, видим, что в первом приближении все распределения достаточно больших текстов весьма похожи, так что почти все локальные максимумы и минимумы распределений приходятся на одни и те же буквы. Однако средние авторские распределения отражают предпочтения авторов в использовании тех или иных букв в большей степени, чем средние жанровые ПФР, что позволяет провести кластеризацию большинства произведений вокруг средних авторских ПФР.

В табл. 2 приведены расстояния между авторскими ПФР. Внутри-авторские расстояния, т.е. средние арифметические расстояний между десятью wybranными произведениями и авторской ПФР, расположены на главной диагонали. Из табл. 2 следует, что в большинстве случаев, за исключением Гоголя и Толстого,

расстояния между средними авторскими ПФР больше, чем расстояния от отдельных произведений до соответствующих средних ПФР. Однако расстояния между авторскими ПФР не имеют особенного статистического смысла для задачи кластеризации произведений. Здесь они приведены для того, чтобы численно охарактеризовать близость графиков на рис. 1.

Более точно задача кластеризации решается сравнением близости ПФР отдельных произведений. Рассмотрим, насколько близко ПФР отдельных произведений расположены от средних авторских ПФР. Результаты расчетов приведены в табл. 3. Отметим, что эта таблица несимметрична, поскольку, например, среднее расстояние от отдельных произведений Тургенева до «среднего Толстого» не должно быть равно среднему расстоянию от отдельных произведений Толстого до «среднего Тургенева».

Табл. 3 весьма показательна. Видно, что все расстояния, стоящие в некоторых строке и столбце, не меньше (а за исключением двух значений из ста – строго больше), чем расстояния, стоящие в их пересечении на главной диагонали. Это свидетельствует о четкой отделимости писателей по их авторской ПФР. Оценки дисперсии показывают, что в среднем неоднозначно идентифицируется только одно произведение из десяти.

Если состав авторов не известен, т.е. авторские ПФР отсутствуют, то задача

кластеризации произведений решается сравнением близости всех возможных пар. В табл. 4 приведены результаты расчетов средних меж-авторских расстояний, определяемых как средние арифметические по всем соответствующим парам произведений. На диагонали этой таблицы расположены средние расстояния между произведениями данного автора, а в остальных клетках – средние расстояния между произведениями двух данных авторов.

Табл.2 Средние попарные расстояния между авторскими ПФР, %

Автор	Айтм.	Акун.	Булг.	Гог.	Донц.	Дост.	Марк.	Наб.	Толст.	Тург.
Айтм.	4,4	5,3	6,2	5,5	6,4	6,6	6,5	5	5,2	5,2
Акун.		2,4	3,5	5,5	5,5	6,3	3,9	3,4	4	4,4
Булг.			4	5,7	5,5	8,1	2,7	4,5	5,1	4,8
Гог.				6	7,5	5,5	6,4	5,2	4,1	5,5
Донц.					2,1	8,8	5,1	6,6	6,6	6,2
Дост.						3,9	8,9	6,2	4,6	4,6
Марк.							2,8	5,3	6	5,8
Наб.								3,8	4,5	3,9
Толст.									4,8	3,4
Тург.										3,4

Таб.3 Средние попарные расстояния между отдельными произведениями и авторскими ПФР, %

Автор	Айтм.	Акун.	Булг.	Гог.	Донц.	Дост.	Марк.	Наб.	Толст.	Тург.
Айтм.	4,4	7,3	7,6	7,2	7,5	8,3	7,8	7,0	6,8	6,8
Акун.	6,0	2,4	4,3	6,0	6,3	6,7	4,5	4,2	4,8	4,9
Булг.	7,3	5,4	4,0	6,9	6,6	8,9	4,9	6,2	6,7	6,3
Гог.	7,5	7,1	7,5	6,0	9,2	7,2	7,9	8,4	6,2	7,0
Донц.	6,6	6,1	6,0	7,9	2,1	9,0	5,6	7,1	7,0	6,6
Дост.	7,5	7,6	9,1	7,0	9,6	3,9	9,8	7,8	6,4	6,5
Марк.	7,1	5,1	4,2	7,2	5,9	9,9	2,8	6,3	7,1	6,8
Наб.	6,5	5,0	5,6	6,3	7,3	7,6	6,2	3,8	5,7	5,5
Толст.	7,1	6,5	6,9	6,6	8,4	7,2	7,4	6,7	4,8	6,0
Тург.	6,1	5,5	5,9	6,7	7,1	6,0	6,8	5,5	4,9	3,4

Из табл. 4 видно, что даже по средним попарным расстояниям большинство авторов весьма четко отделяются друг от друга: это Айтматов, Акунин, Гоголь, Донцова, Достоевский, Маркеев, Тургенев; в меньшей степени Булгаков, Набоков и Толстой. Для последних трех авторов есть примеры, когда по средним расстояниям они оказываются близки к другим писателям. Относительно Набокова возможное объяснение состоит в том, что анализируемые романы являются переводами, выполненными разными переводчиками. У Булгакова анализировались произведения, весьма различающиеся по объему, что, несмотря на квазистационарность текстов, могло все же повлиять на меж-авторские расстояния. То же замечание относится и к произведениям Л. Толстого.

Таким образом, авторские ПФР, в отличие от жанровых, позволяют достаточно точно решить задачу кластеризации произведений, и напротив, средние попарные расстояния не особенно продуктивны в задаче распределения произведения по авторам, но весьма полезны для распределения по жанрам.

Большие расстояния между ПФР не обязательно свидетельствуют о разных авторах этих текстов, т.е. близость расстояний между произведениями одного и того же писателя в значительной мере обусловлена жанром. Если произведения написаны одним автором в одинаковой манере, то они весьма близки. Так, расстояние между повестями Н. Гоголя из «Вечеров на хуторе близ Диканьки» равно в

среднем 0,027, а между частями «Мертвых душ» 0,034, что также невелико. Однако расстояние между «вечерами» и «душами» существенно больше – оно равно 0,062 – почти как у разных писателей.

Наиболее же ярко тематическая и одновременно авторская кластеризация выражена у современных «серийных» писателей. Так, у Б. Акунина, Д. Донцовой, и О. Маркеева весьма небольшое расстояние между текстами – в среднем равное 0,024, причем разброс расстояний также очень мал, их отклонения в среднем квадратичном равны 0,012.

Таким образом, отличия между писателями на уровне сопоставимых по объему произведений, выявленные с помощью относительно простого инструмента – однобуквенной ПФР, оказались статистически значимы. Распределение попарных расстояний между романами позволяет оценить вероятность различения писателей, которая оказывается весьма высокой – более 85% если число сравниваемых произведений порядка 10.

Задача определения авторства 100 вышеуказанных произведений по расстоянию до среднего авторского распределения, образованного остальными девятью произведениями автора, показала, что в 85 случаях из 100 это удается успешно осуществить: минимальное из десяти расстояний от какого-либо произведения до средней авторской ПФР отвечает правильному автору этого произведения. Из оставшихся 15 несовпадений в половине случаев правильный ответ отделяет от них расстояние меньше полпроцента.

Таб.4 Средние попарные расстояния между отдельными произведениями, %

Автор	Айтм.	Акун.	Булг.	Гог.	Донц.	Дост.	Марк.	Наб.	Толст.	Тург.
Айтм.	6,2	7,9	8,7	8,7	7,8	9,0	8,4	7,9	8,4	7,6
Акун.		3,6	6,0	7,3	6,7	8,0	5,7	5,7	7,1	6,0
Булг.			6,0	8,3	7,0	9,9	5,8	7,0	8,2	7,2
Гог.				6,1	9,4	8,2	8,5	7,6	7,8	9,5
Донц.					3,3	9,8	6,4	7,7	8,7	7,4
Дост.						5,8	10,8	8,7	8,5	7,4
Марк.							4,2	7,1	8,3	8,4
Наб.								5,6	7,7	6,6
Толст.									7,6	7,1
Тург.										4,9

В отдельных случаях метод демонстрирует неудовлетворительные результаты. Например, у половины произведений Булгакова не удалось правильно определить автора. Также и в трех из десяти произведений Л. Толстого не удалось успешно определить авторство, причем отклонение было значительным. Так, среднее расстояние от «Исповеди» до авторских распределений составило 15%, когда как в среднем это расстояние составляет 6,5%. «Исповедь» существенно отличается от остальных рассмотренных произведений Толстого по композиции, манере изложения, напряженности повествования.

### 3. Заключение

Итак, кластеризация произведений по авторам с использованием однобуквенной ПФР может быть осуществлена сравнительно успешно, с точностью 85%. При этом более полезным инструментом является расстояние до среднего авторского распределения.

Подобным образом можно классифицировать по другим признакам, таким, как жанровая направленность, период написания и т.п. К примеру, проведя процедуру классификации по жанровому признаку ста произведений в десяти жанрах, выяснилось, что наименьшую ошибку также имеет метод, использующий расстояния до среднего распределения жанра.

Также возможно решение задачи кластеризации в многомерном фазовом пространстве по нескольким признакам, например, автора, жанра, времени написания, размера произведения и т.п.

Значительное повышение точности классификации получается при переходе от однобуквенных распределений к распределению буквосочетаний. В частности, если рассматривать плотностную функцию распределения сочетаний из двух букв, строящуюся аналогично, то те же методы позволяют правильно определить автора

в 95 случаях из 100 на рассмотренной в статье выборке.

Это довольно высокая точность позволяет говорить, что предложенные методы удовлетворительно решают задачу определения автора литературного произведения в рассмотренных примерах. Указанные методы хорошо поддаются кодификации и, после создания базы данных по ПФР различных авторов, могут использоваться для быстрого автоматического анализа литературного произведения.

Другими полезными в анализе показателями могут являться длина представительности произведения, ее мера энтропии, величины парной коммутативности двухбуквенных сочетаний текста. Эти показатели могут помочь в классификации по признакам произведения в том случае, если они инвариантны относительно признака. Они показывают однородность произведения, помогают определить меру изменчивости письма автора на протяжении одного произведения и между различными произведениями одного автора.

### 4. Литература

- [1] Яглом А.М., Яглом И.М. *Вероятность и информация*, КомКнига, Москва, 2007.
- [2] Mandelbrot B., An informational theory of the statistical structure of language., *Information and Inference*, ed. by Hintikka J. and Suppes P., Reidel, Dordrecht, 1970.
- [3] Пиотровский Р.Г. *Информационные измерения языка*, Наука, Ленинград, 1968.
- [4] Осминин К.П., *Алгоритмы прогнозирования нестационарных временных рядов*, дисс. на соискание уч. ст. к.ф.-м.н., УДК 519.242.33, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2008.

## Построение онтологии для узкой предметной области

С.П. Тимошенко

Лаборатория Компьютерной Лингвистики ИППИ РАН

Timoshenko@iitp.ru

### Аннотация

*В работе описывается попытка построения онтологии узкой предметной области – шахматных соревнований. Онтология ориентирована на обработку новостных текстов на естественном языке. Составление онтологии осуществлялось вручную с использованием свободно распространяемого редактора Protégé, версия 4.0. Разработчики столкнулись с рядом трудностей, осмысление которых может помочь в разработке нового формата представления онтологий, отличающегося от популярных сегодня.*

### 1. Введение

Мы ставим перед собой задачу описать некоторую ограниченную область действительности в виде онтологии, которую можно использовать для обработки сравнительно простых текстов: таких, темой которых являются спортивные соревнования по шахматам. Экспериментальными текстами нам служили новости-сообщения об этих соревнованиях. Мы находимся в самом начале разработки проекта, и данная статья посвящена скорее осмыслению трудностей, с которыми мы столкнулись, чем обсуждению результатов. В параграфе два мы приводим статистику по исследуемым текстам. Она позволяет понять, с какими явлениями нам предстоит иметь дело. В параграфе три суммируются теоретические основы построения онтологий. В параграфах четыре, пять и шесть рассматриваются примеры концептов и детали их описания. На этих примерах мы продемонстрируем принципиальные ограничения доминирующего сегодня подхода к онтологиям.

### 2. Статистический анализ словоупотребления в текстах

50 сообщений о событиях в мире спортивных шахмат были взяты с сайта [www.chessportal.ru](http://www.chessportal.ru).

Общий объем стартового материала составил 671 предложение, 8196 словоупотреблений.

Мы исходили из довольно распространенного в лингвистике представления о разделении лексики на лексические подсистемы, известные также как подязыки. Принято считать, что любой подязык устроен проще, чем вся система, и тем не менее достаточен для описания какой-либо предметной области. Наиболее последовательно этот взгляд проводится в ранней монографии В. Раскина «К теории языковых подсистем» [1].

В ходе эксперимента мы убедились в том, что специфическая лексика, описывающая какую-либо область действительности, сама по себе не образует языка, способного описывать эту область. Более того, в текстах, описывающих заданную область, её доля не так уж велика. Приведем статистику самых употребляемых слов. (Не включены служебные слова).

МИР – 150;  
 КУВОК – 94;  
 ПАРТИЯ – 70;  
 ШАХМАТЫ – 67;  
 ГОД, ТУРНИР – 58;  
 ШАХМАТНЫЙ – 45;  
 МАТЧ, ФИДЕ, ЧЕМПИОНАТ – 41;  
 ГРОССМЕЙСТЕР – 40;  
 БЕЛЫЙ – 33;  
 ИСТОЧНИК, ОФИЦИАЛЬНЫЙ, САЙТ – 31;  
 ПОБЕДА, ЧЕРНЫЙ – 29;  
 УЧАСТНИК – 26;  
 МЕЖДУНАРОДНЫЙ, НИЧЬЯ, ПРЕСС-РЕЛИЗ – 25;  
 ТАЙ-БРЕЙК – 24;  
 БЫСТРЫЙ, ДЕКАВРЬ, ПОБЕДИТЕЛЬ – 22;  
 ЗАВЕРШАТЬСЯ – 21;  
 ПОЗИЦИЯ – 20;  
 МЕСТО, СОРЕВНОВАНИЕ – 19;  
 ИГРА, ИГРАТЬ – 18;  
 ГЛАВНЫЙ, КРУГ, ПОЕДИНОК, ПОЛУЧАТЬ, ФЕСТИВАЛЬ, ЧЕМПИОН – 17;  
 АШП<sup>1</sup>, УМЕТЬ, ШАХМАТИСТ – 16;  
 БОРЬБА, ДЕНЬ, СОПЕРНИК, УСТУПАТЬ, ФИГУРА – 15;  
 ПОВЕЖДАТЬ, ПРИНИМАТЬ, СЕГОДНЯ, УЧАСТИЕ, ХОД – 14;  
 ВЫИГРЫВАТЬ, ИМЕТЬ, НОЯБРЬ, РАЗ, РОССИЯНИН – 13,

<sup>1</sup> Ассоциация шахматных профессионалов

БАНК, ЖЕНЩИНА, ИТОГОВЫЙ, ОДЕРЖИВАТЬ, ОЧКО, ПЕРЕВЕС, ПРЕЗИДЕНТ, РЕЗУЛЬТАТ, РЕШАТЬ, ФИНАЛЬНЫЙ – 12; ВРЕМЯ, ВСТРЕЧАТЬСЯ, ДРУГОЙ, ЛЕТНИЙ, ОРГАНИЗАТОР, ПОЛОЖЕНИЕ, СИЛЬНЫЙ – 11; АССОЦИАЦИЯ, БЛИЦ, БОЛЕЕ, БОЛЬШОЙ, ВНИЧЬЮ, ДЕЛИТЬ, МОЧЬ, ОСТАВАТЬСЯ, ПОРАЖЕНИЕ, ПОСЛЕДНИЙ, ПРОИГРЫВАТЬ, РАУНД, ТУР, ФАВОРИТ, ЧЕМПИОНКА – 10.

Из этого списка видно, что преобладают слова общей лексики. Специфически шахматными можно назвать только слова: *шахматы, шахматный, ФИДЕ, гроссмейстер, АШП, шахматист*. Также специфическими следует признать значения слов: *белый, черный, фигура, блиц*.

Таким образом, "шахматные" слова не являются самыми частотными в текстах. Кроме того, при более подробном анализе текстов выяснилось, что другие лексемы, которые, по нашим ожиданиям, должны употребляться в специфически «шахматном» значении, в экспериментальных текстах его не имеют. Например, *взять* может обозначать шахматное действие, разновидность хода, когда фигура ставится на клетку, занятую фигурой противника. Последняя снимается с доски и больше участия в партии не принимает. В нашей выборке этот глагол встретился трижды (включая видовую пару *брать*), но не в описанном выше значении: *взять верх, взять реванш, брать пример*. Аналогично глагол *пойти*, встретившийся один раз, не обозначает шахматного хода: *Начиная со второго круга пошла профессиональная игра...* Существительное *ход* нигде не встречается в значении 'перемещение фигуры', но в подавляющем большинстве случаев обозначает единицу длительности партии: *... принудил своего 17-летнего соперника к сдаче на 43-м ходу*.

*Заключительные 30 ходов, которые сделал китаец, были, в общем, не обязательными.*

*Своим третьим ходом белые уклонились от принципиального теоретического спора...*

Особенно интересен третий пример. Третий ход белых очевидно был ходом какой-то конкретной фигуры, но суть хода не сообщается, вместо этого дается интерпретация. Кажется, что описанное выше устройство лексики шахматных новостей объясняется тем, что целью новостей не является описание происходящего на досках. Для этого есть архивы турниров и записи партий, выполненные с помощью шахматной нотации. Новости передают информацию в более сжатом виде – в виде интерпретации.

Приведенные выше аргументы статистического и семантического характера убеждают нас в том, что, по крайней мере, язык новостей нельзя рассматривать как подсистему лексики, устроенную проще, чем полноценный естественный язык. Практическим следствием из

этого является то, что онтология, если только она ориентирована на обработку текстов на более-менее естественном языке (а не на тексты, состоящие из искусственно упрощенных структур), сколь бы узкую сферу она ни описывала, должна покрывать широкий спектр значений и словоупотреблений.

### 3. Онтология и Protégé

Для построения онтологии мы использовали свободно распространяемый редактор онтологий Protégé, версию 4.0. В процессе создания онтологии выяснилось, что он, как и прочие редакторы накладывает ряд ограничений на информацию, которую мы можем записать в онтологию. Ниже мы рассмотрим эти ограничения более подробно, а сейчас заметим только, что эти ограничения кажутся достаточно серьезными, чтобы задуматься о создании формата представления данных на других теоретических основаниях.

Онтологию можно представить себе как словарь, содержащий упорядоченный набор концептов, которые соединены между собой различными отношениями. Но следует иметь в виду, что большинство редакторов онтологий оперируют не двумя видами объектов (концепты и отношения), а тремя - классами, свойствами и инстанциями.

В руководстве, описывающем возможности Protégé, [2], уточняется, что Protégé разработан для создания онтологий, и классы Protégé можно рассматривать как воплощения концептов. Поэтому в дальнейшем, когда речь будет идти о создаваемой с помощью Protégé онтологии, мы будем употреблять эти термины как синонимы. Кроме того, мы будем считать синонимичными термины "свойство" и "отношение", поскольку свойства классов в Protégé по определению всегда являются бинарными отношениями. Далее жирным шрифтом мы будем выделять обозначения концептов. Слова и словосочетания естественного языка будут выделяться курсивом.

В нашей онтологии на данный момент 136 классов и 46 свойств.

### 4. Создание концепта (на примере слова *размен*)

Выше мы уже говорили, что концепты в онтологии связаны разными отношениями с другими концептами. Поэтому концепт можно рассматривать просто как пучок отношений. Кроме того, концепт в Protégé понимается еще и как уникальный набор свойств. Следовательно, информацию, даваемую в онтологии, можно

рассматривать как толкование. Protégé предоставляет нам две возможности определить концепт – задать эквивалентный класс или задать суперкласс и ряд его ограничений. Эти два способа точно соответствуют традиционным лексикографическим способам толкования: толкованию посредством синонимов и толкованию через опорное слово и различительные признаки. Однако оказывается, что не все лексикографические толкования можно перевести в формальные структуры Protégé.

Например, мы хотим описать **размен**. Словарь Кузнецова [3] дает следующее определение шахматного размена: «Ход в шахматной игре, когда оба партнёра одновременно выводят из игры одинаковые фигуры». Это определение нельзя считать удовлетворительным хотя бы потому, что в шахматной игре практически нет одновременных действий. Кроме того, совершенно не ясно, что понимается под одинаковыми фигурами. Если предположить, что это – одноименные фигуры (пешка и пешка, конь и конь и т.п.), то такое определение противоречит шахматной практике, а её мы обязаны учитывать, если хотим построить адекватное описание области действительности.

В энциклопедическом словаре шахмат [4] дается более точное определение: «**Размен** — ход (серия ходов), при котором (которых) стороны осуществляют обмен примерно равноценным материалом (размен лёгкой фигуры на лёгкую фигуру, пешки на пешку, лёгкой фигуры на три пешки, ферзя на две ладьи или три лёгких фигуры и т. п.)». С лингвистической точки зрения, это определение несколько тавтологично, так как размен толкуется как обмен, зато в нем подробнее описаны объекты размена. Если отвлечься от шахмат, то можно протолковать **обмен** как 4 взаимозависимых элементарных действия, касающиеся двух участников:

- 1) X перестает иметь предмет А;
- 2) X начинает иметь предмет В;
- 3) Y перестает иметь предмет В;
- 4) Y начинает иметь предмет А.

Любопытно, что когда речь идет об обычном обмене, в фокус внимания попадают действия 2 и 4. Фраза *Маша и Миша поменялись игрушками, теперь у Маши машинка, а у Миши зайчик*, звучит более естественно, чем фраза *Маша и Миша поменялись игрушками, теперь у Миши нет машинки, а у Маши нет зайчика*. В шахматах наоборот. Естественнее считать потери главным результатом. Принимая во внимание все вышесказанное, мы можем построить следующий класс онтологии.

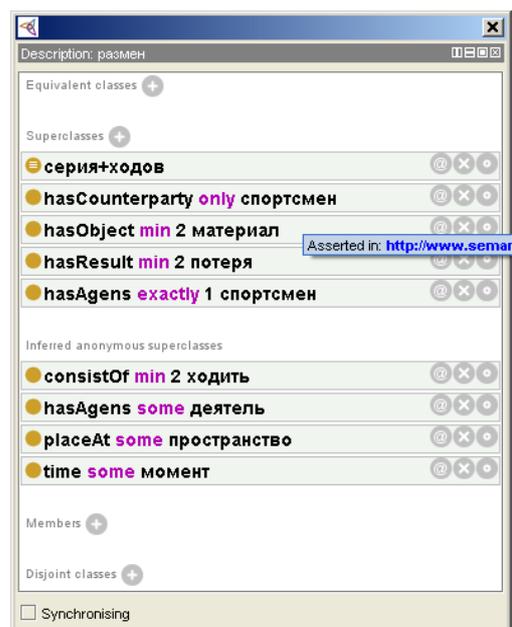


Рис.1 Концепт **размен**

Переведа это обратно на язык словаря, получаем: **Размен** – это такая **серия+ходов**, при которой имеется противник, являющийся **спортсменом**, имеются объекты – не меньше двух фигур в широком смысле слова, и деятель, являющийся **спортсменом**. Эта серия ходов имеет своим результатом не меньше двух более простых действий – утрат. Про **серию ходов** известно, что она состоит не менее чем из двух действий типа **ходить**, то есть из двух перемещений фигур, и **размен** наследует это свойство. Кроме того, от классов более высокого уровня он наследует свойство иметь деятеля, быть в каком-то пространстве и относиться к какому-то моменту времени<sup>2</sup> (под моментом времени мы понимаем не физический момент, но конкретную временную локализацию: 2 часа дня – это такой же момент, как 21 февраля).

В этом описании отсутствуют два момента. Во-первых, равенство размениваемых фигур. Сами относительные веса могут быть указаны среди свойств классов, к которым относятся конкретные фигуры – коня, слона, ферзя. Однако в Protégé нет способа сказать, что в ситуации, именуемой **размен**, используемые единицы типа **материал** должны составлять своего рода уравнение, в котором в левой части находится весь черный материал, а в правой – весь белый. Во-вторых, никак не отражена соотношенность

<sup>2</sup> Эти свойства унаследованы от концепта действие, которому они приписаны из лингвистических соображений. Связь с моментом времени приблизительно соответствует утверждению о том, что время ситуации укладывается в один раунд наблюдения. А пространственная отнесенность связана с тем, что на глубоком семантическом уровне речь идет о целенаправленном изменении мира или его части. Эти особенности семантического класса действий более подробно истолкованы в [5].

более простых действий с участниками ситуации: нет указаний на тот факт, что одна утрата имеет своим объектом все белые фигуры и, соответственно, её испытывает игрок, который в этой партии играет белыми, а другая утрата вовлекает оппонента и потерянные им фигуры. Язык онтологии имеет специальное ограничение, гласящее, что отношения всегда строго бинарны. Чтобы точнее описать **размен**, можно было бы ввести два специальных класса, обозначающих **потерю-черных-при-размене** и **потерю-белых-при-размене**, и приписать размену два свойства типа `hasResult`, каждое из которых заполнялось бы соответствующим классом, но запись информации о сложном равенстве, которое должно связывать размениваемые фигуры, все равно остается вне возможностей Protégé.

Аналогичным образом мы не можем записать утверждение, гласящее, что золотая медаль как награда абсолютно равна первому месту. Можно сказать, что нам нужно в данном случае подставить в качестве значения одного отношения не другое отношение, а целое высказывание.

**место** `hasNumber 1`

`isEqual`

**медаль** `isMadeOf золото`

Естественно, что никакие традиционные толкования, использующие понятие причинности, не могут быть адекватно переведены на язык онтологии Protégé. Подробнее о логико-философских основаниях ограничений, подобных описанным выше, можно прочитать в статье Барри Смита [6].

## 5. Один концепт или два?

В представленной выборке встретились слова *кандидат* и *претендент*. Если исходить из принципов построения онтологии, то следует считать их одним концептом: оба слова обозначают человека, находящегося в таком состоянии, что он может и хочет победить и получить награду: приз, место, рейтинг или звание. Однако слово *кандидат* встретилось в нашей выборке всего один раз, и это оказался не *кандидат в мастера спорта*, а *кандидат на вылет*. Если такое употребление зафиксировано только у слова *кандидат* и не зафиксировано у слова *претендент*, то это может быть основанием для создания двух разных концептов. Для проверки словоупотребления требуется более представительная выборка, чем та, которую мы использовали в качестве отправной точки. В Национальном корпусе русского языка [7] два раза встречается *претендент на вылет* и десять раз встречается *кандидат на вылет*. Разница между двумя словами не в компоненте значения, а в степени проявления семантической

закономерности, которая состоит в том, что из двух компонентов значения ‘может сделать X’ и ‘хочет сделать X’, второй иногда опускается, позволяя особое метафорическое употребление слова. *Претендент на титул* - это человек, который имеет возможность завоевать титул и хочет это сделать, а *претендент на вылет* - это человек, который имеет возможность проиграть, но вряд ли имеет такое желание.



Рис. 2 Концепт Претендент

Protégé не предоставляет инструмента, позволяющего указать на разницу в степени обязательности двух свойств данного класса.

## 6. Абсолютно точный и абсолютно бесполезный ответ.

На наш взгляд, самым важным заключением после проделанных работ можно считать следующее: онтология, пригодная для трансформации текстов на естественном языке в семантические структуры, должна описывать не столько действительность, сколько языковую картину мира. Рассмотрим пример.

Важный для шахматного мира концепт **ходить**. Кажется очевидным, что это действие. Все действия имеют свойства – ‘происходить в каком-либо месте’ и ‘происходить в какое-либо время’. Следовательно, концепт **ходить** как концепт более низкого порядка наследует эти свойства.

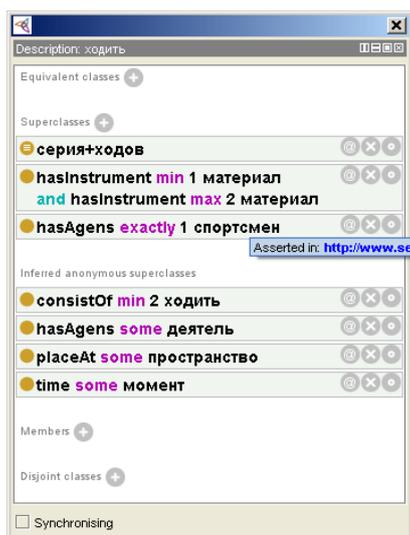


Рис.3 Концепт Ходить

Формально эта характеристика истинна: если кто-то пошел конем, то это произошло в каком-то помещении, в каком-то сооружении, на какой-то улице, в каком-то городе и т.д. Кроме того, это произошло в каком-то часу, какого-то числа, в каком-то месяце и веке. Можно сказать *29 апреля 2001 года Крамник сделал ход пешкой d2-d4*, и это будет соответствовать действительности. Можно даже сказать *В XXI веке Крамник сделал ход пешкой d2-d4*, что тоже будет истиной. Но почему это так странно звучит? Если подняться на уровень выше и рассмотреть комбинацию ходов – партию, то аналогичные примеры будут выглядеть куда естественнее. *Неувядаемая партия (Вечнозелёная партия) — партия в шахматы между шахматным маэстро Адольфом Андерсеном и его учеником Жаном Дюфренем. Эта партия была сыграна в Берлине в 1852 году.* (из статьи Википедии "Неувядаемая партия"). Конечно, есть некоторые особые условия – например, исключительность данной партии со спортивной точки зрения – которые влияют на параметры её описания, но, тем не менее, рискнем утверждать, что для любой партии естественнее относиться к календарному времени и географическому пространству, чем для хода, пространство которого ограничивается полями шахматной доски, а временное измерение – минутами с момента начала партии. Такая разница в масштабе событий может зависеть от психологических представлений людей, от когнитивных структур, которые пока, к сожалению, не описаны с достаточной степенью достоверности. Сталкиваясь с подобными явлениями при разработке практических приложений, имитирующих деятельность человека, мы вынуждены принимать решения, не зная, как в действительности устроено то, что мы собираемся имитировать. Не удивительно поэтому, что инструмент, который на первый взгляд кажется подходящим, в итоге не позволяет

достичь желаемых результатов. Кажется, что механизм наследования свойств, как он понимается в программировании, не вполне пригоден для описания концептов, имеющих в естественном языке. Рискнем предположить, что эта проблема является частным случаем другой проблемы – проблемы категоризации, обсуждаемой в книге Дж. Лакоффа «Женщины, огонь и опасные вещи: что категории языка говорят нам о мышлении?».[8] Один из тезисов, которые защищает Лакофф, состоит в том, что человек не рассматривает мир как структуру дизъюнктивно разделенных множеств. Иными словами, мы не выделяем два класса, 'птиц' и 'не-птиц', но различаем бесконечную шкалу 'более-птиц', 'чуть-менее-птиц', 'еще-чуть-менее-птиц', 'скорее-птиц' и т.д. Если дело обстоит так и традиционный теоретико-множественный подход следует считать не более чем удачным изобретением человеческого разума, то у онтологии в её сегодняшнем виде мало шансов отразить языковую картину мира.

## 7. Выводы

Сделав попытку построить онтологию заданной предметной области, мы столкнулись с рядом трудностей. Невозможно соединить отношением концепт и высказывание, невозможно соединить отношением два высказывания, невозможно иерархизировать свойства внутри концепта. Дополнительных уточнений требует наследование свойств концептами более низкого порядка. Некоторые из этих сложностей уже привлекали внимание исследователей, но скорее с логико-философской стороны. Нам кажется, что прежде чем приниматься за ревизию логических оснований онтологии целесообразно попробовать еще некоторые практические решения.

Важные выводы на данном этапе работы:

1) Тексты, описывающие узкую предметную область на естественном языке, не так сильно детерминируются лексической подсистемой, включающей специфические для этой области слова и понятия, как этого хотелось бы лингвистам.

2) Невозможно создать онтологию узкой предметной области такую, чтобы она целиком покрывала тексты на естественном языке, описывающие эту область. Любая онтология, рассчитанная на обработку естественного языка, должна быть в некотором роде «полной», то есть её формальный язык должен позволять описывать сложные значения, выражаемые в естественном языке с достаточной полнотой.

3) Онтология, рассчитанная на обработку естественного языка, должна описывать не

столько действительность, сколько языковую картину мира.

## Литература

[1] В. Раскин, “К теории языковых подсистем”, М., ЛКИ, 2008.

[2] M. Horridge, H. Knublauch, A. Rector, R. Stevens, Ch. Wroe, “A Practical Guide To Building OWL Ontologies Using The Protégé-OWL Plugin and CO-ODE Tools” Edition 1.0. The University Of Manchester.

[3] Большой толковый словарь русского языка, под ред. С.А. Кузнецова, М., Норинт, 2006.

[4] Шахматы. Энциклопедический словарь. М., Советская энциклопедия, 1990.

[5] В.Ю. Апресян, Ю.Д. Апресян, Е.Э. Бабаева, О.Ю. Богуславская, Б.Л. Иомдин, Т.В. Крылова, И.Б.

Левонтина, А.В. Санников, Е.В. Урысон, “Языковая картина мира и системная лексикография”, М., Языки славянских культур, 2006.

[6] B. Smith, “Against Fantology”. In: *Experience and Analysis*, Wien, M. E. Reicher, J. C. Marek (Eds.), 2005. pp. 153-170.

[7] Национальный корпус русского языка  
[www.ruscorpora.ru](http://www.ruscorpora.ru)

[8] Дж. Лакофф, “Женщины, огонь и опасные вещи: что категории языка говорят нам о мышлении?”, М., Языки славянских культур, 2004.

## Исследование алгоритмов построения деревьев зависимостей на основе машинного обучения

Казенников А.О.  
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН  
kzn@iitp.ru

### Аннотация

В работе изучаются различные подходы к построению синтаксической структуры на основе деревьев зависимостей. Рассматриваются два подхода к задаче построения дерева зависимостей: как задача построения минимального остова дерева, и как задача разбора с автоматом с очередью. Оба подхода используют SVM в качестве базового алгоритма. Кроме того, в работе производится сравнение различных алгоритмов обучения SVM.

### 1. Введение

Обработка текста на естественном языке является сложной и интересной задачей. Обычно задача анализа делится на несколько уровней. Обычно анализ на каждом из этих уровней является самостоятельной решаемой задачей. В частности, такими отдельными задачами являются морфологический анализ, снятие частичной омонимии, построение синтаксической структуры. Поэтому на входе задачи синтаксического анализа в такой модели предстают слова однозначно определенной частью речи.

Однако это не единственный подход. Например, система ЭТАП[1] проектировалась как лингвистический процессор. Его задачей является анализ текста начиная с самого первого уровня. В ЭТАПе было принято решение о том, что омонимия может быть разрешена на этапе синтаксического анализа.

В настоящей работе рассматривался синтаксический анализ как задача построения синтаксической структуры предложения, в котором снята частичная омонимия. Эта задача проще, чем синтаксический анализ, производимый системой ЭТАП.

Формально задача синтаксического анализа формулируется следующим образом. Дано предложение  $S = \{w_i, i \in \{1 \dots n\}\}$ , где  $n$  — число слов в предложении. Вершина предложения обозначается фиктивным словом  $w_0$ . Необходимо построить ориентированное дерево

$G = (V, A)$ , где  $V$  — вершины(слова),  $A$  — дуги(связи). В дереве должна быть одна вершина и не должно быть циклов. У каждой связи есть несколько характеристик: хозяин связи — слово из которого связь выходит, слуга — слово, в которое связь приходит, имя связи, направление связи. Кроме того, для удобства используются понятия левого и правого слова связи — это слова связи относительно их порядка в предложении. Кроме того, у связи есть важное свойство: проективность.

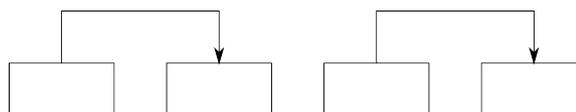


Рис 1: Проективные и непроективные связи

Если связь проективна, то она не пересекается с другой связью(Рис 1). Или же, из вершины связи доступны по связям все слова, которые связь покрывает. Алгоритмы синтаксического анализа в значительной мере делятся на те, которые не могут проводить непроективные связи(проективные алгоритмы), и те которые могут(непроективные алгоритмы).

### 2. Обзор существующих решений

В работе рассматривалось несколько подходов к задаче синтаксического анализа:

- Облегченная система ЭТАП
- Алгоритмы на основе максимальных остовных деревьев
- Алгоритмы на основе системы переходов.

В облегченной системе ЭТАП не используются механизмы разрешения неоднозначности при синтаксическом анализе.

Система ЭТАП является правилочной системой, построенной на основе модели «Смысл ↔

Текст»[2]. Правила для системы пишутся экспертами-лингвистами. На первом этапе анализа строится матрица возможных связей в предложении, потом из этих связей выделяется дерево. Часто существует возможность построения нескольких вариантов структуры для одного предложения, но по умолчанию выбирается первая структура. Таким образом, упрощенно работа лингвиста заключается в написании таких правил, при которых первое построенное дерево было оптимальным с лингвистической точки зрения. Одним из основных недостатков такого подхода является то, что требуется огромный объем работы лингвистов для построения качественной системы (система ЭТАП разрабатывается более 20 лет).

Принципиально другим подходом к способу получения лингвистической информации является использование машинного обучения[3,4]. Тогда структура строится на основе закономерностей, выведенных алгоритмом из большого массива данных. Для этого используется корпус — набор текстов с размеченной синтаксической структурой. У этого подхода есть и слабые стороны: необходим большой корпус, для составления которого требуется много человеческих ресурсов; полученная модель может иметь слабую лингвистическую интерпретацию. С другой стороны, алгоритмы на основе машинного обучения работают очень быстро на этапе анализа.

В [3,4] показано, что наиболее эффективными подходами на основе машинного обучения являются подходы на основе максимальных остовных деревьев и подходы на основе системы переходов.

Подход на основе максимальных остовных деревьев[3] преобразует задачу синтаксического анализа в задачу нахождения максимального остовного дерева на графе возможных связей. Для этого вводится функция оценки связи  $s(i, j) = w \cdot f(i, j)$ , где  $f(i, j)$  — признаки, на основе которых принимается решение о проведении связи,  $w$  — модель, полученная с помощью машинного обучения.

Алгоритм выбирает такое дерево, сумма оценок связей которого будет максимальна:

$$s(x, y) = \sum_{(i, j) \in y} s(i, j)$$

$$\max_y s(x, y)$$

Задача обучения функции оценки связи сводится к задаче ранжирования — необходимо, чтобы правильная связь получала большую оценку, чем остальные потенциальные связи:

$$s(i, j) > s(k, j), \forall k \neq i$$

$$s(i, j) > s(i, m), \forall m \neq j$$

Сначала надо преобразовать связи из корпуса в данные для алгоритма машинного обучения. Это можно сделать на основе следующих фактов:

- Для каждого слова правильна только одна входящая связь
- Для данного слова потенциальными хозяевами может быть все остальные слова предложения и вершина

Другим важным вопросом является то, какие свойства связи можно использовать. В классическом варианте решения возможно использовать только линейные свойства связи. Т.е. Каждая связь проводится независимо от уже существующих.

На каждое слово в среднем приходится  $n \cdot m$  примеров,  $n$  — среднее число слов в предложении,  $m$  — число возможных имен связи. Алгоритмы для подхода на основе максимальных остовных деревьев в основном различаются способом построения дерева на основе полученных оценок. Свойства проективных и непроективных алгоритмов сильно различаются. В частности, не существует вычислительно эффективного алгоритма, который бы мог строил непроективные связи и использовал информацию об уже существующих связях. А для проективных связей такой алгоритм есть[5].

Другой подход — подход на основе системы переходов[4]. Парсер на основе такого подхода состоит из 3 компонентов:

1. Понятие конфигурации — состояния процесса разбора в каждый конкретный момент
2. Действия, изменяющие конфигурацию.
3. Начальное и конечное конфигурации.

Задача синтаксического анализа сводится к поиску цепочки действий, которые бы переводили начальную конфигурацию в конечную. В каждый момент времени, для выбора следующего действия используется функция оракула. Его задача — на основе текущего состояния парсера выбрать следующее действие. Задача машинного обучения состоит в аппроксимации функции оракула с помощью классификатора. Параметры парсера очень сильно зависят от выбора системы действий и выбора параметров конфигурации, на основе которых принимается решение о следующем действии.

### 3. Проведенная работа

В [4] приведен анализ четырех систем переходов. Наиболее интересной представляется только одна из них, которая может строить непроективные связи.

Конфигурация этой системы состоит из 3х списков. В данном случае, список — линейная структура данных, обладающая вершиной, обозначаемой как `head|list`, и определенной операцией склейки  $l_1+l_2$ . Эти списки можно

интерпретировать следующим образом. В списке  $b$  хранятся еще непросмотренные слова предложения, а его вершина является потенциальным правым словом связи. Этот список расположен справа налево относительно порядка слов в предложении. В  $l_1$  хранятся возможные левые слова связи, а его вершина является текущим потенциальным правым словом. Есть действие проводит связь, то эта связь между вершиной  $b$  и вершиной  $l_1$ .  $l_1$  расположен слева направо относительно порядка слов в предложении. А  $l_2$  — слова в промежутке между  $l_1$  и  $b$ , его вершина расположена рядом с  $l_1$ . Длина  $l_2$  на единицу меньше длины связи.

При начальной конфигурации в  $l_1$  помещается вершина предложения, а в  $b$  — все слова предложения,  $l_2$  — пуст. Признаком конечной системы является опустошение  $b$ .

Система состоит из 4х действий:

1. Left-Arc  
 $(\lambda_1|i, \lambda_2, j|\beta) \Rightarrow (\lambda_1, i|\lambda_2, j|\beta)$   
 связать (j,i)
2. Right-Arc  
 $(\lambda_1|i, \lambda_2, j|\beta) \Rightarrow (\lambda_1, i|\lambda_2, j|\beta)$   
 связать (i,j)
3. No-Arc  
 $(\lambda_1|i, \lambda_2, j|\beta) \Rightarrow (\lambda_1, i|\lambda_2, j|\beta)$
4. Shift  
 $(\lambda_1, \lambda_2, i|\beta) \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2|i, [], \beta)$

В показано, что сложность разбора на основе такой системы действий  $O(n^2)$ . Однако, можно показать, что в среднем требуется число действий, линейно зависящее от числа слов в предложении и средней длине связи. Из определений действий следует, что только Shift изменяет список  $b$ . Следовательно, для разбора предложения потребуется  $n$  действий Shift. В предложении всегда  $n$  связей (у каждого слова должен быть хозяин), следовательно, для разбора необходимо  $n$  действий Left-Arc или Right-Arc. После действия Shift список  $l_2$  пуст, а следовательно потенциальная длина связи равна единице. Каждое действие Left-Arc, Right-Arc или No-Arc увеличивает длину потенциальной связи на единицу, следовательно, в среднем, число действий No-Arc пропорционально средней длине связи предложения. Следовательно, сложность алгоритма такой системы переходов  $O(n+k*n)$ , где  $k$  — средняя длина связи в предложении.

Для создания аппроксимации оракула необходим способ преобразования эталонной структуры в последовательность действий. Это можно сделать с помощью тех же соображений, что и при анализе системы переходов. Для преобразования эталонной структуры нужно:

1. Отсортировать эталонные связи:
  1. По правому слову
  2. По длине связи

2. две переменных: индекс вершины  $b$ , индекс вершины  $l_1$
3. Для каждой эталонной связи
  1. Пока индекс вершины  $b$  не равен индексу правого слова делать Shift
  2. Пока индекс вершины  $l_1$  не равен индексу левого слова делать NoArc
  3. Провести эталонную связь

Для обучения используются пары текущая конфигурация  $\rightarrow$  действие. Такая задача является задачей классификации по нескольким классам.

В качестве алгоритма обучения используется алгоритм на базе SVM[6].

Основное отличие от модели, представленной в [4] представляют собой признаки, извлекаемые из конфигурации. В качестве базовых использовались:

1.  $b[0]$  — потенциальный участник связи
2.  $b[1,2,3]$  — контекст справа
3.  $l_1[0]$  — потенциальный участник связи
4.  $l_1[1,2]$  — контекст слева
5.  $hd(l_1[0])$  — хозяин  $l_1[0]$
6.  $ld(l_1[0])$  — левое зависимое слово  $l_1[0]$
7.  $rd(l_1[0])$  — правое зависимое слово  $l_1[0]$
8.  $l_2[0,n]$  — контекст между потенциальными участниками связи

Были использованы дополнительные признаки, которые могли бы повлиять на качество разбора.

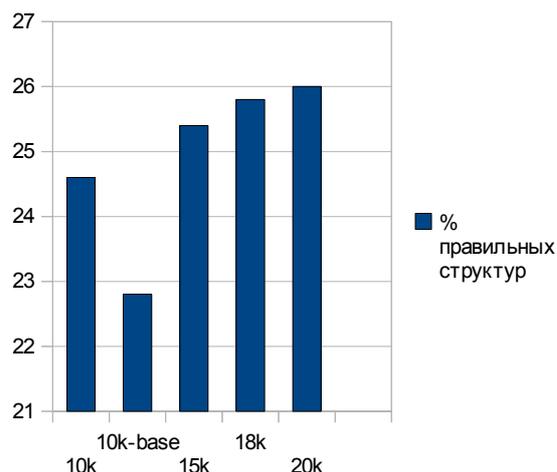
1.  $ngc(b[0])$  — число-род-падеж  $b[0]$
2.  $ngc(l_1[0])$  — число-род-падеж  $l_1[0]$
3.  $\{ngc(b[0]), ngc(l_1[0])\}$  кортеж из  $b[0]$  и  $l_1[0]$
4. interior — полный контекст между  $b[0]$  и  $l_1[0]$

Еще в модель была неявно включена длина связи. В вектор кроме обычных признаков добавлялся признак с приписанной длиной связи.

#### 4. Эксперименты

Для оценки системы были проведены эксперименты. В качестве материала использовался корпус СинТагРус. На настоящий момент в корпусе около 34 тысяч предложений, около 460 тысяч слов. В текстах используется порядка 32 тысяч лемм.

Эксперименты проводились следующим образом. Корпус делился на две части — часть для обучения, и часть для оценки полученной модели. При проведении экспериментов предполагалось определить влияние объема влияния набора используемых признаков на эффективность системы. Поэтому, проводилось две серии экспериментов: с варьированием объема материала при фиксированном наборе признаков, и с варьированием набора признаков при фиксированном объеме материала.



**Рис 2: Процент правильных структур**

В качестве базового набора были выбраны признаки 1-12. Для обучения использовалось 10 тысяч предложений, для тестирования — 5 тысяч. Была проведена серия экспериментов с последовательным добавлением признаков к базовому варианту: длина связи, дополнительные признаки 1-4. Как видно из графика, выбор набора признаков оказывает существенное влияние на качество работы парсера. При добавлении новых признаков не было ухудшения работы, следовательно, можно ожидать, что добавление как-либо новых признаков так же не ухудшит работу.

Была изучена зависимость качества парсера от объема материала для обучения. Обучение производилось на полном наборе признаков. В ходе экспериментов последовательно увеличивалось количество предложений: 10 тысяч, 15 тысяч, 18 тысяч, 20 тысяч. Эксперименты подтвердили тот факт, что количество данных приводит к увеличению точности разбора. Основной скачок происходит при увеличении количества предложений с 10 до 15 тысяч.

## 5. Результаты

В работе приведен улучшенный подход к синтаксическому анализу на основе системы переходов. Улучшение произошло за счет двух факторов: более богатая модель признаков, другой алгоритм решения задачи классификации по нескольким классам.

В работе [4] в качестве алгоритма обучения использовался метод «One vs. One», при котором строится  $n*(n-1)$  классификаторов. В представленной модели использовать этот алгоритм неэффективно, т.к. он требует значительного объема оперативной памяти (около 16 Мб на один классификатор). Был использован прямой алгоритм обучения, представленный в [6].

В настоящей работе модель признаков была богаче, поскольку представленная система ориентирована на использование совместно с корпусом СинТагРус, где представлены более богатые лингвистические характеристики.

Кроме того, представленная система показала более высокие результаты, чем система ЭТАП. Однако стоит заметить, что ЭТАП разрабатывался для решения более сложной задачи.

Поэтому представляется перспективным продолжить работы в области создания статистического парсера, одновременно с этим изучая возможности создания гибридной системы.

## 12. Библиография

- [1] Апресян Ю.Д., Богуславский И.М., Иомдин Л.Л. Лингвистическое обеспечение системы ЭТАП-2
- [2] Мельчук И.А. Опыт теории лингвистических моделей «Смысл ↔ Текст». М., 1999.
- [3] McDonald R., Crammer K., Pereira F., Spanning Tree Methods for Discriminative Training of Dependency Parsers. ACL-06
- [4] Nivre J. Algorithms for Deterministic Incremental Dependency Parsing Comp. Linguistics Vol 34 N4
- [5] McDonald R., Satta G. On the Complexity of Non-Projective Data-Driven Dependency Parsing. IWPT-2007
- [6] Crammer K., Singer Y. Ultraconservative Algorithms for Multiclass Problems, JMLR '01

## Атрибуты модальности в UNL<sup>1</sup>

Диконов Вячеслав  
ИППИ РАН  
dikonov@iitp.ru

### Резюме

*В статье предлагается новая расширенная система атрибутов для выражения модальности и эвиденциальности в языке-посреднике UNL (Универсальный Сетевой Язык). Она призвана исправить ряд недостатков существующего набора атрибутов модальности и сделать возможным более полное отражение семантики различных естественных языков.*

### 1. Введение

Эта статья посвящена работе, которая выполняется в рамках международного проекта UNL. Его цель - создание искусственного языка-посредника для глобального обмена информацией в Интернет [1, 2]. Язык UNL не предназначен для непосредственного общения людей, а является формальным представлением смысла текста на каком-либо естественном языке, которое используется для компьютерной обработки. Документ на языке UNL может быть автоматически преобразован в текст на естественном языке, для которого разработано необходимое лингвистическое обеспечение. Традиционные системы машинного перевода часто оказываются неспособными обеспечить правильность перевода из-за труднопреодолимой неоднозначности естественных языков. UNL предлагает возможность редактировать промежуточное представление текста и/или управлять системой анализа текста в интерактивном режиме для того, чтобы получить представление текста с полностью разрешенной лексической и синтаксической неоднозначностью. При использовании в качестве посредника UNL призван дать уверенность, что смысл документа будет передан верно. Это мощное средство записи смысла текста, предотвращающее его искажения в процессе перевода или другой обработки. Он также может быть использован для семантически точного поиска, извлечения знаний и систем искусственного интеллекта.

Прежде чем перейти к основному содержанию статьи, необходимо разъяснить некоторые необходимые термины, используемые в рамках проекта UNL.

**UNL-граф** – способ представления текста на языке UNL. Граф состоит из концептов, соединенных направленными типизованными семантическими связями. Узлы графа могут содержать в себе не только лексические единицы UNL, но и другие графы, тем самым образуя гиперграф.

**концепт** – произвольное понятие, выделяемое в толковом словаре естественного языка как отдельное значение слова или идиоматического сочетания слов.

**UW (Universal Word)** – "универсальные слова" лексические единицы UNL. Каждое UW соответствует одному концепту. Предполагается, что все концепты всех языков должны получить по отдельному UW. Если в словаре UNL нет готового UW для нужного понятия, то его можно добавить. Каждое UW состоит из заглавного слова (обычно английского) и списка ограничителей, которые уточняют значение заглавного слова и устанавливают связи с другими UW.

**атрибут** — специальная помета, присоединяемая к узлам UNL-графа. Используется для выражения различных грамматических категорий, субъективного отношения говорящего к высказыванию, логических соотношений и т.п. Существует ограниченный список атрибутов. Имена атрибутов UNL предваряются знаком @.

### 2. Что такое модальность

Чтобы рассуждать о способах передачи модальности в искусственном языке, необходимо принять базовое определение этой сложной категории. Это позволит отделить ее от прочих тесно связанных лингвистических категорий и очертить круг рассматриваемых явлений.

Понятие модальности впервые было введено Аристотелем. Благодаря ему в логике принято выделять эпистемическую модальность, которая описывает достоверность суждения, алетическую, которая описывает степень истинности суждения, а также деонтическую, отражающую различные предписания, которые регулируют деятельность людей. В дополнение к этим подкатегориям

<sup>1</sup> Автор благодарен РФФИ за частичную финансовую поддержку данной работы (грант 08-06-00367).

можно говорить также об аксиологической модальности, которая выражает оценку суждения относительно системы ценностей говорящего и динамической модальности [4], описывающей необходимые для действия условия.

В приложении к языку категория модальности выражает:

1. оценку фактического статуса высказывания (соответствует ли сказанное действительности);
2. степень достоверности этой оценки путем ссылки на способ получения информации или имеющиеся основания для вывода (эвиденциальность);
3. условия и стимулы реализации потенциально возможных событий (способность совершить действие, обязательность, разрешение, приказ, запрет и т.п.);
4. оценку говорящим содержания своего высказывания по шкале ценности и желательности.

Для описания модальности, анализа и организации возможных модальных значений в систему применяется общая модель, которая выделяет в предложении две параллельные и взаимосвязанные пропозиции. Одна соответствует основному содержанию предложения, а другая — модальная описывает отношение говорящего к тому, о чем говорится в предложении. Такое деление было введено Ш. Балли [5]. Введенные им термины *диктум* и *модус* далее не используются, так как относятся более к содержанию высказывания, в то время как нас интересует форма выражения этого содержания в языке UNL. Для удобства и краткости отдельные элементы обеих выделяемых пропозиций и коммуникативные роли далее могут обозначаться условными переменными, которые будут использоваться в формализованных определениях разных видов модальности.

Модальная пропозиция **M** состоит из модального предиката и его актантов. Разные модальные предикаты имеют различный набор заполняемых актантами валентностей. Обязательной для всех модальных предикатов является валентность, которая связывает модальный предикат с главной пропозицией высказывания **X**. Важную роль при описании видов модальности играют модальный агент  $agt^M$  и агент основной пропозиции высказывания  $agt^X$ . Некоторые модальные предикаты, такие как *просить*, *запрещать*, *приказывать* и др., описывают взаимодействие двух агентов и имеют третью валентность, которая связывает модальный предикат с  $agt^X$ . Для описания модальности также важны коммуникативные роли говорящего (совпадает с  $agt^M$ ) и адресата **adr**.

В естественных языках, в частности русском и английском, пропозиция предложения обычно выражается при помощи глагола-предиката и его зависимых. Выражающие ее материальное слова составляют большую часть предложения. Модальная пропозиция также должна иметь свое

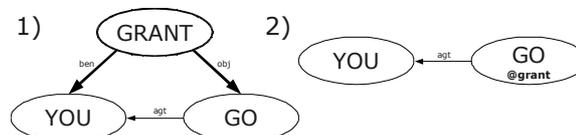
материальное выражение, но не будучи главным содержанием высказывания она должна каким-либо образом быть присоединена к предложению или «наложена» на него экономным и эффективным для речи и письма способом. Прежде всего, экономия достигается благодаря совмещению знаков для выражения частей обеих пропозиций. Например, в предложении «**Я могу быстро бегать**» подчеркивание показывает части модальной пропозиции, а жирный шрифт — основной.

Естественные языки имеют множество различных способов выражения модальностей, которые позволяют достигать большой экономии. Модальные пропозиции часто подвергаются эллипсису, поскольку действующие лица уже известны из контекста, и остается только модальный предикат. Он содержит в себе все минимально необходимые характеристики модальной пропозиции, и может выражаться любым способом (например в виде модальных вспомогательных глаголов, клитик, вводных слов и фраз). В предложении «*Видимо, Ивана еще нет дома.*» модальность предположения «свернута» в одно вводное слово *видимо*, и может быть «развернута» в эквивалентном предложении «*Я полагаю, что Ивана еще нет дома.*»

### 3. Средства выражения модальности в UNL

Искусственный язык UNL стремится быть интуитивно понятным, и в нем сохраняются те же причины для поиска лаконичных средств передачи сопутствующей модальной пропозиции, что и естественных языках. Средства экономного выражения модальности очень похожи на приведенные выше примеры из естественного языка.

В UNL предложение с модальностью может быть передано двумя способами: «свернутым» при помощи атрибутов или «развернутым» с использованием идентичных атрибутов по смыслу UW. Это показано на рисунке 1 на примере предложения «*Ты можешь уйти.*»/«*You may go.*».

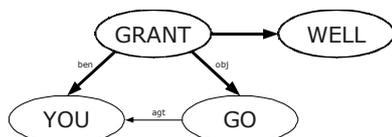


**Рис.1 Два способа записи модальной пропозиции разрешения в UNL: с помощью атрибута @grant и одноименного UW.**

Предпочтительным способом для UNL являются атрибуты. Они позволяют обеспечить простоту и однозначность описания модальности, некоторое упрощение графа и четкое отделение модальных пропозиций **M** от основных пропозиций **X**.

Однако, При использовании атрибутов сам формат записи графа накладывает ограничения, которые не позволяют ввести какие-либо дополнительные компоненты модальной пропозиции. Их просто невозможно присоединить к атрибуту. Похожие ограничения также свойственны многим способам выражения модальности в естественных языках. Нельзя сказать «Я можешь ты уйти.» Однако, часто употребляемые эллиптированные или «свернутые» модальные пропозиции не имеют дополнительных компонентов и могут быть закодированы с помощью атрибутов без проблем.

Если модальная пропозиция помимо модального предиката содержит какие-либо обстоятельства или актанты, которые не совмещаются с актантами предиката основной пропозиции, то ее необходимо представить в графе так же, как мы поступаем с декларативными пропозициями. Например, на рисунке 2 показан граф предложения «Ты вполне можешь уйти.» («You may well go.»), в котором нельзя воспользоваться атрибутом @grant из-за наличия обстоятельства *вполне*.



**Рис.2: В этом случае использовать атрибут невозможно.**

#### 4. Применяемый сейчас набор атрибутов

В настоящий момент основным документом, который определяет стандарт языка UNL, является спецификация UNL 2005 г. [1] с дополнением от 2006 г. Согласно этому документу, для описания модальности во всех языках предлагаются 20 атрибутов. Они разбиты на несколько групп, как показано в Таблице 1.

**Таблица 1: Атрибуты для выражения модальных значений согласно спецификации UNL 2005 г.**

Группа	Атрибуты
Attitudes	@request, @imperative, @invitation
Ability	@ability
Consent / Dissent	@grant, @grant-not
Expectation	@expectation, @wish
Intention	@insistence, @intention, @want, @will
Necessity / Obligation	@need, @obligation, @obligation-not, @should
Possibility	@certain, @inevitable, @may, @possible, @probable, @rare

В эту таблицу не вошли некоторые атрибуты, которые входят в соответствующие группы, но не могут считаться модальными, или описывают некоторые логические отношения между частями предложения. Например, атрибут @although - «Something follows against [contrary to] or beyond expectation». Эти атрибуты находятся за рамками этой статьи, и в их отношении не делается никаких утверждений или рекомендаций.

Попытки использовать набор атрибутов в таблице 1 для разметки реальных текстов ясно показали его недостаточную определенность и неполноту. Заметно, что весь набор основан на ограниченном материале английского и японского языков. Так, невошедшие в таблицу 1 атрибуты @get-benefit - "Speaker's feeling of receiving benefits through the fact or result of something (to be) done by somebody else" и @give-benefit - "Speaker's feeling of giving benefits by doing something for somebody else" мотивируются существованием соответствующих вспомогательных глаголов в японском языке. При этом, согласно данным [3] в прочих языках существуют еще другие виды модальности, которые также выражаются нелексическими средствами, такими как клитки и специальные синтаксические конструкции. В качестве примера можно привести эвиденциальность, то есть указание на источник сообщаемой информации. Спецификация UNL 2005 не содержит средств для ее выражения. Между тем, категория эвиденциальности связана с эпистемической модальностью Аристотеля и, согласно данным [3], составляет основу системы модальных показателей многих языков мира.

#### 4.1. Неполнота набора атрибутов

UNL как нейтральный язык-посредник должен иметь средства, позволяющие одинаково хорошо передавать смысл текста на любом естественном языке. Существующий набор модальных атрибутов почти полностью покрывает систему английской модальности, но не соответствует потребностям языков, чья система модальных показателей устроена иначе или требует более детальной классификации модальных предикатов.

Более того, заложенный в спецификацию набор модальных атрибутов недостаточен для записи некоторых совершенно обычных модальностей. Рассмотрим предложение «Ракета не может двигаться быстрее света». Способность совершать действие выражается при помощи атрибута @ability, но нет никакого атрибута для выражения обратного, то есть неспособности совершить действие. В естественных языках, например русском и английском, отрицание модальности может достигаться всего лишь добавлением отрицательной частицы *не/not*

к модальному глаголу.<sup>2</sup> Мы не можем поступить так же в UNL.

Если к атрибуту *@ability* при узле «двигаться» прибавить атрибут отрицания *@not*, то предложение станет неоднозначным. Эту комбинацию можно будет прочесть как «не может двигаться» и «может не двигаться». Однако, следуя общему принципу, что атрибуты приписываются только к узлам и не могут модифицировать друг друга, фразу следует читать как «Ракета может не двигаться быстрее света». Чтобы выразить требуемый смысл, необходима серьезная переделка и усложнение всего графа, как на Рисунке 3. Здесь вместо атрибута используется «развернутая» конструкция со специальным UW.

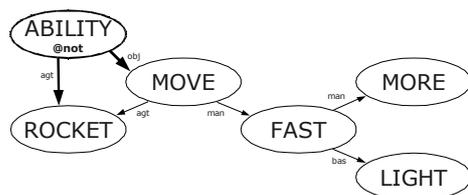


Рис.3 Отрицание модального предиката

Такое сильное различие структур в результате элементарного отрицания является существенным неудобством. С практической точки зрения оно затруднит сравнение семантических графов для установления смысловой близости высказываний, как это делает, например, поисковая система Exactus [7]. В более общем плане это будет означать фрагментарность набора атрибутов.

#### 4.2. Отсутствие системности и организации атрибутов

Деление атрибутов на группы мало говорит о связях атрибутов между собой. В одну группу могут входить как чрезвычайно близкие атрибуты, выражающие разные степени одной и той же модальности, так и атрибуты совсем другого типа модальности. Например, в группе *Intention* атрибуты *@will* и *@insistence* определены как «*Determination to do something*» и «*Strong determination to do something*», соответственно. Из этих определений следует, что различие между ними состоит только в силе намерения. Получается, что их следует считать выражениями одной и той же модальности с небольшим уточнением.

Рядом с ними имеется атрибут *@want* с определением «*Desire to do something*». Его, видимо, можно противопоставить с *@will* как (непроизвольное) желание и (рационально обоснованное) намерение, то есть как близкую, но другую модальность.

Все три перечисленных атрибута объединены тем, что описывают динамическую модальность, когда модальный агент совпадает с агентом

основной пропозиции. Четвертый атрибут из этой же группы — *@intention*, определяемый как «*Intention about something or to do something*», отличается тем, что в нем нет совпадения модального агента (которым является говорящий) и агента пропозиции. Это следует из официального примера «*He shall<sup>@intention</sup> get this money. (Speaker's intention)*». Он относит выражаемую в этом предложении атрибутом *@intention* модальность в разряд деонтических и заставляет понимать «*intention*» как угрозу или обещание.

Таким образом, в одной группе объединяются как тесно связанные и трудноразличимые между собой, так и совершенно отличные от прочих модальности.

#### 4.3. Недостаточная строгость определений

Как видно из приведенных выше примеров, наиболее глубокая формально определяемая разница между значениями атрибутов *@intention* и *@will* никак не очевидна из данных им словесных определений. Ее приходится извлекать из примеров, которые также нельзя считать однозначными. Второй и последний пример для атрибута *@intention* таков: «*We shall<sup>@intention</sup> let you know our decision.*». В нем нет противопоставления двух агентов. Эту фразу вообще нельзя считать примером модального употребления английского глагола *shall*, а возможный в UNL модальный оттенок должен быть обозначен с помощью *@will* или *@insistence*, так как «*We*» обозначает и говорящего, и того, кто сообщит решение.

Это не единственный пример плохо противопоставленных определений атрибутов в спецификации 2005. Вот еще три атрибута из другой группы: *@possible* — «*Logical possibility that something is true or happens*», *@probable* — «*(Practical) probability that something is true or happens*», *@may* — «*Practical possibility that something is true or happens*». Атрибуты *@possible* и *@probable* указывают на наличие условий для реализации пропозиции X. В качестве единственного различия между ними указан аспект умозрительности либо эмпиричности оценки. Что касается разницы между *@may* и *@probable*, то понять ее из этих определений практически невозможно. Это всегда будет провоцировать различные и спорные толкования.

#### 4.4. Неудачные названия атрибутов

Считается, что названия единиц языка UNL должны быть интуитивно понятны каждому, кто владеет английским языком. Однако, как показано выше в п. 4.2, название атрибута *@intention* не позволяет интуитивно понять его истинный смысл обещания одного лица другому.

<sup>2</sup> Отрицание модального глагола иногда приводит к серьезной логической переинтерпретации предложения.

Кроме того, названия атрибутов *@may*, *@should*, *@will* соответствуют английским модальным и вспомогательным глаголам, каждый из которых многозначен. Эти глаголы могут выражать совершенно разные и далеко отстоящие друг от друга модальности, что делает эти названия непонятными.

Итак, ни названия, ни определения модальных атрибутов в спецификации 2005 не позволяют нам с уверенностью определять их смысл и границы их применимости.

Это заставляет предложить новый расширенный набор атрибутов модальности, уточненные определения уже существующих атрибутов и систему их организации.

## 5. Принципы организации системы модальных атрибутов

Новый набор модальных атрибутов сформирован следуя эволюционному подходу, поскольку общий стандарт языка UNL и формат графов определены и стабильны. Противоречащие сложившейся практике изменения могут вызвать проблемы совместимости работающих с этим языком разных лингвистических процессоров. Поэтому, в новую систему включены все старые модальные атрибуты кроме *@may*, *@should* и *@will*.<sup>3</sup> Однако, унаследованные атрибуты получают более жесткие определения. Список модальных атрибутов в новой системе расширен, чтобы не оставлять лакун. Кроме атрибутов общераспространенных модальностей новый набор содержит эвиденциальные атрибуты, которые позволяют указать источник сообщаемой говорящим информации.

Все атрибуты объединены в общую иерархическую схему, которая представлена в виде таблицы 2. В ней содержатся определения всех рассматриваемых типов модальности и перечень всех возможных атрибутов для каждого типа с учетом возможности отрицания и градаций по силе.

### 5.1. Стандартные модификаторы

Терминальные классы дерева модальностей представляют собой выделяемые в естественных языках прототипичные модальные ситуации, например «*agt<sup>M</sup> высказывает свою оценку вероятности того, что X имеет место*». На основе таких прототипов образуются серии модальных пропозиций, объединенных по схожести сценария отношений между участниками модальной пропозиции. Различия между частями одной серии модальных пропозиций описываются с помощью отрицания и усиления модального предиката. Отрицание может быть эквивалентно замене

<sup>3</sup> Эти атрибуты будут оставлены для совместимости в качестве нежелательных синонимов новых атрибутов с тем же значением.

модального предиката на обратный, например: *не разрешать X = запрещать X*.

Усиление означает замену модального предиката на подобный, но более сильный, выражающий высшую степень действия или состояния, например: *просить* — *умолять*, *предполагать* — *быть уверенным* и т.п. Часто такая замена связана с эмоциональным отрицанием альтернативных вариантов развития событий. Усиление имеет смысл для тех модальностей, которые можно описать в виде шкалы какого-либо признака, например уверенности, желания и т.п.

В результате, возникают единообразно организованные серии стандартных модальных пропозиций на основе разных прототипичных ситуаций. Вот пример такой серии:

- *agt<sup>M</sup>* предполагает, что X имеет место.
- *agt<sup>M</sup>* верит, что X имеет место. (усиление)
- *agt<sup>M</sup>* не предполагает, что X имеет место. (отрицание)

Это позволяет создать внутренне организованную и мотивированную систему для обозначения в UNL всех стандартных модальностей, которая бы отражала сходство модальных пропозиций, связанных с общим прототипом.

### 5.2. Обобщающие атрибуты

В крупных разделах третьего уровня может иметься один обобщающий атрибут, которым можно пользоваться, если ваш естественный язык не требует более тонких различий. Обобщающим атрибутом можно заменить любого из его соседей в группе. Так, в одном из разделов таблицы, который соответствует прототипу «*agt<sup>M</sup> способен совершить X*» присутствуют дополнительные варианты:

- *agt<sup>M</sup> способен (знает как) совершить X*.
- *agt<sup>M</sup> способен (физически) совершить X*.
- *agt<sup>M</sup> способен (нет помех) совершить X*.
- *agt<sup>M</sup> способен (имеет право) совершить X*.
- *agt<sup>M</sup> способен (имеет смелость) совершить X*.

Любой из них можно приравнять к просто *@ability*.

### 5.3. Названия новых атрибутов

Удобным способом именованья атрибутов представляется присвоить уникальное мнемоническое обозначение каждой из прототипичных ситуаций, и использовать его в названии всех производных от него атрибутов. Поскольку для обозначения модальности в UNL могут использоваться как UW, так и атрибуты, логичным будет сделать заглавные слова модальных UW совпадающими с дублирующими эти UW атрибутами.

Каждая из прототипических модальных ситуаций получает свое уникальное имя, которое становится названием атрибута. Большинство из них совпадает со старыми атрибутами. Например: *@ability*, *@obligation*, *@intention*, *@need* и т.п. Поскольку каждый прототип является основой серии сходных модальностей, то к его имени добавляются суффиксы-модификаторы *-not* и *-strong* для обозначения инверсии и усиления. Например, *@probable-strong*, *@probable*, *@probable-not*. Суффикс *-not* отличается от атрибута *@not* тем, что относится непосредственно к модальному атрибуту, а не к узлу, к которому приписан этот атрибут. Например, *@grant-not* означает «запрещено делать X», а *@grant.@not* - «разрешено не делать X». Это обеспечивает компактность и понятность системы атрибутов. Дополнительное удобство состоит в том, что

связанные по смыслу атрибуты будут идти рядом в алфавитном списке.

#### 5.4. Альтернативные названия атрибутов

Любой из стандартных атрибутов может иметь более мнемоничный синоним. Например: *@grant-not* — *@prohibition*. Это может упростить понимание атрибутов. Некоторые из унаследованных старых атрибутов становятся синонимами новых. Например, старый атрибут *@inevitable* объявляется синонимом нового *@possible-strong*. Такое решение позволит системам порождения текстов на естественном языке из UNL обрабатывать все использующие старый набор атрибутов документы UNL наравне с теми, где применяется новая система атрибутов.

**Таблица 2: Система модальных и эвиденциальных атрибутов: общее устройство**

1	Пропозициональная модальность agt <sup>M</sup> (=Говорящий) высказывает agt свое суждение об X.									
2	Эвиденциальная модальность agt <sup>M</sup> сообщает agt источник своего суждения о том, что X соответствует действительности.									
3	agt <sup>M</sup> говорит как участник события X.			agt <sup>M</sup> говорит как свидетель X, ссылаясь на свои органы чувств.			agt <sup>M</sup> передает чужое сообщение или знание об X.			
4	agt <sup>M</sup> сам совершает X, т.е. agt <sup>M</sup> и . agt <sup>X</sup> — одно лицо.	agt <sup>M</sup> является объектом X и испытывает происходящее на себе.	* agt <sup>M</sup> не указывает канал восприятия X	agt <sup>M</sup> видит X.	agt <sup>M</sup> слышит X.	agt <sup>M</sup> воспринимает X всеми органами чувств сразу.	* agt <sup>M</sup> не называет источник своих сведений об X	agt <sup>M</sup> ссылается на свидетеля X	agt <sup>M</sup> ссылается на слухи, молву	agt <sup>M</sup> ссылается на общеизвестную истину
	@performed	@experienced	@sensed	@seen	@heard	@all-senses	@reported	@witnessed	@rumour	@common-belief
strong										
	performed	experienced	sensed	seen	heard	all-senses	reported	witnessed	rumour	common-belief
-not	performed-not	experienced-not	sensed-not	seen-not	heard-not	all-senses-not	reported-not	witnessed-not	rumour-not	common-belief-not

(Пропозициональная модальность)

Эпистемическая модальность agt <sup>M</sup> сообщает agt о степени своей уверенности в том, что X соответствует действительности.		Оценочная модальность agt <sup>M</sup> высказывает свое отношение к X.	
Лог. обоснованность agt <sup>M</sup> делает вывод о том, соответствует ли X действительности, основываясь на наблюдаемых фактах и логике.	Вероятность agt <sup>M</sup> делает вывод о том, можно ли ожидать, что X соответствует действительности, основываясь на прошлом опыте и общем знании.	* Предположение agt <sup>M</sup> делает предположение о том, соответствует ли X действительности.	agt <sup>M</sup> оценивает желательность X для себя.
@possible	@probable	@suppose	@wish
possible-strong <b>inevitable</b>	probable-strong <b>expectation</b>	suppose-strong <b>certain</b>	wish-strong
<b>possible</b>	<b>probable</b>	suppose <b>may</b>	<b>wish</b>
possible-not <b>rare</b>	probable-not	suppose-not certain-not	wish-not

## Продолжение Таблицы 2

1	<b>Событийная модальность</b> Событие X потенциально, но может стать реальным в результате действий agt <sup>x</sup> .							
2	<b>Деонтическая модальность</b> Существует внешний стимул или важное условие для совершения X.							
3	<b>Необходимость/Обязанность</b> agt <sup>x</sup> должен (не) совершить X по объективно существующим причинам.			<b>Директивная модальность</b> agt <sup>x</sup> должен (не) совершить X в зависимости от воли agt <sup>m</sup> .				<b>Обещание</b> agt <sup>m</sup> обещает adr добиться того, что X станет реальным.
4	<b>* Необходимость</b> agt <sup>x</sup> необходимо совершить X для удовлетворения своей потребности	<b>Обязанность</b> agt <sup>x</sup> (не) обязан совершить X по причине внешней для agt <sup>m</sup> и agt <sup>x</sup> , (закону, традиции, правилам).	<b>Просьба</b> agt <sup>m</sup> (не) просит adr, чтобы X стало реальностью. Решение остается за adr.	<b>Предложение</b> agt <sup>m</sup> (не) предлагает adr, что сам agt <sup>m</sup> совершит X. Решение остается за adr.	<b>Совет</b> agt <sup>m</sup> (не) рекомендует agt <sup>x</sup> совершить X. Решение остается за agt <sup>x</sup> .	<b>Команда</b> agt <sup>m</sup> дает agt(X) обязательное для исполнения распоряжение совершить X.	<b>Разрешение</b> agt <sup>x</sup> хочет совершить X. agt <sup>m</sup> разрешает или запрещает agt <sup>x</sup> совершить X.	
	@need	@obligation	@request	@suggestion	@recommendation	@order	@granted	@promise
-strong	need-strong	obligation-strong	request-strong	suggestion-strong	recommendation-strong	order-strong <b>imperative</b>		promise-strong
	<b>need</b>	<b>obligation</b>	<b>request</b>	<b>suggestion invitation</b>	<b>recommendation should</b>	order	<b>grant</b>	promise
-not	need-not	<b>obligation-not</b>	request-not	suggestion-not	recommendation-not	order-not	<b>grant-not</b>	promise-not

**Событийная модальность**

Станет ли реальным потенциальное событие X, зависит от действий agt<sup>x</sup>, которые определяет дополнительный фактор.

**Динамическая модальность**

Осуществление X зависит от собственного состояния или свойства agt<sup>x</sup>.

<b>Стремление</b> Осуществление X связано с волей agt <sup>x</sup>		<b>Способность</b> Осуществление X зависит от объективного обстоятельства, т.е. способности или возможности для agt <sup>x</sup> совершить X.					
<b>* Желание</b> agt <sup>x</sup> (не) имеет желания совершить X	<b>Намерение</b> agt <sup>x</sup> (не) планирует совершить X	<b>* Способность</b> agt <sup>x</sup> (не) имеет способности совершить X.	<b>Знание</b> agt <sup>x</sup> (не) знает как совершить X.	<b>Сила</b> agt <sup>x</sup> физически (не) в состоянии совершить X.	<b>Возможность</b> Для agt <sup>x</sup> (не) существует препятствий, делающих X невозможным.	<b>Право</b> agt <sup>x</sup> (не) имеет право совершить X	<b>Смелость</b> agt <sup>x</sup> (не) имеет смелость или внутреннюю силу совершить X.
@want	@intention	@ability	@knowhow	@strong	@free	@right	@courage
want-strong	intention-strong <b>insistence</b>						
<b>want</b>	<b>intention will</b>	<b>ability</b>	knowhow	strong	free	right	courage
want-not	intention-not	ability-not	knowhow-not	strong-not	free-not	right-not	courage-not

**Легенда**

X	Пропозиция, которая является основным содержанием предложения, диктум.
agt <sup>x</sup>	Агент пропозиции X.
M	Модальная пропозиция, выражающая отношение говорящего к X, модус.
agt <sup>m</sup>	Агент модальной пропозиции (В пропозициональных модальностях совпадает с говорящим)
*	Обобщающий атрибут своего раздела
Серый шрифт	Модальности, которые не важны для английского и русского, но могут использоваться для других языков
<b>Жирный шрифт</b>	Имена атрибутов используемые в спецификации 2005.
Серая клетка	Соответствующий атрибут не имеет смысла или происходит неизбежный подъем отрицания.

**5.5. Модальность и отрицание**

Присоединение отрицания к модальному предикату может очень сильно менять смысл предложения, причем эффект зависит от типа модальности.

Некоторые модальности, например @ability и эвиденциальные, толкуются в рамках двоичной логики и могут иметь только два значения. Они стандартно реагируют на отрицание, а модификатор усиления для них не имеет смысла, что показывают пустые клетки в таблице 2.

Другие, например @suppose представляют собой шкалу какого-либо признака, (веры, желания

и т.п.). Для них наиболее важен модификатор усиления *-strong*, который задает высшее значение шкалы. Атрибут без отрицания означает среднюю степень модального параметра, а отрицание *-not* в этом случае указывает на низшую точку шкалы. Более тонкие градации могут передаваться с помощью дополнительных определений, присоединяемых к модальному предикату. Существуют также модальности, которые совмещают бинарный признак и шкалу, например *@obligation*, где кроме наличия и отсутствия обязательства одновременно усматривается шкала степени обязанности «нет обязанности» - «следует» - «обязан».

Для всех модальностей со шкалой возможна комбинация отрицания с усилением, но она является избыточной. При отрицании высшей (абсолютной) степени шкалы действует логический закон исключенного третьего, выражающийся в тождестве выражений *не верно что X* и *верно что не X*. В результате, запись *@атрибут-not* оказывается равнозначной *@атрибут.@not*.

В естественных языках это явление проявляется через подъем отрицания и изменение его сферы действия [6]. Например, в предложении «*Вам не следует пить так много*», где частица *не* формально присоединяется к глаголу *следует*, подъем отрицания приводит к тому, что сфера действия *не* включает вовсе не модальную пропозицию «*Вам следует X*», а пропозицию «*пить так много*». Мы понимаем эту фразу как «*Вам следует не пить так много*». В UNL такого автоматического переноса сферы действия не бывает. Действие атрибута *@not* распространяется исключительно на тот узел графа, к которому он приписан. Если требуется иное, то есть специальное средство для явного обозначения сферы действия. Любую нужную группу узлов UNL-графа можно объединить в гиперузел, то есть узел, внутри которого заключено несколько других узлов с их связями, и присвоить ей атрибут как единому целому. Это позволяет записать любые варианты прочтения примера, отрицая любую из двух пропозиций, любую из их частей или все предложение сразу.

### 5.6. Комбинации атрибутов

На поверхностное выражение модальности в естественных языках влияют смежные категории времени, наклонения, вида, а также вежливости и эмпазы. В UNL они обозначаются атрибутами: *@polite*, *@emphasis*, *@interrogative*, *@unreal*, *@past*, *@repeat* и т.п.. Среди них стоит выделить атрибут *@unreal*, который позволяет указать на нереальность пропозиции независимо от наличия модальных атрибутов. Показатели нереальности во многих языках входят в систему показателей модальности, а многие модальные атрибуты имплицитно сообщают о нереализованности пропозиции.

Поэтому *@unreal* следует считать естественным спутником модальных атрибутов, который может быть опущен.

Атрибуты модальности с атрибутами сопутствующих категорий образуют большой набор комбинаций. Как и в естественном языке, комбинирование может логически порождать вторичные оттенки, например:

- *@request.@polite* = вежливая просьба.
- *@suppose.@future* = ожидание
- *@wish-not.@past* = сожаление

Разрешается соединять вместе при одной пропозиции X два модальных атрибута. Например, *@grant.@probable.@future* будет обозначать «*возможно будет разрешено*», при этом агент модальных пропозиций *@grant* и *@probable* совпадает.

Комбинации с атрибутом вопросительности *@interrogative* позволяют с помощью одних только атрибутов превращать утверждения в вопросы типа «*разрешите ли X?*» (*@grant.@interrogative*) или «*Разве не видно, что X?*» (*@visual.@negative.@interrogative*).

## 6. Заключение

Предлагаемый расширенный набор атрибутов, система их организации и принципы взаимодействия позволяют значительно улучшить возможности языка UNL по передаче модальности, уравнивая их с возможностями естественных языков. Сохраняется обратная совместимость с документами UNL, написанными в рамках спецификации 2005. Это предложение было экспериментально опробовано и практически реализуется в рамках конвертера UNL на базе ЭТАП.

## 7. Литература

- [1] *UNL Specifications 2005*  
<http://www.unl.org/unlsys/unl/unl2005>
- [2] Boguslavsky I., Cardeñosa J., Gallardo C., Iraola L. "The UNL Initiative: An Overview", *Computational Linguistics and Intelligent Text Processing*, 2005.
- [3] Palmer, F.R. *Mood and Modality*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [4] von Wright, E.H.. *An essay in modal logic*. Amsterdam: North Holland, 1951.
- [5] Балли, Ш. *Общая лингвистика и вопросы французского языка*. М. : Наука, 1955. С. 44.
- [6] Богуславский, И.М. *Сфера действия лексических единиц*. М. : Школа «Языки русской культуры», 1996.
- [7] Тихомиров И.А., "Вопросно-ответный поиск в интеллектуальной поисковой системе Exactus", *Труды РОМИП'2006*,  
<http://romip.narod.ru/romip2006/index.html>

## Компьютерная система обучения владению языком - опыт практического применения

Дяченко Павел

Лаборатория компьютерной лингвистики ИППИ РАН  
pavelvd@iitp.ru

### Аннотация

*В настоящей статье<sup>1</sup> описывается опыт практического использования компьютерной системы обучения владению языком, разработанной ранее [1, 2, 3]. Основной целью проводимой работы является развитие у пользователей системы навыков владения комбинаторным потенциалом изучаемого естественного языка. Одним из наиболее совершенных инструментов описания несвободной сочетаемости слов, доказавшим свою практическую значимость при построении систем автоматической обработки текстов, является аппарат лексических функций (ЛФ), который был предложен И. А. Мельчуком [4] и А. К. Жолковским в серии работ по модели «Смысл – Текст». Теория ЛФ была существенным образом уточнена и дополнена Ю. Д. Апресяном. Использование описания лексической сочетаемости слов в терминах аппарата ЛФ составляет основу нашей системы. В данном материале мы кратко повторяем основные положения работы, а также описываем идею и результаты эксперимента, в ходе которого несколько групп пользователей работали с системой по составленной заранее программе.*

### 1. Введение

Степень владения естественным языком можно оценить по тому, насколько свободно человек может выразить на данном языке свои мысли и варьировать свои высказывания в зависимости от речевого контекста без потери или искажения смысла фразы. Для этого ему необходимо не только правильно понимать значения слов языка, но и уметь правильно (идиоматично) сочетать слова между собой. Это явление находит отражение, в частности, в том, что одна и та же характеристика, приписываемая

денотату, может выражаться по-разному для различных лексических единиц. Это обстоятельство делает задачу построения правильного и идиоматичного высказывания особенно сложной, причем не только для программ порождения текста и не только для лиц, изучающих данный язык как иностранный, но нередко даже и для самих носителей языка. Мы исходим из того, что наиболее эффективным средством обучения сложным и слабо структурированным аспектам лексической системы является построение компьютерной системы, позволяющей организовать этот процесс в игровой форме.

Опыты построения подобных обучающих систем уже существуют. Первоначально идея использовать аппарат ЛФ в целях обучения естественным языкам была сформулирована в начале 90-х годов 20 века Ю. Д. Апресяном и Л. Л. Цинманом - появилась идея компьютерных лингвистических игр, была разработана первая версия лингвистического обеспечения и программных модулей, реализующих обучающие алгоритмы. Работа над лингвистическими основами и концепцией учебника была продолжена в середине 90-х годов в рамках двух проектов программы INTAS трех групп исследователей: группой лингвистов и математиков лаборатории компьютерной лингвистики ИППИ РАН под руководством Ю. Д. Апресяна (словари слов русского и английского языков, словари ЛФ русского и английского языков, идеология лингвистических игр), группой лингвистов Гейдельбергского университета под руководством П. Хельвига (словарь немецких слов объемом в 500 единиц) и группой лингвистов Клагенфуртского университета под руководством Т. Ройтера (словарь немецких слов объемом в 500 единиц и словарь немецких ЛФ).

Мы использовали идеи этого проекта с учетом исследований последних лет [5,6]. Подробно о работе можно прочитать в [1], ниже мы кратко перечислим ее основные положения.

<sup>1</sup> Эта работа частично поддержана средствами гранта РФФИ № 08-06-00344.

## 2. Лексические функции

Под элементарной *лексической функцией* (ЛФ) понимается достаточно общее значение или семантическое отношение, которое может выражаться многими различными словами, причем выбор конкретного слова зависит как от его собственного лексического значения, так и от того, при каком ключевом слове (аргументе функции) выражается данное общее значение или отношение. ЛФ связывает тройку зависящих друг от друга объектов: самое функцию, ее *аргумент* и ее *значение*. ЛФ в общем случае являются многозначными, т. е. могут иметь более одного значения для данного аргумента.

С точки зрения формальной математики ЛФ являются бинарными отношениями, заданными на множестве слов и словосочетаний при помощи перечисления пар «аргумент-значение».

Пример: **Magn** ~ *большая степень или интенсивность X-a*.

Magn (контроль) = *строгий / надежный / неослабный / особый / усиленный*

Magn (знать(предмет)) = *досконально / хорошо / на зубок / как свои пять пальцев / отлично / как следует / твердо / прекрасно*

На сегодняшний день словарь системы содержит описание 116 ЛФ. Согласно постулату И. А. Мельчука, существует универсальный для всех человеческих языков набор *стандартных элементарных* ЛФ, который включает около 50-60 единиц. На их основе образуются *сложные (неэлементарные)* ЛФ, также универсальные, число которых, по-видимому, вдвое превосходит число элементарных ЛФ. Кроме того, существует значительное число нестандартных ЛФ, которые не обладают свойством универсальности. Описываемый учебник основан на стандартных элементарных и неэлементарных ЛФ.

Словарь разработанной системы состоит из двух пересекающихся логических частей – Словаря ЛФ и Словаря слов, оба словаря содержат массивы значений ЛФ. Эти массивы составлялись раздельно, поскольку каждый из них должен был отвечать своему набору критериев. Аргументы и значения Словаря ЛФ, используемые в игре «Лексические функции», должны иллюстрировать все наиболее характерные свойства той или иной ЛФ, и при этом среди них не должно быть большого количества повторов значений или однообразия. Значения ЛФ, относящиеся к Словарю слов, должны наиболее полным образом описывать свойства лексемы-аргумента. При этом очевидно, что Словарь слов будет содержать достаточно много повторяющейся информации как для однокоренных лексем, так и для лексем, принадлежащих к одному лексикографическому

типу. Например, для большинства фрутков будут характерны значения функций «цветет», «растет», «созревает», «спелый» и т. п.

## 3. Лингвистические игры

Цель разработки нашей обучающей системы - обеспечить контроль и развитие у пользователя навыков владения выбранным естественным языком на основе хранящейся в системе лингвистической информации [1]. Обучение организовано в форме лингвистических игр, на сегодняшний день их число 5. В ходе описываемого эксперимента использовалась только одна игра и только Словарь ЛФ.

Лингвистические игры разбиты на отдельные шаги, каждый из которых соответствует одному вопросу системы пользователю. Количество таких шагов в каждом конкретном случае определяется либо самим пользователем, либо объемом подготовленного лексического материала. Пользователь может остановить игру на любом шаге. В этом случае, а также при прохождении всех шагов, пользователь возвращается к списку игр.

Реализована система подсчета баллов, начисляемых игроку за правильные ответы. Подсчет баллов ведется с учетом уровня сложности каждой конкретной лингвистической игры и общего количества правильных ответов на текущий вопрос в словаре. В случае существования более одного варианта правильного ответа система предлагает обучаемому возможность дать альтернативный ответ, что подразумевает знание синонимических средств языка. Каждое новое значение оценивается на один балл выше, чем первое, таким образом, с помощью альтернативных ответов участник игры может набирать дополнительные баллы.

На основании полученных ответов система формирует три оценки – текущую, нормальную и максимальную. Текущей называется оценка, равная сумме баллов, начисленных за все правильные ответы участника. Нормальной (базовой) называется оценка, равная сумме баллов за один правильный ответ на каждый из предложенных вопросов. Максимальной называется оценка, равная сумме баллов в случае получения трех правильных ответов на каждый вопрос, допускающий от трех и более правильных ответов.

Все ответы пользователя, отличные от словарных, сохраняются системой и могут быть просмотрены как педагогами для анализа обучающего процесса, так и авторами системы для ее совершенствования.

Мы надеемся, что разработанная система может быть полезна как для совершенствования знаний носителей языка, так и для изучающих язык как иностранный. Система может быть усовершенствована за счет добавления новых игр, использования педагогических методик и развития вспомогательных утилит.

#### 4. Опыт практического применения

Для проверки возможностей разработанной системы мы провели эксперимент, представляющий собой работу с обучающей системой нескольких групп пользователей по составленной заранее программе. В процессе эксперимента участники работали с обучающей системой, используя ограниченный словарь русского языка и только одну игру – «Лексические функции». Целью эксперимента было выяснить, в какой степени участники владели несвободной лексической сочетаемостью до начала работы с системой, и определить, помогает ли она добиться прогресса в их знаниях.

Для этого в начале обучения и после его завершения участники эксперимента проходили тестирование. При выполнении теста участники были ограничены по времени, в течение которого для каждого аргумента они могли предложить вариант значения ЛФ. Если участник мог дать свой вариант ответа менее чем за половину отведенного для этого времени, ему предоставлялась возможность указать второй вариант ответа. Цель временного ограничения - поставить всех участников в равные условия и ограничить общее время выполнения теста. При этом участник мог отказаться от попытки дать второй вариант ответа или от вопроса целиком, если это вызывало у него серьезные затруднения. В режиме тестирования программа сохраняла все ответы пользователей – как совпадающие со словарными вариантами, так и отличные от них, что дает возможность при анализе результатов восстановить полный ход работы каждого участника. В процессе тестирования участникам не сообщалось о набранных ими баллах, правильные ответы также не показывались. В ходе обучения участники работали с системой в обычном режиме.

Всего было проведено несколько серий эксперимента. Лексический материал всех серий был общим, чтобы результаты всех участников имели идентичную структуру, и их можно было бы сравнивать между собой. В данной работе мы рассмотрим результаты двух серий. В рамках первой с обучающей системой работали студенты первого и четвертого курса Института лингвистики РГГУ и старшеклассники средней школы, участники лингвистического кружка при

этом Институте. Во второй серии группа состояла из студентов четвертого курса Факультета славянских филологий Софийского университета им. Св. Климента Охридского.

#### 4.1. Материал эксперимента

При проведении эксперимента весь словарь системы был отключен, за исключением материала, предлагаемого участникам для изучения и вошедшего в тесты. При этом материал был разделен на две неравные части. Большая часть аргументов и соответствующих им значений была доступна участникам при обучении, а меньшая часть – *контрольная группа* использовалась только в ходе тестирования.

Было предусмотрено два различных по сложности варианта материала – базовый и усложненный. Сводная информация по базовому варианту материала представлена в Таблице 1. Поясним обозначения граф этой таблицы. «**Нормальный уровень баллов**» это количество баллов, которое наберет участник, если даст правильное значение ЛФ для каждого предложенного ему аргумента, но не предложит ни одного правильного альтернативного ответа. «**Достижимый максимум баллов**» это количество баллов, которое может набрать участник, если будет использовать все возможности предложить альтернативный ответ, причем все его варианты будут правильными. Графа «Достижимый максимум баллов» показывает реальную максимальную оценку. «**Общий максимум баллов**» это количество баллов, которое мог бы набрать участник, если бы указал все альтернативные значения для всех ЛФ. Поскольку в эксперименте, как и в самой игре «ЛФ», было введено ограничение на количество вариантов ответа на каждый вопрос, «общий максимум баллов» является потенциальной величиной, характеризующей глубину разработки лексического материала в системе.

При подготовке базового варианта лексического материала ставилась задача отобрать ключевые ЛФ, которые в то же время были бы достаточно просты для понимания учащимися. Базовый вариант эксперимента включает 11 ЛФ первого уровня сложности - Magn, Anti, AntiMagn, Incep, Fin, Degrad, Sing, Mult, Equip, Gener, Loc – в общей сложности 220 аргументов и 379 соответствующих им значений.

При подборе материала для усложненного варианта эксперимента ставилась цель охватить все уровни сложности ЛФ. Он состоит из 230 аргументов 22 ЛФ: 113 аргументов для 11 ЛФ первого уровня сложности (Magn, Anti, AntiMagn, Incep, Fin, Degrad, Sing, Mult, Equip, Gener, Loc -

те же ЛФ, что и в базовом варианте, но с существенно ограниченным набором аргументов), 95 аргументов для 9 ЛФ второго уровня сложности (Bon, AntiBon, Caus, Func0, Func1, Func2, Labor, Oper1, Oper2) и 22 аргумента для 2 ЛФ третьего уровня сложности (REAL1 и REAL1-M). Нормальный уровень баллов для

этого варианта равен 369, достижимый максимум баллов равен 614, общий максимум баллов равен 729. Легко заметить, что эти цифры существенно превосходят значения базового уровня. Это происходит за счет того, что за сложные ЛФ начисляются более высокие баллы.

Таблица 1: Содержание базового варианта теста.

N п/п	Имя функции	Уровень сложности ЛФ	Количество аргументов	Общее число значений	Нормальный уровень баллов	Достижимый максимум баллов	Общий максимум баллов
1	Magn	1	47	133	47	119	219
2	Anti	1	26	31	26	34	36
3	Antimagn	1	21	38	21	43	55
4	Incep	1	7	9	7	9	11
5	Fin	1	10	20	10	24	30
6	Degrad	1	9	13	9	17	17
7	Sing	1	16	24	16	30	32
8	Mult	1	22	27	22	32	32
9	Equip	1	7	12	7	13	17
10	Gener	1	44	54	44	62	64
11	Loc	1	11	18	11	21	25
	Total		220	379	220	404	538

## 4.2. Результаты тестирования

Для сравнения результатов разных участников требовалось рассчитать некоторую комплексную оценку. Идеология нашей обучающей системы – поощрять правильные ответы пользователей. Каждый дополнительный правильный ответ оценивается большим числом баллов, чем первый. В то же время промахи независимо от их числа не уменьшают количества набранных пользователем баллов. Поэтому мы посчитали неправильным использовать оценку, уже ставшую традиционной, которая учитывает *точность* (precision) и *полноту* (recall) ответов, так называемую f-value. Мы отдали предпочтение оценке полноты ответов, понимаемой как отношение набранных участником баллов к нормальному уровню, а для расчета комплексной оценки подсчитывать полноту для каждой ЛФ теста и суммировать ее с учетом веса этой ЛФ в общем материале. Таким образом, в качестве комплексного показателя уровня знаний мы используем *среднюю взвешенную оценку*, рассчитанную в процентах от нормальной. В Таблице 2 приводится эта оценка для каждого из участников эксперимента в начале обучения и после него.

Начальные результаты показывают существенные пробелы в знании русской несвободной сочетаемости даже у пользователей

с хорошей лингвистической подготовкой, являющихся носителями русского языка – их средний результат составляет только 61,39% от нормального числа баллов. Среднее значение комплексной оценки изучающих русский язык как иностранный несколько ниже – 51,45%, что вполне закономерно. Средняя оценка за первый тест по всем участникам составляет 55,87% от нормального числа баллов

Средняя оценка за заключительный тест у носителей русского языка составила 98,98%, у изучающих русский язык как иностранный 89,34%. Средний результат среди всех участников равен 93,2%.

Из результатов следует, что заключительный результат подавляющего числа участников эксперимента превзошел их начальный результат. Разница колебалась от -9,58% до 72,28% и в среднем составила 35,25%. Отрицательный прирост отмечен только у одной участницы эксперимента. Следует отметить, что, несмотря на разницу в начальных и заключительных оценках между группами, средняя величина прогресса среди носителей русского языка (36,98%) практически равна аналогичному показателю среди изучающих русский язык как иностранный (34,09%). При этом наименьший прогресс в знаниях – отличие от средней величины прогресса более чем в два раза – приходится на трех участников, изучающих русский язык как иностранный, а также на двух

участниц-носительниц русского языка, работавших с усложненным материалом. Это вполне закономерно, учитывая, что время

тренировок для всех групп было одинаково небольшим, а именно перед этими участниками стояла самая сложная задача.

Таблица 2: Результаты обучения.

Информация по результатам обучения					
Имя участника	Группа участника	Вид тестирования	Средняя взвешенная оценка 1-е занятие, % от нормальной	Средняя взвешенная оценка 4-е занятие, % от нормальной	Изменения, %
Кира	Р	функции 1-го уровня	86,82	130,00	43,18
Сорока	Р	функции 1-го уровня	41,36	113,64	72,27
Неля	Р	функции 1-го уровня	85,00	125,45	40,45
Лена	Р	функции 3-х уровней	51,76	53,66	1,90
Катя	Р	функции 3-х уровней	63,41	80,22	16,80
Валя	Р	функции 1-го уровня	43,64	90,91	47,27
Викторсон	И	функции 1-го уровня	44,55	64,55	20,00
Соня	И	функции 1-го уровня	51,36	41,82	-9,55
Дарья	И	функции 1-го уровня	34,55	42,27	7,73
Инна	И	функции 1-го уровня	57,27	102,73	45,45
Людмила	И	функции 1-го уровня	70,45	141,36	70,91
Маша	И	функции 1-го уровня	76,36	134,55	58,18
Николай	И	функции 1-го уровня	40,91	67,27	26,36
Нина	И	функции 1-го уровня	64,55	138,64	74,09
Ваня	И	функции 1-го уровня	57,27	70,91	13,64

#### 4.3. Результаты по контрольной группе значений

В Таблице 3 приведены результаты по контрольной группе. Результаты участников по

этой группе для начального тестирования в целом соответствуют общему результату, приведенному в Таблице 2, поэтому рассматривать их отдельно не имеет смысла. Однако заключительные данные по контрольной группе и их сравнение с начальными представляют значительный интерес.

Таблица 3: Результаты по контрольной группе

Информация по контрольным значениям							
Имя участника	Группа участника	Аргументов до обучения, %	Аргументов в после обучения, %	Изменения, %	Значений до обучения, %	Значений после обучения, %	Изменения, %
Кира	Р	77,78	88,89	11,11	64,71	76,47	11,76
Сорока	Р	50,00	80,56	30,56	35,29	74,51	39,22
Неля	Р	80,56	80,56	0,00	64,71	70,59	5,88
Лена	Р	47,46	54,24	6,78	35,29	41,18	5,88
Катя	Р	72,88	71,19	-1,69	54,12	58,82	4,71
Валя	Р	58,33	69,44	11,11	47,06	54,90	7,84
Викторсон	И	44,44	50,00	5,56	33,33	35,29	1,96
Соня	И	66,67	52,78	-13,89	49,02	37,25	-11,76
Дарья	И	44,44	50,00	5,56	35,29	37,25	1,96
Инна	И	52,78	69,44	16,67	39,22	54,90	15,69
Людмила	И	72,22	75,00	2,78	60,78	62,75	1,96
Маша	И	72,22	83,33	11,11	58,82	68,63	9,80
Николай	И	61,11	55,56	-5,56	43,14	49,02	5,88
Нина	И	63,89	80,56	16,67	54,90	64,71	9,80
Ваня	И	58,33	55,56	-2,78	45,10	39,22	-5,88

Как следует из Таблицы 3, количество правильно указанных контрольных значений

после тренировок у подавляющего числа участников возросло, количество контрольных

аргументов, для которых хотя бы одно значение ЛФ указано правильно, выросло у большинства участников. Средний прогресс по аргументам равен 6,26%, по значениям 6,98%, что значительно ниже средней величины прогресса по общим результатам работы. Причем результаты контрольной группы выявили существенный разрыв между показателями носителей русского языка (изменения по аргументам 9,64%, по значениям 12,55%) и показателями изучающих русский язык как иностранный (изменения по аргументам 4,01%, по значениям 3,27%).

Обнаруженная разница между изменениями оценки в целом по материалу и отдельно по контрольной группе является результатом воздействия некоторого фактора или факторов, который отличает работу с этими двумя разделами теста. Такой фактор один и заключается в освоении участниками предлагаемого материала в процессе тренировок, которые не затрагивают контрольную группу. Прогресс в знаниях по контрольной группе был достигнут только за счет овладения участниками самим механизмом ЛФ. Значительные колебания в оценках по контрольным значениям разных участников можно объяснить разной степенью понимания ими аппарата ЛФ.

#### 4.4. Компоненты оценки – базовый уровень и дополнительные баллы

При работе с тестом пользователь может сконцентрироваться на максимально полном и подробном ответе на некоторое ограниченное число вопросов, а может сделать акцент на результативную работу с как можно большим числом вопросов. Так как обучающая система поощряет ситуацию, когда пользователь предлагает несколько правильных ответов на один вопрос, участник, придерживающийся первой стратегии, сможет существенно превзойти по набранным баллам участника, предложившего такое же число правильных ответов, но ориентированного на вторую стратегию.

Мы разделили оценку на две составляющие – базовую часть оценки и часть, набранную за счет дополнительных баллов. Так, среднее изменение общего результата составило 35,25% от средней взвешенной нормальной оценки и складывается из 16,79% за счет базовой части оценки и 18,46% за счет дополнительных баллов. То есть ведущая роль дополнительных баллов, которую мы предполагали, подтвердилась. При этом обнаружилась следующая интересная деталь – величина прогресса по базовой части оценки практически равна у носителей русского языка (16,89%) и у изучающих русский как

иностраный (16,72%), а прирост дополнительных баллов несколько отличается и равен 20,09% и 17,37% соответственно. Это можно объяснить тем, что для изучающих русский язык как иностранный было сложнее, чем для носителей языка, освоить за предложенное время несколько альтернативных значений каждой ЛФ, а в то же время с задачей освоения базовой части материала они справились на том же уровне.

## 5. Выводы

Анализируя результаты тренировок, описанные в пунктах 4.2 и 4.3, мы можем с уверенностью констатировать прогресс в знаниях подавляющего большинства участников эксперимента, выполнивших запланированные задания в полном объеме - разработанная система помогает как изучить в игровой форме предлагаемый материал, так и освоить сам механизм ЛФ, что подтверждается данными по контрольным значениям.

**Благодарности** Мы благодарим Ю. Д. Апресяна, И. М. Богуславского, Л. Л. Иомдина, Л. Л. Цинмана, В. Г. Сизова и Л. Г. Крейдлина за помощь и неоценимую моральную поддержку на всех этапах выполнения этой работы.

[1] Ю. Д. Апресян, П. В. Дяченко, А. В. Лазурский, Л. Л. Цинман, “О компьютерном учебнике лексики русского языка”, *Русский язык в научном освещении*, №2(14), 2007, стр. 48-112.

[2] I. Boguslavsky, M. Barrios Rodrigues, “CALLEX-ESP: a software system for learning Spanish lexicon and collocations”, *Current Developments in Technology-Assisted Education (2006)*, Vol. 1, 2006, pp. 22-26.

[3] P. Diachenko, “Lexical functions in learning the lexicon.”, *Current Developments in Technology-Assisted Education (2006)*, Vol. 1, 2006, pp. 538-542.

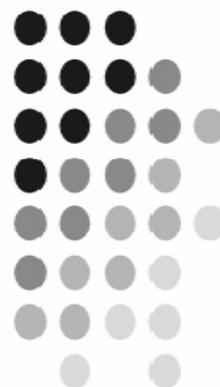
[4] Мельчук, И. А., *Опыт теории лингвистических моделей «Смысл – Текст»*, Наука, М., 1974.

[5] Ju. D. Apresjan, I. M. Boguslavsky, L. L. Iomdin, L. L. Tsinman, “Lexical Functions in NLP: Possible Uses”, *Computational Linguistics for the New Millennium: Divergence or Synergy? Proceedings of the International Symposium held at the Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 21-22 July 2000*, Manfred Klenner / Henriëtte Visser (eds.), Frankfurt am Main, 2002, pp.55-72.

[6] Ю. Д. Апресян, Л. Л. Цинман, “Формальная модель перифразирования предложений для систем переработки текстов на естественных языках”, *Русский язык в научном освещении*, №2(4), 2002, стр. 102-146.

# Раздел 5

Информационные процессы  
в живых системах



## Структурная организация медицинских знаний при дифференциальной диагностике разных форм алалии.

Попова С.М., Перемячкина С.Ю., Лукашевич И.П.  
e-mail: [luk@iitp.ru](mailto:luk@iitp.ru)

### Аннотация

*Исследования, проведенные нами в областях медицины, относящиеся к изучению функционального состояния мозга человека, позволили разработать принцип структурной организации знаний, в основе которого лежит топический подход представления медицинской информации.*

*Идентичное представление информации в виде функциональных блоков, связанных с определенными структурами мозга, обеспечивает эффективное сопоставление результатов неврологического, нейропсихологического, электроэнцефалографического и других видов обследования, что необходимо для проведения комплексного анализа как в условиях клиники, так и при научно-исследовательской работе.*

*Мы использовали этот принцип, а также экспертные системы для описания ЭЭГ и нейропсихологических данных при построении схем обследования 47 детей с двумя формами алалии (системное нарушение речи). Одна форма характеризуется поражением альфа-генерирующих структур, другая – стволовых.*

*Целью работы являлось проведение комплексного анализа клинических данных двух выявленных нами форм алалии для подтверждения высказанной ранее гипотезы о патогенетическом механизме, связанном с поражением подкорковых структур в эмбриогенезе одной из форм, а также выявление факторов риска и признаков, специфичных для каждой из видов алалии.*

### 1. Введение

Успехи медицины при выхаживании детей с перинатальными поражениями имеют и обратную сторону. Число детей с поражением в эмбриогенезе жизненно важных функций, в том числе и высших психических функций (ВПФ), включая речь, растет.

Исходя из того факта, что пластичность мозга ребенка, которая определяет эффективность лечения и коррекции, коррелирует с его возрастом, была проведена работа по выявлению патогенетических механизмов и факторов риска в эмбриогенезе и онтогенезе детей с двумя формами наиболее тяжелого речевого синдрома – алалии.

### 2. Метод структурной организации медицинской информации.

Большой интерес представителей точных наук к медицине связан не только с естественной потребностью помогать в работе специалистам одной из самых гуманных профессий, но также с попыткой моделирования профессионального мышления, в данном случае – врача.

Работа с врачами-экспертами, изучающими функциональное состояние мозга человека в норме и при различных патологиях, позволила определить, что для установления диагноза врачу надо знать всего несколько характеристик: локализацию поражения, обширность, характер, этиологию, выраженность и признаки, отличающие основное заболевание от осложнений. В результате был сформулирован общий метод структурной организации знаний для решения медицинских задач, в основе которого лежит простой алгоритм – выявление систем, изучаемых в данной предметной области; определение функций, которые эти системы выполняют, и симптомов, характеризующих нарушение этих функций [1].

Таким образом, речь идет о содержательной организации результатов исследования, что способствует лучшему пониманию и, как следствие, более эффективному решению поставленных медицинских задач. Мы провели работу по созданию структурно-организованных систем представления знаний в областях медицины, связанных с диагностикой функционального состояния мозга человека таких как: неврология, нейропсихология, психология, электроэнцефалография, логопедия (при заикании), для ряда задач в офтальмологии при выборе тактики лечения и при клинко-лабораторной диагностике (КЛД). Этот подход оказался полезным при построении ряда экспертных и обучающе-диагностических систем.

Идентичное представление информации в виде функциональных блоков, связанных с определенными структурами мозга, обеспечивает эффективное сопоставление результатов современного клинического обследования, что необходимо для проведения комплексного анализа как в условиях медицинских учреждений, так и при научно-исследовательской работе. Приведем пример

нейропсихологического описания и заключения, полученного с помощью экспертной системы [2].

≈ – ≈ – ≈ – ≈

## ЦЕНТР ПАТОЛОГИИ РЕЧИ И НЕЙРОРЕАБИЛИТАЦИИ ДЗ МОСКВЫ

Фамилия И.О.: Рекунков Артём

Возраст: 7 лет

Пол: м

Диагноз: алалия, дизартрия

Характер заболевания: дисфункция

Оценка функциональных асимметрий: правша

Контактен, к обследованию относится негативно.

### НЕЙРОПСИХОЛОГИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА НАРУШЕНИЙ ВПФ

Нарушение программирования и контроля произвольной деятельности: соскальзывание на другие формы деятельности, замена сложной программы деятельности инертными стереотипами, нестойкость мотива деятельности - средней степени выраженности.

Нарушение вербально-логического мышления при оценке переносного смысла пословиц, подборе аналогий, решении задач - средней степени выраженности.

Кинетическая апраксия в обеих руках: отсутствие плавности при переключении с одного движения на другое, персеверации - средней степени выраженности.

Нарушение узнавания движений, положений пальцев правой руки; пальцевая агнозия в правой руке; оральная кинестетическая апраксия - легкой степени выраженности.

Пальцевая агнозия в левой руке - легкой степени выраженности.

Соматоагнозия - нарушение право-левой ориентировки в собственном теле, критика сохранна - средней степени выраженности.

Нарушение оценки и воспроизведения пачек ритмов. Нарушение оценки и воспроизведения простых ритмов: сужение объема восприятия - средней степени выраженности.

Цветовая агнозия при классификации цветов - легкой степени выраженности. Цветовая агнозия при соотношении цвета и предмета - легкой степени выраженности.

Конструктивная апраксия: схематичность рисунка; пространственная апраксия - нарушение ориентировки движений в системе координат - средней степени выраженности; нарушение зрительной памяти: пространственные координатные ошибки - легкой степени выраженности.

Нарушение реципрокной координации - средней степени выраженности.

Нарушение эмоционального фона: эмоциональная лабильность - средней степени выраженности.

Нарушение психической активности: истощаемость - средней степени выраженности.

### Нарушения речи и слухоречевой памяти

Нарушение кинетической основы речи: персеверации; перестановки, пропуск, контаминации звуков, слогов, редукации слов - средней степени выраженности; нарушение грамматической организации речи: пропуск вспомогательных слов; пропуск предикативной части - глагола, замена глагола существительным - средней степени выраженности.

Нарушение кинестетической основы речи: увеличение периода поиска артикуляторной позы; литеральные парафазии - средней степени выраженности.

Нарушение экспрессивной речи и письма: литеральные парафазии - средней степени выраженности.

Сужение объема непосредственного воспроизведения с "фактором края"; вербальные парафазии - средней степени выраженности.

Словарный дефицит - средней степени выраженности.

Нарушение устной импрессивной речи, чтения: флективных конструкций, инвертированных конструкций, атрибутивных конструкций, предложных конструкций, сравнительных конструкций, временных конструкций, возвратных конструкций, оценки грамматической нормативности - тяжелой степени выраженности; нарушения экспрессивной речи, преимущественно оперирует простыми по конструкции фразами - тяжелой степени выраженности.

Мозжечковая дизартрия - легкой степени выраженности; бульбарная дизартрия - уровень срединных структур - легкой степени выраженности.

### Нейропсихологический статус.

Отмечаются нарушения: программирования и контроля произвольной деятельности; интеллектуальной деятельности; серийной организации движений и действий; кожно-кинестетического восприятия и кинестетической основы движений; соматосенсорного гнозиса; слухового гнозиса; зрительного гнозиса; пространственной организации восприятия и движений; зрительной памяти; взаимодействия полушарий; эмоций; нейродинамических характеристик психической активности.

### Состояние речи и памяти.

Отмечаются нарушения: кинетической основы речи; кинестетической основы речи; фонематического слуха; слухоречевой памяти; номинативной функции речи; симультанного квазипространственного анализа и синтеза; просодической стороны речи: мозжечковой дизартрии; бульбарной дизартрии.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Нейропсихологическая симптоматика указывает на дисфункцию префронтальных отделов лобных долей мозга, премоторных отделов коры левого полушария, нижнетеменных отделов коры левого и правого полушарий, верхнетеменных отделов коры левого полушария, височных отделов коры левого и правого полушарий, затылочных отделов коры левого и правого полушарий, височно-теменно-затылочных - зона ТРО - отделов коры левого полушария; мозолистого тела; медиобазальных отделов лобных долей мозга; субкортикальных структур: мозжечка, стволовых отделов.

≈ - ≈ - ≈ - ≈

### 3. Материал.

В Детском отделении Центра патологии речи и нейрореабилитации ДЗ Москвы были обследованы 47 детей с алалией в возрасте от 3-х до 7 лет, среди которых было 15 девочек и 32 мальчика. В зависимости от характера изменений биоэлектрической активности мозга (БЭА) на электроэнцефалограмме (ЭЭГ) все дети были разделены на 2 группы.

В I группу вошло 32 ребенка с изменениями БЭА, свидетельствующие о дисфункции альфа-генерирующих подкорковых и корковых структур [3].

II группа – 15 детей с преимущественным генерализованным билатерально-синхронным изменением БЭА ствола.

В работе были проанализированы и сопоставлены данные анамнеза - родового и первого года жизни, результаты обследования неврологом, нейропсихологом, психологом, логопедом, а также ЭЭГ – данные и показатели ультразвуковой доплерографии (УЗДГ) и транскраниальной диагностики (ТКД), которые позволяют судить о состоянии сосудов мозга.

Результаты клинико-психологического обследования оценивались с учетом возраста ребенка.

Для проведения углубленного комплексного анализа, все клинические, а также ЭЭГ и УЗДГ –

данные были представлены в виде структурно-организационных схем, в основе которых лежит принцип топической диагностики [1]. Такой подход позволил сопоставить последствия поражения центральной нервной системы (ЦНС) в эмбриогенезе и онтогенезе с особенностями речевых нарушений у детей с разными формами алалии. Оценка достоверности статистических результатов проводилась с помощью критерия Стьюдента и формулы Фишера [4].

### 4. Обсуждение результатов.

При сравнительном анализе рассматривались только те данные, которые встречались не менее чем в 50% случаев, что принято считать характерным для группы.

Поскольку результаты ЭЭГ - исследования и роль перинатальных осложнений подробно были рассмотрены в нашей предыдущей работе, а обследование высших психических функций (ВПФ) проведено только у половины детей, все эти характеристики будут приведены в общем виде.

Отобранные данные размещены в двух таблицах. В первой таблице приведены параметры характерные для обеих групп, во второй – признаки, достоверно отличающие одну группу от другой.

Таблица 1.

Распределение общих характерных для обеих групп детей с алалией результатов обследования.

группы детей с алалией \ результаты обследования	I группа в %	II группа в %
<b>Родовой анамнез:</b> 1. осложнения 1-ой половины беременности; 2. родовые осложнения с нагрузкой на шейный отдел;	95  85	90  70
<b>Допплерография:</b> 1. ангиодистония в двух полушариях; 2. нарушение кровотока в левой ПА - позвоночной артерии ( <i>кровоснабжение ствола</i> ).	70  65	70  60
<b>Неврология:</b> 1. повреждение черепно-мозговых нервов <i>на уровне ствола</i> ; 2. нарушение мелкой моторики пальцев – <i>уровень подкорки</i> .	60  70	50  70
<b>Нейропсихология:</b> Нарушение всех ВПФ –	от 50	От 50

<i>все отделы коры.</i>	до 100	до 100
<b>Нарушение речи:</b>		
1. задержка раннего речевого развития:		
гуление	60	80
лепет	70	70
2. ЗРР: фразовой речи;	95	95
нарушение всех видов речевой функции - <i>кора</i> .	≈ 70	≈ 70

Приведенные в таблице 1 данные о состоянии ВПФ и. в первую очередь, речи соответствуют диагнозу алалии, которое определяется как системное нарушение речевой функции.

Заметим, что хотя ВПФ, включая речь, связаны преимущественно с зонами коры, в анамнезе детей нет указаний на массивное поражение коры во время родов или в первые годы жизни. В то же время клинико-инструментальные показатели и данные родового анамнеза: антенальные осложнения в первой половине беременности и травма шейного отдела в родах, приводящая к нарушению кровотока в ПА, свидетельствуют о недостаточности подкорковых структур и ствола.

Объяснить это противоречие позволяют следующие физиологические факты:

1. Функциональное созревание ЦНС, в основном, происходит в каудо-краниальном направлении. К 7-10-ой неделе внутриутробного периода функциональный контроль начинает осуществлять продолговатый мозг, а с 13-14 недели появляются признаки мезенцефального контроля. Биотоки у плода начинают регистрироваться с 3-5 месяцев, что связывают с субкортикальными структурами, поскольку кора появляется лишь с 6-ти месяцев [5].

2. Поэтапное развитие структур мозга приводит к тому, что недостаточность функций нижележащих нейронных систем вызывает незавершенность созревания последующих отделов и несформированность их функций. Возникает цепная реакция аномального патологического развития. Дефицитарность коры головного мозга будет тем более обширная, чем на более ранних этапах эмбрионального развития пострадала ЦНС плода. При этом, проявляться дисфункция отделов коры будет по мере их востребованности (например, речь) [6].

Приведенные в таблице 1 данные позволяют предположить, что тотальное нарушение ВПФ детей с алалией связано как с поражением стволовых, так и подкорковых структур в эмбриогенезе.

Характеристики, приведенные в таблице 2, подтверждают высказанное ранее предположение о преимущественной роли поражения в эмбриогенезе подкорковых структур для I группы и стволовых – для II. Все

различия показателей, кроме изменения БЭА каудального ствола, достоверны ( $p < 0,05$ ).

Таблица 2.

Распределение результатов обследования характерных для каждой из групп детей с алалией.

группы детей с алалией \ результаты обследования	I группа в %	II группа в %
<b>ЭЭГ- показатели:</b>		
1. ↓ амплитуды α - ритма и/или локальные изменения БЭА в затылочных отделах <b>S</b> полушария – <i>таламус и хвостатое ядро</i> ;	100	0
2. каудальные изменения БЭА – <i>нижний ствол</i> ;	60	35
3. билатерально-синхронные генерализованные изменения БЭА <i>стволового генеза</i> .	35	80
<b>Послеродовой анамнез:</b>		
1. ПЭП – постнатальная энцефалопатия;	55	0
2. СМД – синдром мышечной дистонии;	65	0
3. наблюдение невролога.	60	13
<b>Допплерография:</b>		
1. венозная дисгемия в <i>двух полушариях</i> ;	70	30
2. нарушение кровотока в передней (ПМА) и средней (СМА) мозговых артериях (центральные ветви этих артерий снабжают кровью <i>подкорковые узлы</i> ).	70	30
<b>Нейропсихология:</b>		
1. мозжечковая дизартрия;	40	80
2. бульбарная дизартрия. (обе <i>уровень ствола</i> )	60	90

По данным УЗДГ и ТКД у 70% детей I группы отмечено снижение кровотока в средней и передней мозговых артериях в левом полушарии и у 10% в правом в тех случаях, где имели место ЭЭГ – изменения справа. Поскольку центральные ветви обеих указанных артерий питают подкорковые структуры, а периферические ветви – кору, можно предположить, что наряду с другими патогенетическими факторами имеет место снижение кровоснабжения как подкорковых, так и корковых структур левого полушария [7]. Приведенные в таблице 2 сведения о послеродовых осложнениях детей I группы,

могут быть связаны с недостаточностью кровообращения мозговых структур.

Зафиксированные в двух группах 70% случаев ангиодистонии как в левом, так и в правом полушарии согласуются с данными о кровообращении плода, одна из особенностей которого состоит в том, что функцию легкого выполняет плацента [5]. По нашим данным в родовом анамнезе у 90% детей с алалией отмечена угроза прерывания беременности, что приводит к плацентарной гипоксии и неполноценному развитию системы кровообращения.

Нарушение кровотока в ПА, которая питает стволые структуры, характерно для обеих групп. Однако, диспросодия речи ствольного генеза (дизартрии) встречается достоверно чаще во II группе ( $p < 0,05$ ). Следовательно, можно предположить, что основным патогенетическим механизмом алалии во II группе детей является поражение ствольных структур в эмбриогенезе, которое могло усугубиться травмой шейного отдела во время родов.

### 5. Выводы.

1. Структурная организация клиническо – инструментальной информации позволила провести сравнительный анализ результатов обследования в группах детей с двумя формами алалии.

2. Описание состояния высших психических функций и электроэнцефалограмм проводилось с помощью экспертных систем «ВПФ-ЭКСПЕРТ» и «ЭЭГ-ЭКСПЕРТ» [2,3]. При создании систем был использован метод структурной организации медицинской информации, который приводит к сокращению объема и повышению информативности знаний необходимых для принятия решения [1]. Системы отличаются полнотой описания, универсальностью, включают возрастные критерии и позволяют проводить сопоставление с данные различных методов исследования при патологиях ЦНС.

3. Поражение подкорковых структур левого полушария мозга в эмбриогенезе можно отнести к одному из патогенетически значимых механизмов развития алалии в I группе детей.

4. Ведущими осложнениями для II группы детей можно считать повреждение ствольных структур в первой половине беременности и при родах.

5. Существенная роль в патогенезе формирования алалии, наряду с другими факторами риска, принадлежит, нарушению кровоснабжения ствольных, подкорковых структур и коры.

### 6. Литература.

[1] И.П. Лукашевич «Роль языка описания при комплексном анализе сложных систем» Информационные процессы, 2002 г., т. 2, №1, с. 37-44. <http://www.jip.ru/>

[2] С.Б. Буклина, Е.Д.Дмитрова, И.П. Лукашевич, Н.Г. Малюкова, А.С. Мостовой. «Экспертные системы и передача профессиональных знаний. «ВПФ-ЭКСПЕРТ». Информационные процессы. 2008 г., т. 8, № 4, с.226 - 234. <http://www.jip.ru/>

[3] И.П. Лукашевич, С.Ю. Перемячкина, С.М. Попова. «Роль структурной организации ЭЭГ-информации при выявлении патогенетического механизма алалии.» Сборник трудов 31-ой конференции ИТиС'08, г. Геленджик, 29 сентября – 3 октября 2008 г., раздел 5: Информационные процессы в живых системах. Стр. 246-249

[4] Н. Бейли. Статистические методы в биологии. М.: Изд.ин. лит., 1962, 260с.

[5] Основы физиологии человека. т.2 под ред. Б.И.Ткаченко, С.-Пет. 1994, 412с.

[6] Л.О. Бадалян. Детская неврология. М.: Медицина. 1984.

[7] М.М. Одинак, А.А. Михайленко, Ю.С. Сиванов и др. Сосудистые заболевания головного мозга. С.-П.: Из-во Гиппократ, 1997. 160 с.

## Мышечные пост-эффекты и поддержание равновесия у здоровых и больных с врожденным слабоумием

Талис В.Л., Капитонов М.А\*, Максимова Е.В.\*\*

*Институт проблем передачи информации им.А.А.Харкевича РАН talis@iitp.ru*

\* *Московский Авиационной Технологический Университет [mkapitan91@mail.ru](mailto:mkapitan91@mail.ru)*

\*\* *Культурно-досуговое учреждение «Центр Триада» [elena@maximova.org](mailto:elena@maximova.org)*

### Аннотация

*Оценивали вертикальную устойчивость у больных с врожденным слабоумием до и после коррекционного воздействия на тонус мышц шеи и туловища, а также сравнивали эффективность этого воздействия у здоровых и больных обследованных. В исследовании участвовали 7 больных с врожденным слабоумием и 7 здоровых соответствующего возраста и пола, которые в течение 30 сек стояли на стабилографической платформе в условиях отсутствия зрительного контроля (глаза закрыты) и измененной проприоцепции от мышц ног (на мягкой опоре). Показано, что поддержание равновесия в исходном положении у больных существенно отличалось от контрольной группы по параметрам среднего положения центра давления, длины и площади стабилографической кривой, а коррекционное воздействие изменяло эти показатели в сторону их возрастной нормы. Полученные результаты позволяют заключить, что коррекционное воздействие существенно сказалось на параметрах вертикальной стойки, как здоровых, так и больных, однако усложненные условия стояния активизировали разные регуляторные механизмы у здоровых и больных обследованных*

### 1. Введение

Согласно определению Бернштейна, тело является как “исходной системой координат, к которой соотносятся рецепции и движения, так и конечной целью этих рецепций и движений. Объединяясь вместе тактильные и проприоцептивные рецепции обобщаются по единой для всех сигналов системе координат собственного тела” [1]. Для исследования организации тонической регуляции позы подходы и возможности влияния на него имеют исключительное значение. К таким методам

традиционно относятся мышечные пост-эффекты, в том числе эффект Конштамма и вибрационные тонические воздействия. Непроизвольный пост-эффект мышечного напряжения был впервые продемонстрирован Конштаммом в 1915 на примере непровольного подъема руки вверх после 30-40 с давления рукой на стену с максимальной силой. На сегодня принята точка зрения о возникновении эффекта Конштамма в результате продолжительного возбуждения центральных структур и увеличения афферентного притока – т.н. сенсорного разряда после мышечного сокращения (см. обзор [2]). Т.о. пост-активационные феномены типа эффекта Конштамма можно рассматривать в качестве методов изучения тонического уровня регуляции движений [3]. Следует отметить, что в последние годы интерес к исследованию этих феноменов значительно вырос в частности и потому, что было обнаружено, что многие неврологические заболевания связаны с нарушениями внутреннего представления человека о собственном теле (схемы тела). Можно предполагать, что существенное последствие тонического напряжения мышц связано с изменением состояния центральных структур в ответ на произвольное напряжение и демонстрирует роль тонических влияний на центральное управление позой и координацией движений.

Ранее было показано, что у больных с ранним детским аутизмом и врожденным слабоумием нарушено зрительное восприятие окружающего пространства и соматосенсорная чувствительность [4]. Есть предположение, что в основе этих изменений у данной группы больных лежит нарушение связи внутреннего представления и внешнего окружающего пространства. Среди разнообразных попыток коррекции двигательной сферы этих больных имеются методы воздействия, которые как предполагается воздействуют на уровень тонической регуляции. В настоящей работе

сделана попытка объективной оценки таких воздействий и их влияния на положение тела в пространстве и особенности позной регуляции у здоровых и больных. Рассматривалось влияние мышечных пост-эффектов на поддержание вертикальной стойки. Исследовали траекторию движения центра давления в свободной стойке в условиях измененного проприоцептивного и зрительного входов. Сравнивали параметры поддержания вертикальной позы при стоянии здорового человека и больных на твердой и податливой опоре, а также с закрытыми и открытыми глазами до и после 30-сек произвольного изометрического напряжения мышц шеи и туловища.

## 2. Методика

Обследовано 7 здоровых (средний возраст  $19.0 \pm 2.4$  лет, рост  $171.4 \pm 10.4$  см, вес  $60.0 \pm 8.6$  кг) и 7 больных с врожденным слабоумием (средний возраст  $23.7 \pm 7.1$  лет, рост  $169.6 \pm 0.7$  см, вес  $70.0 \pm 15.6$  кг) испытуемых. Обследование проводили на стабилографе “Стабилан” (ОКБ “Ритм”, г. Таганрог), подключенном к ПК (частота оцифровки - 50 Гц). Испытуемые стояли симметрично относительно центра платформы, руки свободно вдоль тела, расстояние между пятками - 10 см, носки свободно, с открытыми глазами глядя на мишень, которая располагалась на расстоянии 3.5 м, или педагога (в случае с больными испытуемыми), стоявшего на том же расстоянии от испытуемого. Регистрировали стабилографические данные в 3 условиях – глаза открыты (ГО), глаза закрыты (ГЗ) и стоя на поролоне с открытыми глазами (Поролон). Длительность пробы как правило составляло 30 сек. Если больные начинали двигать головой или руками раньше, чем за 10 сек до конца записи, запись прерывали и не обрабатывали. Если возмущения позы, возникали позже, то запись сохраняли, но для дальнейшего анализа брали только первые 20 сек записи. Если больной сдвигал ноги по платформе – запись прерывали всегда. Перерыв между пробами составлял 10-20 сек, записывали по 2 пробы в каждом условии. Последовательность предлагаемых условий стойки была всегда одинакова. Это объяснялось тем, что для дальнейшего анализа параметры вертикальной стойки в положении ОГ бралась в качестве контрольной и относительно нее рассматривалось изменение параметров в 2 последующих условиях, а также для уменьшения времени эксперимента, т.к. установка ноги на поролоне требовала большего времени и делалась в конце, а в положении ОГ и ГЗ стопы на платформе оставались в одном положении. При

записи сигнал стабилограммы не центрировался для того, чтобы можно было судить об абсолютном среднем положении центра тяжести в течение записи и сравнивать его с таковым в других условиях.

### Коррекционное воздействие.

В исходном положении испытуемый сидел на краю стула с жестким сидением, колени под углом  $90^\circ$ , стопы - на полу. Методист с небольшим усилием кратковременно надавливал (около 5-10 сек) на оба колена в направлении вниз к стопам и затем в направлении назад к тазу. Затем методист охватывал обеими руками голову испытуемого так, что одна рука находилась на затылочном выступе, а вторая рука помещалась так, что большой и указательный пальцы располагались по краям лба, скул или нижней челюсти. Еще одним приемом было надавливание большим пальцем на подбородочную ямку испытуемого. Когда методист замечал распрямление позвоночника испытуемого, сдавливание продолжалось еще 30 сек, после чего начинали повторную регистрацию стойки испытуемого.

После эксперимента данные обрабатывались с помощью программы Matlab. Продолжительность всего эксперимента составляла 30 мин. Между сериями испытуемые могли отдыхать 30сек -1 мин, сидя на стуле.

При обработке данных были посчитаны среднее расстояние от ЦД до оси голеностопных суставов в передне-заднем направлении, нормированное на длину стопы испытуемого [Сдвиг средней линии], длина кривой траектории движения центра давления, нормированная на время движения [ДЛИНА, см/мин] и площадь фигуры [ПЛОЩАДЬ, см<sup>2</sup>], очерченной центром давления за время пробы.

## 3. Результаты

В исходном положении больные испытуемые имели тенденцию стоять во всех условиях, сдвинув среднее положение ЦД ближе к линии голеностопных суставов по сравнению со здоровыми (Рис.1). После воздействия у здоровых испытуемых среднее положение ЦД во всех условиях приблизилось к линии голеностопных суставов и его изменение было достоверно для стойки с закрытыми глазами ( $p < 0.05$ ). Больные же испытуемые проявили противоположную тенденцию – среднее положение ЦД у них во всех условиях сдвинулось вперед.

В исходном положении ДЛИНА ЦД у здоровых была значимо меньше, чем у больных ( $p < 0.001$ ), а при закрывании глаз и переходе к стоянию на поролоне возрастала как в группе здоровых, так и в группе больных ( $p < 0.001$ ). После воздействия эти различия сохранились. Анализ фронтальной и сагиттальной составляющей кривой ЦД показали, что здоровые испытуемые колебались в передне-заднем направлении больше, чем в боковом. Передне-задние колебания больных были значимо выше таковых у здоровых, и за счет этого соотношение сагиттальной и фронтальной составляющей ЦД у здоровых составляло 1.2-1.3, а у больных 1.5-1.7. После воздействия передне-задние колебания в обеих группах несколько снизились, однако во фронтальном направлении у больных наметилась противоположная тенденция: боковые колебания при стойке с закрытыми глазами у больных усилились, так что соотношение сагиттальной и фронтальной составляющей ЦД у больных в этом условии существенно снизилось ( $p < 0.05$ ) и стало таким же как у здоровых. ПЛОЩАДЬ в исходном положении у здоровых испытуемых была значимо меньше, чем у больных и увеличивалась в обеих группах в положении ЗГ и на поролоне (Рис.2). В результате воздействия этот параметр несколько снизился у здоровых обследованных в положении ЗГ, однако у больных обнаружилось его увеличение в положении ОГ и уменьшение на поролоне, которое достигло степени значимости на поролоне и стало сравнимо с таковым у здоровых. Следует сказать, что при стоянии в течение 30 сек у некоторых здоровых и большинства больных наблюдался произвольный сдвиг средней линии стабиллограммы. В связи с этим был сделан анализ среднего разброса колебания ЦД в сагиттальном направлении за вычетом линейного тренда за пробу. Оказалось, что этот параметр существенно увеличился при закрывании глаз и стоянии на поролоне ( $p < 0.01$ ), как у здоровых, так и у больных испытуемых, однако после воздействия не претерпел значимого изменения ни в одной группе.

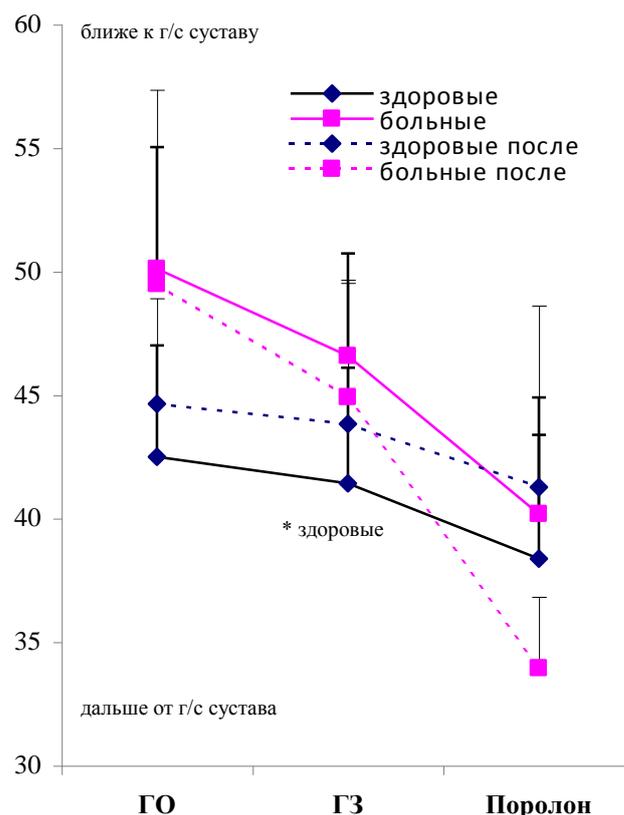


Рис.1 Сдвиг средней линии ЦД от линии голеностопного сустава, в % от длины стопы,\* ( $p < 0.05$  по сравнению с уровнем до воздействия)

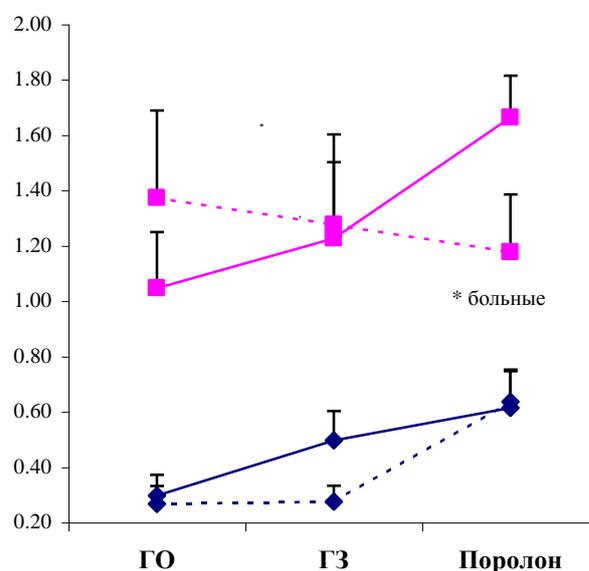


Рис.2. Площадь контура ЦД, см<sup>2</sup>, обозначения те же, что на Рис.1

## Обсуждение

Три позы, использовавшиеся в эксперименте, отличались по степени устойчивости. В условии ОГ испытуемый стоял на твердом полу с открытыми глазами и фиксировал взор на мишени, в условии ЗГ испытуемый стоял в “молочных очках” и, открывая глаза, мог только видеть перед собой непрозрачный фон заклеенных бумагой очков. На поролоне испытуемый стоял с открытыми глазами на мягкой опоре и не мог использовать в достаточной мере информацию от рецепторов давления стоп и проприоцепторов мышц голеностопного сустава. Эти изменения зрительного и проприоцептивного входов отражались на устойчивости вертикальной позы. До воздействия как у здоровых, так и у больных испытуемых параметры ДЛИНА и ПЛОЩАДЬ существенно увеличились при закрывании глаз и стоянии на поролоне (Рис.1). Как у здоровых, так и у больных испытуемых эти изменения произошли как за счет передне-задних, так и боковых колебаний. Объем колебаний в передне-заднем направлении у здоровых испытуемых был больше чем, в боковом, что скорее всего объясняется меньшим размером стопы человека в поперечном направлении, а, следовательно, большим запасом устойчивости в продольном направлении.

Расстояние между средним положением центра давления и линии центра голеностопного сустава у обследованных нами здоровых испытуемых составляло  $63.0 \pm 20.1$  мм было несколько больше, чем величина, приведенная в [5] (40-50 мм). Будучи приведенной к длине стопы эта величина у здоровых обследованных составила  $42.4 \pm 11.9\%$ , а с закрытыми глазами -  $41.4 \pm 12.4\%$ , так что коэффициент отношения ГЗ/ГО составил  $97.1 \pm 3.8$  что несколько выше такового в [4] ( $87.5 \pm 8.1$ ), однако эта величина достаточно вариативна в зависимости от выборки (в цитируемом исследовании 9 женщин, 9 мужчин среднего возраста 27 лет, с диапазоном 18-42 считались группой молодых). Закрывание глаз не сказалось значительно на среднем положении ЦТ в передне-заднем направлении. В результате коррекционного воздействия на тонус мышц шеи и верхней части туловища имело место как смещение среднего положения проекции центра давления по стопе, так и объема колебаний всего корпуса с свободной стойке. Смещение среднего положения ЦД по стопе у здоровых шло в сторону уменьшения устойчивости позы, а у больных в сторону увеличения устойчивости. Такое новое положение сопровождалось некоторым

улучшением устойчивости у здоровых испытуемых, как по параметрам длины, так и по параметрам площади, описываемой ЦД за время пробы во всех положениях. Особенностью стойки больных после коррекционного мышечного воздействия было усиление вклада фронтальных колебаний в изменение длины ЦД. Таким образом, новая стойка занятая больными после коррекции мышечного тонуса характеризовалась выдвинутым вперед ЦД и повышенным колебанием в боковом направлении в положении с закрытыми глазами и уменьшенной площадью, описываемой ЦД на поролоне. Полученные результаты позволяют заключить, что коррекционное воздействие существенно сказалось на параметрах вертикальной стойки, как здоровых, так и больных испытуемых, однако усложненные условия стояния активизировали разные приспособительные механизмы у здоровых и больных обследованных.

## Список литературы

- [1] Бернштейн НА, *Физиология движений и активность*, Москва, Наука, 1990.
- [2] Duclos C, Roll R, Kavounoudias A, Roll JP Long-lasting body leanings following neck muscle isometric contractions *Exp Brain Res* 2004, 158, 58-66.
- [3] Гурфинкель ВС, Левик ЮС, Казенников ОВ, Селионов ВА “Существует ли генератор шагания движений у человека?” *Физиология человека*, 24,1, 1998: 42-50.
- [4] Molloy C.A., K.N. Dietrich, A. Bhattacharya, “Postural stability in children with autism spectrum disorder”, *J Autism Dev Disorder*, 33, 6, 2003, 643-652.
- [5] Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л., *Регуляция позы человека*, Москва, Наука, 1965.
- [6] Schieppati M, Hugon M, Grasso M, Nardone A, Galante M “The limits of equilibrium in young and elderly normal subjects and in parkinsonians”, *Electr Clin Neurophysiol*, 1994, 286-298.

## Роль движений глаз в распознавании лица по фотографии

Огников Василий, Рожкова Галина  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
127994 Москва, Б. Каретный пер., 19.  
E-mail: wwo@iitp.ru

### Аннотация

*Целью исследования было уточнение роли движений глаз в опознании лиц по фотографии. В литературе до сих пор обсуждается возможность того, что паттерны движений глаз, возникающие у человека при запоминании лица, сохраняются в памяти и потом используются при опознании в качестве глазодвигательных эталонов. Однако такое представление не согласуется с пространственно-временными характеристиками движений глаз. Используя бесконтактный метод записи движений глаз при узнавании лиц по фотографиям в условиях свободного рассматривания одиночных портретов, а также в условиях фиксации взора между двумя портретами, мы показали, что паттерны движений глаз при узнавании лиц включают всего 1-3 точки фиксации взора, причем не обязательно на информативных деталях. При этом регистрируемые паттерны сильно варьируют не только в ряду испытуемых, но и у каждого индивида, что противоречит гипотезе глазодвигательных эталонов. Более того, было обнаружено, что попадание взора в область лица не является обязательным для его узнавания.*

### 1. Введение

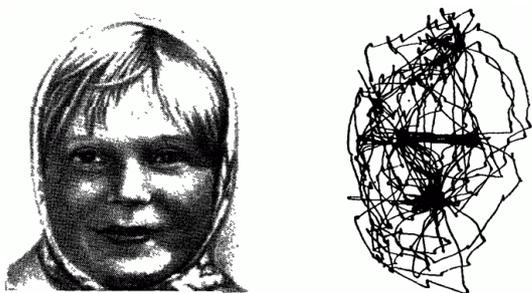
Узнавание лиц — это проблема, представляющая значительный интерес для психологии, физиологии, неврологии и когнитивной науки. В связи с этим литература по узнаванию лиц очень обширна и разнообразна. Она включает исследование и моделирование алгоритмов опознания, изучение физиологических механизмов этого процесса и определение локализации соответствующих механизмов в мозгу человека, клинические работы по описанию

лицевой агнозии и иных нарушений способности к узнаванию лиц, а также выяснению корреляции таких нарушений с показателями других зрительных функций.

Несмотря на интенсивные исследования разных аспектов проблемы узнавания лиц, некоторые явно бесперспективные концепции, относящиеся к физиологической основе узнавания лиц, обсуждаются в течение десятков лет, замедляя выяснение истины. В частности, это касается теории о связи процесса узнавания лиц с движениями глаз. Здесь сложилась парадоксальная ситуация, обусловленная, в частности, влиянием книги А. Л. Ярбуса, которая выдержала несколько изданий за рубежом и стала очень популярной [1]. В этой книге приведены эффектные записи движений глаз при рассматривании портретов, на которых видна концентрация точек фиксации в области информативных деталей изображений, благодаря чему глазодвигательные паттерны отражают структуру лица: взаимное расположение глаз, бровей, носа, губ и т.д. Такого рода записи, сделанные А. Л. Ярбусом и его последователями, вошли позже во многие руководства и послужили основой для концепции «глазодвигательных эталонов» — характерных паттернов движений глаз в процессе рассматривания лица (scan paths), запоминаемых человеком и используемых затем в процессе узнавания. Нортон и Старк особенно активно развивали эту концепцию в семидесятых годах прошлого века [2,3], но другие исследователи обращались к ней и позже [4,5]. Живучесть этой концепции удивительна, поскольку концы с концами здесь явно не сходятся: дело в том, что узнавание лиц обычно происходит «с одного взгляда», за доли секунды, тогда как создание «глазодвигательного отпечатка» лица требует многих секунд. А если такой отпечаток в процессе опознания не успевает возникнуть,

то с чем нужно сравнивать отпечаток, хранящийся в памяти?

На рис. 1 воспроизведена иллюстрация из книги А. Л. Ярбуса, на которой паттерн движений глаз, полученный во время свободного рассматривания портрета, действительно, неплохо отражает его структуру. В свое время это произвело сильное впечатление на исследователей и породило вышеупомянутую концепцию глазодвигательных отпечатков. Однако создатели этой концепции не учли, что для получения паттерна движений глаз, напоминающего портрет, А. Л. Ярбус производил запись очень долго по сравнению с реальным временем узнавания — в течение 3 мин, в 100 или более раз превышая необходимое человеку время.



**Рис. 1. Иллюстрация из книги Ярбуса [1]: запись движений глаз при длительном (180 с) рассматривании портрета (9°x12°)**

Поскольку среднее время фиксации взора между саккадами составляет 0,25-0,40 с, получается, что у А. Л. Ярбуса глазодвигательные портреты содержали 450-700 точек фиксации. По теории Нортон и Старка, число фиксаций, требующееся для формирования эталонной траектории взора (scan path), намного меньше — около 10, но и в этом случае нужное время (2,5-4 с) превышает обычное время узнавания лиц (см., напр., [6]).

Естественно, что, в конце концов, был поставлен вопрос о критическом числе фиксаций, необходимом для узнавания лица, и расположении этих точек на лице.

Из последних попыток ответить на этот вопрос стоит отметить исследование учёных из Калифорнийского Университета [7,8]. Используя 32 модифицированные чёрно-белые фотографии из базы данных FERET [9] размером 296 на 240 пикселей (ширина 6,6 см) авторы исследовали узнавание лиц с расстояния 47 см у 16 испытуемых. Запись производили на установке EyeLink II. Было показано, что опознание возможно даже при

одной фиксации в области лица, а начиная с двух фиксаций, показатели опознания остаются практически неизменными. В отличие от предыдущих исследований, в которых было установлено, что при опознании лица взор чаще фиксируется на глазах (см., напр., [10]), авторы пришли к выводу, что первые две фиксации приходятся преимущественно на область носа, причём первая фиксация часто попадает на его левую половину.

Задачей данной работы была проверка справедливости этих утверждений в других экспериментальных условиях, так как в подобных исследованиях результаты часто зависят от специфики тестового материала и процедуры тестирования.

## 2. Методика

### 2.1. Установка для записи и анализа движений глаз

Бесконтактную запись движений глаз производили на установке iView X™ Hi-Speed 1250 (SensoMotoric Instruments (SMI) Ltd.) с использованием программного обеспечения Experiment Center 2.1. Принцип работы системы основан на вычислении координат зрачка, которые после калибровки переводятся в данные о направлении взора. Для увеличения точности записи установка отслеживает роговичный рефлекс, чтобы скомпенсировать изменения позиции видеокамеры по отношению к голове.

### 2.2 Тестовый материал

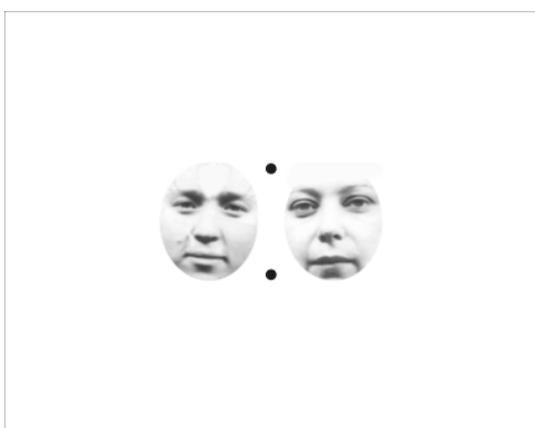
I. В первой серии экспериментов использовали два портрета политических деятелей, и три их модификации. На белом фоне по центру экрана предъявляли портрет, а сверху слева и справа - два варианта ответа (рис. 2). Варьировали размеры (6° и 12°) и ориентацию (нормальное и перевёрнутое положение) портретов, а также исходное положение точки фиксации (вверху, внизу, сбоку).

II. Во второй серии экспериментов предъявлялись пары фотографий с двумя точками фиксации между ними (Рис. 3). Всего каждому испытуемому в случайном порядке предъявлялось 20 пар лиц.

Все изображения в обеих сериях экспериментов были чёрно-белыми, выровненными по контрасту и светлоте.



**Рис. 2.** Одно из тестовых изображений в первой серии экспериментов



**Рис. 3.** Одно из тестовых изображений во второй серии экспериментов

### 2.3 Процедура

После предварительного инструктажа и проведения процедуры калибровки испытуемому с расстояния 0,5 м последовательно предъявляли батарею тестовых изображений, в промежутках между которыми на экране присутствовали точки фиксации. Процедуру калибровки прибора выполняли один раз в начале каждой тестовой серии.

В первой серии испытуемый должен был максимально быстро опознать лицо на фотографии и перевести взор на соответствующее имя справа или слева.

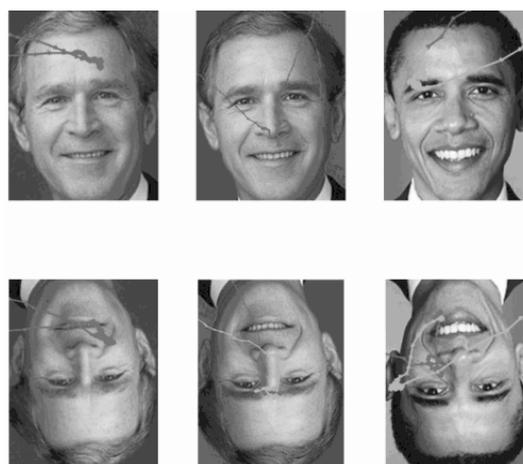
Во второй серии тестовые изображения предъявлялись на 1 с, причём испытуемому давали инструкцию не смотреть на портреты, а удерживать взор между ними на точках фиксации. После этого на экране появлялась карта ответов, на которой испытуемый взором должен был указать те лица, которые ему предъявлялись.

## 2.2 Испытуемые

Всего было протестировано – 40 испытуемых, (из них – 14 мужского пола), однако во второй серии экспериментов участвовало только 7 человек. Группу испытуемых составили дети школьного возраста и сотрудники ИППИ в возрасте от 18 до 60 лет, как опытные, так и без опыта участия в подобных экспериментах. Острота зрения у всех испытуемых для расстояния 0,5 м была в пределах медицинской нормы.

## 3. Результаты и обсуждение

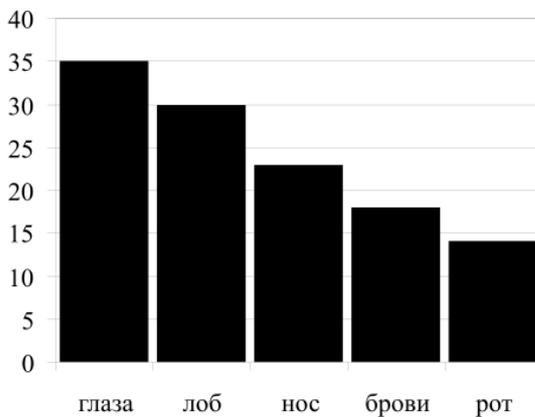
На Рис. 4 показаны примеры характерных паттернов движений глаз, полученных в первой серии экспериментов. Результаты этой серии подтвердили вывод американских исследователей [7,8] о том, что для опознания лица по фотографии может быть достаточно 1-2 фиксаций, причём в наших экспериментах это было справедливо независимо от ориентации и размера тестовых изображений, а также исходного положения точки фиксации. Однако, второй вывод этих исследователей, касающийся обязательности локализации первой фиксации взора в области носа, в условиях нашего исследования не подтвердился. Паттерны движений глаз демонстрировали большую индивидуальную вариабельность, причём частота фиксации взора на различных информативных деталях лица коррелировала с исходным положением точки фиксации.



**Рис. 4.** Паттерны произвольных движений глаз при опознании лиц

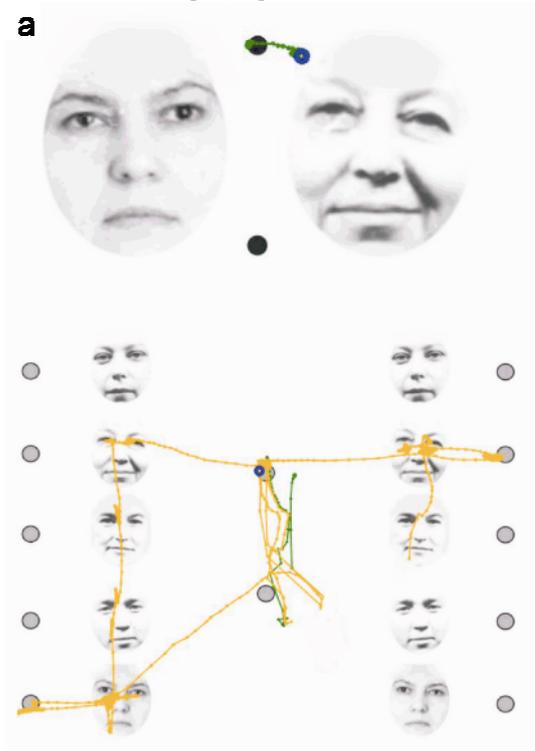
Для примера на рис. 5. показано распределение первых точек фиксации взора по информативным деталям лица у 10 испытуемых в условиях расположения исходной точки фиксации взора вверху экрана

над портретом. В этих условиях большее число фиксаций приходилось на верхнюю половину лица, причем на глаза, брови и лоб взор в сумме попадал втрое чаще, чем на нос.



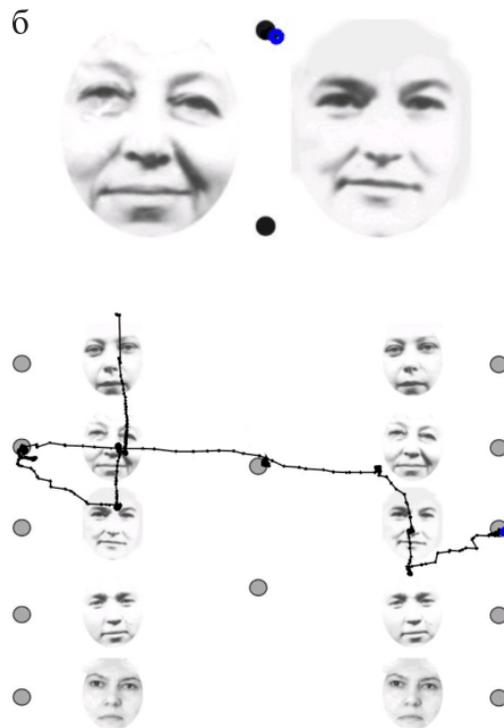
**Рис. 5. Распределение фиксаций по информативным деталям лиц при их опознании**

Полученные нами данные о большой вариативности паттернов движений глаз при рассматривании лица и зависимости этих паттернов от условий эксперимента и индивидуальных особенностей испытуемых хорошо согласуются с данными других исследователей [10,11].



экспериментов. Верхние записи с парами лиц относятся к этапу предъявления стимулов в течение 1 с. На этих записях видно, что во время предъявления пары лиц оба испытуемых, в соответствии с полученной ими инструкцией, удерживали взор возле верхней точки фиксации. На нижних записях показано, как испытуемые выбирали взглядом те лица, которые они опознали, на карте ответа, содержащей весь набор предъявлявшихся лиц. Подтверждая свой выбор, испытуемые должны были переводить взор на небольшие кружки, изображенные рядом с портретами.

В ходе этих экспериментов обнаружилось, что без предварительного обучения 4 из 7 испытуемых оказались способными удерживать взор между портретами и при этом узнавать оба лица. Другими словами, полученные этим методом результаты показали, что узнавание лица возможно и без фиксации взора на каких-либо его деталях. Для тех изображений, которые были использованы в данных экспериментах, у всех испытуемых вероятность правильного опознания была не менее 75%.



**Рис. 6. Пример стимулов и вариантов ответа во второй серии экспериментов**

На Рис. 6 представлены примеры записей движений глаз, полученных во второй серии

а - Исп. Т.О; б – Исп. В.О

#### 4. Выводы

- Утверждение калифорнийских

исследователей о том, что при узнавании лица первая фиксация взора всегда приходится на область носа, в условиях наших экспериментов не подтвердилось. Полученные записи показывают, что взор может быть направлен на любую часть лица.

- Индивидуальные паттерны движений глаз в процессе узнавания лиц демонстрируют значительную вариабельность: они зависят от условий эксперимента, психологических особенностей и физиологического состояния испытуемых, получаемой ими инструкции и других факторов.

- В определенных условиях человек способен узнать лицо в условиях фиксации взора вне его изображения, т. е. совсем в отсутствие фиксации в области лица.

- Роль движений глаз в узнавании лица является чисто вспомогательной: они обеспечивают попадание изображения лица в зону сетчатки, способную обеспечить анализ зрительных стимулов данного размера и данной категории.

## 5. Литература

- [1] Ярбус А. Л., *Роль движений глаз в процессе зрения*, М., 1965
- [2] Norton D. Scanpaths in eye movements during pattern perception // *Science*. 1971. V. 171. P. 308-311.
- [3] Norton D., Stark L. Eye movements and visual perception // *Scientific American*. 1971. V. 224. P. 34-43.
- [4] Yamada K., Cottrell G. W. A model of scan paths applied to face recognition // In *Proceedings of the 17<sup>th</sup> Annual Cognitive Science Conference*. Pittsburg, PA, Mahwah, NJ: Erlbaum, 1995. P. 55-60.
- [5] Guo K., Robertson R. G., Mahmoodi S., Tadmor Y., Young M. P. How do monkeys view faces? – a study of eye movements // *Exp. Brain. Res.* 2003. V. 150. P. 363-374.
- [6] Vinette C., Gosselin F., Schyns P. G. Spatio-temporal dynamics of face recognition in a flash: it's in the eyes // *Cognitive Science*. 2004. V. 28. P. 289-301.
- [7] Hsiao J. H., Cottrell G. The influence of number of eye fixations on face recognition // *Journal of Vision*. 2007. V. 7(9). P. 494.
- [8] Hsiao J. H., Cottrell G. Two fixations suffice in face recognition // *Psychological Science*. 2008. V. 19. P. 998-1006.
- [9] Phillips P. J., Moon H., Rauss P. J., Rizvi S. The FERET evaluation methodology for face recognition algorithms // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2000. V. 22. P. 1090-1104.
- [10] Henderson, J. M., Williams, C. C., Falk, R. J. Eye movements are functional during face learning // *Memory & Cognition*. 2005. V. 33. P. 98-106.
- [11] Blais C., Jack R. E., Scheepers C., Fiset D., Caldara R. Culture shapes how we look at faces // *PLoS ONE*. 2008. V. 3 (8) P. e3022

## О механизмах подавления восприятия хемосигналов в вомероназальной системе доменной мыши под действием стресса

Вознесенская А.Е.

*Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
annavoznessenskaia@gmail.com*

### Abstract

*Обонятельная система большинства видов млекопитающих представлена двумя функционально различными отделами: основной обонятельной системой и вомероназальной системой. Вомероназальная система играет ключевую роль в химической коммуникации млекопитающих. Ранее нами было показано подавление ответа рецепторных клеток вомероназального органа на адекватные стимулы под действием стресса. В работе рассмотрены возможные механизмы, обеспечивающие подобное влияние, в частности, вовлечение гормонов гипофизарно-адреналовой оси.*

### 1. Введение

Обонятельная система большинства видов млекопитающих состоит из двух функционально различных отделов: основной обонятельной системы (ООС) и дополнительной обонятельной системы (ДОС). Основными структурами ДОС являются вомероназальный орган (ВНО) и дополнительная обонятельная луковица (ДОЛ). Интерес к механизмам рецепции и кодирования в обонятельной системе обусловлен в первую очередь огромной ролью этой сенсорной модальности в организации сложных видов социального, в том числе и полового, поведения млекопитающих. Целым рядом работ показано прямое участие ДОС в формировании и реализации полового поведения самцов различных видов млекопитающих. Если говорить об изучении регуляции восприятия и анализа химических сигналов в обонятельной системе млекопитающих, то большая часть работ посвящена влиянию на упомянутые процессы половых гормонов. Влияние же гормонов стресса на рецепцию в обонятельной системе совершенно не изучено. В то же время классическими исследованиями показано подавление репродуктивного поведения самцов различных видов млекопитающих под воздействием стресса. Именно поэтому наша

работа посвящена исследованию влияния стресса на восприятие химических сигналов эстральной самки самцами доменной мыши на уровне периферического звена дополнительной обонятельной системы.

### 2. Методы

В работе было использовано три основных методических подхода, а именно: иммуногистохимия на срезах обонятельной луковицы и рецепторной ткани ВНО, иммуноферментный анализ (ИФА) для определения уровня основных стероидных гормонов в плазме крови и поведенческий подход для оценки некоторых параметров полового поведения. Работа выполнена на мышцах гетерогенной лабораторной популяции и мышцах линии BALB/C в возрасте от 2-6 мес. Общее количество животных, использованных в работе, составило 190 особей.

Имуногистохимическое окрашивание срезов ВНО было использовано для выявления иммунореактивности к белку Fos, рецептору андрогенов (AR) и рецептору глюкокортикоидов (GR). Мы использовали непрямой авидин-биотиновый метод, в качестве ферментной метки – пероксидазу хрена, в качестве хромогена - диаминобензидин (ДАБ). Окрашивание тотальных препаратов ВНО (толщина срезов 30  $\mu\text{M}$ ) осуществлялось по стандартному трехдневному протоколу с использованием первичных антител производства Santa Cruz Biotechnology (США): c-fos(4) sc-52 в разведении 1:500-для выявления Fos-иммунореактивности, AR(c-19) sc 815 в разведении 1:50 и 1:100 - для выявления иммунореактивности к рецептору андрогенов и GR(M-20) sc 1004 в разведении 1:50 и 1:100 - для выявления иммунореактивности к рецептору глюкокортикоидов.

Оценка влияния стресса на восприятие хемосигналов рецептивной самки на уровне реализации поведенческих эффектов осуществлялась при помощи стандартного теста, основанного на предпочтении сексуально опытных самцами запаха самки своего вида, находящейся на стадии эструса, запаху самки в

стадии диэструса. Так известно, что при предъявлении самцам грызунов двух вышеупомянутых образцов запаха, сексуально опытные самцы затрачивают большее количество времени на исследование образца запаха рецептивной самки по сравнению с образцом, полученным от самки, находящейся на стадии диэструса [1]. Единственным параметром, регистрируемым в данном тесте, является время, затрачиваемое на принюхивание к определенному образцу. В качестве образцов запаха использовали мочу самок домовых мыши, находящихся на стадии эструса и диэструса, нанесенную на фильтровальную бумагу. Тестирование длилось 10 минут.

Активность клеток рецепторной выстилки ВНО оценивали при помощи иммуногистохимического окрашивания срезов ВНО с применением антител против белка Fos. Количественную оценку результатов осуществляли при помощи программы Image J (<http://rsbweb.nih.gov/ij/index.html>).

Измерение уровня тестостерона и кортикостерона в образцах плазмы осуществляли с использованием готовых наборов для ИФА производства DRG EIA-1559 и EIA-4164, соответственно, и планшетного спектрофотометра SpectraMax 340PC 384. Анализ результатов измерения проводили в программе SpectraMax Software ([http://www.moleculardevices.com/pages/software/s\\_ofmax.html](http://www.moleculardevices.com/pages/software/s_ofmax.html)).

### 3. Результаты и обсуждение

#### **Исследование влияния стрессорных факторов на рецепцию химических сигналов рецептивной самки самцами домовых мыши на уровне выстилки вомероназального органа**

Самцов домовых мыши экспонировали к подстилке, содержащей химические сигналы самки, в течение 90 минут. Очевидно, что моча и другие выделения эстральной самки, которые может содержать подстилка, имеют сложный химический состав и содержат как летучие соединения, так вещества с высокой молекулярной массой. В настоящее время показано, что рецепторами нейронов базальной части ВНО воспринимаются соединения белково-пептидной природы, а рецепторы, экспрессирующиеся в апикальной части ВНО, ближе к просвету органа, способны связывать как летучие соединения, так и вещества с относительно высокой молекулярной массой (нелетучие) [2, 3]. После экспонирования самцам домовых мыши подстилки, содержащей

химические сигналы эстральной самки, Fos-иммунореактивность была обнаружена, как в базальной, так и в апикальной (расположенной ближе к просвету), зонах рецепторного эпителия ВНО, что соответствует многокомпонентности сигнала. Основная часть Fos-позитивных клеток была локализована в ростральной части ВНО. В ВНО самцов домовых мыши, экспонированных к подстилке, взятой от самки, находившейся на стадии диэструса, Fos-иммунореактивность была выражена крайне слабо: в рецепторном эпителии присутствовали лишь отдельные окрашенные клетки. На срезах рецепторной ткани ВНО контрольных животных, экспонированных к чистой подстилке, Fos-позитивные клетки отсутствовали. Полученные результаты согласуются с данными исследований, проводившихся на уровне ДОЛ самцов крыс [4] и мышей [5,6]. Так Матсуока с соавторами показали, что экспозиция самцов линии ICR к подстилке рецептивной самки вызывает значительное развитие Fos-иммунореактивности в ростральной части ДОЛ. При этом экспозиция к чистой подстилке приводила к появлению лишь незначительного количества окрашенных ядер на срезах ДОЛ [6].

Для изучения влияния стрессорных факторов на рецепцию химических сигналов рецептивной самки самцами домовых мыши нами был выбран холодный стресс, как вид внешнего воздействия, с которым животные часто сталкиваются в естественной среде обитания. В качестве физиологического показателя уровня стрессорности животных при использовании холодного воздействия мы оценивали уровень одного из основных гормонов стресса – кортикостерона. Кортикостерон является основным глюкокортикоидом у грызунов. Повышение уровня глюкокортикоидов происходит в первые минуты после начала воздействия и согласно классической концепции Ганса Селье является одним из основных компонентов адаптационного ответа на стресс [7]. Содержание самцов домовых мыши при 4°C в течение двух часов перед началом эксперимента привело достоверному ( $n=13$  (7 и 6 в каждой группе)  $p=0,042$ ) повышению уровня кортикостерона в плазме крови. Поскольку содержание в условиях низких температур относится к метаболическому типу стресса [8], то в качестве альтернативного вида воздействия мы использовали хорошо разработанную модель эмоционального стресса - содержание животных в постоянном присутствии запаха хищника в течение 10 дней. Эта модель уже более 20 лет применяется в исследованиях по изучению социального поведения грызунов [9, 10]. Содержание самцов домовых мыши в условиях

постоянного присутствия запаха хищника в течение 10 дней привело к достоверному повышению уровня кортикостерона в плазме крови ( $n=16$  (по 8 в каждой группе)  $p=0,00078$ ). Основное действие обеспечивают специфические химические сигналы, содержащиеся в моче кота, а не некие общие компоненты мочи, так как применение мочи морской свинки оказывало значительное более слабый эффект.

Содержание самцов домашней мыши при  $4^{\circ}\text{C}$  в течение двух часов перед началом эксперимента привело к подавлению Fos-иммунореактивности в рецепторной ткани ВНО в ответ на экспозицию к химическим сигналам рецептивной самки. Воздействие запахом хищника в течение 10 дней перед экспозицией к запаху эстральной самки дало сходные результаты на уровне рецепторной выстилки ВНО. Подсчет Fos-позитивных клеток в рецепторном эпителии ВНО, выявляемых после экспозиции к подстилке рецептивной самки, показал, что у животных, подвергшихся холодному стрессу, их количество было снижено в 5 раз.

### **Исследование влияния стресса на восприятие сигналов рецептивной самки на уровне поведения.**

Для оценки значимости угнетения ответа клеток рецепторного эпителия ВНО для восприятия химических сигналов рецептивной самки оценивали реакцию самцов домашней мыши на запах самок, находящихся на разных стадиях цикла. С этой целью был использован уже упоминавшийся ранее стандартный тест, основанный на предпочтении самцами запаха рецептивной самки по отношению к таковому самки, находящейся на стадии диэструса.

Животные контрольной группы ( $n=11$ ) затрачивали достоверно больше времени на исследование образца запаха рецептивной самки по сравнению с образцом запаха самки, находившейся в стадии диэструса (по критерию Вилкоксона для связанных выборок  $p=0.047$ ). Самцы, находившиеся перед началом опыта под воздействием низких температур ( $n=13$ ), не демонстрировали предпочтения по отношению к запаху рецептивной самки ( $p=0.099$  по критерию Вилкоксона для связанных выборок). Воздействие запахом хищника в течение десяти дней оказало сходное влияние: стрессированные животные ( $n=8$ ), согласно нашим данным, были неспособны отличить запах эстральной самки от запаха самки, находившейся в стадии диэструса ( $p=0.575$  по критерию Вилкоксона для связанных выборок).

Самцы контрольной группы и группы, находившейся под воздействием запаха хищника,

отдавали предпочтение образцам мочи по сравнению с водой. Время принюхивания к образцам мочи было достоверно больше как в случае рецептивной самки ( $p=0.003$  для контрольной группы и  $p=0.012$  для группы, находившейся под воздействием запаха хищника, по критерию Вилкоксона для связанных выборок), так и при использовании выделений самки в стадии диэструса ( $p=0.008$  для контрольной группы и  $p=0.012$  для группы, находившейся под воздействием запаха хищника, по критерию Вилкоксона для связанных выборок). Самцы группы, подвергавшейся холодному воздействию, также затрачивали больше времени на исследование образца запаха рецептивной самки по сравнению с контрольным образцом ( $p=0.025$  по критерию Вилкоксона для связанных выборок); при сравнении времени принюхивания к контрольному образцу и образцу запаха нерепцептивной самки достоверных различий выявить не удалось ( $p=0.247$  по критерию Вилкоксона для связанных выборок).

Снижение времени принюхивания к образцам мочи рецептивных самок не было связано со снижением исследовательской активности под воздействием стресса, на что указывает отсутствие различий по суммарному времени принюхивания ко всем образцам между контрольной группой и группой животных, подвергшихся холодному воздействию; животные же, подвергшиеся эмоциональному стрессу, тратили достоверно больше времени на исследование предложенных образцов по сравнению с животными двух других групп. Следует отметить тот факт, что увеличение времени исследования образцов запаха у эмоционально стрессированных самцов домашней мыши происходило за счет более длительного принюхивания к образцам мочи (по критерию Вилкоксона-Манна Уитни  $p=0.051$  и  $p=0.012$  для времени принюхивания к образцу мочи эстральной самки при сравнении с контрольной группой и группой, подвергшейся холодному стрессу, соответственно;  $p=0.005$  для времени принюхивания к образцу мочи самки на стадии диэструса, при сравнении с контрольной группой и  $p=0.003$  при сравнении группой животных, подвергшихся холодному стрессу). При этом межгрупповых различий во времени принюхивания к контрольным образцам выявлено не было.

Для подтверждения связи между предпочтением запаха рецептивной самки и реализацией полового поведения мы дополнительно оценивали влияние долговременного воздействия запахом хищника на основные параметры полового поведения

самцов домашней мыши. Самцов домашней мыши ( $n=10$ ) ссаживали с самкой того же вида, находящейся в стадии эструса, параметры полового поведения регистрировали в течение 60 минут. Опыт проводили до воздействия запахом хищника и после.

Воздействие запахом хищника привело к достоверному снижению таких параметров полового поведения самцов домашней мыши, как количество садок с интромиссиями ( $p=0,028$  по критерию Вилкоксона для связанных выборок) и попыток садок ( $p=0,017$  по критерию Вилкоксона для связанных выборок). Кроме того, достоверно снизился интерес к рецептивной самке, что отражено достоверным снижением количества назо-назальных контактов ( $p=0,036$  по критерию Вилкоксона для связанных выборок) и тенденцией ( $p=0,067$  по критерию Вилкоксона для связанных выборок) к снижению количества назо-анальных контактов между потенциальными партнерами.

Из описанных результатов следует, что оба вида стресса снижают интерес самцов домашней мыши к запаху рецептивной самки. Этот эффект не связан со снижением исследовательской активности, и возможно, вносит вклад в подавление полового поведения. Такое влияние стресса сходно с изменениями в поведении самцов грызунов, наблюдаемыми после удаления ВНО. Более ранними исследованиями показано, что после удаления ВНО самцы грызунов одинаково долго исследуют образцы мочи интактных самцов и рецептивных самок, в то время как ложнопереопределенные животные демонстрируют выраженное предпочтение запаха рецептивной самки [11, 12]. Эти эффекты, по всей видимости, связаны не с нарушением способности различить образцы мочи самки и самца, а со снижением мотивации к исследованию образцов, содержащих химические сигналы эстральной самки. В пользу этого предположения свидетельствует тот факт, что самцы грызунов после удаления ВНО сохраняют способность различать те же запахи в тесте на привыкание (в этом тесте животным последовательно предлагают несколько раз один и тот же запах, а потом новый.), то есть в случае появления элемента новизны [11]. Очевидно, что распознавание запахов в этом случае обеспечивает ООС.

Таким образом, результаты поведенческих исследований согласуются с нашей гипотезой о возможности подавления ответа рецепторных клеток ВНО самцов домашней мыши на химические сигналы рецептивной самки под воздействием стресса. Подавление ответа рецепторных клеток ВНО свидетельствует о снижении значимости информации,

поступающей по этому каналу в условиях стресса. Сопутствующие изменения в поведении указывают на то, что модуляция восприятия химических сигналов ДОС под действием стресса может служить одним из физиологических механизмов регуляции численности популяций.

### **Исследование возможных физиологических механизмов, обеспечивающих модуляцию сигнала на уровне рецепторной ткани вомероназального органа**

Большой интерес представляет не только само явление регуляции стрессом ответа рецепторных клеток ВНО, но и механизмы, лежащие в его основе. Одним из наиболее вероятных общих компонентов ответа на оба вида стресса, использованных в нашей работе, может быть подъем уровня глюкокортикоидов в крови стрессированных животных. Хорошо известно, что непосредственным ответом на стресс является повышение уровня глюкокортикоидов в плазме крови, что, в свою очередь, влечет за собой падение уровня тестостерона. Как уже упоминалось, оба вида стресса, использованных в работе, привели к достоверному повышению уровня кортикостерона. Измерение уровня тестостерона в плазме крови самцов домашней мыши, подвергшихся низкотемпературному воздействию, показало более низкий уровень данного гормона по сравнению с контрольной группой животных. Отсутствие статистической достоверности в данном опыте ( $p=0,063$  по критерию Вилкоксона-Манна-Уитни), очевидно, связано с высокой вариабельностью внутри группы, являющейся следствием использования нелинейных животных гетерогенной лабораторной популяции.

Измерение уровня тестостерона в плазме крови мышей, подвергшихся воздействию запаха хищника, не проводилось, поскольку многочисленными исследованиями показано, что хронический стресс, сопровождающийся повышенным уровнем глюкокортикоидов, подавляет синтез тестостерона в клетках Лейдига семенников [13, 14].

Уровень упомянутых гормонов потенциально может оказывать непосредственное влияние, как на рецепторные клетки, так и на нейроны центральной нервной системы, участвующие в обработке ольфакторной информации.

Отсутствие рецептора андрогенов в рецепторной ткани ВНО мыши на сегодняшний день было показано только в одной работе [15], с целью подтверждения или опровержения этих

результатов были проведены дополнительные исследования. Иммуногистохимия на срезах ВНО с применением антител против рецептора андрогенов (Santa Cruz Biotechnology, AR(c-19) sc 815) показала отсутствие AR-иммунореактивности в рецепторной ткани ВНО. При этом на срезах ОЛ, служивших положительным контролем, AR-иммунореактивность была хорошо выражена.

Таким образом, полученные нами результаты согласуются с литературными данными. Следует отметить, что в рецепторном эпителии крысы иммунореактивность к рецептору андрогенов также не была обнаружена [16]. Поскольку нами и авторами упомянутых работ были использованы антитела, специфически связывающиеся с различными эпитопами AR, то можно говорить об отсутствии значимых количеств данного белка в рецепторной ткани ВНО.

Отсутствие рецептора андрогенов в рецепторной ткани ВНО не исключает возможность прямого действия тестостерона на рецепторные нейроны ВНО, поскольку этот гормон, может путем ароматизации превращаться в эстрогены и действовать через соответствующий рецептор (ER) [17]. Данные об экспрессии и активности ароматазы (CYP19A1) в рецепторной ткани ВНО на сегодняшний день отсутствуют. Касательно экспрессии рецептора эстрогенов в рецепторной ткани ВНО литературные данные противоречивы. Алексеенко с соавторами [15], методами иммуногистохимии показали отсутствие как ER- $\alpha$ , так и ER- $\beta$ , в рецепторном эпителии ВНО самцов мышей линии Свисс-Вебстер. В то же время Таками и др. [18] сообщают, что им удалось выявить ER- $\alpha$  – иммунореактивность, локализирующуюся в апикальных дендритах рецепторных клеток ВНО крыс линии Спраг-Дуули обоих полов.

Данные об экспрессии рецептора глюкокортикоидов в рецепторном эпителии ВНО в современной литературе отсутствуют. Для выявления наличия или отсутствия рецептора глюкокортикоидов в рецепторном эпителии ВНО доменной мыши был использован метод иммуногистохимического окрашивания срезов ВНО с использованием антител против рецептора глюкокортикоидов (Santa Cruz Biotechnology, GR(M-20) sc 1004). В качестве положительного контроля была использована ткань основной обонятельной луковицы, для которой показана экспрессия данного белка [19].

В рецепторной ткани ВНО была обнаружена хорошо выраженная иммунореактивность к рецептору глюкокортикоидов. На контрольных срезах (без использования первичных антител, а

также с применением нормальной сыворотки вместо первичных антител) окрашивание в рецепторной зоне отсутствовало. Результаты были идентичны в двух независимых экспериментах.

Присутствие иммунореактивности к рецептору глюкокортикоидов в эпителии ВНО указывает на чувствительность этой ткани к уровню глюкокортикоидов, а также подтверждает возможность прямого действия кортикостерона на рецепторные клетки.

Рецептор глюкокортикоидов, как и рецептор андрогенов, принадлежит к семейству ядерных рецепторов и в отсутствие лиганда локализуется в цитоплазме. После связывания с лигандом рецептор глюкокортикоидов перемещается в ядро, где он сам выступает в роли транскрипционного фактора, а также может регулировать активность других транскрипционных факторов, таких как AP-1, NF- $\kappa$ B и CREB [20]. Рецептор глюкокортикоидов регулирует экспрессию целого ряда генов-мишеней, в том числе ионных транспортеров и рецепторов нейромедиаторов [21, 22]. Активация рецептора глюкокортикоидов может оказывать влияние на возбудимость нейронов ЦНС. Такого рода эффекты описаны для нейронов С1 гиппокампа, нейронов ядер шва и паравентрикулярного ядра [23, 24, 25].

Механизм реализации эффектов глюкокортикоидов в рецепторных нейронах ВНО, безусловно, является предметом отдельного исследования. Однако, можно предположить, что подавление ответа в случае короткого стрессового воздействия, скорее связано с негеномными эффектами активации рецептора глюкокортикоидов, так как геномные эффекты, реализующиеся через рецептор глюкокортикоидов и требующие синтеза белков *de novo*, несколько отставлены во времени. В случае же хронического стресса представляется вероятным влияние активации рецептора глюкокортикоидов на экспрессию вомероназальных рецепторов в нейронах ВНО.

Предлагаемый нами механизм угнетения ответа рецепторных клеток ВНО через прямое действие кортикостерона, безусловно, не является единственно возможным. И рассматривается нами исключительно как часть многокомпонентного воздействия. В частности, представляется интересным исследование влияния катехоламинов на рецепцию химических сигналов ДОЛ млекопитающих. Для подтверждения рассмотренного в нашей работе механизма мы предполагаем провести ряд фармакологических исследований.

#### 4. Список литературы

- [1] Hayashi S. and Kimura T. "Sex-attractant emitted by female mice" *Physiol Behav.*, 1974, Vol. 13, pp. 563-7.
- [2] Kimoto H., Haga S., Sato K. and Touhara K. "Sex-specific peptides from exocrine glands stimulate mouse vomeronasal sensory neurons" *Nature*, 2005, Vol. 437, pp. 898-901.
- [3] Leinders-Zufall T., Brennan P., Widmayer P., S P.C., Maul-Pavicic A., Jager M., Li X.H., Breer H., Zufall F. and Boehm T. "MHC class I peptides as chemosensory signals in the vomeronasal organ" *Science*, 2004, Vol. 306, pp. 1033-7.
- [4] Portillo W., Diaz N.F., Retana-Marquez S. and Paredes R.G. "Olfactory, partner preference and Fos expression in the vomeronasal projection pathway of sexually sluggish male rats" *Physiol Behav*, 2006, Vol. 88, pp. 389-97.
- [5] Dudley C.A. and Moss R.L. 'Activation of an anatomically distinct subpopulation of accessory olfactory bulb neurons by chemosensory stimulation' *Neuroscience*, 1999, Vol. 91, pp. 1549-56.
- [6] Matsuoka M., Yokosuka M., Mori Y. and Ichikawa M. "Specific expression pattern of Fos in the accessory olfactory bulb of male mice after exposure to soiled bedding of females" *Neurosci Res.*, 1999, Vol. 35, pp. 189-95.
- [7] Selye H. "Stress and the general adaptation syndrome" *Br Med J.*, 1950, Vol., pp. 1383-92.
- [8] Pacak K. and Palkovits M. "Stressor specificity of central neuroendocrine responses: implications for stress-related disorders" *Endocr Rev.*, 2001, Vol. 22, pp. 502-48.
- [9] Blanchard D.C., Griebel G. and Blanchard R.J. "Conditioning and residual emotionality effects of predator stimuli: some reflections on stress and emotion" *Prog Neuropsychopharmacol Biol Psychiatry.*, 2003, Vol. 27, pp. 1177-85.
- [10] Blanchard R.J., McKittrick C.R. and Blanchard D.C. "Animal models of social stress: effects on behavior and brain neurochemical systems" *Physiol Behav.*, 2001, Vol. 73, pp. 261-71.
- [11] Pankevich D.E., Baum M.J. and Cherry J.A. "Olfactory sex discrimination persists, whereas the preference for urinary odorants from estrous females disappears in male mice after vomeronasal organ removal" *J Neurosci.*, 2004, Vol. 24, pp. 9451-7.
- [12] Beauchamp G.K., Martin I.G., Wysocki C.J. and Wellington J.L. "Chemoinvestigatory and sexual behavior of male guinea pigs following vomeronasal organ removal" *Physiol Behav.*, 1982, Vol. 29, pp. 329-36.
- [13] Pfaff D.W. "Hormones, brain, and behavior", Amsterdam ; Boston: Academic Press, 2002.
- [14] Blanchard D.C., Sakai R.R., McEwen B., Weiss S.M. and Blanchard R.J. "Subordination stress: behavioral, brain, and neuroendocrine correlates" *Behav Brain Res.*, 1993, Vol. 58, pp. 113-21.
- [15] Alekseyenko O.V., Baum M.J. and Cherry J.A. "Sex and gonadal steroid modulation of pheromone receptor gene expression in the mouse vomeronasal organ" *Neuroscience*, 2006, Vol. 140, pp. 1349-57.
- [16] Nunez Chichet M.E., Genovese P., Bielli A. "Androgen receptor distribution, PAS and alcyan blue reaction in the vomeronasal organ and the nasal septum mucosa of the developing male rat" *Int. J. Morphol.*, 2007, Vol. 25(3), pp. 579-585.
- [17] Brown R.E. "An introduction to neuroendocrinology", Cambridge University Press, 1994.
- [18] Takami S., Hasegawa R., Horie S. "Immunocytochemical Evidence for Steroid Metabolism and Modification in the Primary Vomeronasal System in Rodents" *Chem. Senses*, 2008, Vol. 33, S90.
- [19] Sousa RJ, Tannery NH, Lafer EM. "In situ hybridization mapping of glucocorticoid receptor messenger ribonucleic acid in rat brain" *Mol Endocrinol.*, 1989, Vol. 3(3), pp.481-94.
- [20] Adcock I.M. and Ito K. "Molecular mechanisms of corticosteroid actions" *Monaldi Arch Chest Dis.*, 2000, Vol. 55, pp. 256-66.
- [21] Arenas F., Hervias I., Uriz M., Joplin R., Prieto J., Medina J.F. "Combination of ursodeoxycholic acid and glucocorticoids upregulates the AE2 alternate promoter in human liver cells" *J Clin Invest.*, 2008, Vol. 118(2), pp. 695-709.
- [22] So A.Y., Chaivorapol C., Bolton E.C., Li H., Yamamoto K.R. "Determinants of cell- and gene-specific transcriptional regulation by the glucocorticoid receptor" *PLoS Genet.*, 2007, Vol. 3(6), e94.
- [23] Laaris N., Haj-Dahmane S., Hamon M. and Lanfumey L. "Glucocorticoid receptor-mediated inhibition by corticosterone of 5-HT1A autoreceptor functioning in the rat dorsal raphe nucleus" *Neuropharmacology*, 1995, Vol. 34, pp. 1201-10.
- [24] Verkuyll J.M., Karst H., Joëls M. "GABAergic transmission in the rat paraventricular nucleus of the hypothalamus is suppressed by corticosterone and stress" *Eur J Neurosci.*, 2005, Vol.21(1), pp.113-21.
- [25] Joëls M. "Corticosteroid effects in the brain: U-shape it" *Trends Pharmacol Sci.*, 2006, Vol.27(5), pp. 244-50.

## Офтальмологический комплекс для диагностики и лечения зрения

Голубцов К.В.  
ИППИ РАН  
golub@iitp.ru

Грошев Ф.В.  
ИППИ РАН  
groshev@iitp.ru

Трунов В.Г.  
ИППИ РАН  
trunov@iitp.ru

Айду Э. А. И.  
ИППИ РАН  
aidu@iitp.ru

### Аннотация

*В работе описывается разработанная в ИППИ РАН методика исследования, которая позволяет выявлять нарушения в зрительной системе на ранней стадии заболевания и проводить терапию, нацеленную на восстановление функций, на основе полученных данных. Также описывается разработанный для реализации этой методики офтальмологический комплекс, позволяющий проводить комплексную диагностику всего зрительного тракта, включая электроретинографию, исследование электрической чувствительности и лабильности зрительного нерва, исследование поля зрения методом мелькающей периметрии и исследование критической частоты слияния мельканий.*

### 1. Введение

В последние годы, в связи с повсеместным внедрением компьютерной техники, существенно возросла нагрузка на зрение человека. С распространением видео и компьютерных игр эта тенденция все больше распространяется и на детей. Поэтому задача диагностики нарушений работы зрительной системы человека является как никогда актуальной.

В данной работе поставлена следующая задача: разработать методику полной, функционально удобной диагностики нарушений зрительной системы человека и спроектировать офтальмологический комплекс для реализации этой методики. Комплекс должен удовлетворять условиям массового обслуживания пациентов в клиниках.

### 2. Обзор существующих методик

Для исследования функционального состояния зрительного анализатора в клинике, наряду с электрофизиологическими методами исследования (напр., электроретинография), широко применяются психофизиологические исследования: периметрия, электрическая чувствительность (электрофосфен) и критическая

частота слияния мельканий (КЧСМ). Отмечалось, что данные психофизиологических методов часто демонстрируют большую степень корреляции с дефектами полей зрения, чем данные электрофизиологических исследований. Это достоверно доказано, например, для ранних стадий глаукомы. Для диагностики дефектов поля зрения широко используется метод периметрии [1]. Этот метод осуществляется при помощи периметров, которые позволяют исследовать световую и цветовую чувствительность зрительной системы при стимуляции локальных участков сетчатки.

По способу предъявления тестового объекта (стимула) современную периметрию можно разделить на кинетическую и статическую. При кинетической периметрии тест – объект заданной яркости и величины передвигается вдоль меридиана поля зрения от периферии к центру до начала восприятия тестового объекта пациентом. При статической периметрии неподвижный тест – объект предъявляется в заранее предусмотренных точках поля зрения с постоянным увеличением яркости до начала его восприятия пациентом.

В литературе неоднократно отмечалось, что исследование поля зрения методом периметрий можно обнаружить дефекты только тогда, когда поражено 30 % зрительных волокон [1,2]. Естественно, что при таком количестве пораженных волокон зрительного нерва трудно проводить эффективную терапию.

Например, при исследовании КЧСМ на начальной стадии атрофии зрительного нерва или глаукомы с засвечиванием, как это принято международным стандартом, всей сетчатки, суммарные показатели могут оказаться в пределах нормы. Однако при исследовании локальной КЧСМ, измеряемой в различных точках поля зрения, показатели в поврежденных зонах сетчатки скорее всего будут значительно снижены.

Приведем конкретный пример пациента с патологическим процессом в области хиазмы (перекреста зрительного нерва). При стимуляции центра сетчатки показатели КЧСМ оказываются в пределах 40 Гц, что соответствует норме, а при стимуляции назальной зоны сетчатки КЧСМ

значительно ниже нормальных показателей – всего 20-25 Гц. Если такие сниженные показатели регистрируется только на одном глазу, можно предположить наличие частичной атрофии зрительного нерва. Симметричное снижение показателей на обоих глазах может указывать на наличие новообразования в районе хиазмы, что требует немедленного проведения томографии головного мозга и соответствующего хирургического лечения при подтверждении диагноза.

В клинике перечисленные методики применяются, как правило, в различных кабинетах и на разных приборах, что увеличивает длительность исследования и затрудняет проведение эффективной диагностики на начальном этапе заболевания. Возникает необходимость в разработке прибора, обеспечивающего комплексное исследование, объединяющее электрофизиологические и психофизиологические методы, такие как электроретинография, исследование электрической чувствительности и лабильности зрительного нерва, исследование поля зрения методом мелькающей периметрии, а также мультифокальное исследование критической частоты слияния мельканий.

### 3. Описание офтальмологического комплекса

Для этой цели разработан офтальмологический комплекс, позволяющий проводить комплексную диагностику зрительного тракта.

В состав офтальмологического комплекса входят микропроцессорный блок управления, световые стимуляторы для исследования КЧСМ, мини-экраны для исследования поля зрения, электроды для исследования лабильности и проведения электроретинографии, очки для профилактики заболеваний органа зрения.

Комплекс соответствует требованиям массового обслуживания пациентов в клиниках, а именно:

- Простой, интуитивно понятный интерфейс блока управления реализован на сенсорном графическом экране. Интерфейс основан на понятных графических пиктограммах, с учетом того, что таким блоком управления может пользоваться человек, не являющийся специалистом по компьютерной технике;
- Блок управления выполнен в защищенном, герметичном корпусе;
- Питание блока управления осуществляется от аккумулятора с возможностью подзарядки от питающей сети 220В. Это соответствует

правилам по электробезопасности для медицинских приборов и упрощает выбор места расположения комплекса в клинике;

- Блок управления может быть связан с компьютером по интерфейсу USB с оптронной развязкой и интерфейсу Bluetooth. В компьютере возможна дальнейшая обработка данных, ведение баз данных пациентов, отсылка отчетов по электронной почте и отображение на сайте в сети Интернет.

Отдельные компоненты комплекса, описанные в ранее опубликованных работах авторов [3-8], были представлены на ряде международных тематических выставок и семинаров [9, 10].

### 4. Заключение

В работе описана методика диагностики нарушений зрительной системы человека. Методика реализована в функционально удобном офтальмологическом комплексе, пригодном для массового обслуживания пациентов в клиниках.

### 5. Литература

- [1] Немцев Г.Г. “Актуальные вопросы современной периметрии”, *Клиническая физиология зрения, Сборник трудов МНИИГ им. Гельмгольца*, Москва.
- [2] Шамшинова А.М., *Клиническая физиология зрения*, Москва, 2002.
- [3] Грошев Ф.В., Голубцов К.В., Трунов В.Г., Айду Э.А. И. “Компьютерная система для исследования лабильности зрительной системы”, *Сборник трудов конференции ИТИС`07*, Звенигород, 2007, с.228-230.
- [4] Грошев Ф.В., Голубцов К.В., Трунов В.Г. “Микропроцессорная система для диагностики дефектов зрительной системы человека”, *Сборник трудов конференции ИТИС`08*, Геленджик, 2008, с. 259-261.
- [5] Голубцов К.В. “Устройство для восстановления зрительных функций”, патент на полезную модель № 85334, 2009.
- [6] Голубцов К.В. “Устройство для отведения локальной электроретинограммы”, патент на полезную модель № 83692, 2009.
- [7] Голубцов К.В., Трунов В.Г. Айду Э.А.И., Огниев В.В. “Устройство для экспресс-диагностики скотом в поле зрения”, заявка на полезную модель №2009118797.22.
- [8] Голубцов К.В., Айду Э. А.-И., Максимов В.В., Трунов В.Г. Патент на полезную модель №82107, 2009.
- [9] Golubtsov K.V., Trunov V.G., Aidu E.A.I., Groshev F.V., “A Method to Examine the Lability of Visual System”, Russian-Finnish Seminar «Russian Advanced Information Technologies», September 9 2008, pp.32-33.
- [10] K. Golubtsov, F.Groshev, V.Trunov “Raduga 6DL”, *The 13-th international salon of research, innovation and technological transfer “Inventica 2009”*, 4-6 June 2009, Romania.

## Способы разделения каналов акустической связи у близких видов *Pentatomidae*.

Шестаков Л.С.

ИППИ РАН, 127994, г.Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, 19, стр.1.

[zicrona@yandex.ru](mailto:zicrona@yandex.ru)

### Аннотация.

На примере представителей разных родов сем. *Pentatomidae* показано, что сигналы видов, вступающих в акустический контакт, различаются или по амплитудно-временным, или по частотным характеристикам. Характеристики же сигналов видов, обитающих в различных стациях, могут быть сходными.

### Введение.

В настоящее время характеристики акустических и вибрационных сигналов широко используются в систематике для различения близких видов в различных группах насекомых и в некоторых случаях они являются единственным

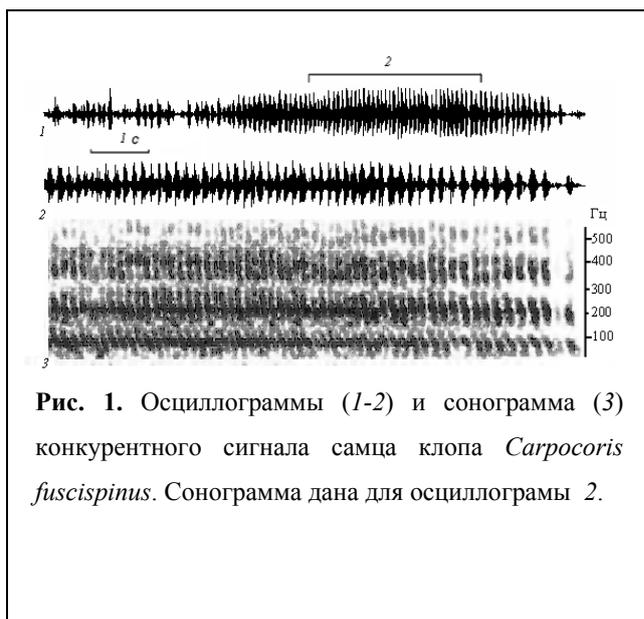
надежным видовым признаком. Однако появляется все больше данных о том, что сигналы разных видов могут быть сходны по амплитудно-временным и частотным характеристикам. Если сигналы совпадают по своим параметрам, это указывает на то, что существуют факторы, препятствующие акустическому контакту издающих их видов. Таким барьером для насекомых, использующих вибрационную коммуникацию, может служить строгая приверженность к определенному виду растения. Теоретически, в таком случае возможно полное совпадение параметров сигналов разных видов. Насколько подобное явление характерно для вибрационной коммуникации клопов-щитников, мы рассмотрим ниже.

### 1. Сравнение сигналов видов, потенциально вступающих в акустический контакт

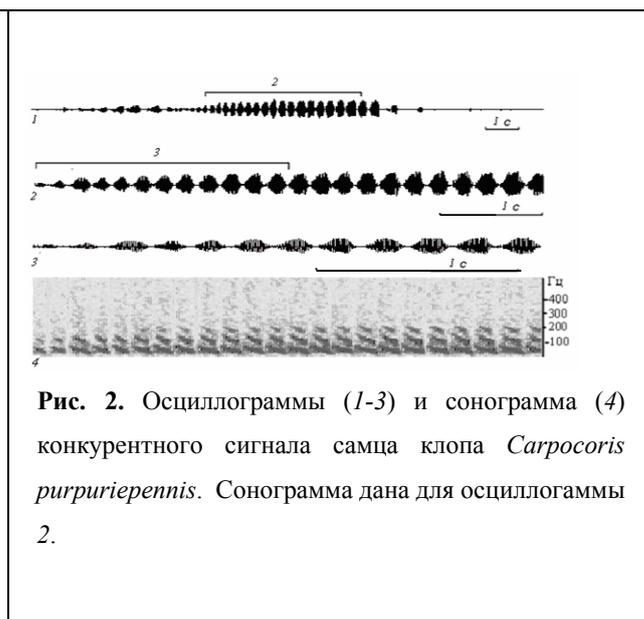
Нами были зарегистрированы вибрационные сигналы представителей нескольких групп близких видов, встречающихся в одном биотопе и потенциально способных вступать в акустический контакт друг с другом. Сигналы регистрировали с помощью головки звукоснимателя (ГЗМ-205Д или ГЗП-311),

подключенной через согласующий усилитель к звуковой плате компьютера. Методика регистрации детально описана в предыдущих работах [3].

Первую из них образуют три представителя рода *Carpocoris*. Все три вида обладают значительной экологической пластичностью и часто встречаются совместно в одном биотопе и даже на одном растении. Сигналы изученных нами видов отчетливо различаются по временной структуре (рис. 1,2).



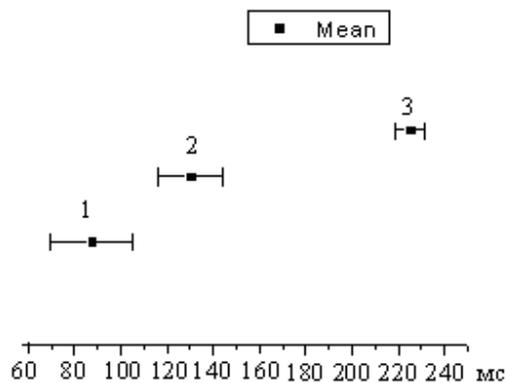
**Рис. 1.** Осциллограммы (1-2) и сонограмма (3) конкурентного сигнала самца клопа *Carpocoris fuscispinus*. Сонограмма дана для осциллограммы 2.



**Рис. 2.** Осциллограммы (1-3) и сонограмма (4) конкурентного сигнала самца клопа *Carpocoris purpuripennis*. Сонограмма дана для осциллограммы 2.

На рис. 3 видно, что вибрационные посылки всех трех видов различаются по длительности и даже крайние значения этого параметра у них не перекрываются. Средние

значения длительности посылок составляют: у *Carpocoris fuscispinus* - 87 мс, у *C. purpuripennis* - 130, а у *C. pudicus* - 226 мс.



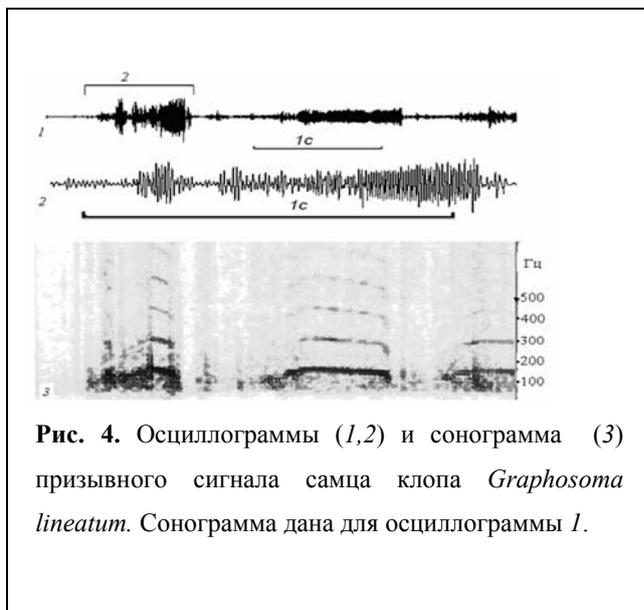
**Рис. 3.** Длительность вибрационных посылок *Carpocoris fuscispinus* (1), *C. pudicus* (2), *C. purpuripennis* (3). На графике приведено среднее значение (mean) и разброс параметра (min, max).

Различия ярко выражены и в частотной структуре сигналов (рис. 1,2). Так, в сигнале *C. fuscispinus* отчетливо выражены три гармоники, а в сигнале *C. pudicus* – одна. Таким образом амплитудно-временные и частотные характеристики вибрационных сигналов могут

использоваться как таксономический признак для различения видов этого рода.

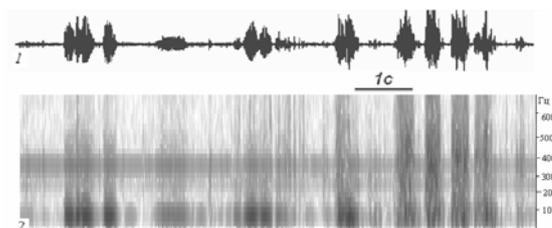
Аналогичные результаты получены также для *Graphosoma lineatum* и *G. semipunctatum*,

которые могут встречаться совместно в некоторых частях ареала (например, в Краснодарском крае, где проводились наши исследования). При сходстве амплитудно-временного рисунка сигналов, их частотные параметры сильно различаются: у *G.*



**Рис. 4.** Осциллограммы (1,2) и сонограмма (3) призывного сигнала самца клопа *Graphosoma lineatum*. Сонограмма дана для осциллограммы 1.

*lineatum* спектр сигнала линейчатый с выраженными тремя гармониками (рис. 4), а у *G. semipunctatum* – шумовой (рис. 5). При этом и средняя длительность посылок у них различна.



**Рис. 5.** Осциллограмма (1) и сонограмма (2) призывного сигнала самца клопа *Graphosoma semipunctatum*

Если у представителей предыдущих родов нами было отмечено лишь различие в структуре сигналов, то у исследованных видов рода *Eurydema* сильно различается не только длительность сигналов (рис.6), но и поведение при их эмиссии.

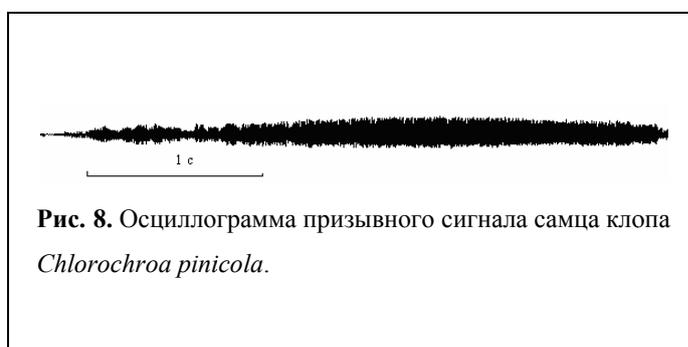
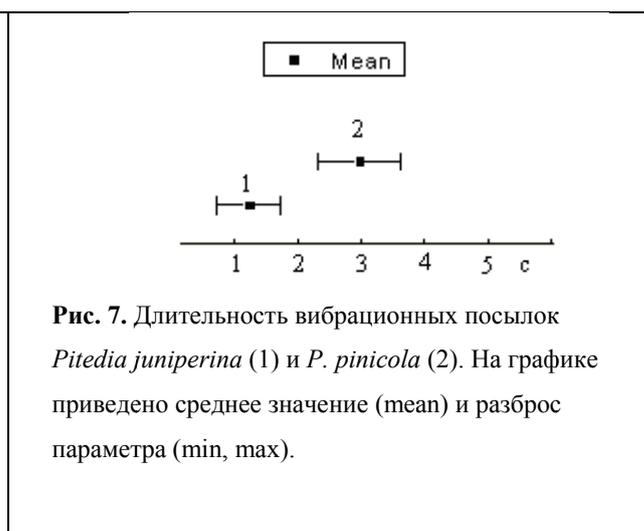
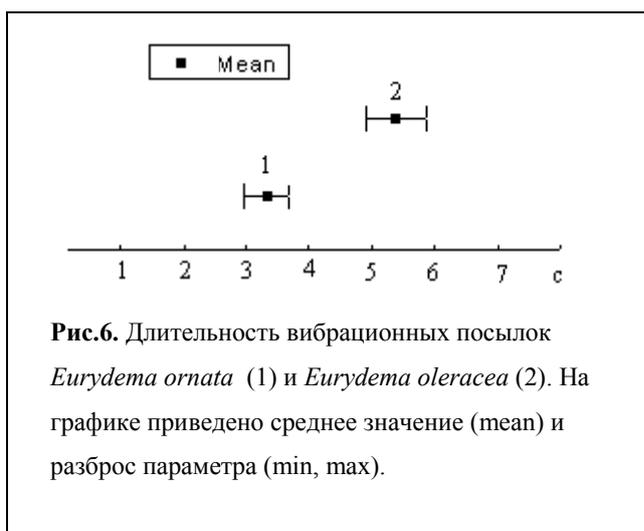
## 2. Сравнение сигналов видов, не вступающих в акустический контакт

Нами были изучены представители рода *Chlorochroa*, которые могут встречаться в одном биотопе, но при этом являются строгими монофагами: *Chlorochroa pinicola* питается на *Pinus sylvestris*, а *Ch. juniperina* – на *Juniperus communis*. В наших опытах насекомые издавали сигналы только на своем кормовом растении, а растения других видов сразу покидали. Сигналы этих видов сходны по частотным характеристикам, а их небольшие различия

Таким образом, сигналы видов, потенциально вступающих в акустический контакт, различаются или по амплитудно-временным, или по частотным характеристикам.

состоят в том, что средняя длительность вибрационной посылки у *Ch. pinicola* – 3,2 с, а у *Ch. juniperina* – 1,3 с (рис. 7).

В то же время, сигналы этих видов представляют собой монотонные посылки без выраженной амплитудно-временной модуляции (рис. 8, 9). Можно предположить, что при наложении сигналов этих видов друг на друга, они могут полностью сливаться.



Таким образом, при совместном обитании обоих видов на одном растении распознавание конспецифического сигнала было бы крайне затруднительно. Теоретически, более сильно это будет мешать *Ch. juniperina*, так как его сигнал имеет меньшую продолжительность и может быть полностью заглушен более длительным сигналом *Ch. pinicola*.

Следовательно, вибрационная коммуникация этих видов невозможна на одном субстрате; это подтверждается фактом, что в наших опытах насекомые издавали сигналы исключительно на своем кормовом растении.

Как известно, симпатрические виды из других групп животных (например, птицы,

бесхвостые амфибии) при совпадении характеристик сигналов либо поют в разных стациях [2], либо расходятся по времени акустической активности [1]. При использовании вибрационных сигналов акустическая активность видов, обитающих в одном биотопе, может совпадать во времени, если эти виды поют на разных субстратах, в частности, на разных кормовых растениях.

По нашему мнению, это явление представляет собой еще один пример разделения каналов акустической связи (так называемых акустических ниш) в сообществах насекомых, использующих звуковую и вибрационную коммуникацию.

[1] *Cody M.L., Brown J.H., 1969. Song asynchrony in neighbouring birds species // Nature. Vol. 222. P. 778-780.*

[2] *Hodl W., 1977., Call differences and calling site segregation in anuran species from Central Amazonian floating meadows // Oecologia.*

*Vol. 28. P. 351-363.*

[3] *Шестаков Л.С., 2008. К изучению вибрационных сигналов клопов-щитников (Heteroptera, Asopinae) европейской части России // Зоол. ж. Т. 87. № 1. С. 36-41.*

## Воздействие электромагнитного излучения GSM диапазона на кровь, надпочечники и ц.н.с. крыс.

Анна Дурнева

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

E-mails: tomtit21@rambler.ru

В последнее столетие электромагнитный фон сопутствующий нашей жизни существенно изменился. К естественным постоянным и переменным полям природного происхождения прибавились поля, создаваемые промышленными и бытовыми приборами. Повсеместное распространение мобильных телефонов делает эту проблему еще более актуальной.

Влияние неионизирующих электромагнитных излучений (ЭМИ) различных диапазонов исследуется давно. Известно, что наиболее чувствительны к электромагнитному излучению ЦНС, глаза, сердечно-сосудистая и иммунная системы, органы кроветворения, гонады.

Именно при воздействии ЭМИ на них наблюдали биологические эффекты во многих работах. В хрусталике глаза во многих исследованиях отмечено развитие катаракты. При облучении образцов человеческой крови ЭМИ (900 МГц, 0,4; 2 и 3,6 Вт/кг, в течение 20 минут, 1 часа и 4 часов) было обнаружено, что лейкоциты облученной крови вырабатывают белки теплового шока HSP70 и HSP27 [Lim et al., 2005]. ЭМИ диапазона мобильных телефонов также вызывает изменение регионального мозгового кровотока у подростков, разрывы ДНК в клетках мозга крыс, одно- и двунитевые разрывы ДНК в диплоидных фибробластах человека, образование белков теплового шока в эпителиальных клетках амниотической оболочки эмбриона человека [Belyaev I., 2005] и т.д. Многие из этих изменений часто связывают с окислительным стрессом.

Известно, что при неблагоприятных воздействиях на живой организм в клетках происходит генерация активных форм кислорода (АФК), которые в

умеренных количествах стимулируют защитные силы организма за счет увеличения скорости метаболических процессов. В случае если происходит значительное превышение уровня АФК и антиоксидантная система, контролирующая их количество, не справляется, происходит повреждение белков и ДНК, а также активация перекисного окисления липидов (ПОЛ), что в конечном итоге приводит к повреждению мембран [Новиков К.Н., 2004].

Окислительный стресс может быть как результатом прямого действия излучения на свободнорадикальные процессы, так и стимулироваться неспецифическим стрессорным ответом организма. Стрессорный ответ активируется системой гипоталамус-гипофиз-кора надпочечников, которая в свою очередь регулируется многочисленными нервными и гуморальными взаимодействиями. Одной из стресс-лимитирующих систем, действующих на гипоталамус, является ГАМК-эргическая система, влияющая также на поведение животных.

Для выявления возможных физиологических, биофизических и биохимических эффектов излучения 900 МГц представлялось актуальным исследовать влияние данного вида ЭМИ на протекание свободнорадикальных процессов и антиоксидантную систему, а также на стресс-реализующую и стресс-лимитирующую системы организма.

Таким образом, целью работы было оценить влияние ЭМИ диапазона мобильных телефонов (900 МГц, 2 Вт) при однократном и многократном воздействии в различные сроки после облучения на показатели антиоксидантного статуса крови, состояние гемоглобина, адреналовую и

гамкэргическую системы организма в экспериментах *in vivo* и *in vitro*.

В данной работе исследовалось:

1. Влияние ЭМИ (900 МГц, 1,67 Вт/кг, 1 час) при однократном и при многократном (5 дней) воздействии *in vivo* на:

А. активность антиоксидантных ферментов (супероксиддисмутазной, глутатионпероксидазной, каталазной активностей, содержания церулоплазмينا) и содержание продуктов ПОЛ (уровня ТБК-активных продуктов) в крови и в головном мозге;

Б. стресс-реализующую гипоталамо-адреналовую систему (содержание 11-кортикостероидов в плазме крови и надпочечниках);

В. стресс-лимитирующую ГАМК-эргическую систему (содержание гаммааминомасляной кислоты, активность глутаматдекарбоксилазы и ГАМК-трансаминазы);

2. Влияние ЭМИ (900 МГц, 2 Вт, 1 час) на антиоксидантный статус крови и плазмы при их облучении *in vitro*.

3. Влияние ЭМИ (900 МГц, 2 Вт, 2 часа) на железо-индуцированное перекисное окисление в плазме крови.

4. Влияние ЭМИ (900 МГц, 2 Вт, 20 мин.) на чувствительность эритроцитов к механическому гемолизу после облучения суспензии эритроцитов.

5. Влияние ЭМИ (900 МГц, 2 Вт, 1 час) на состояние гемоглобина после облучения крови.

Для экспериментов *in vivo* использовалась кровь и плазма половозрелых самцов лабораторной крысы (*Rattus norvegicus*), содержащихся в стандартных условиях ухода и питания в виварии Биологического факультета МГУ. Для экспериментов *in vitro* использовалась кровь и плазма крыс.

Для опытов использовалась специальное облучающее устройство, состоявшее из генератора, циркулятора и камеры, в которой облучалась крыса.

Генератор - это универсальный источник питания, работающий от сети (220 В) и «мобильный телефон» (Sony Ericson), подключённый к нему. «Мобильный телефон» преобразует полученный от источника питания сигнал в сигнал нужной мощности и частоты. На этом устройстве выставляют необходимую частоту и мощность излучения, выбирая нужный канал (для 900 МГц диапазон 0,02-2 Вт/кг, для 1800-1900 МГц – 0,01-1 Вт/кг). В наших опытах объекты облучали электромагнитным излучением с частотой 900 МГц, общей мощностью 2 Вт (расчет удельной мощности на крысу составляет 1,67 Вт/кг).

От циркулятора к камере шел провод, представлявший из себя обычную коаксиальную антенну. Циркулятор представляет из себя преобразователь тока и обеспечивает согласование генератора и антенны и однонаправленность сигнала. Камера для облучения - это деревянная коробка, внутренняя поверхность которой покрыта изнутри сеткой тонких проводков для поглощения излучения. В один конец коробки входит провод и излучает. Экспериментальная крыса содержалась в пластиковом контейнере на металлической подложке. Контрольное животное во время облучения опытно держали в пластиковом контейнере такого же размера.

В экспериментах *in vivo* получены следующие результаты.

Содержание кортикостероидов в плазме крови через 24 часа после однократного облучения упало в 2 раза по сравнению с контролем. При этом содержание кортикостерона в коре надпочечников достоверно не изменилось.

Также через 24 часа после однократного облучения зарегистрирован рост глутатионпероксидазной активности в плазме крови на 19,6%, при этом глутатионпероксидазная активность непосредственно после облучения не отличалась от контроля.

Сразу после облучения достоверно снизилось количество продуктов ПОЛ в плазме крови на 12,1%, тогда как через 24 часа после облучения изменения уровня ТБК-АП не наблюдалось.

Остальные изучаемые параметры антиоксидантной, адреналовой и ГАМК-эргической систем после однократного облучения не отличались от контроля. Что характерно, оба изменения, наблюдавшиеся через 24 часа после облучения, могли быть вызваны увеличением содержания мелатонина в крови, ибо он активирует ГПО и ингибирует выброс кортикостероидов в кровь из коры надпочечников. Большая, чем в норме в это время суток концентрация мелатонина могла и послужить причиной снижения двигательной и исследовательской активности крыс, обнаруженной нашими коллегами из лаборатории Нормальной физиологии. Снижение уровня кортикостероидов в плазме крови могло также быть вызвано усилением метаболизма кортикостероидов в тканях или повышенным их выделением. В любом случае для выяснения причин найденных эффектов необходимы дальнейшие эксперименты.

Таким образом, однократное облучение вызывает слабый неспецифический ответ организма. Наши изменения в антиоксидантной системе крови после однократного облучения напоминают результаты работы китайского исследователя, где после наблюдался рост ГПО-активности и снижение количества продуктов ПОЛ многократного тридцатипятидневного облучения.

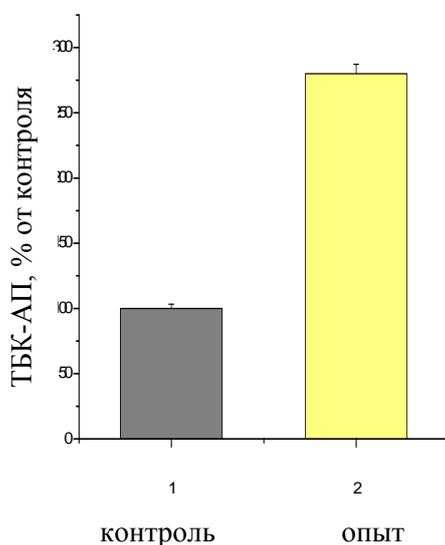
Многократное облучение крыс в течение 5-ти дней не вызвало достоверного изменения ни одной из изучаемых характеристик АС систем крови и мозга, ГАМК-эргической системы мозга, и также не повлияло на содержание кортикостерона в плазме крови и коре надпочечников. Это позволяет говорить об адаптации. Данный результат противоречит результатам работ китайских и турецких

исследователей [Cao Z. et al, 2000], в которых после облучения излучением 900 МГц наблюдалась классическая картина окислительного стресса. Столь резкое отличие результатов опытов при воздействии излучением с одинаковыми характеристиками могло быть вызвано различием электромагнитного фона в местах проведения экспериментов, а также особенностями иммобилизации животных при облучении. У авторов статьи [Atilla I. et al, 2004] крысы при облучении были специально иммобилизованы, в отличие от наших, которые могли передвигаться внутри камеры для облучения. Иммобилизационный стресс мог стимулировать окислительные процессы и повысить чувствительность к облучению.

Чтобы выяснить, не являются ли изменения антиоксидантного статуса результатом прямого действия излучения на свободнорадикальные процессы, кровь и плазму облучали *in vitro*. Достоверных изменений в активности антиоксидантных ферментов крови, содержания ТБК-активных продуктов и гидроперекисей в плазме крови и уровня небелковых тиолов в крови не наблюдалось.

Однако при индукции перекисного окисления в плазме крови двухвалентным 0,4 миллимолярным железом, в образце облучавшемся 2 часа после запуска перекисного окисления, содержание ТБК-АП составляло 280,8% от количества ТБК-АП в необлучавшемся образце (рис. 1). Следовательно ЭМИ влияет на свободнорадикальные процессы, если они идут достаточно интенсивно. Возможно, в физиологических условиях в крови это влияние так мало, что не нарушает окислительного баланса и не регистрируется. Можно предположить, что к концу часа облучения антиоксидантная система уже компенсирует возникшие отклонения баланса АФК и мы наблюдаем небольшое снижение ТБК-АП вследствие её активной деятельности.

Полученные данные позволяют утверждать, что излучение 900 МГц способно вызвать значительное усиление окислительных процессов и нанести значительный ущерб, если в организме уже идут патологические процессы.



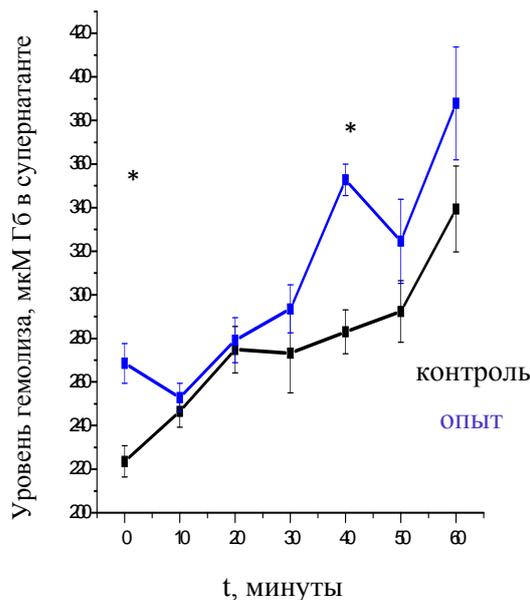
**Рисунок 1.** Изменение количества ТБК-активных продуктов в плазме крови, содержащей 0,4 мМ  $Fe^{2+}$  после облучения ЭМИ (900 МГц, 2 Вт, 2 часа).  $n=5$ ,  $p \leq 0,001$ .

После часового облучения крови были сняты спектры комбинационного рассеяния гемоглобина. Для оценки состояния гемоглобина использовались следующие характеристики: сродство гемоглобина к  $O_2$  и относительное содержание оксигемоглобина. Данные соотношения в спектрах гемоглобина облучённой и не облучённой крови практически не отличались. Это свидетельствует, что ЭМИ не влияет на насыщение гемоглобина кислородом.

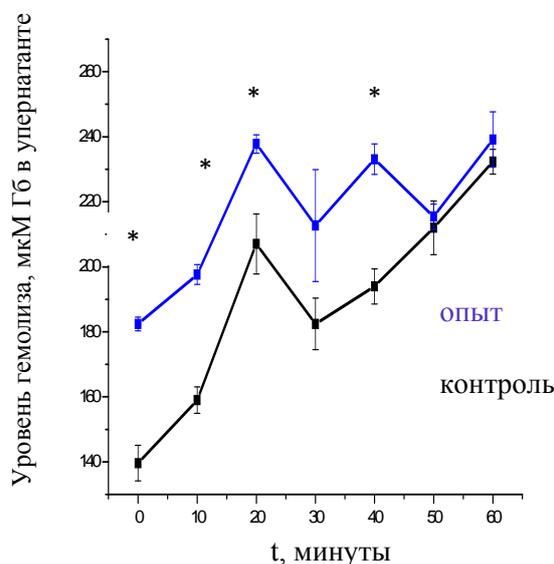
Суспензию эритроцитов с гематокритом 40% после 20-ти минутного и часового облучения подвергали ц/ф каждые 10 минут в течение часа (при 10.000 об/мин, 15 секунд), разведя предварительно в 17 раз в физиологическом растворе. На эритроциты действовали 2 гемолитических фактора: центрифугирование и отсутствие

глюкозы в среде. Эритроциты отмывали от плазмы и держали в 0,155 М растворе NaCl без глюкозы, что, как известно из литературы, вызывает спонтанный гемолиз вследствие истощения эритроцитов по АТФ. Потому количество разрушенных эритроцитов увеличивалось со временем инкубации (рис. 2, 3). Устойчивость к гемолизу как у эритроцитов, облучавшихся 20 минут, так и у эритроцитов, облучавшихся 1 час упала приблизительно на 20 %. После 20-ти минутного облучения достоверное снижение устойчивости к гемолизу зарегистрировано на нулевой и сороковой минуте после облучения. После часового облучения достоверное снижение устойчивости к гемолизу наблюдалось на нулевой, 10-ой, 20-ой и 40-овой минутах после облучения.

Из литературных данных известно, что снижение устойчивости эритроцитов к гемолизу после воздействия излучением порядка ГГц мощностей, близких к нашим связано с влиянием ЭМИ на состояние  $Ca^{2+}$ -зависимых каналов эритроцитов. Другая возможная причина – свободнорадикальное повреждение мембран. В пользу этого предположения говорит то, что после часа облучения достоверное снижение устойчивости к гемолизу наблюдалось в большем количестве точек, чем после 20-ти минут экспозиции.



**Рисунок 2.** Рост чувствительности к механическому гемолизу (выход гемоглобина) в суспензиях облучённых ЭМИ (900 МГц, 2 Вт, 20 мин.) и контрольных эритроцитов с гематокритом 40%. \*n=7,  $p \leq 0,05$ .



**Рисунок 3.** Рост чувствительности к механическому гемолизу (выход гемоглобина) в суспензиях облучённых ЭМИ (900 МГц, 2 Вт, 1 час) и контрольных эритроцитов с гематокритом 40%. \*n=7,  $p \leq 0,05$ .

Таким образом, однократное облучение вызывает слабый

неспецифический ответ здорового организма, благодаря работе защитных систем. А если в организме уже идут свободнорадикальные процессы, которые не были подавлены защитными системами, либо если защитные системы уже были ослаблены к моменту облучения, то излучение способно вызвать усиление свободнорадикальных патологических процессов.

\*Работа выполнена в рамках диплома Дурневой А.П., на кафедре Биофизики Биологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, научный руководитель к.б.н. Байжуманов А.А.

## Литература.

1. Новиков К.Н. Роль активных форм кислорода в биологических системах при воздействии факторов окружающей среды. Москва, 2004.
2. Atilla I., Ahmet G., Ferah A., Saat K., Mustafa I., Omer A., Suleyman O. Ginkgo biloba prevents mobile phone-induced oxidative stress in rat brain. *Clinica Chimica Acta* 340 (2004) 153–162.
3. Ayata A, Mollaoglu H, Yilmaz HR, Akturk O, Ozguner F, Altuntas I. Oxidative stress-mediated skin damage in an experimental mobile phone model can be prevented by melatonin. *J Dermatol.* 2004 Nov;31(11):878-883.
4. Belyaev I. Non-thermal biological effects of microwaves. *Microwave Review*, 2005; 11(2): 13-29.
5. Cao Z, Zhang H, Tao Y, Liu J. Effects of microwave radiation on lipid peroxidation and the content of neurotransmitters in mice. *Wei Sheng Yan Jiu.* 30; 29 (1): 28-29; 2000.
6. Lim HB, Cook GG, Barker AT, Coulton LA. Effect of 900 MHz electromagnetic fields on nonthermal induction of heat-shock proteins in human leukocytes. *Radiat Res.* 2005 Jan;163(1):45-52.

# Раздел 6

Биоинформатика



## Транскрипция генов синтеза пролина у бактерий родов *Marinobacter*, *Pseudomonas* и *Shewanella* регулируется белком семейства *tetR*

К.В. Лопатовская, О.А. Зверков, А.В. Селиверстов, В.А. Любецкий

ИППИ РАН

lyubetsk@iitp.ru

### Аннотация

Найден консервативный мотив перед генами *proA* и *proB* синтеза пролина у большинства видов  $\gamma$ -протеобактерий (родов *Pseudomonas*, *Marinobacter*, *Shewanella*) и у некоторых других видов. С помощью описанного ниже алгоритма сигнал отделен от шума и затем с помощью другой нашей программы проведено сравнение его филогенетического профиля с профилями всех бактериальных белков. Отсюда предположено, что соответствующим транскрипционным фактором является белок из семейства *tetR*, ортологичный белку NP\_249058 из *Pseudomonas aeruginosa* PAO1.

### 1. Введение

В работах [1, 2] экспериментально показана зависимость (от концентрации пролина) транскрипции генов, кодирующих два фермента (гаммаглутамилкиназу и гаммаглутамилфосфат-редуктазу) синтеза пролина, у *Pseudomonas aeruginosa*. Сначала анализ небольшого числа геномов позволил выявить консервативный мотив перед генами *pro* у некоторых представителей родов *Pseudomonas* и *Shewanella*, [3]. В настоящей работе расширен список видов, у которых обнаружен этот мотив, рассмотрен филогенетический профиль предсказанного сигнала, сайта связывания белка, перед генами *proA* и *proB* у  $\gamma$ -протеобактерий и в результате предположительно определен сам белок.

### 2. Методы

Отбор белков с филогенетическим профилем близким к профилю сигнала выполнен программой, написанной О. Зверковым по алгоритму из [4]. Для тех из этих белков, которые оказались представленными в *Pseudomonas aeruginosa* PAO1, проведена аннотация с помощью базы данных Pfam с целью определить, какой из них может выступать в качестве регулятора. Затем для этого белка (или белков) программой BLASTP 2.2.21 в базе данных NCBI

определены высокого качества гомологи и так полученный филогенетический профиль сравнивался с филогенетическими профилями исходного белка и снова сигнала. Близость этих профилей рассматривалась как подтверждение выделенного белка. Ниже описан примененный нами алгоритм выделения сигнала из шума. Для этого сначала каждому сайту из найденного мотива (множества сайтов) приписывался штраф. Затем в мотиве выделялся кластер, который и рассматривался в качестве сигнала. Простейший способ такой кластеризации состоял в том, чтобы удалить из мотива сайты со значением штрафа выше некоторого порога.

Штраф определялся следующим образом. Дано множество  $S$  «образцов» — известных сайтов одинаковой длины  $N$ , которые в нашем случае были составлены по сайтам из *P. aeruginosa* и близких к ней видов, в которых найден мотив. В этих сайтах мы уверены в силу экспериментального подтверждения сайта в *P. aeruginosa*. Затем дано множество  $C$  «кандидатов» — более длинных ( $\geq N$ ) сайтов, которые вошли в найденный мотив. Большая длина объясняется тем, что множественное выравнивание при удалении от *P. aeruginosa* «расплывается» и предполагаемый сайт на выравнивании берется с окрестностью; по крайней мере, такая картина наблюдалась в наших данных. По множеству образцов составлялась частотная матрица нуклеотидов, которая для наших целей представлялась в виде центра масс, см. ниже. А именно, каждое слово  $w$  длины  $N$  записывается точкой  $c(w)$  из  $(4^*N)$ -мерного пространства. Фактически эта точка принадлежит поверхности единичного гиперкуба с ребром от 0 до 1, точнее даже ее специальной части, но это не существенно для дальнейшего: любой букве в слове  $w$  соответствует в  $c(w)$  последовательная четверка координат, в которой три нуля и одна единица соответственно на 1-м месте для буквы А, на 2-м месте для буквы С, на 3-м месте для G, на 4-м месте для T. Например, А соответствует четверке координат  $\{1;0;0;0\}$ , а С — четверке  $\{0;1;0;0\}$  и т.д.

Вычисляем центр масс  $c^0$  множества образцов как по координатное среднее арифметическое всех

точек  $c(s)$ , где  $s$  пробегает  $S$ . Затем для каждого слова  $s$  из  $S$  вычисляем его *штраф* - расстояние  $l(s, c^0)$  как сумму модулей разностей соответствующих координат. Вычисляем расстояние от центра масс  $c^0$  до каждого под слова длины  $N$  из каждого кандидата  $c$  из  $C$ . В качестве *штрафа* для самого кандидата  $c$  берем минимум расстояний от  $c^0$  до всех входящих в  $c$  под слов длины  $N$ .

Таким образом, каждый образец и каждый кандидат получает численную характеристику - штраф, который указан ниже.

### 3. Результаты

**Результаты для  $\gamma$ -протеобактерий.** Поиск привел к предсказанию сайтов связывания репрессора вблизи промотора перед генами *proA* или *proB* у большинства видов родов *Pseudomonas*, *Marinobacter* и *Shewanella*. Слабые сайты обнаружены также у *Oceanospirillum*, *Aeromonas hydrophila* и *Beggiatoa*. Штрафы сайтов приведены в таблице 1. В результате массового поиска в лидерных областях найдены консервативные сайты связывания белка с ДНК длиной 16 н (полтора витка ДНК) с консенсусом MTACCAAYNNYRSY. Перед некоторыми генами определяются пары сайтов, которые могут кооперативно связывать этот белок. Соответственно указаны одно или два значения штрафов.

Сопоставление филогенетических профилей предсказанных нами сайтов и всех белков у  $\gamma$ -протеобактерий выделило белок, который является гипотетическим регулятором транскрипции из семейства tetR. Это - белок NP\_249058 из *P. aeruginosa* PAO1, который содержит на N-конце гипотетический ДНК-связывающий домен, характерный для транскрипционных регуляторов семейства tetR (Pfam номер PF00440, для участка от 11-й до 57-й аминокислоты с уровнем отличия от консенсуса  $E=1.5 \cdot 10^{-13}$ ). Трехмерная структура домена гомологичного к этому определена в [5].

В таблице 2 приведены виды, имеющие белки высоко гомологичные белку NP\_249058 из *P. aeruginosa*, и для них указано значение E-характеристики (которое здесь не превосходит  $10^{-25}$ ). Данные получены той же программой BLASTP 2.2.21 на основе аминокислотных последовательностей из базы GenBank, NCBI.

**Результаты по другим бактериям.** Похожие сайты были найдены у небольшого числа представителей  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\delta$ -протеобактерий и у типа Bacteroidetes. Они перечислены в таблице 3. Эти

сайты несколько отличаются от консенсуса, что может быть связано с удаленностью соответствующих видов. Но они относительно хорошо выравниваются между собой внутри каждой таксономической группы. Эти сайты предсказаны перед участком ТАТАА, характерным для (-10)-бокса промотора. В большинстве случаев эти сайты повторяются в той же лидерной области с небольшим расстоянием между повторами.

**Таблица 1. Штрафы потенциальных сайтов связывания регуляторного белка перед генами *proA* и *proB* у  $\gamma$ -протеобактерий**

Вид	Штрафы сайта
ген <i>proA</i>	
<i>Pseudomonas aeruginosa</i>	14.25
<i>Pseudomonas mendocina</i>	13.25; 19.5
<i>Pseudomonas syringae</i>	11.5
<i>Pseudomonas putida</i>	12.75; 22
<i>Pseudomonas entomophila</i>	12.5; 21.5
<i>Pseudomonas stutzeri</i>	14
<i>Marinobacter aquaeolei</i>	16.75; 24
<i>Marinobacter algicola</i>	15; 17.5
<i>Oceanospirillum sp. MED92</i>	18.5
<i>Marine <math>\gamma</math>-proteobacteria</i>	21.5; 23
ген <i>proB</i>	
<i>Shewanella amazonensis</i>	15.67
<i>Shewanella frigidimarina</i>	15.67; 11.25
<i>Shewanella oneidensis</i>	8.67; 5.75
<i>Shewanella sp. MR-4</i>	8.67; 6.5
<i>Shewanella sp. MR-7</i>	11; 6.5
<i>Shewanella sp. ANA-3</i>	8.33; 6.5
<i>Shewanella loihica</i>	8.25
<i>Shewanella baltica</i>	5
<i>Shewanella putrefaciens</i>	6.75
<i>Shewanella benthica</i>	11.25
<i>Shewanella sediminis</i>	10.25
<i>Shewanella woodyi</i>	14
<i>Shewanella piezotolerans</i>	14.5
<i>Shewanella pealeana</i>	14.5
<i>Shewanella halifaxensis</i>	16
<i>Aeromonas hydrophila</i>	19.75
<i>Beggiatoa sp. PS</i>	15.67; 15.75

<i>Pseudomonas aeruginosa</i>	22.25
<i>Pseudomonas fluorescens</i>	16.75

<i>Hahella chejuensis</i>	4·10 <sup>-25</sup>
<i>Vibrio shilonii</i>	4·10 <sup>-25</sup>
<i>Colwellia psychrerythraea</i>	6·10 <sup>-25</sup>

**Таблица 2. Виды, имеющие белки высоко гомологичные белку NP\_249058**

Вид	Expect value
<i>Pseudomonas aeruginosa</i>	4·10 <sup>-123</sup>
<i>Pseudomonas mendocina</i>	3·10 <sup>-88</sup>
<i>Pseudomonas fluorescens</i>	1·10 <sup>-87</sup>
<i>Pseudomonas putida</i>	2·10 <sup>-83</sup>
<i>Pseudomonas entomophila</i>	1·10 <sup>-81</sup>
<i>Pseudomonas stutzeri</i>	1·10 <sup>-77</sup>
<i>Pseudomonas syringae</i>	2·10 <sup>-74</sup>
<i>Oceanobacter sp. RED65</i>	6·10 <sup>-63</sup>
<i>Marinobacter aquaeolei</i>	1·10 <sup>-52</sup>
<i>Marinobacter algicola</i>	1·10 <sup>-51</sup>
<i>Hahella chejuensis</i>	1·10 <sup>-51</sup>
<i>Acinetobacter baumannii</i>	2·10 <sup>-46</sup>
<i>Acinetobacter sp. ADP1</i>	4·10 <sup>-46</sup>
<i>Marinobacter sp. ELB17</i>	8·10 <sup>-46</sup>
<i>Acinetobacter sp. ATCC 27244</i>	2·10 <sup>-45</sup>
<i>Marinomonas sp. MED121</i>	9·10 <sup>-45</sup>
<i>Alcanivorax borkumensis</i>	1·10 <sup>-43</sup>
<i>Shewanella woodyi</i>	6·10 <sup>-33</sup>
<i>Shewanella frigidimarina</i>	7·10 <sup>-33</sup>
<i>Shewanella pealeana</i>	2·10 <sup>-32</sup>
<i>Shewanella piezotolerans</i>	2·10 <sup>-32</sup>
<i>Shewanella sediminis</i>	2·10 <sup>-32</sup>
<i>Shewanella halifaxensis</i>	3·10 <sup>-32</sup>
<i>Shewanella oneidensis</i>	8·10 <sup>-32</sup>
<i>Shewanella benthica</i>	9·10 <sup>-32</sup>
<i>Vibrio cholerae</i>	1·10 <sup>-31</sup>
<i>Shewanella sp. MR-7</i>	1·10 <sup>-31</sup>
<i>Moritella sp. PE36</i>	2·10 <sup>-31</sup>
<i>Vibrio vulnificus</i>	2·10 <sup>-31</sup>
<i>Shewanella sp. ANA-3</i>	3·10 <sup>-31</sup>
<i>Shewanella sp. W3-18-1</i>	4·10 <sup>-31</sup>
<i>Pseudoalteromonas tunicata D2</i>	7·10 <sup>-31</sup>
<i>Vibrio parahaemolyticus</i>	7·10 <sup>-31</sup>
<i>Vibrionales bacterium SWAT-3</i>	9·10 <sup>-31</sup>
<i>Aeromonas hydrophila</i>	1·10 <sup>-30</sup>
<i>Aeromonas salmonicida</i>	2·10 <sup>-30</sup>
<i>Shewanella amazonensis</i>	2·10 <sup>-30</sup>
<i>Vibrio sp. MED222</i>	2·10 <sup>-30</sup>
<i>Shewanella baltica</i>	2·10 <sup>-30</sup>
<i>Vibrio campbellii</i>	3·10 <sup>-30</sup>
<i>Vibrio splendidus</i>	3·10 <sup>-30</sup>
<i>Vibrio alginolyticus</i>	3·10 <sup>-30</sup>
<i>Vibrio shilonii</i>	3·10 <sup>-30</sup>
<i>Shewanella sediminis</i>	6·10 <sup>-30</sup>
<i>Vibrio harveyi</i>	7·10 <sup>-30</sup>
<i>Vibrio splendidus</i>	9·10 <sup>-30</sup>
<i>Shewanella loihica</i>	1·10 <sup>-29</sup>
<i>Vibrio fischeri</i>	2·10 <sup>-29</sup>
<i>Shewanella putrefaciens</i>	2·10 <sup>-29</sup>
<i>Vibrio salmonicida</i>	4·10 <sup>-29</sup>
<i>Marinobacter algicola</i>	1·10 <sup>-28</sup>
<i>Pseudoalteromonas haloplanktis</i>	3·10 <sup>-28</sup>
<i>Vibrio angustum</i>	5·10 <sup>-28</sup>
<i>Marinobacter sp. ELB17</i>	9·10 <sup>-28</sup>
<i>Photobacterium sp. SKA34</i>	2·10 <sup>-27</sup>
<i>Shewanella denitrificans</i>	2·10 <sup>-27</sup>
<i>Alteromonadales bacterium TW-7</i>	2·10 <sup>-26</sup>
<i>Marinobacter aquaeolei</i>	3·10 <sup>-26</sup>
<i>Photobacterium profundum</i>	3·10 <sup>-26</sup>
<i>Reinekea sp. MED297</i>	6·10 <sup>-26</sup>

**Таблица 3. Штрафы потенциальных сайтов связывания регуляторного белка перед генами *proA* и *proB* у  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\delta$ -протеобактерий и у типа Bacteroidetes**

Вид	ген <i>proA</i>	Штраф сайта
<b><math>\alpha</math>-протеобактерии:</b>		
<i>Magnetospirillum magnetotacticum</i>		19.33
<b><math>\beta</math>-протеобактерии:</b>		
<i>Nitrosomonas eutropha</i>		20; 26.29
<i>Nitrosomonas europaea</i>		25.14
<i>Dechloromonas aromatica</i>		22.29
<i>Kingella oralis</i>		22.57
<i>Janthinobacterium sp. Marseille</i>		19.78; 20.57
<b><math>\delta</math>-протеобактерии:</b>		
<i>Desulfuromonas acetoxidans</i>		26.57
<i>Geobacter metallireducens</i>		20; 20.86
<i>Geobacter uraniireducens</i>		23.11; 22.86
<i>Geothalobium retbaense</i>		25.14
<i>Pelobacter carbinolicus</i>		26
<i>Haliangium ochraceum</i>		21.78; 20.57
<i>Anaeromyxobacter dehalogenans</i>		17.11; 21.57
<i>Anaeromyxobacter sp. Fw109-5</i>		17.11; 21.43
<b>Bacteroidetes:</b>		
<i>Gramella forsetii</i>		21
<i>Chlorobium phaeobacteroides</i>		23.5; 18.75
<i>Prevotella copri</i>		23.43
<i>Bacteroides intestinalis</i>		21
<i>Bacteroides eggerthii</i>		22.75; 19.43
<i>Bacteroides thetaiotaomicron</i>		22
<i>Bacteroides pectinophilus</i>		22.75; 22.29
<i>Pedobacter sp. BAL39</i>		22.75; 22.57
<i>Pedobacter heparinus</i>		25; 21.71
<b>ген <i>proB</i></b>		
<b><math>\alpha</math>-протеобактерии:</b>		
<i>Beijerinckia indica</i>		16.25
<i>Agrobacterium radiobacter</i>		23
<i>Agrobacterium tumefaciens</i>		23.5
<i>Rhizobium leguminosarum</i>		21.5
<i>Rhizobium etli</i>		21.75; 20
<i>Methylocella silvestris</i>		21.5; 19
<i>Nitrobacter winogradskyi</i>		19.75
<i>Candidatus Pelagibacter</i>		25.25
<b><math>\beta</math>-протеобактерии:</b>		
<i>Methylobacillus flagellatus</i>		20.5
<i>Nitrospira multiformis</i>		22.25
<i>Chromobacterium violaceum</i>		14.25
<i>Polaromonas naphthalenivorans</i>		18
<b><math>\delta</math>-протеобактерии:</b>		
<i>Desulfonatrosospira thiodismutans</i>		16
<i>Syntrophus aciditrophicus</i>		16.75
<b>Bacteroidetes:</b>		
<i>Bacteroides coprophilus</i>		17
<i>Bacteroides uniformis</i>		16.5
<i>Candidatus Azobacteroides pseudotrichonymphae</i>		14.5
<i>Psychroflexus torquis</i>		16.5
<i>Flavobacteriales bacterium</i>		20.75
<i>Sphingobacterium spiritivorum</i>		19.5
<i>Pelodictyon phaeoclathratiforme</i>		15.5

#### 4. Обсуждение

Итак, у  $\gamma$ -протеобактерий филогенетический профиль белков гомологичных белку NP\_249058 близок к профилю сайтов связывания регуляторов транскрипции перед *pro* генами. Гомологи этого белка присутствуют у видов из родов *Pseudomonas*, *Marinobacter* и *Shewanella*, для которых предсказана регуляция. Найденный белок имеет паралог NP\_253746 в том же виде *P. aeruginosa*. Близкие гомологи обоих паралогов обнаружены нами у *Vibrio* и у некоторых других видов. Можно думать, что эти паралоги и гомологи у видов, в которых не обнаружен сигнал (синтез пролина не регулируется на уровне транскрипции), имеют альтернативную специфичность хотя и принадлежат тому же семейству tetR.

Можно думать, что описанная здесь регуляция генов *pro* осуществляется белком семейства tetR, который впервые возник у *Pseudomonas* в результате дупликации. В дальнейшем регуляция распространялась между видами с помощью горизонтальных переносов. Это согласуется с мозаичным характером филогенетического профиля белка NP\_249058.

#### 5. Список литературы

- [1] R.V. Krishna, P. Beilstein, T. Leisinger, "Biosynthesis of proline in *Pseudomonas aeruginosa*. Partial purification and characterization of  $\gamma$ -glutamyl kinase", *Biochem. J.* 1979, 181, pp. 215-222.
- [2] R.V. Krishna, P. Beilstein, T. Leisinger, "Biosynthesis of proline in *Pseudomonas aeruginosa*. Properties of gamma-glutamyl phosphate reductase and 1-pyrroline-5-carboxylate reductase", *Biochem. J.*, 1979, 181, pp. 223-230.
- [3] А.В. Селиверстов, В.А. Любецкий, "Регуляция биосинтеза пролина у протеобактерий", *Молекулярная биология*, 2007, 41(3), с. 572-574.
- [4] Л.А. Леонтьев, В.А. Любецкий, "Алгоритм определения белка, согласованного с заданным филогенетическим профилем", *Информационные процессы*, 2006, 6(1), с. 24-32.
- [5] C. Kisker, W. Hinrichs, K. Tovar, W. Hillen, W. Saenger, "The complex formed between Tet repressor and tetracycline-Mg<sup>2+</sup> reveals mechanism of antibiotic resistance", *Journal of Molecular Biology*. 1995, 247(2), с. 260-280.

# Capture and release of coding DNA: evolution of bacterial genes by shift of stop codons

A.A. Vakhrusheva\*, M.D.Kazanov\*\*, A.A. Mironov\*, G.A. Bazykin\*\*

\*M.V.Lomonosov Moscow State University, Faculty of Bioengineering and Bioinformatics

\*\*Institute for information transmission problems of the Russian Academy of Sciences

E-mail: gbazykin@iitp.ru

## Abstract

The *de novo* origin of coding sequence remains an obscure issue in molecular evolution. One of the possible paths for inclusion (exclusion) of DNA segments into (from) a gene is a shift of a stop codon. Single nucleotide substitutions can create a premature stop codon via a nonsense mutation, or destroy the existing stop codon, leading to uninterrupted translation up to the next stop codon in the gene's reading frame.

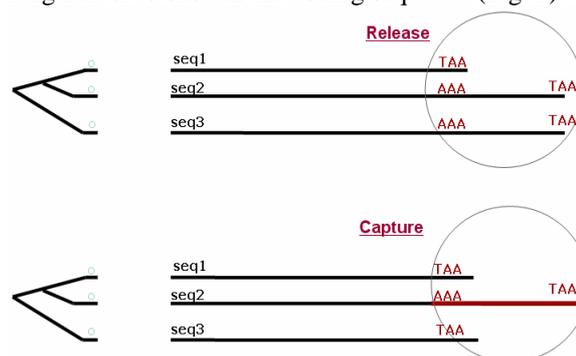
Here we describe the evolution of the coding sequence of bacterial genes by shift of stop codons. We aligned the families of homologous genes from 623 complete bacterial genomes. In the alignments, we analyzed all cases of inconsistent position of stop codons between individual genes of a family. We concluded that the stop codon has shifted, and that a segment of coding DNA has been captured or released by the gene, if the coding nucleotide sequence just before the stop codon of a gene was unambiguously aligned to the non-coding sequence immediately after the stop codon of its homologue. We polarized the corresponding mutations by assuming that the majority of the genes in the family represents the ancestral state. In individual cases, the polarization was verified using maximum parsimony. This allowed us to tell evolutionary gains from losses of C-terminal coding segment. We describe cases of loss of C-terminal coding segment, as well as cases of incorporation of a region of 3'UTR into the gene due to a mutation in the stop codon. At least some of the observed cases are not due to sequencing errors, since both the short and the long forms of the gene were observed in several variants in a number of bacterial genomes.

The obtained results indicate that the position of a stop codon is evolutionarily labile. A point mutation of a stop codon is a simple evolutionary path to obtaining a new coding sequence. Alignments of large gene families from species of different evolutionary relatedness will allow us to study the further evolution of DNA segment after its capture by a gene.

## 1. Introduction

Novel amino acid sequences appear in evolution due to duplication of existing coding sequences, CDS frameshifts, or exonization of introns of intergenic regions. Here we hypothesize an additional mechanism for acquisition of a novel coding sequence by a gene. Shift of stop codons can lead to the formation of new coding DNA.

For this purpose, we identified evolutionary cases of change of location (shifts) of stop codons, and, using phylogeny, analyzed whether these shifts tend to lengthen or to shorten the coding sequence (Fig. 1).

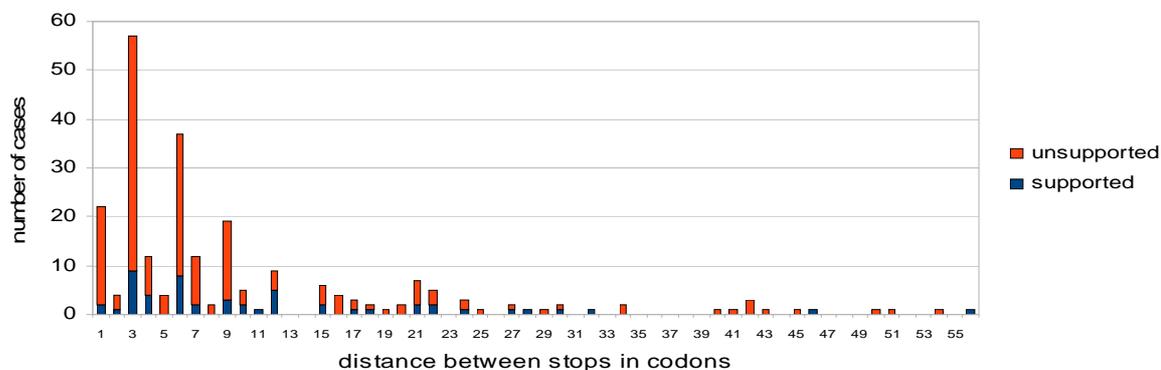


**Figure 1.** Multiple alignments of homologous genes from a family interpreted as stop codon shift, together with the phylogeny of the corresponding species, indicating cases of release (A) and capture (B) of coding sequence by a gene.

## 2. Materials and methods

Homologous bacterial genes were obtained from the COG database extended onto 623 complete bacterial genomes<sup>1</sup>. Protein-coding sequences of each gene, together with 300 nucleotides of 3'UTR, were extracted from corresponding bacterial genomes obtained from NCBI. Nucleotide alignments of all genes and downstream regions in each family were then made with MUSCLE.

Multiple alignments of nucleotide sequences were searched for pairs of sequences with different positions of stop codons. To distinguish the cases of actual shift of the position of the stops from regions with problematic alignments, a conservative set of



**Figure 2.** Number of gain/release cases in which each position of stop codon was supported by >1 sequence (blue) and all other cases (red), for each distance between the stop codons.

criteria was applied to each pair of sequences with putative stop codon shift.

We required the identity of the whole CDS between the two sequences to be more than 35%, and the fraction of gaps between the two positions of stop codons in the first and in the second sequence to be no more than 30%. Further, we required 10 matches in 15 nucleotides before the first stop codon position, and 8 matches in 15 nucleotides after the second stop codon position.

Each case of change of position of stop codon was categorized as “capture” or “release” of non-coding DNA. For this purpose, we manually mapped the species with each form onto the bacterial phylogeny, and, whenever it was possible, inferred the direction of the change using parsimony. This allowed us to tell losses of C-terminal coding segments from incorporations of regions of 3'UTR into a gene. Bacterial species phylogeny was taken from ATGC database (<http://atgc.lbl.gov/atgc/>).

### 3. Results and discussion

261 pairs of sequences with different positions of stop codons were found that met our filtering requirements. In 52 (20%) of these cases, the location of each stop codon was supported by at least two sequences from homologous genes of this family, which excludes sequencing errors.

Distribution of the lengths of the region between the two stop positions (regions captured or released from CDS) is shown in Fig.2. While most of the regions were short, some regions spanned tens of nucleotides. There was no substantial difference in the distribution of the lengths of the gained/released regions between the supported and unsupported sequences, which suggests that few of our gain/release cases are sequencing artifacts.

A manual phylogenetic analysis of each of the 52 supported cases of shift of stop codon allowed us to tell gains from releases of coding sequences. Out of the 25 (48%) sequences in which the phylogenetic history of the position of the stop codon could be established unambiguously, in 12 cases (44%), the 3' position of the stop codon was ancestral, and the 5'

position derived (Fig. 1A), implying loss of the C-terminal coding segment. In the remaining 15 cases (56%), the 5' position of the stop codon was ancestral, and the 3' position derived (Fig. 1B), implying incorporation of a region of 3'UTR into the coding sequence. The approximately equal rates of capture and release imply approximate equilibrium in regard of stop codon position. The average lengths of captured (9.64) and released (10.08) regions supports was also similar.

Our results indicate that the position of a stop codon is evolutionarily labile in bacteria. A point mutation of a stop codon is a simple evolutionary path to obtaining a novel coding sequence.

### 4. References

- [1] M.D. Kazanov, Functional classification of genes from complete bacterial genomes, based on Clusters of Orthologous Groups (COG) database, Informational technologies and systems, 2008.
- [2] M.G. Giacomely, A.S. Hancock, and Joanna Masel, The Conversion of 3'UTR's into Coding Regions, *Mol. Biol. Evol.*, 2007, pp. 457-464

## Predicting novel protein-small molecule interactions using molecular modeling techniques

Olga V. Kalinina<sup>1,2</sup>, Robert B. Russell<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *EMBL-Heidelberg, Meyerhofstr., 1, 69117, Heidelberg, Germany*

<sup>2</sup> *Institute for Information Transmission Problems, B. Karetny per. 19, 127994, Moscow, Russia*

*kalinina@embl.de*

Understanding nature of interactions between proteins and low-molecular weight ligands is a key issue in chemoinformatics and drug design. The increasing amount of data allows to go beyond studying interactions of a single protein with a single small molecule and perform comparative studies in this field. It has been recently shown that drug-target interactions do not follow the simple lock-and-key model, where the keys (drugs) are specific and selective for the locks (target proteins): it is a frequent case when one protein binds different drugs, or one drug fits many proteins (Yilirim et al., 2007). Complementary, Keiser et al. demonstrated that low molecular weight ligands can be regarded as links between unrelated proteins and allow for prediction of new interactions (Keiser et al., 2007).

In this study, we apply molecular modeling techniques to study the possible promiscuity both of small molecules and their target proteins and aim to predict new potential drugs on a large scale. We use similar small molecules as anchors to superimpose the proteins, to which they are bound, and fit other interaction partner into structures of proteins, which they were never observed to bind. Assessing geometry and chemical properties of the emerging interactions, we can conclude if the considered protein-small molecule pair is likely to interact.

We illustrate our approach by considering binding of phosphodiesterases (PDE) 4 and 5 with their specific inhibitors. These two enzyme families are specific for hydrolysis of cAMP and cGMP, respectively, and development of their specific inhibitors is an issue of great importance in drug industry. Sildenafil is a

potent inhibitor of PDE5A, however, it binds PDE4B to a limited extent as well. Using a structure of human PDE4B bound to sildenafil, we fit other PDE5A-specific inhibitors into the pocket of PDE4B. We show that PDE4B is probably unable to bind tadalafil, another specific inhibitor of PDE5A, due to steric clashes with Tyr403, Arg404, Thr407 and Met411 of PDE4B. Experimental assays confirm virtual absence of binding of tadalafil to PDE4B (Card et al., 2004). We also analyze binding of chemicals transported by transthyretin to hormone receptors and report a range of new binding candidates.

We benchmark our technique by rediscovering existing interactions: if two divergent enough ligands bind two divergent enough proteins, we exclude one of the four interactions from the dataset and aim to reproduce it. The presented technique is widely applicable to discovery of new drug targets and in assessment of potential toxicity of drugs.

Keiser MJ, Roth BL, Armbruster BN, Ernsberger P, Irwin JJ, Shoichet BK. (2007) Relating protein pharmacology by ligand chemistry. *Nat Biotechnol.* 25(2), 197-206

Yilirim MA, Goh K-I, Cusick ME, Barabasi A-L, Vidal M. (2007) Drug-target network. *Nat Biotechnol* 25(10), 1119-1126

Card GL, England BP, Suzuki Y, Fong D, Powell B, Lee B, Luu C, Tabrizi M, Gillette S, Ibrahim PN, Artis DR, Bollag G, Milburn MV, Kim SH, Schlessinger J, Zhang KY (2004) Structural basis for the activity of drugs that inhibit phosphodiesterases. *Structure* 12(12), 2233-2247

# Codon Usage Bias: Biological Function or Neutral Marker?

S. Vinogradova, D. Vinogradov, A.A. Mironov

*Faculty of Bioengineering and Bioinformatics, Moscow State University, Russia  
kintany@gmail.com*

## Abstract

*Synonymous codons for aminoacids are not used with equal frequency and biased use of synonymous codons can be explained in different ways. On the one hand, 'non-optimal' codons correlate with translational pause sites and have biological function. On the other hand, the presence of 'non-optimal' codons could be explained by stochastic reasons and such codons are supposed to be neutral markers. Our aim was to analyze the codon usage variation on a genome-wide scale in order to test these two hypotheses.*

## 1. Introduction

In the standard genetic code, 18 of the 20 amino acids are encoded by more than a single codon, but in many organisms, synonymous codons are not used with equal frequency. The biased use of synonymous codons can be explained in different ways. On the one hand, 'non-optimal' codons correlate with translational pause sites, and consecutive runs of 'non-optimal' codons reduce the rate of translation. These pause sites have an established role in the correct folding of protein [1]. It is also well known that, typically, highly expressed genes preferentially use a subset of 'optimal' codons [2]. On the other hand, the presence of 'non-optimal' codons could be explained by stochastic reasons and such codons are supposed to be neutral markers.

## 2. Materials and methods

We considered multiple alignments of proteins from PFam and built corresponding DNA alignments using the genome data. All codons were grouped into two classes according to their frequencies, 'optimal' and 'non-optimal'. Then each codons in the alignments was converted into 0 or 1, dependent on its class. For each column of the resulting matrices, the information content (IC) was calculated and the positional IC was plotted for each alignment. Monte-Carlo analysis and additional statistical analysis were performed to assess the statistical significance of the observed peaks.

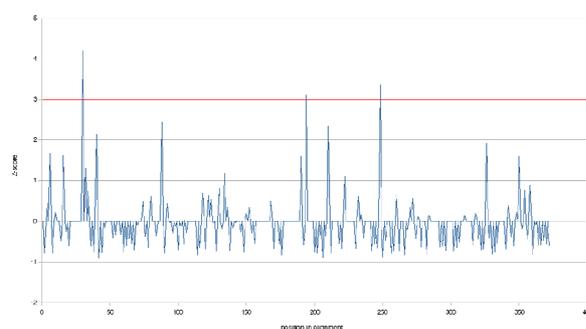
All positions in alignments were grouped into 2 classes: 'non-optimal' and 'optimal'. A position was considered to be 'non-optimal' ('optimal') if corresponding column in alignment contains more (less) 'non-optimal' codons compare with the average.

## 3. Results and discussion

In most cases we observed a small number of positions with relatively high values of the IC. Most families have 3-5 such positions (Figure 1). Overall, the IC distribution can be considered random.

Statistical tests showed that distributions of amino acids in peaks and in average are the same. Also all types of secondary structure in peaks are observed with almost the same frequency as in the average.

Frequencies of 'non-optimal' and 'optimal' codons differ in 'non-optimal' peaks and 'non-optimal' positions of all alignment: in peaks both these frequencies are about 50% and in average they are 34% and 66%, respectively.



**Figure 1.** Z-score distribution of IC for PFam family PF07702. Red line shows threshold for statistically significant results.

#### 4. Conclusions

So we propose that the biased use of synonymous codons is mainly a neutral marker, but at some positions 'non-optimal' codons are functional.

#### 5. References

- [1] Y.M. Zalucki, M.P. Jennings (2007) Experimental confirmation of a key role for non-optimal codons in protein export, *BBRC*, 355: 143-148
- [2] P.M. Sharp, M. Stenico, J.F. Peden, A.T. Lloyd (1993) Codon usage – mutational bias, translational selection, or both? *Biochemical Society Transactions*, 21:835-841.

## Нитрат-нитритное дыхание протеобактерий: исследование эволюции регуляторных взаимодействий методами биоинформатики

Д.А. Равчеев

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
ravcheyev@iitp.ru

### Аннотация

*Нитрат и нитрит представляют собой основные субстраты, используемые при анаэробном дыхании, а также являются источником азота для клетки. Несмотря на широкое распространение нитрат-нитритного дыхания среди различных групп микроорганизмов, его эволюция достаточно слабо изучена. Настоящая работа посвящена исследованию регуляции нитрат-нитритного дыхания в протеобактериях.*

### 1. Введение

Для многих микроорганизмов известна способность использовать различные субстраты для дыхания, что обеспечивается наличием множества различных дыхательных цепей. В свою очередь, наличие множества систем дыхания требует сложной системы регуляции генов, кодирующих необходимые для дыхания ферменты и транспортные белки. Как было показано, в случае *Escherichia coli* регуляция осуществляется в ответ на присутствие в среде акцепторов электронов. Наиболее эффективным акцептором электронов является молекулярный кислород, поэтому глобальная регуляция дыхания осуществляется именно в ответ на его присутствие или отсутствие в окружающей среде [1].

В случае анаэробного дыхания наиболее предпочтительными акцепторами электронов являются ионы нитрата и нитрита [2]. Системы нитрат-нитритного дыхания были обнаружены во многих микроорганизмах, но наиболее хорошо изучена регуляция данного типа дыхания в гамма-протеобактериях, в частности, в *E. coli*. В этой бактерии регуляция нитрат-нитритного дыхания осуществляется двумя гомологичными системами, включающими в себя сенсорные киназы NarX и NarQ и факторы транскрипции NarL и NarP [3]. Одиночная двукомпонентная

система регуляции нитрат-нитритного дыхания была обнаружена в бета-протеобактерии *Neisseria gonorrhoeae* [4]. Также было показано, что многие гамма-протеобактерии содержат одиночную регуляторную систему NarQ-NarP [5].

Все упомянутые регуляторные системы контролируют экспрессию генов, кодирующих мембранные комплексы дегидрогеназ доноров электронов и редуктаз акцепторов электронов, транспортные белки, а также ряд генов, задействованных в центральном метаболизме. При этом в присутствии нитрата и/или нитрита происходит активация генов, ответственных за нитрат-нитритное дыхание и репрессия генов для других, менее эффективных типов дыхания [3].

Несмотря на давнюю историю изучения регуляции нитрат-нитритного дыхания, многие вопросы до сих пор остаются неразрешенными. Так, не до конца понятна необходимость удвоенной регуляторной системы, спорным остается вопрос о взаимоотношении гомологичных систем и структуре сайтов связывания белка NarL.

В настоящей работе был проведен анализ системы регуляции нитрат-нитритного дыхания в геномах различных гамма- и бета-протеобактерий.

### 2. Данные и методы

#### 2.1. Процедура определения генов, входящих в обобщенный регулон

Для предсказания структуры регулонов был использован сравнительно-геномный подход. [6] Так, ген считался принадлежащим к регулону, если в его предполагаемой регуляторной области были предсказаны потенциальные сайты связывания соответствующего фактора транскрипции, и такие сайты были найдены в нескольких геномах.

Для поиска потенциальных сайтов связывания факторов транскрипции был использован метод матриц (профилей) позиционных весов [6].

В случае, когда оперонная структура локуса не была исследована, гены считались принадлежащими к одному оперону, если они имели одинаковое направление считывания, расстояние между ними не превышало 200 п.н. и структура локуса сохранялась в нескольких родственных геномах.

## 2.2. Программное обеспечение

Для поиска ортологических генов и потенциальных сайтов связывания был использован пакет программ GenomeExplorer [7]. Для построения матриц (профилей) позиционных весов была использована программа SignalX [7]. Поиск гомологов в базах данных проводился с помощью программы BLAST [8]. Для построения множественных выравниваний аминокислотных и нуклеотидных последовательностей, была использована программа Muscle [9]. Для построения филогенетических деревьев по методу объединения соседних пар (neighbour joining) использовался пакет программ Phylip [10]. Для построения диаграмм Лого, отображающих структуру регуляторного сигнала, использовалась программа WebLogo [11].

## 2.3. Исследованные геномы

В настоящей работе были исследованы более 50 геномов различных микроорганизмов, относящихся к классам гамма- и бета-протеобактерий. Все последовательности были взяты из базы данных GenBank [12].

## 3. Результаты и обсуждение

### 3.1. Эволюция регуляторных систем

Поиск ортологов для белков NarL и NarP показал, что удвоенная регуляторная система присутствует в небольшом числе геномов. Такая система была обнаружена в *E. coli* и близких к ней видах, таких как *Salmonella typhi* и *Pectobacterium carotovorum*, а также в геномах некоторых представителей *Shewanella* spp. и *Pseudomonas* spp. В геномах остальных гамма-протеобактерий были найдены ортологи одного NarP. Белки из бета-протеобактерий формируют на дереве отдельную ветвь, одинаково близкую как к NarL, так и к NarP. Аналогичная ситуация наблюдается и для сенсорных белков, NarX и NarQ. Отсюда был сделан вывод, что первоначально существовала одиночная система регуляции нитрат-нитритного дыхания. Дубликация системы произошла, по всей видимости у общего предка гамма-

протеобактерий. В дальнейшем в разных группах гамма-протеобактерий была утрачена двухкомпонентная система NarX-NarL.

### 3.2. Эволюция системы нитрат-нитритного дыхания

В ходе исследования структуры регулонов NarL и NarP была замечена корреляция между строением регуляторной системы и системы восстановления нитрата и нитрита. Так, *E. coli* содержит достаточно сложную систему восстановления нитрата и нитрита. Восстановление нитрата осуществляется двумя ферментативными комплексами, цитоплазматической нитратредуктазой NarGH1 и периплазматической нитратредуктазой NarABCD [1].

В настоящей работе было показано, что в большинстве исследованных геномах присутствуют только гены для комплекса Nar, тогда как гены белков комплекса NarG были обнаружены лишь в нескольких геномах, причем именно в тех геномах, где присутствует удвоенная регуляторная система. Таким образом, можно предположить, что система NarX-NarL является специфичной для регуляции цитоплазматического восстановления нитрата.

## 4. Благодарности

Данная работа выполнена совместно с М.С. Гельфандом. Автор благодарит А.А. Миронова за любезно предоставленное программное обеспечение, а также А.Б. Рахманинову и Д.А. Родионову за ценные замечания.

Работа была частично поддержана Медицинским институтом Ховарда Хьюза и INTAS.

## 5. Список литературы

- [1] G. Unden, J. Bongaerts "Alternative respiratory pathways of *Escherichia coli*: energetics and transcriptional regulation in response to electron acceptors", *Biochim. Biophys. Acta*, Elsevier Pub. Co., Netherlands, 1997, pp. 217-234.
- [2] S. Berry "The chemical basis of membrane bioenergetics", *J. Mol. Evol.*, Springer-Verlag, Germany, 2002, pp. 595-613.
- [3] R.S.Rabin, V.Stewart "Dual response regulators (NarL and NarP) interact with dual sensors (NarX and NarQ) to control nitrate- and nitrite-regulated gene expression in *Escherichia coli* K-12", *J. Bacteriol.*, 1993, 175, 11; 3259-3268.

- [4] R.N. Whitehead, J.A. Cole "Different responses to nitrate and nitrite by the model organism *Escherichia coli* and the human pathogen *Neisseria gonorrhoeae*", *Biochem.Soc.Trans.*, Portland Press On The Behalf Of The Biochemical Society, England, 2006, pp. 111-114.
- [5] D.A. Ravcheev, A.V. Gerasimova, A.A. Mironov, M.S. Gelfand "Comparative genomic analysis of regulation of anaerobic respiration in ten genomes from three families of gamma-proteobacteria (Enterobacteriaceae, Pasteurellaceae, Vibrionaceae)", *BMC Genomics.*, BioMed Central, England, 2007, p. 54.
- [6] A.A. Mironov, E.V. Koonin, M.A. Roytberg and M.S. Gelfand "Computer analysis of transcription regulatory patterns in completely sequenced bacterial genomes" *Nucleic Acids Res.*, Oxford University Press, England, 1999, pp. 2981-2989.
- [7] А.А. Миронов, Н.П. Винокурова и М.С. Гельфанд, "Программное обеспечение анализа бактериальных геномов", *Мол. биология*, "Наука", Москва, Российская Федерация, стр. 253-262.
- [8] S.F. Altschul, T.L. Madden, A.A. Schaffer, J. Zhang, M.W. Zhang and D.J. Lipman "Gapped BLAST and PSI-BLAST: a new generation of protein database search programs", *Nucleic Acid Res.*, Oxford University Press, England, 1997, pp. 3389-3402.
- [9] R.C. Edgar, Robert C. "MUSCLE: multiple sequence alignment with high accuracy and high throughput" *Nucleic Acid Res.*, Oxford University Press, England, 2004, 1792-1797.
- [10] J. Felsenstein "Evolutionary trees from DNA sequences: a maximum likelihood approach", *J. Mol. Evol.*, 1981, Springer-Verlag, Germany, pp. 368-76.
- [11] T.D. Schneider, R.M. Stephens, "Sequence logos: a new way to display consensus sequences", *Nucleic Acid Res.*, Oxford University Press, England, 1990, pp. 6097-6100.
- [12] D.A. Benson, I. Karsch-Mizrachi, D.J. Lipman, J. Ostell and D.L. Wheeler, "GenBank", *Nucleic Acids Res.*, Oxford University Press, England, 2007, pp. 21-25.

## Prediction and Comparative Analysis of Transcriptional Regulatory Regions in *Drosophila* Genomes

A.A. Nikulova\*, R.A. Sutormin, A.A. Mironov  
*Department of Bioengineering and  
Bioinformatics, Moscow State University, b.73,  
Leninskiye Gory, Moscow, 119992, Russia*  
\* *nikanka@gmail.com*

A.V. Favorov  
*Laboratory of Bioinformatics  
GosNIIgenetika, 1st-Dorozhny proezd, 1,  
Moscow, 117545, Russia*

### Abstract

*The identification of transcriptional regulatory elements and characterization of their interaction with the respective transcription factors is crucial for understanding of organismal complexity and development. In the current work, we tried to evolve rules of binding sites arrangement in regulatory regions that are specific to some group of regulated genes and conservative in different genomes of *Drosophila* genus. Based on these rules we constructed a hidden Markov model of the transcriptional regulatory region that would take into account the structure of the regulatory region and would be able to identify co-regulated genes. We applied the algorithm to several regulatory systems and show its ability to discover co-regulated genes with a high accuracy.*

### 1. Introduction

The identification and analysis of transcriptional regulatory elements is crucial for understanding the transcriptional control of development and many other biological processes. In higher eukaryotes transcription factor binding sites (TFBSs) tend to be rather short (5-15 bp) and degenerate and often spread in extensive non-coding regions. So, for more reliable prediction it is necessary to employ other criteria in addition to sites sequence.

TFBSs are known to cluster along the DNA strand. This tendency can be explained by necessity of sites to localize closely in order to occur within the particular regions which are open for proteins access. But in some cases this could be crucial for the transcription factors interaction. There are many evidences that in higher eukaryotes binding sites can form so-called composite elements. It's a group of sites characterized by the specific arrangement. Transcription factors interact with each other to form regulatory complex that applies some constraints on

sites arrangement. Identical composition element can have similar functions in regulatory regions of different genes. We will call the set of such constraints or rules of sites arrangement the structure of cluster (regulatory region).

On the other hand we can use the comparative genomics approach that can be powerful instrument for prediction of real functional elements. And since in non-coding regions the level of sequence conservation is rather low the approach based on cluster structure, rather than sequence, conservation seems to be more reasonable [1].

### 2. Materials and methods

Here, we've tried to construct hidden Markov model of the transcriptional regulatory region that would take into account the structure of the regulatory region and would be able to identify co-regulated genes. Emissions in the HMM are the sequences of nucleotides. There are three general types of sequences: background sequence, sites (with some known models) and sequences between sites in cluster (spacers). As some transcription factors interact with each other the distance between their TFBSs (in our model, the length of spacer) should satisfy some rules. In the current work we used only two simple rules for distances between two adjacent sites in cluster: 1) geometric distribution that only makes sites be closer to each other; 2) distance distribution that looks like peaks decreasing with a period of 10 nucleotides (corresponds to the situation when interacted proteins are on the same side of the DNA strand). Thus, the structure of regulatory region is described by set of parameters for every pair of site types: the frequency of such pair in the regulatory region and the frequencies of possible distance distributions for this site pair. We can train these parameters on known regulatory regions and then search through the entire genome or several genomes for regulatory regions with similar structure. Thus we

can find genes with similar regulation as the gene we trained on.

The comparative approach was applied in this work on two stages. First, we trained HMM on the upstreams of homologous genes from different genomes, as we believe that close genomes do not vary too much in the structure of their regulatory regions. And second, after genome-wide search for regulatory regions we took into consideration only those putative regulatory regions that were supported by clusters found in homologous DNA fragments of some other genomes.

### 3. Results

In the current work we used well studied system of early developmental genes in *Drosophila* to test our model. We performed genome-wide search for regulatory regions that can response to some combination of the seven transcription factors of this system. Genes close to these putative regions were

examined using their GO and other annotations as well as their expression profiles. The algorithm demonstrated rather high prediction accuracy.

### 4. Acknowledgements

The work was supported by grants RFBR [09-04-92742], Howard Hughes Medical Institute [55005610] and by the program of the Russian Academy of Sciences ('Molecular and Cellular Biology').

### 5. References

[1] O. Hallikas, K. Palin, N. Sinjushina, R. Rautiainen, J. Partanen, E. Ukkonen, J. Taipale, "Genome-wide Prediction of Mammalian Enhancers Base on Analysis of Transcription-Factor Binding Affinity", *Cell*, 124, 2006, pp. 47-59.

## Conservative Segments of Proteins Evolve under the Strongest Positive Selection

Georgii A. Bazykin

*Institute for Information Transmission  
Problems of the Russian Academy of  
Sciences (Kharkevich Institute), Bolshoi  
Karetny pereulok 19, Moscow, 127994,  
Russia*

*Department of Bioengineering and  
Bioinformatics, M.V. Lomonosov Moscow  
State University, Vorbyevy Gory 1-73,  
Moscow, 119992, Russia  
gbazykin@iitp.ru*

Alexey S. Kondrashov

*Life Sciences Institute and Department of  
Ecology and Evolutionary Biology,  
University of Michigan, Ann Arbor, MI  
48109-2216, USA  
kondrash@umich.edu*

### Abstract

*Slow evolution of conservative segments of coding and non-coding DNA is caused by action of negative selection which removes new mutations [1]. Thus, it is routinely assumed that positive selection which favours some of new mutations plays the largest role in the evolution of rapidly-evolving segments of the genome [2-4]. Here, we show that the opposite is true: the fraction of allele replacements that were driven by positive selection, and the strength of this selection, are the highest within conservative segments of *Drosophila* protein-coding genes. McDonald-Kreitman test [5-8], applied to data on variation in *D. simulans*, indicates that at 9% of the most conservative protein sites, ~85% of allele replacements were driven by positive selection, as opposed to ~40% at rapidly-evolving sites. Data on multiple nonsynonymous substitutions at a codon lead to the same conclusion and also indicate that positive selection which drives allele replacements at conservative sites is the strongest, as it accelerates evolution by a factor of ~25, as opposed to a factor of ~5 at rapidly evolving sites. Thus, random drift plays only a minor role in the evolution of conservative DNA segments, and those relatively rare allele replacements that occur within them are mostly driven by substantial positive selection.*

### 1. Introduction

Depending on how the population is located on the fitness landscape, natural selection can be negative or positive. Negative selection operates when the common genotype has the highest fitness, works against rare genotypes, and prevents evolution. In contrast, positive selection operates when a rare genotype has the highest fitness, works against the common genotype, and facilitates evolution. At any particular moment, the target for negative selection in the genome is much larger than the target for positive selection, leading to decelerated, relatively to selectively neutral sequence segments, evolution of a majority of functionally important segments [1]. From data on interspecies sequence comparisons, positive selection can be detected by accelerated evolution [2-4], and it is usually assumed that positive selection plays a larger role in the evolution of rapidly-evolving sequence segments.

### 2. Methods

#### 2.1. Data

Multiple alignments of genome assemblies of 11 *Drosophila* species to *D. melanogaster* (dm2) were obtained from UCSC Genome Bioinformatics Site (<http://genome.ucsc.edu>). Complete genotypes of 6 strains of *D. simulans* were obtained from *Drosophila* population genomics project website (<http://www.dpgp.org/>). The set of FlyBase canonical splice variants (BDGP release 4) was used to map *D. melanogaster* protein-coding genes onto the

alignment. Multiple alignment of each coding region was then obtained by joining the aligned segments corresponding to exons of FlyBase canonical genes in *D. melanogaster*. Codons masked by RepeatMasker, not aligned, or containing gaps or non-ACGT characters, as well as codons within 6 nucleotides of any of such codons in *D. yakuba*, *D. erecta*, *D. ananassae*, *D. pseudoobscura*, *D. persimilis*, *D. willistoni*, *D. virilis*, *D. mojavensis*, or *D. grimshawi*, were excluded from analysis. The remaining codon sites were subdivided into 8 bins of conservatism, according to the number of gapless, invariant amino-acid positions in alignment of the same 9 species at 10 amino acids before and 10 amino acids after the current site.

## 2.2. MK test

A smaller “filtered” set of 6,702 genes with sufficient polymorphism and divergence was selected for the MK test. Only codon sites with an invariant amino acid in alignment of *D. yakuba*, *D. erecta*, *D. ananassae*, *D. pseudoobscura*, *D. persimilis*, *D. willistoni*, *D. virilis*, *D. mojavensis*, and *D. grimshawi* orthologs were considered. At each such codon, nucleotide sites were counted as “nonsynonymous” (“synonymous”) only if each of the four nucleotides at this position correspond to a different (the same) amino acid, in the reference sequences of both *D. melanogaster* and *D. simulans*. The numbers of nonsynonymous and synonymous substitutions between *D. melanogaster* and *D. simulans* were then obtained by counting differences between these species at the corresponding nucleotide sites. The numbers of sites carrying nonsynonymous and synonymous differences between reference *D. simulans* and any other *D. simulans* genotypes were obtained in the same way. These numbers were then summed over all sites of a given conservatism and divided by numbers of such sites to obtain  $K_a$  and  $K_s$  and  $P_a$  and  $P_s$ , correspondingly.

## 2.2. Double substitutions

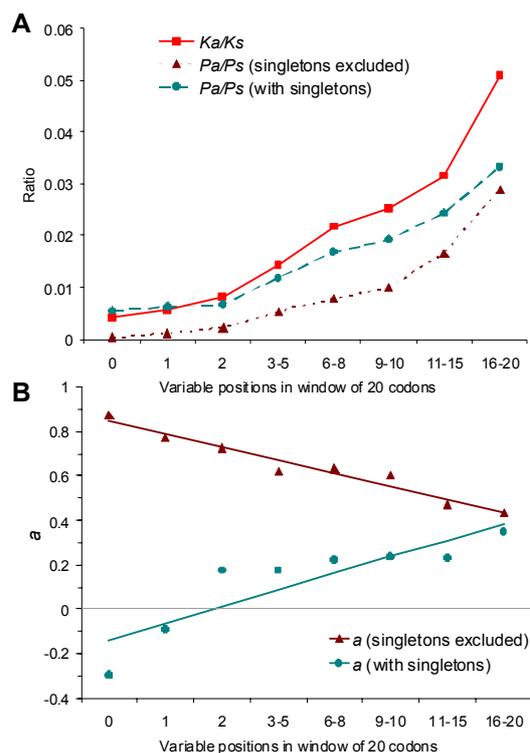
For the analysis of pairs of substitutions at a single codon, only those cases were considered where both substitutions are non-synonymous along each of the two possible paths between the two codons [11]. We only considered codon sites where in each of the *D. simulans* and *D. sechellia*, *D. pseudoobscura* and *D. persimilis*, and *D. virilis* and *D. mojavensis* pairs of species both species carry the same amino acid, in order to make sure that the results are not affected by sequencing errors. Amino acid-level common ancestry was inferred [11].

## 3. Results and Discussion

Fig. 1 shows the results of McDonald-Kreitman (MK) test performed on the data on divergence between *Drosophila simulans* and *D. melanogaster* and on variation within *D. simulans* for coding sites that reside within sequence segments of different conservatism. When all polymorphisms within *D. simulans* are considered, the test produces the overall fraction of positive selection-driven allele replacements  $\alpha = 0.22$ , in agreement with the published estimates [6, 9, 10], with slowly evolving segments indicating prevalence of negative selection (Fig. 1). However, the MK test can underestimate the prevalence of positive selection due to segregating deleterious alleles that never reach fixation, and their impact can be reduced by excluding singletons, *i. e.* alleles that occurred only once within a sample [8]. When singletons are ignored,  $\alpha$  is not affected for rapidly-evolving protein segments, but increases to  $\sim 0.9$  for slowly-evolving segments (Fig. 1).

Removal of singletons substantially affects the results of MK test only when the distribution of selection coefficient  $s$  against new mutations is leptokurtic, *i. e.* when the fraction of sites where  $s$  is such that  $1 < N_e s < 5$  is small [8], where  $N_e$  is the effective population size. Indeed, only deleterious mutations with  $s$  values within this range commonly segregate within the population at low but non-trivial frequencies and thus can appear as singletons in samples of moderate sizes. Therefore, the high impact of removal of singletons on  $\alpha$  at conservative sites implies that negative selection at such sites is strong. However, it does not directly reveal the strength of positive selection on (relatively rare) allele replacements at such sites.

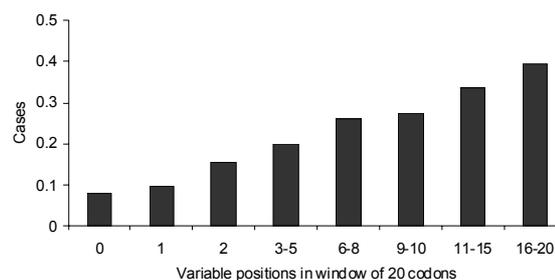
In order to investigate the strength of positive selection, we considered codons which underwent two nonsynonymous substitutions between *D. simulans* and *D. sechellia*, on the one hand, and *D. pseudoobscura* and *D. persimilis*, on the other hand, with *D. virilis* and *D. mojavensis* serving as an outgroup (pairs of species were compared to make sure that the results are not affected by sequencing errors). Fig. 2 shows that clumping of non-synonymous substitutions within a codon, which indicates positive selection favouring at least the second substitution [11, 12], is much stronger within conservative segments of genes. Within the most conservative class of segments, the two non-synonymous substitutions occurred in different lineages only at 0.08 of the codons. Because, without selection, one expects to see this pattern at a half of codons [11], this implies that at a fraction of  $1 - 0.08 - 0.08 = \sim 0.85$  of two-substitution codons at least the second non-synonymous substitution was driven by positive selection, in agreement with the result of the MK test. In contrast, at rapidly evolving sites, the



**Figure 1.** McDonald-Kreitman test applied to coding sites of *D. simulans* and *D. melanogaster*. The sites were subdivided into classes of different conservatism of segments which contain them, in the alignment of their orthologs in 9 other *Drosophila* species. Six genotypes of *D. simulans* are available (13), and the analysis was performed for all polymorphisms (cyan) and only for non-singleton polymorphisms (brown). (A) Ratios of nonsynonymous and synonymous substitutions (Ka/Ks) and polymorphism (Pa/Ps). (B) Fraction of positively selected sites  $\alpha$ .

two substitutions occurred in different lineages at 0.39 of sites, implying that positive selection operated only at  $\sim 0.2$  of such sites. As it was the case in rat-mouse [11] and within-HIV-1 [12] divergence, at two-substitution synonymous sites the clumping of substitutions was very weak (data not reported).

Let us now consider those pairs of non-synonymous substitutions at a codon that both occurred on the path to the *D. simulans*-*D. sechellia* clade, and take advantage of *D. ananassae* and *D. yakuba* clades that branch off this path (Fig. 3). For conservative sites, the fraction of pairs such that the first substitution occurred before branching-off of *D. ananassae* clade and the second one occurred after this event is 0.04. Because the length, in the units of Ks, of the path to *D. simulans*-*D. sechellia* clade is  $\sim 1.03$ , this implies that, on average, the second substitution within the pair occurs, after the first substitution, with a lag of  $\sim 0.04Ks$ , i. e.  $\sim 25$

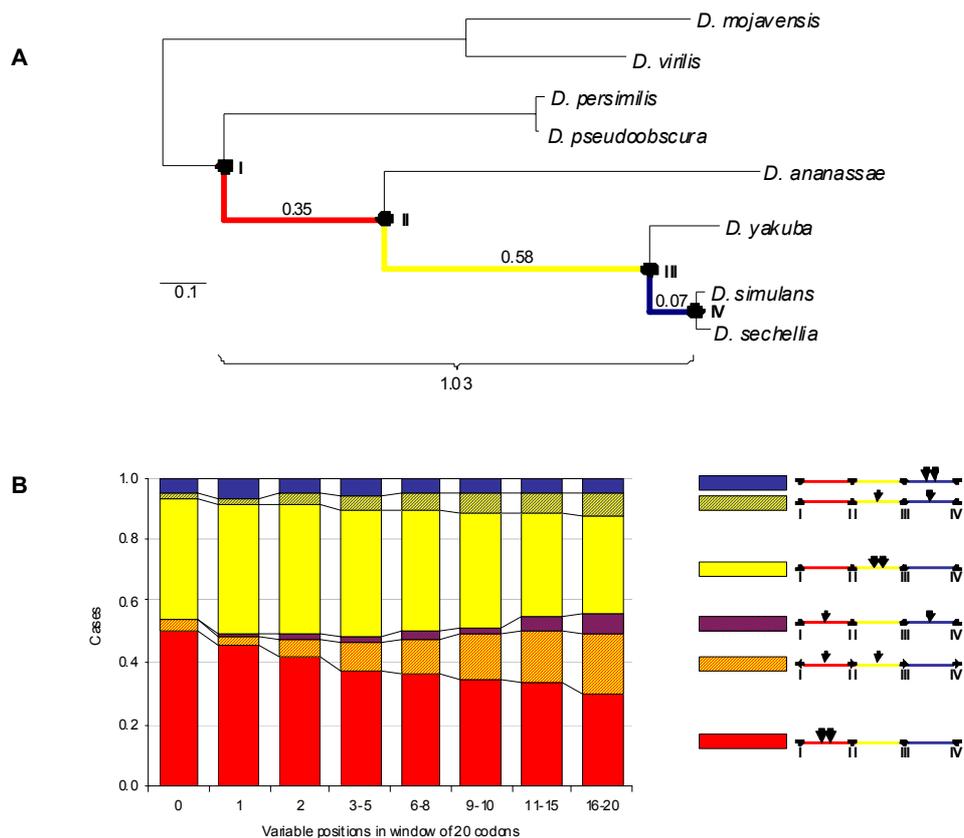


**Figure 2.** Clumping of pairs of nonsynonymous substitutions at a codon site. Fractions of pairs of non-synonymous substitutions at a codon that occurred in different lineages after *D. simulans*-*D. sechellia* and *D. pseudoobscura*-*D. persimilis* divergence, in codons residing within segments of different conservatism, are shown.

times faster than a selectively neutral substitution. In order to accelerate evolution by a factor of  $\sim 25$ , the coefficient of positive selection that drives the second substitution must be such that  $4Nes \sim 25$  (see [1], eq. 3.14). In contrast, at rapidly evolving sites, the fraction of pairs of substitutions that occur at different sides of the branching-off point of *D. ananassae* clade is 0.20, implying  $4Nes \sim 5$  (Fig. 3b).

Moreover, among the conservative codons where two non-synonymous substitutions occurred on the path to *D. simulans*-*D. sechellia* clade, the fraction of codons where the first substitution occurred before *D. ananassae* branching-off, and the second one occurs after *D. yakuba* branching-off, is  $< 0.01$ , indicating that the second substitution almost never occurs with a substantial delay and, thus, is almost never neutral. At rapidly-evolving sites, such cases comprise 0.06 of all pairs (Fig. 3b).

Therefore, a non-synonymous replacement at a site located within a conservative segment of a protein-coding gene is almost always driven by positive selection which is stronger than selection typically operating at sites located within rapidly-evolving gene segments. The total number of adaptive allele replacements occurring at rapidly evolving segments may be higher than at conservative segments, but in the first case adaptive replacements are driven by weaker positive selection and are diluted by a large number of effectively neutral replacements. In contrast, random drift plays almost no role in the evolution of conservative segments of proteins, which is almost exclusively driven by strong positive selection. Positive selection-driven allele replacements within generally conservative genome segments may be an important component of adaptive evolution.



**Figure 3.** Phylogenetic distribution of pairs of non-synonymous substitutions at a codon site. (A) Partial phylogeny of genus *Drosophila*, with lengths of edges in the units of Ks (adapted from [14]); the path to *D. simulans*-*D. sechellia* clade (IV) from its common ancestor with *D. pseudoobscura*-*D. persimilis* clade (I) is coloured. (B) Fractions of codon sites where the first and the second substitution occurred within particular parts of this path, depending on the conservatism of the segment within which the site resides. For each possible position of two substitutions relative to the branching-off points of *D. ananassae* (II) and *D. yakuba* (III), the two substitutions at a codon site are shown schematically by arrows at the right panel.

#### 4. References

- [1] M. Kimura, *The Neutral Theory of Molecular Evolution* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1983).
- [2] Z. Yang, R. Nielsen, *Mol Biol Evol* **19**, 908-17 (2002).
- [3] J. Zhang, R. Nielsen, Z. Yang, *Mol Biol Evol* **22**, 2472-9 (2005).
- [4] R. A. Studer, S. Penel, L. Duret, M. Robinson-Rechavi, *Genome Res* **18**, 1393-402 (2008).
- [5] J. H. McDonald, M. Kreitman, *Nature* **351**, 652-4 (1991).
- [6] N. G. Smith, A. Eyre-Walker, *Nature* **415**, 1022-4 (2002).
- [7] R. Nielsen, I. Hellmann, M. Hubisz, C. Bustamante, A. G. Clark, *Nat Rev Genet* **8**, 857-68 (2007).
- [8] J. Charlesworth, A. Eyre-Walker, *Mol Biol Evol* **25**, 1007-15 (2008).
- [9] N. Bierne, A. Eyre-Walker, *Mol Biol Evol* **21**, 1350-60 (2004).
- [10] J. A. Shapiro et al., *Proc Natl Acad Sci U S A* **104**, 2271-6 (2007).
- [11] G. A. Bazykin, F. A. Kondrashov, A. Y. Ogurtsov, S. Sunyaev, A. S. Kondrashov, *Nature* **429**, 558-62 (2004).

- [12] G. A. Bazykin, J. Dushoff, S. A. Levin, A. S. Kondrashov, *Proc Natl Acad Sci U S A* **103**, 19396-401 (2006).
- [13] D. J. Begun et al., *PLoS Biol* **5**, e310 (2007).
- [14] A. Heger, C. P. Ponting, *Genome Res* **17**, 1837-49 (2007).

# Козволюция белков подсемейства FadR и их сайтов связывания

И.А Суворова, Д.А. Равчеев

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

## Аннотация

Специфичность ДНК-белковых взаимодействий представляет собой один из наиболее значимых вопросов современной молекулярной биологии. В настоящее время активно используется биоинформатический подход, основанный на поиске корреляций в изменениях последовательности белка и его сайтов связывания в ходе эволюции. В настоящей работе рассматривается эволюция регуляторных белков EхuR и UхuR из подсемейства FadR семейства GntR, их регуляторных сайтов, а также анализируются изменения в составе регулонов – групп корегулируемых генов.

## 1. Введение

*Escherichia coli* может использовать в качестве единственного углеводного источника два альдогексуроната: галактуронат и глюкуронат. D-глюкуронат метаболизируется у *E. coli* по пути Ашвелла при участии регулона Uхu. Экспрессия Uхu-регулона индуцируется фруктуронатом и глюкуронатом [1]. Данный регулон состоит из оперона *ихиАВ*, кодирующего D-манноат гидролиазу и D-манноат оксидоредуктазу, соответственно, а также регуляторного гена *ихиR*. UхuR осуществляет негативную регуляцию экспрессии оперона *ихиАВ* и собственного гена *ихиR*, а также гена *uidA* [2]. Помимо UхuR, экспрессия оперона *ихиАВ* также контролируется репрессором EхuR [3]. EхuR представляет собой родственный UхuR белок-репрессор, осуществляющий контроль экспрессии генов, участвующих в метаболизме галактуроната [4]. Под контролем EхuR находятся три оперона: *ехиТ* (транспортер альдогексуронатов), оперон *ихаСА* (уронат изомераза и альтронат гидролиаза) и *ихаВ* (альтронат оксидоредуктаза). Экспрессия EхuR также авторегулируема – продукт гена репрессирует собственную экспрессию в отсутствие индуктора.

В связи с высоким структурным сходством репрессоров UхuR и EхuR (49%), двойной регуляцией EхuR обоих регулонов, а также

родством метаболических путей, было интересно проанализировать эволюцию данных регуляторов, их регуляторных сайтов, а также изменения в составе регулонов.

## 2. Данные и методы

### 2.1. Методы сравнительной геномики

Для поиска потенциальных сайтов связывания использовался метод филогенетического футпринтинга и метод матриц позиционных весов нуклеотидов.

Для определения принадлежности гена к регулону применяли метод проверки соответствия. Ген считался членом регулона, если в его регуляторной области обнаружен потенциальный сайт связывания, который сохраняется перед его ортологами в родственных геномах. В данной работе устанавливалась область поиска -400...+100 от старта трансляции.

В случае, когда оперонная структура неизвестна, полагали, что гены относятся к одному оперону если они имеют одинаковое направление считывания и расстояние между ними не превышает 200 пар нуклеотидов и оперонная структура сохраняется в нескольких родственных геномах.

### 2.2. Программное обеспечение

Для поиска сайтов и анализа ортологов использовался пакет программ Genome Explorer [5]. Построение матриц позиционных весов проводилось с помощью программы Signal X [5]. Для выравнивания аминокислотных и нуклеотидных последовательностей использованы программы ClustalX [6]. Для построения филогенетических деревьев и оценки достоверности их топологии использовались пакеты программ PHYLIP [7]. Поиск ортологов проводился с помощью программы PSI-BLAST [8].

### 2.3 Исследованные геномы

Исследовано более 50 полных последовательностей геномов, относящихся к Proteobacteria, Firmicutes, Actinobacteria. Все

последовательности получены из базы данных GenBank [9].

### 3. Результаты и обсуждение

#### 3.1. Поиск ортологов генов регуляторных белков

Ортологи генов регулонов ExuR и UxuR обнаружены в более чем 50 бактериях из различных таксономических групп: Proteobacteria, Firmicutes, Actinobacteria.

#### 3.2. Особенности оперонных структур и эволюция генов метаболизма глюкуроната и галактуроната

Структура ExuR- и UxuR-регулонов оказалась различной в разных группах бактерий.

Среди семейства Enterobacteriaceae наблюдался полиморфизм на уровне состава регулона *exu*. У ряда бактерий сохранялась полная структура, гомологичная таковой у *E. coli*: расположенные в непосредственной близости гены *exuT*, *exuR* и оперон *ixaCA*, а также отдаленный от них ген *ixaB*. Такая структура регулона наблюдалась, в частности у *Enterobacter* sp., *Klebsiella pneumoniae*, *Shigella flexneri*. В ряде случаев наблюдались разнообразные отклонения от данной структуры регулона. У различных видов рода *Salmonella* наблюдалась следующая перестройка регулона: отсутствовал ген *ixaB*, гены *exuT* и *ixaC* находились в непосредственной близости, в то время как ген *ixaA* был от них отдален.

В семействах Shewanellaceae, Pasteurellaceae и Vibrionaceae наблюдалось отсутствие регулона *exu*.

Среди семейства Bacillaceae, в частности, у *B. subtilis* было отмечено отсутствие генов, ортологичных *exuR* и *exuT*, несмотря на наличие ортологов генов *ixaA*, *ixaB* и *ixaC*. При этом у *B. subtilis* наблюдалось отсутствие регулона UxuR.

Подробное строение данных регулонов в разных таксонах бактерий поставило вопрос об эволюции системы метаболизма альдуронатов.

У многих представителей различных семейств Proteobacteria (*Shewanella frigidimarina*, *Haemophilus influenzae*, *Vibrio vulnificus*, *Vibrio parahaemolyticus*, *Salmonella enterica*, *Shigella dysenteriae*) был найден ген, ортологичный одновременно как *exuR*, так и *uxuR*. Следует отметить, что у рода *Vibrio* наблюдался один общий оперон, включающий гены *uxuA*, *uxuB* и *ixaC*, регулируемый подобным регулятором, ортологичным UxuR и ExuR. Один общий регулон наблюдался также и у *Shigella dysenteriae*

– *ixaA*, *exuT* и общий регулятор. По-видимому, подобная структура регулона является предковой относительно двух родственных регулонов UxuR и ExuR.

Поиск ортологичных *exuR* генов выявил у ряда представителей Proteobacteria гомологию с рядом генов семейства фталат пермеаз (*dgoT*, *yjjL*, *garP*), генами метаболизма глуконата (*gndP*) и галактарата (*garP*, *garD*), находящихся в непосредственной близости от *exuR* оперона, а также рядом транспортеров и оксидоредуктаз с неизвестной функцией, возможно, функционально связанных с системой утилизации галактуроната.

Поиск ортологов *uxuR* выявил у представителей Proteobacteria гомологию с последовательностью генов маннитол-1-фосфат-5-дегидрогеназы (*milD*) из семейства маннитол дегидрогеназ, что, вероятно, обусловлено общностью метаболического пути.

### 4. Список литературы

- [1] J. Robert-Baudouy, R. Portalier, F. Stoeber, "Regulation of hexuronate metabolism in *Escherichia coli* K12. Kinetics of enzyme induction of the hexuronate system" *Eur. J. Biochem*, Blackwell Science Ltd, England, 1974, 43, 1-15.
- [2] M. Novel, G. Novel, "Regulation of pglucuronidase synthesis in *Escherichia coli* K-12: pleiotropic constitutive mutations affecting *uxu* and *uidA* expression" *J. Bacteriol.*, Washington, United States, 1976, 127, 41 8-432.
- [3] J. Robert-Baudouy, R. Portalier, F. Stoeber, "Regulation of hexuronate system genes in *Escherichia coli* K-12: multiple regulation of the *uxu* operon by *exuR* and *uxuR* gene products". *J. Bacteriol.*, Washington, United States, 1981, 145, 211-220.
- [4] R. Portalier, J. Robert-Baudouy, F. Stoeber, "Regulation of *Escherichia coli* K-12 hexuronate system genes: *exu* regulon" *J. Bacteriol.*, Washington, United States, 1980, 143, 1095-1107.
- [5] А.А. Миронов, Н.П. Винокурова, М.С. Гельфанд, "Программное обеспечение анализа бактериальных геномов", *Мол. биология*, "Наука", Москва, Российская Федерация, 2000, 253-262.
- [6] J.D. Thompson, T.J. Gibson, F. Plewniak, F. Jeanmougin, D.G. Higgins "The CLUSTAL\_X windows interface: flexible strategies for multiple sequence alignment aided by quality analysis tools." *Nucleic Acid Res.*, Oxford University Press, England, 1997, 4876-4882.
- [7] J.Felsenstein "PHYLP - Phylogeny Inference Package (Version 3.2)." *Cladistics*, Meckler Publishing, United States, 1989, 164-166.

[8] S.F. Altschul, T.L. Madden, A.A. Schaffer, J. Zhang, M.W. Zhang, D.J. Lipman “Gapped BLAST and PSI-BLAST: a new generation of protein database search programs”, *Nucleic Acid Res.*, Oxford University Press, England, 1997, 3389-3402.

[9] D.A. Benson, I. Karsch-Mizrachi, D.J. Lipman, J. Ostell, D.L. Wheeler, “GenBank”, *Nucleic Acids Res.*, Oxford University Press, England, 2007, 21-25.

## Регуляция SOS-ответа Протеобактерий: анализ коэволюции белка LexA и сайтов его связывания

М.Э. Борисова, Д.А. Равчеев

<sup>1</sup>Биологический факультет филиала Московского государственного университета им.М.В.Ломоносова в г.Пуцино

<sup>2</sup>Институт проблем передачи информации им.А.А.Харкевича Российской академии наук

*m.b.e@mail.ru, ravcheyev@iitp.ru*

### Аннотация

*SOS-ответ представляет собой индуцируемую реакцию клеток на резкую остановку синтеза ДНК, вызванную повреждением ДНК, голоданием клетки или другими стрессовыми факторами. Это реакция клетки на критическое состояние, приближающее ее к гибели. В обычных же условиях белок LexA репрессирует все гены SOS-ответа, связываясь со специфической последовательностью.*

*Впервые белок LexA обнаружили в Escherichia coli, благодаря активным исследованиям её генома. После открытия эту систему регуляции исследовали в различных группах бактерий. При этом структура сайтов связывания LexA существенно различается в разных таксонах. На сегодняшний день есть множество данных по отдельным геномам. И целью настоящей работы является исследование эволюции белка LexA в организмах типа Протеобактерий и анализ коэволюции регуляторного белка и его сайтов связывания.*

### 1. Введение

Около пяти процентов известных белков являются ДНК-связывающими. Структура двухнитевой молекулы ДНК является относительно простой и жесткой, что облегчает исследования ДНК-белковых контактов в отличие от белок-белковых. И позволяет надеяться на то, что существуют простые и универсальные правила распознавания ДНК — своеобразный «код распознавания», который позволит предсказывать распознаваемую последовательность для ДНК-связывающего белка подобно тому, как сейчас по последовательности ДНК можно определить

закодированный в ней белок. Однако механизмы ДНК-белковых взаимодействий не до конца ясны. Так, до сих пор нет инструмента, позволяющего достоверно предсказывать сайт связывания белка на ДНК.

Долгое время экспериментально наблюдали за поведением ДНК с каким-либо белком, но сегодня область интереса исследователей смещается от поиска «эмпирических» правил к созданию статистических потенциалов, чему способствует рост числа разрешенных кристаллографических структур ДНК-белковых комплексов.

Сейчас имеется огромный массив данных о последовательностях ДНК-связывающих белков и нуклеотидных последовательностей их сайтов связывания.

Биоинформатические методы, и прежде всего, методы сравнительной геномики привели также к накоплению данных о гипотетических сайтах связывания. В результате, в распоряжении исследователей оказался объем информации, на порядок превышающий, полученную на основе разрешенных кристаллографических структур ДНК-белковых комплексов. Статистический анализ подобных данных, безусловно, полезен для понимания природы ДНК-белкового узнавания.

Настоящая работа посвящена поиску статистических закономерностей взаимодействий ДНК-белок на примере фактора транскрипции LexA, регулятора SOS-ответа у бактерий.

Система SOS-ответа — каскад последовательных реакций, индуцируемых повреждением ДНК клетки. В бактерии Escherichia coli регулятор LexA в обычных условиях репрессирует все гены SOS-ответа, связываясь со специфической последовательностью, называемой SOS-боксом и консенсус TACTGTATATATACAGTA, в 5'-некодирующей области регулируемого гена.

Ортологи LexA встречаются в различных таксономических группах.

Исследование ортологов даёт более правильное представление эволюции, в нашем случае, группы Proteobacteria. Поэтому целью настоящей работы является исследование эволюции белка LexA в организмах типа Протеобактерий и анализ коэволюции регуляторного белка и его сайтов связывания.

## 2. Экспериментальная часть

На начальном этапе данные по наличию ортологов белка LexA и сайтов его связывания были собраны из имеющихся данных [1-4].

Иногда полной информации о группе генов, непосредственно регулируемых одной регуляторной системой (регулоне) в источнике не было. В этой ситуации регулон определяли самостоятельно с помощью метода проверки соответствия. Ген считался членом регулона, если в его регуляторной области обнаружен потенциальный сайт связывания, который сохраняется перед ортологами в родственных геномах.

Сравнительный анализ потенциальных регуляторных сайтов связывания проводили с помощью программы GenomeExplorer [5].

При поиске сигнала в нуклеотидной последовательности учитывалось, в каких областях выше вероятность его найти. Регуляторную функцию выполняют, как правило, последовательности в 5'-некодирующей области, поэтому потенциальные сайты искали именно в этих областях (-400 и +50 пар нуклеотидов от старта трансляции).

Вес сайта вычисляли при помощи матрицы позиционных весов, которая была вычислена в [4] по формуле

$$W(b, k) = \log[N(b, k) + 0.5] - 0.25 \sum_{i=A,C,G,T} \log[N(i, k) + 0.5], \quad (1)$$

где  $N(b, k)$  – количество появлений нуклеотида  $b$  в позиции  $k$ .

Вес предполагаемого сайта определяли как сумму весов нуклеотидов в соответствующих позициях

$$Z(b_1...b_k) = \sum_{k=1...k} W(b_k, k), \quad (2)$$

где  $k$  – длина сайта.

Основание логарифма было выбрано так, чтобы на случайных последовательностях распределение  $Z$  имело математическое ожидание

0 и дисперсию 1. Вес  $Z$  позволяет оценить значимость индивидуального сайта. Матрица позиционных весов приведена в таблице 1. Рассматривались сайты, вес которых не меньше, чем 4,25.

**Таблица 1.** Матрица позиционных весов для поиска сайтов LexA [10]

A	C	G	T
-0.01	0.03	-0.15	0.12
0.23	-0.05	-0.01	-0.17
-0.15	0.46	-0.15	-0.15
-0.15	-0.15	-0.15	0.46
-0.15	-0.15	0.46	-0.15
-0.13	-0.13	-0.05	0.30
0.28	-0.07	-0.14	-0.07
-0.22	0.07	-0.22	0.37
0.23	-0.31	0.10	-0.03
0.08	-0.07	-0.19	0.18
0.15	-0.14	-0.05	0.04
0.01	-0.01	-0.11	0.11
0.23	-0.05	-0.17	-0.01
0.05	0.03	-0.21	0.13
0.22	0.15	-0.31	-0.07
-0.15	0.46	-0.15	-0.15
0.46	-0.15	-0.15	-0.15
-0.15	-0.15	0.46	-0.15
-0.11	0.01	-0.11	0.21
0.12	-0.15	0.01	0.01

Рассмотрели 30 геномов протеобактерий, для которых имелись литературные данные.  $\gamma$ -протеобактерии (5 подгрупп): **Enterobacteriales** (*Escherichia coli* CFT073, *Escherichia coli* K-12 MG1655, *Salmonella enterica* Typhi CT18, *Salmonella typhimurium* LT2, *Shigella flexneri* 2a str. 2457T, *Shigella flexneri* 2a str.301, *Yersinia enterocolitica* subsp. enterocolitica 8081, *Yersinia pestis* CO92, *Photobacterium luminescens* subsp. laumondii TTO1, *Klebsiella pneumoniae*), **Pasteurellales** (*Haemophilus influenzae* Rd KW20 (serotype d), *Haemophilus ducreyi* 35000HP, *Pasteurella multocida* PM70), **Vibrionales** (*Vibrio cholerae* O1 eltor N16961, *Vibrio parahaemolyticus* RIMD 2210633, *Vibrio vulnificus* CMCP6, *Photobacterium profundum* SS9), **Pseudomonadales** (*Pseudomonas aeruginosa* PA01, *Pseudomonas putida* KT2440, *Pseudomonas syringae* pv. syringae B728), **Alteromonadales** (*Shewanella oneidensis* MR-1).  $\alpha$ -протеобактерии (2 подгруппы): **Rhizobiales** (*Sinorhizobium meliloti* 1021, *Agrobacterium tumefaciens*, *Bradyrhizobium japonicum* USDA110, *Brucella melitensis* 16M, *Brucella suis* 1330, *Mesorhizobium loti* MAFF303099, *Rhodopseudomonas palustris*), **Caulobacteriales** (*Caulobacter crescentus* CB15).  $\beta$ -протеобактерии (одна подгруппа):

**Burkholderiales** (*Ralstonia solanacearum* GM11000).

Все последовательности геномов были взяты из базы данных GenBank [6].

### 3. ССЫЛКИ

[1] M. Abella, I. Erill, M. Jara, G. Mazon, S. Camoy, J. Barbe, "Widespread distribution of a *lexA*-regulated DNA damage-inducible multiple gene cassette in the Proteobacteria phylum", *Molecular Microbiology*, Blackwell Scientific Publications, England, 2004, 212-222.

[2] Erill I, Escribano M, Campoy S, Barbe J., "In silico analysis reveals substantial variability in the gene contents of the gamma proteobacteria LexA-regulon", *Bioinformatics*, Oxford University Press, England, 2003, 2225-2236.

[3] Erill I, Jara M, Salvador N., Escribano M., Campoy S., "Differences in LexA regulon structure among Proteobacteria through in vivo assisted comparative genomics", *Nucleic Acids Research*, Oxford University Press, England, 2004, 6617-6626.

[4] Сычева Л.В., Пермина Е.А, Гельфанд М.С., "Таксон-специфичная регуляция SOS-ответа", *Молекулярная биология*, МАИК «Наука», Москва, Российская федерация, 2007, 908-918.

[5] Миронов А.А, Винокурова Н.П., Гельфанд М.С., "Программное обеспечение анализа бактериальных геномов", *Молекулярная биология*, МАИК «Наука», Москва, Российская федерация, 2000, 253-262.

[6] D.A. Benson, I. Karsch-Mizrachi, D.J. Lipman, J. Ostell, D.L. Wheeler, "GenBank", *Nucleic Acids Research*, Oxford University Press, England, 2007, 21-25.

# Эволюция химерного белка: исследование AraR зависимой регуляции методами сравнительной геномики

С.А. Лейн, Д.А. Равчеев

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН,  
semen.leyn@gmail.com

## Аннотация

Репрессор генов катаболизма арабинозы, фактор транскрипции AraR, представляет собой химерный белок, ДНК-связывающий домен которого сближает его с белками GntR-семейства, а субстрат-связывающий – с белками семейства LacI. Гены этого белка были найдены в бактериях из различных таксономических групп, а ортологи AraR образуют на филогенетических деревьях отдельные, четко различимые ветви. Предварительные исследования продемонстрировали лабильность регулона AraR в ходе эволюции. В настоящей работе проведено исследование эволюции этой регуляторной системы. Особое внимание уделено коэволюции собственно регуляторного белка и его сайтов связывания.

## 1. Введение

Арабиноза – моносахарид из группы пентоз, который может служить источником как углерода, так и энергии для микроорганизмов. Путь утилизации арабинозы был экспериментально изучен у *Bacillus subtilis* [1, 2]. У *B. subtilis* этот путь регулируется транскрипционным фактором AraR – химерным белком, у которого N-терминальный домен принадлежит к GntR семейству, а C-терминальный – к LacI/GalR [3]. AraR в отсутствие арабинозы репрессирует гены арабинозного регулона. Эти гены (*araBDLMNPQ-abfA*, *araE*, *araR*, *abnA*, *xsa*) кодируют внутри- и внеклеточные ферменты, отвечающие за деградацию арабинозосодержащих полисахаридов, перенос арабинозы через плазматическую мембрану и дальнейший катаболизм моно- или олиго-L-арабинозы [2].

Методами сравнительной геномики уже была исследована регуляция на полных геномах *Bacillus subtilis subtilis* и *Bacillus halodurans* и частичных геномах *Clostridium acetobutylicum*, *Enterococcus faecalis* и *Bacillus stearothermophilus* [4]. Однако, с того времени количество полных геномов значительно возросло, что позволяет более полно восстановить эволюцию и механизм работы системы утилизации арабинозы.

## 2. Данные и методы

Для поиска потенциальных сайтов связывания использовался метод матриц позиционных весов. Область поиска устанавливалась в диапазоне -400...+50 от старта трансляции.

Для поиска и анализа ортологов использовался пакет программ GenomeExplorer. Построение матриц позиционных весов проводилось с помощью программы SignalX. Для выравнивания аминокислотных последовательностей использована программа MUSCLE. Для построения филогенетических деревьев использовался пакет программ PHYLIP. Поиск ортологов проводился с помощью программы PSI-BLAST.

Последовательность белка AraR была взята из базы UniProt.

Последовательности геномов получены из базы данных GenBank и RefSeq.

## 3. Результаты и обсуждение

Первоначально сравнением последовательности белка AraR с базой данных RefSeq с помощью программы PSI-BLAST был получен список ортологичных белков. Из этого списка были отобраны неповторяющиеся последовательности с E-Value менее 1,00E-19 из полных геномов. Из организмов имеющих несколько штаммов с полными геномами выбирался штамм с наибольшим размером генома, исключая модельный организм *Bacillus subtilis subtilis* 168.

Для этого списка было построено дерево методом neighbor-joining, на котором четко обозначились ветви отвечающие семействам *Bacillaceae*, *Lactobacillus*, *Clostridiaceae* и *Thermotogaceae*.

Для этих групп был произведен поиск ортологов членов регулона *Bacillus subtilis subtilis* 168 и предсказанных в предыдущей работе новых членов регулона *Bacillus halodurans* и *Clostridium acetobutylicum*.

У найденных генов был произведен анализ вышележащих областей матрицей позиционных

весов, составленной из известных и предсказанных сайтов связывания AraR (4). Порогом веса для отбора сайтов связывания было выбрано 4,00.

Для подтверждения достоверности построенного дерева были построены деревья отдельно для НТН-домена и для субстрат связывающего доменов AraR. На деревьях сохранили колокализацию ветви НТН и субстрат-связывающих доменов для семейств *Bacillaceae*, *Lactobacillus* и *Thermotogaceae*. Ветвь *Clostridiaceae* сохранилась для субстрат-связывающего домена. Для НТН домена ветвь *Clostridiaceae* перераспределилась между ветвями *Bacillaceae*, *Lactobacillus*.

#### 4. Список литературы

- [1] I. Sa-Nogueira, T.V. Nogueira, S. Soares H. de Lencastre, "The *Bacillus subtilis* L-arabinose (*ara*) operon: nucleotide sequence, genetic organization and expression", *Microbiology*, Society for General Microbiology, England, 1997, 957–969.
- [2] M.P. Rapos, J.M. Inacio, L.J. Mota, I., "Transcriptional regulation of genes encoding arabinan-degrading enzymes in *Bacillus subtilis*", *J. Bacteriol.*, American Society for Microbiology, United States, 2004, 1287–1296.
- [3] I.S. Franco, L.J. Mota, C.M. Soares, I. de Sa-Nogueira, "Probing key DNA contacts in AraR-mediated transcriptional repression of the I arabinose regulon", *Nucleic Acids Res.*, Oxford University Press, England, 2007, 4755–4766.
- [4] D.A. Rodionov, A.A. Mironov, M.S. Gelfand, "Transcriptional regulation of pentose utilisation systems in the *Bacillus*/*Clostridium* group of bacteria", *FEMS Microbiol Lett.*, Blackwell Pub., England, 2001, 305-314.

# Кислород-зависимая регуляция азотфиксации у Альфапротеобактерий – исследование методами сравнительной геномики

Е.Ю. Климова, Д.А. Равчеев

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
jane1390@rambler.ru

## Аннотация

Азотфиксация, восстановление молекулярного азота до аммония, является одним из важнейших источников фиксированного азота в биосфере. Наиболее подробно регуляция данного процесса исследована для организмов из группы Альфапротеобактерий. В виду чувствительности ферментов азотфиксации к кислороду, этот процесс может протекать лишь в анаэробных или микроаэробных условиях. В настоящей работе исследована комплексная кислород-зависимая регуляция азотфиксации в Альфапротеобактериях, осуществляемая факторами транскрипции *FnrN* и *FixK* и двухкомпонентной системой *FixL-FixJ*.

## 1. Введение

Азотфиксация представляет собой процесс превращения молекулярного азота в ионы аммония, которые впоследствии включаются в органические соединения клетки. Как показали исследования, к азотфиксации способны различные группы бактерий и архей, причем таксономическое распространение организмов-азотфиксаторов крайне мозаично. Наиболее хорошо процесс азотфиксации изучен для бактерий порядка Rhizobiales из класса Alphaproteobacteria, являющихся симбионтами растений. К сожалению, экспериментальные исследования данного процесса проводились лишь для небольшого числа модельных организмов.

Центральным компонентом системы азотфиксации является фермент нитрогеназа, обеспечивающий собственно процесс превращения молекулярного азота в ионы аммония. Кроме того, известно большое число вспомогательных генов, требующихся для нормального протекания работы нитрогеназы. Исторически сложилось, что все гены

азотфиксации делят на три группы: *nif*-, *nod*- и *fix*-гены [1].

Азотфиксация – сложный процесс, зависящий от множества факторов, таких как концентрация молекулярного азота, концентрация молекулярного кислорода, соотношение окисленных и восстановленных форм восстановительных эквивалентов и наличие энергетических эквивалентов. Понятно, что ответ на такое большое количество факторов требует достаточно сложной регуляторной системы. Так, в бактериях порядка Rhizobiales ответ на концентрацию азота осуществляется альтернативным сигма-фактором RpoN совместно с рядом вспомогательных белков, таких как NifA, NtrC и NtrX. Реакция же на опасный для нитрогеназы кислород осуществляется за счет факторов транскрипции *FnrN* и *FixK* и двухкомпонентной системы *FixL-FixJ* [2].

В настоящей работе представлены результаты исследования регуляции в Альфапротеобактериях гомологичными факторами транскрипции *FixK* и *FnrN* и двухкомпонентной системой *FixLJ*.

## 2. Данные и методы

### 2.1. Процедура определения генов, входящих в обобщенный регулон

Для предсказания структуры регулонов был использован сравнительно-геномный подход. [3] Так, ген считался принадлежащим к регулону, если в его предполагаемой регуляторной области были предсказаны потенциальные сайты связывания соответствующего фактора транскрипции, и такие сайты были найдены в нескольких геномах.

Для поиска потенциальных сайтов связывания факторов транскрипции был использован метод матриц (профилей) позиционных весов [3].

В случае, когда оперонная структура локуса не была исследована, гены считались

принадлежащими к одному оперону, если они имели одинаковое направление считывания, расстояние между ними не превышало 200 п.н. и структура локуса сохранялась в нескольких родственных геномах.

## 2.2. Программное обеспечение

Для поиска ортологичных генов и потенциальных сайтов связывания был использован пакет программ GenomeExplorer [4]. Для построения матриц (профилей) позиционных весов была использована программа SignalX [4]. Поиск гомологов в базах данных проводился с помощью программы BLAST [5]. Для построения множественных выравниваний аминокислотных и нуклеотидных последовательностей, а также для построения филогенетических деревьев была использована программа ClustalX [6]. Для построения диаграмм Лого, отображающих структуру регуляторного сигнала, использовалась программа WebLogo [7].

## 2.3. Исследованные геномы

В настоящей работе были исследованы полные геномные последовательности различных Альфапротеобактерий. Все последовательности были взяты из базы данных GenBank [8].

## 3. Результаты и обсуждение

### 3.1. Эволюция регуляторных белков

Поиск гомологов показал, что во всех исследованных геномах присутствует как минимум одна копия генов, кодирующих FnrN или FixK. В данном случае сложно говорить об ортологичности, поскольку полученные результаты свидетельствуют о том, что для генов *firN* и *fixK* многокопийность является скорее правилом, чем исключением. В сложившейся ситуации, когда в клетке имеется несколько регуляторов с высокой степенью схожести, мы не можем приписать отдельные типы сайтов к отдельным регуляторам, и вынуждены искать сайты связывания для всех регуляторов, поскольку, по всей видимости, несколько регуляторов будут связываться с одинаковым сайтом. Также белки FnrN и FixK обнаруживают высокую степень сходства и, судя по всему, связываются с одинаковыми сайтами [9].

Анализ филогенетического дерева белков FnrN и FixK позволил обнаружить несколько закономерностей в их эволюции. Во-первых, в большинстве исследованных организмов присутствует более одной копии белка

регулятора. Во-вторых, FnrN содержит последовательность из 4-х остатков цистеина, необходимых для формирования железо-серного кислород-чувствительного кластера. Анализ множественного выравнивания белков показал, что белки FnrN и FixK формируют на дереве отдельные ветки

### 3.2. Построение распознающего правила для поиска потенциальных сайтов связывания FnrN и FixK

На основании экспериментально известных сайтов, последовательности которых доступны по литературным данным, нами была построена матрица позиционных весов для поиска сайтов связывания белков FnrN и FixK. Общий сайт связывания данных белков представляет собой палиндром длиной 14 пар нуклеотидов и имеет консенсус TTGATC-2-GATCAA.

### 3.3. Исследование FnrN/FixK-регулонов

Путем сравнительно-геномного анализа во всех исследованных геномах была прослежена регуляция известных генов, участвующих в азотфиксации.

Несмотря на необычный полиморфизм в плане копийности генов, FnrN/FixK-зависимая регуляция представляется крайне устойчивой. Так, в тех случаях, когда в геноме присутствует лишь одна копия оперона, перед ним всегда удается обнаружить достоверный потенциальный сайт. В случаях, когда наблюдаются дубликации оперонов, как минимум одна из копий является регулируемой. В качестве примеров можно привести устойчивую регуляцию оперонов *fixNOQP* и *fixGHIS*, для которых характерна многокопийность. Данные опероны кодируют белки, необходимые для образования кислород-чувствительных железо-серных кластеров.

Наряду с исследованием эволюции известных регулируемых генов, в настоящей работе была предсказана регуляция для двух новых генов. Так, консервативные потенциальные сайты были найдены перед геном *speB*, кодирующим пероксидазу, необходимую для защиты от активных форм кислорода и геном субъединицы цитохрома с *coxB*.

## 4. Благодарности

Данная работа выполнена совместно с М.С. Гельфандом. Авторы благодарны А.А. Миронову за любезно предоставленное программное обеспечение.

Работа была частично поддержана Медицинским институтом Ховарда Хьюза, программой “Молекулярная и клеточная биология” Российской Академии Наук и INTAS.

## 5. Список литературы

[1] H.M. Fischer, “Genetic regulation of nitrogen fixation in rhizobia”, *Microbiol. Rev.*, American Society For Microbiology, United States, 1994, pp. 352-386.

[2] R. Dixon and D. Kahn, “Genetic regulation of biological nitrogen fixation”, *Nat. Rev. Microbiol.*, Nature Publishing Group, England, 2004, pp. 621-632.

[3] A.A. Mironov, E.V. Koonin, M.A. Roytberg and M.S. Gelfand “Computer analysis of transcription regulatory patterns in completely sequenced bacterial genomes” *Nucleic Acids Res.*, Oxford University Press, England, 1999, pp. 2981-2989.

[4] А.А. Миронов, Н.П. Винокурова и М.С. Гельфанд, “Программное обеспечение анализа бактериальных геномов”, *Мол. биология*, “Наука”, Москва, Российская Федерация, стр. 253-262.

[5] S.F. Altschul, T.L. Madden, A.A. Schaffer, J. Zhang, M.W. Zhang and D.J. Lipman “Gapped BLAST and PSI-BLAST: a new generation of protein database search programs”, *Nucleic Acid Res.*, Oxford University Press, England, 1997, pp. 3389-3402.

[6] J.D. Thompson, T.J. Gibson, F. Plewniak, F. Jeanmougin and D.G.Higgins, “The CLUSTAL\_X windows interface: flexible strategies for multiple sequence alignment aided by quality analysis tools”, *Nucleic Acid Res.*, Oxford University Press, England, 1997, pp. 4876-4882.

[7] T.D. Schneider and R.M. Stephens, “Sequence logos: a new way to display consensus sequences”, *Nucleic Acid Res.*, Oxford University Press, England, 1990, pp. 6097-6100.

[8] D.A. Benson, I. Karsch-Mizrachi, D.J. Lipman, J. Ostell and D.L. Wheeler, “GenBank”, *Nucleic Acids Res.*, Oxford University Press, England, 2007, pp. 21-25.

[9] H. Korner, H.Z. Sofia and W.G. Zumft, (2003) Phylogeny of the bacterial superfamily of Crp-Fnr transcription regulators: exploiting the metabolic spectrum by controlling alternative gene programs. *FEMS Microbiol. Rev.*, Blackwell Pub., England, 2003, pp. 559-592.

## Нуклеотидные замены в альтернативно сплайсируемых генах *Drosophila*

Екатерина Ермакова  
ИППИ РАН  
ermakova@iitp.ru

Дмитрий Малько  
ГосНИИгенетика  
malko@genetika.ru

Действие отбора на постоянные и альтернативные кодирующие участки генов исследовались на материале 11 полных геномов плодовых мушек *Drosophila* (*D. melanogaster*, *D. sechellia*, *D. yakuba*, *D. erecta*, *D. ananassae*, *D. pseudoobscura*, *D. persimilis*, *D. willistoni*, *D. mojavensis*, *D. virilis*, *D. grimshawi*).

Плотность нуклеотидных замен, меняющих аминокислоту, в альтернативно сплайсируемых участках выше, чем в постоянных, постоянно сплайсируемые участки альтернативных экзонов занимают промежуточное положение. Плотность нуклеотидных замен в одноэкзонных генах выше, чем в генах, имеющих интроны.

В кассетных экзонах плотность нуклеотидных замен почти вдвое выше, чем в чередующихся. Среди всех типов альтернативных участков плотность как синонимичных, так и несинонимичных замен минимальна в чередующихся экзонах, более того, это единственный тип альтернативных участков, в котором плотность нуклеотидных замен ниже, чем в постоянных участках. Плотность синонимичных замен в чередующихся экзонах, порождённых дубликацией, в полтора раза выше, чем в прочих чередующихся экзонах. Удлинения экзонов за счёт альтернативных донорных сайтов сплайсинга накапливают меньше нуклеотидных

замен, чем удлинения за счёт альтернативных акцепторных сайтов. Больше всего несинонимичных замен накапливают альтернативные удлинения за счёт акцепторных сайтов, больше всего синонимичных — удержанные интроны.

Альтернативно сплайсируемые участки эволюционируют интенсивнее прочих участков. Результаты работы поддерживают гипотезу о том, что одна из основных функций альтернативных участков — служить носителями молекулярной эволюции.

Нуклеотидные замены в различных типах альтернативных участков происходят с разной интенсивностью. Эти отличия могут быть следствием неравномерного распределения *cis*-регуляторных элементов и позволяют предположить, что различные типы альтернативно сплайсируемых участков могут иметь различные функции. В частности, результаты работы показывают, что три типа альтернативных экзонов — кассетные экзоны, дублированные чередующиеся экзоны и недублированные чередующиеся экзоны — должны рассматриваться отдельно в сравнительных геномных исследованиях.

Работа была выполнена совместно с М.С. Гельфандом.

## Поиск мотивов связывания транскрипционных регуляторов множественной лекарственной устойчивости у бактерий

Илья Жаров  
Московский физико-технический  
институт  
peshwalk@mail.ru

Алексей Казаков  
Институт проблем передачи  
информации им. А.А. Харкевича РАН  
kazakov@iitp.ru

### Аннотация

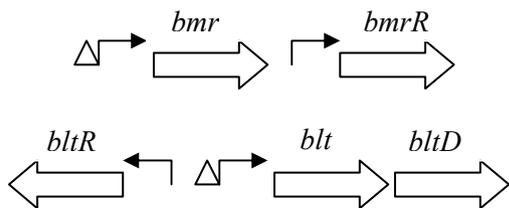
Исследованы мотивы связывания транскрипционных регуляторов подсемейств *BmrR* и *BltR* семейства *MerR*. Экспериментально исследованные белки данных подсемейств активируют транскрипцию генов множественной лекарственной устойчивости у *Bacillus subtilis*. Идентифицировано 453 белка из 203 геномов прокариот, принадлежащих 131 виду. Сайты связывания обнаружены для 216 регуляторов в 113 геномах. Структура сайтов является характерной для активаторов транскрипции семейства *MerR*. Сайт располагается в промежутке между элементами промотора. Длина этого промежутка составляет 19-20 н.п., тогда как обычно у бактерий она составляет 16-17 н.п. Проведена классификация регулируемых генов по функциональным типам. Для регуляторов подсемейства *BltR* проведен анализ регулонов.

### 1. Введение

Транспортеры множественной лекарственной устойчивости (МЛУ) представляют собой мембранные белки, способные выводить из клетки широкий спектр структурно несхожих антимикробных соединений. У бактерии *Bacillus subtilis* экспериментально изучены два транспортера МЛУ – *Bmr* и *Blt*. Их аминокислотные последовательности совпадают на 51%. Эти белки способны выводить из клетки сходный набор веществ: фторхинолоны [11], родаминовые и акридиновые красители, бромистый этидий, тетрафенилфосфоний, пуромидин, доксорубин и хлоромидетин [3, 12]. Помимо токсичных веществ, *Blt*, в отличие от *Bmr*, выводит из клетки спермидин [13]. Экспрессия генов *bmr* и *blt* регулируется локальными активаторами транскрипции *BmrR* и

*BltR* соответственно. Показано, что некоторые субстраты *Bmr* (родамин 6G, тетрафенилфосфоний, астразон оранжевый и диэтил-2,4'-цианин) связываются также и с *BmrR*, повышая способность последнего ко взаимодействию с ДНК [2, 10]. Однако индукторы для регулятора *BltR* до сих пор обнаружены не были. Структуры локусов *bmr* и *blt* показаны на рис. 1. Гены *bmr* и *bmrR* расположены тандемно, хотя последний имеет собственный промотор. Гены *bltR* и *blt* транскрибируются в противоположных направлениях. Примечательно, что фермент *BltD*, ген которого расположен в опероне с *blt*, катализирует реакцию ацетилирования полиаминов, в том числе спермина и спермидина. Оба упомянутых регулятора принадлежат к семейству *MerR*. Их N-концевые домены, отвечающие за связывание с ДНК, сходны между собой, тогда как C-концевые домены сильно отличаются, что позволяет предположить, что они реагируют на различные индукторы. Механизм активации также известен из эксперимента. Сайт связывания регулятора находится в обоих случаях между -35 и -10 элементами промоторов регулируемых генов. При этом расстояние между промоторными элементами составляет 19 н.п. При связывании комплекса регулятор-индуктор с ДНК расстояние между элементами промотора сокращается, что делает инициацию транскрипции этих генов более эффективной [14, 15].

В данной работе идентифицированы мотивы связывания транскрипционных регуляторов подсемейств *BmrR* и *BltR* семейства *MerR*. Структура и расположение этих мотивов типичны для активаторов этого семейства. Проведена классификация регулируемых генов по функциональным типам. Среди их продуктов преобладают регуляторы транскрипции (авторегуляция) и транспортеры МЛУ различных надсемейств.



**Рисунок 1. Структура оперонов *bmr* [2] и *blt* [3]. Толстыми стрелками обозначены гены, тонкими стрелками показаны старты транскрипции, треугольником показаны сайты связывания регуляторов.**

## 2. Материалы и методы

### 2.1. Использованное программное обеспечение и источники данных

Аминокислотные последовательности белков, а также нуклеотидные последовательности бактериальных геномов были взяты из общедоступной базы данных GenBank [6]. Для поиска гомологичных белковых последовательностей использовали программу BLAST [4]. Множественные выравнивания аминокислотных последовательностей строили посредством программы MUSCLE [8]. Филогенетические деревья были построены с помощью программ PROTDIST и NEIGHBOR, входящих в пакет программ PHYLIP [9]. Для построения поисковых профилей мотивов связывания, а также поиска промоторов и сайтов связывания регуляторов использовали пакет программ GenomeExplorer [1]. Для представления моделей мотивов в виде диаграмм Лого применяли программу WebLogo [7].

### 2.2. Методика исследования

Вначале был произведен поиск гомологов регуляторов BmrR и BltR. Также в рассмотрение включены белки, закодированные в полных геномах, содержащие аннотированные в базе данных GenBank консервативные домены HTH\_BmrR, HTH\_BltR, и HTH\_BmrR-like. Затем было построено множественное выравнивание выявленных последовательностей. После этого методом ближайшего соседа было построено общее филогенетическое дерево по аминокислотным последовательностям их N-концевых доменов, отвечающих за связывание с ДНК и димеризацию. В случае обнаружения чрезвычайно близких между собой ортологов данных белков у различных штаммов одного вида в рассмотрение включался



**Рисунок 2. Структура промоторной области генов *bmr* [2] и *blt* [3]. Элементы промоторов выделены рамками, палиндромные сайты связывания отмечены подчеркиванием. Центр палиндroma отмечен треугольником. Заглавные буквы отмечают палиндромные позиции.**

лишь один из них, по возможности закодированный в полном геноме.

В качестве основы для первых поисковых профилей были использованы последовательности сайтов связывания регуляторов BmrR и BltR *B. subtilis* [2, 3] (рис. 2). Построение нового поискового профиля предпринимали в случае, если уже имеющиеся профили не обеспечивали эффективный и избирательный поиск сайтов связывания. Каждый поисковый профиль строили на основе 2–8 сайтов, соответствующих ортологичным регуляторам. Для поиска промоторов использовали консенсус промотора *B. subtilis*.

Так как BmrR и BltR относятся к локальным регуляторам, поиск сайтов связывания проводили в некодирующих областях выше генов, расположенных вблизи гена регулятора (–10 .. +10 генов). Далее производился поиск промотора в той области, где был найден сайт связывания. Из дальнейшего рассмотрения исключались сайты связывания, не перекрывающиеся с промежутками между промоторными элементами.

Функциональные типы регулируемых генов определялись по консервативным доменам, кодируемым ими белков и аннотированным в базе данных GenBank. В случае отсутствия такой аннотации предсказание функционального типа производили, исходя из информации о ближайших гомологах продуктов данного гена, найденных с помощью программы BLAST.

## 3. Результаты

В ходе поиска гомологов регуляторов BmrR и BltR *B. subtilis* в базе данных GenBank и поиска по консервативным ДНК-связывающим доменам было найдено 453 белка из 203 геномов (всего 131 вид прокариот). При этом максимальное значение e-value было установлено равным  $3 \times 10^{-8}$ .

Таким образом, в ряде геномов найдено более одного регулятора.

Для 216 регуляторов в 113 геномах (101 вид бактерий) были обнаружены потенциальные сайты связывания перед регулируемым геном. Дальнейший анализ проводили только для этих регуляторных белков.

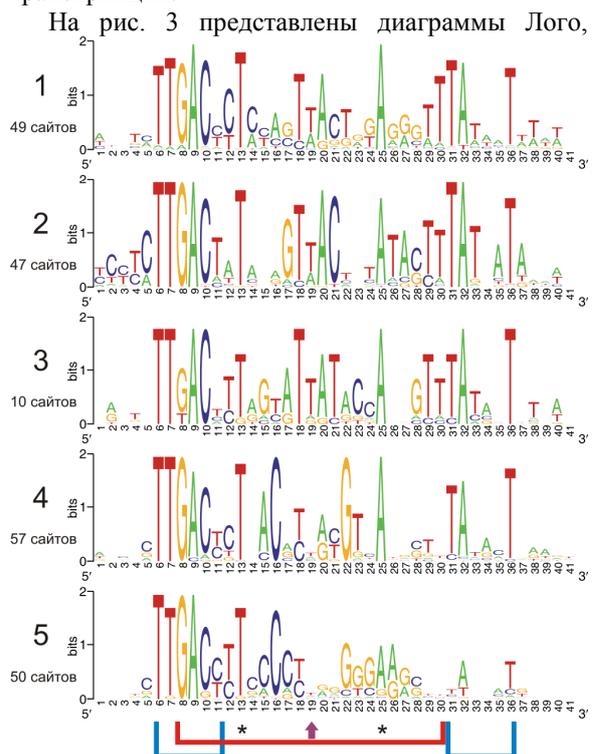
Большинство исследуемых 216 регуляторов выявлено в геномах бактерий типа *Firmicutes* (167 белков – табл. 1). Кроме того, гомологи BmrR и BltR были выявлены у бактерий следующих типов: *Actinobacteria* (28 белков), *Proteobacteria* (8), *Chloroflexi* (4), *Bacteroidetes* (3), *Verrucomicrobia* (2), *Cyanobacteria* (2), *Deinococcus-Thermus* (1), *Fusobacteria* (1). В 85 случаях регуляторный сигнал был выявлен только перед геном регулятора, что позволяет предположить авторегуляцию. В этом случае ген регулятора может как составлять оперон с одним или несколькими генами, так и являться единственным геном в локусе. Для транскрипционных факторов подсемейства BltR характерно расположение гена регулятора и регулируемого гена в дивергоне. Для остальных регуляторов типично тандемное расположение этих генов.

В процессе поиска сайтов связывания в исследованных геномах было установлено, что в подавляющем большинстве случаев (197 сайтов из 216) палиндром имеет нечетную длину, а промежуток между элементами промоторов составляет 19 н.п. В 10 случаях мотиву четной длины соответствует промежуток между

**Таблица 1. Распределение изученных белков-регуляторов по родам бактерий типа *Firmicutes*.**

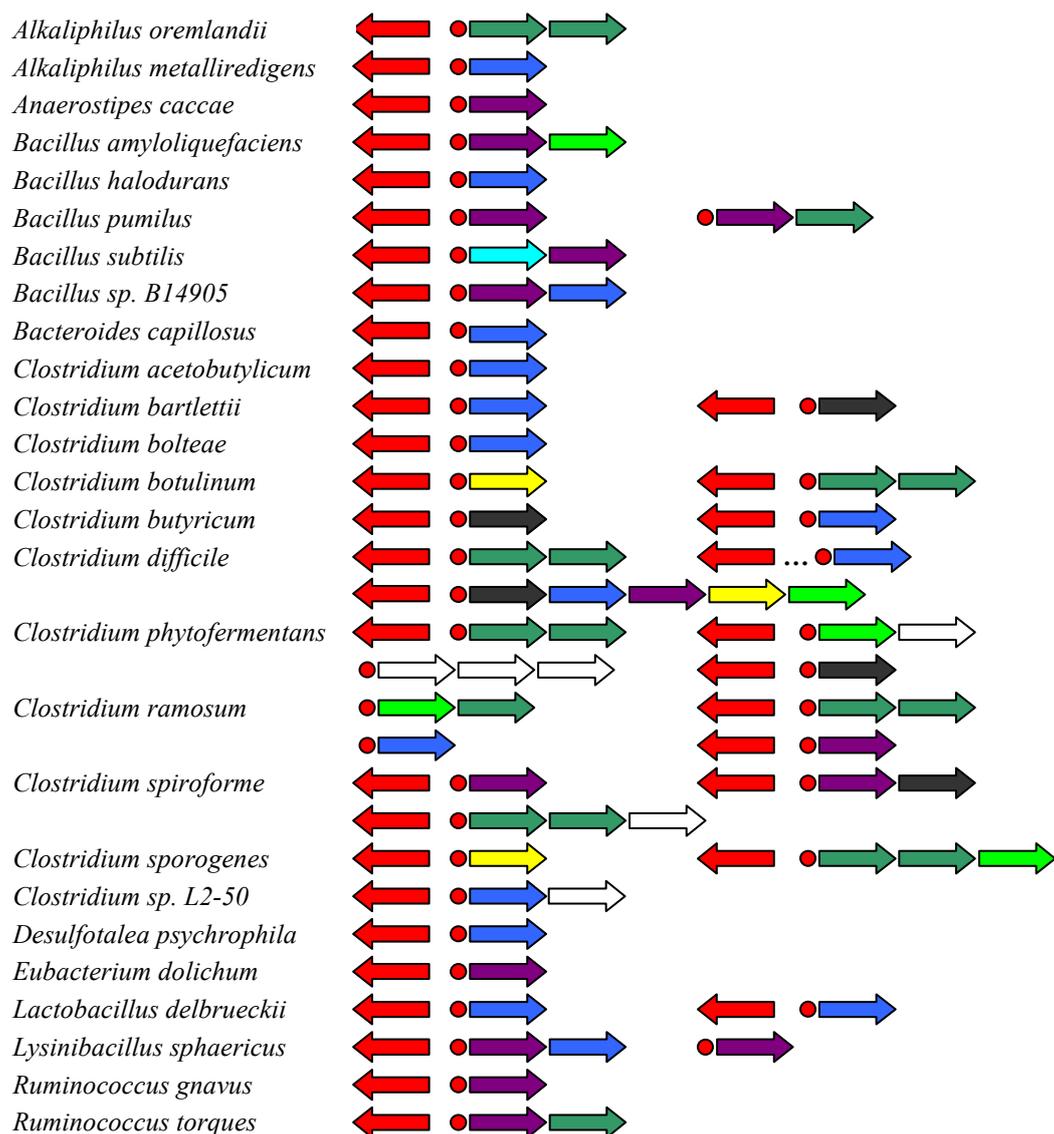
№	Название рода	Количество регуляторов
1	<i>Clostridium</i>	71
2	<i>Bacillus</i>	37
3	<i>Lactobacillus</i>	11
4	<i>Streptococcus</i>	10
5	<i>Anaerostipes</i>	6
6	<i>Geobacillus</i>	4
7	<i>Alkaliphilus</i>	4
8	<i>Ruminococcus</i>	4
9	<i>Lysinibacillus</i>	3
10	<i>Desulfitobacterium</i>	3
11	<i>Anaerofustis</i>	3
12	<i>Listeria</i>	2
13	<i>Eubacterium</i>	2
14	<i>Anaerotruncus</i>	2
15	<i>Dorea</i>	2
16	<i>Paenibacillus</i>	1
17	<i>Staphylococcus</i>	1
18	<i>Coprococcus</i>	1

промоторными элементами длиной 20 н.п. Остальные сочетания (всего 9 случаев) значительно менее типичны. Оказалось, что промоторная область гена *bmr* *B. subtilis* (мотив связывания длиной 22 н.п. при промежутке длиной 19 н.п.) является весьма редким исключением, так как у ближайших гомологов мотив имеет длину 23 н.п. при длине промежутка 19 н.п. Выяснилось также, что при длине промежутка 19 н.п. и нечетной длине мотива центр палиндрома находится на фиксированном расстоянии (13 н.п.) от 5'-конца –35 промоторного элемента. Таким образом, –35 элемент промотора и сайт связывания регулятора перекрываются, что накладывает ограничения на их структуру. Эти данные позволяют сделать предположение, что большинство регуляторов, изученных в данной работе, являются активаторами, подобно BmrR и BltR. При этом механизм активации транскрипции должен быть аналогичен описанному в работе [14]: при связывании регулятора с ДНК последняя изгибается, что облегчает инициацию транскрипции.



**Рисунок 3. Диаграммы Лого промоторных областей регулируемых генов. Синей скобкой обозначены –35 (6 – 11 позиции) и –10 (31 – 36 позиции) элементы промотора, красной скобкой – сайт связывания регулятора (8 – 30 позиции). Стрелкой отмечен центр сайта связывания – 19 позиция, звездочками отмечены наиболее консервативные среди всех сайтов связывания позиции.**





**Рисунок 5. Структура BlnR-зависимых регулонов. Цветами стрелок обозначены функциональные типы генов: красный - регулятор подсемейства BlnR, синий – MATE-транспортер, зеленый – ABC-транспортер, голубой – MFS-транспортер, салатовый – мембранный белок, фиолетовый – ацетилтрансфераза, желтый – аргининдегидролаза, черный – прочие белки, белый – белок с неизвестной функцией. Кружками отмечены потенциальные сайты связывания регуляторов подсемейства BlnR.**

В дальнейшем планируется провести полногеномный поиск регуляторных мотивов и анализ оперонов и регулонов для подсемейства BmrR. Также предполагается исследовать корреляцию между аминокислотными последовательностями ДНК-связывающих НТН-доменов регуляторов и нуклеотидными последовательностями их сайтов связывания.

## 12. Список литературы

[1] А.А. Миронов, Н.П. Винокурова, М.С. Гельфанд, “Программное обеспечение анализа бактериальных

геномов”, *Молекулярная биология*, МАИК Наука, 2000, т. 34, № 2, с. 253-262.

[2] M. Ahmed, C.M. Borsch, S.S. Taylor, N. Vazquez-Laslop and A.A. Neyfakh, “A Protein That Activates Expression of a Multidrug Efflux Transporter upon Binding the Transporter Substrates”, *The Journal of Biological Chemistry*, American Society for Biochemistry and Molecular Biology, 1994, Vol. 269, № 45, pp. 28506-28513.

[3] M. Ahmed, L. Lyass, P.N. Markham, S.S. Taylor, N. Vazquez-Laslop and A.A. Neyfakh, “Two Highly Similar Multidrug Transporters of *Bacillus subtilis* Whose Expression Is Differentially Regulated”, *Journal of*

- Bacteriology*, American Society for Microbiology, 1995, Vol. 177, № 14, pp. 3904-3910.
- [4] S.F. Altschul, T.L. Madden, A.A. Schäffer, J. Zhang, Z. Zhang, W. Miller and D.J. Lipman, "Gapped BLAST and PSI-BLAST: a new generation of protein database search programs", *Nucleic Acids Research*, Oxford Journals, 1997, № 25, pp. 3389-3402.
- [5] N.N. Baranova, A. Danchin and A.A. Neyfakh, "Mta, a global MerR-type regulator of the *Bacillus subtilis* multidrug-efflux transporters", *Molecular Microbiology*, John Wiley & Sons, Inc., 1999, № 31, pp. 1549-1559.
- [6] D.A. Benson, I. Karsch-Mizrachi, D.J. Lipman, J. Ostell and D.L. Wheeler, "GenBank", *Nucleic Acids Research*, Oxford Journals, 2008, № 36(Database issue), pp. D25-30.
- [7] G.E. Crooks, G. Hon, J.M. Chandonia and S.E. Brenner, "WebLogo: A sequence logo generator", *Genome Research*, Cold Spring Harbor Laboratory Press, 2004, № 14, pp. 1188-1190.
- [8] R.C. Edgar, "MUSCLE: multiple sequence alignment with high accuracy and high throughput", *Nucleic Acids Research*, Oxford Journals, 2004, Vol. 32, № 5, pp. 1792-1797.
- [9] J. Felsenstein, "PHYLIP - Phylogeny Inference Package (Version 3.2)", *Cladistics*, The Willi Hennig Society, 1989, № 5, pp. 164-166.
- [10] S. Grkovic, M.H. Brown and R.A. Skurray, "Regulation of Bacterial Drug Export Systems", *Microbiology and Molecular Biology Reviews*, American Society for Microbiology, 2002, Vol. 66, № 4, pp. 671-701.
- [11] A.A. Neyfakh, "The Multidrug Efflux Transporter of *Bacillus subtilis* Is a Structural and Functional Homolog of the Staphylococcus NorA Protein", *Antimicrobial Agents and Chemotherapy*, American Society for Microbiology, 1992, Vol. 37, № 1, pp. 484-485.
- [12] A.A. Neyfakh, V.E. Bidnenko and L.B. Chen, "Efflux-mediated multidrug resistance in *Bacillus subtilis*: Similarities and dissimilarities with the mammalian system", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, National Academy of Sciences, 1991, Vol. 88, № 11, pp. 4781-4785.
- [13] D.P. Woolridge, N. Vazquez-Laslop, P.N. Markham, M.S. Chevalier, E.W. Gerner and A.A. Neyfakh "Efflux of the natural polyamine spermidine facilitated by the *Bacillus subtilis* multidrug transporter Blt", *Journal of Biological Chemistry*, American Society for Biochemistry and Molecular Biology, 1997, Vol. 272, № 14, pp. 8864-8866.
- [14] E.E. Zhelezнова-Heldwein and R.G. Brennan, "Crystal structure of the transcription activator BmrR bound to DNA and a drug", *Nature*, Nature Publishing Group, 2001, № 409, pp. 378-382.
- [15] E.E. Zhelezнова, P.N. Markham, A.A. Neyfakh and R.G. Brennan, "Structural basis of multidrug recognition by BmrR, a transcription activator of a multidrug transporter", *Cell*, Elsevier Inc., 1999, Vol. 96, № 3, pp. 353-362.

## Анализ последовательности генома макронуклеуса *Euplotes crassus*

Цой О.<sup>1,2</sup>, Виноградов Д.<sup>1</sup>, Заика А.<sup>2</sup>, Гельфанд М.С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем передачи информации РАН им. А.А. Харкевича

<sup>2</sup> Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова  
olgatsoj@list.ru

### Аннотация

В начале этого года был завершен проект по определению последовательности макронуклеарного генома *E. crassus* [1]. Около четверти генов *E. crassus* содержат несколько экзонов. Было обнаружено и проанализировано 63 случая альтернативного сплайсинга, а также несколько случаев с нестандартными сайтами сплайсинга. Показано, что большинство хромосом *E. crassus* содержат один ген. На данный момент обнаружен только один значимый случай, когда на хромосоме расположено два гена. Около 2000 генов *E. crassus* не имеют каких-либо гомологов в других инфузориях, большинство из этих генов имеют наиболее похожих гомологов в бактериальных геномах. Реализован алгоритм поиска ортологичных генов других инфузорий и паралогичных семейств в *E. crassus*. Предполагается провести функциональный анализ и выявить связь с особенностями жизнедеятельности *E. Crassus*.

### 1. Введение

Инфузория *Euplotes crassus* принадлежит к классу Spirotrichea. Из-за ряда особенностей (высокой степени полиплоидии, наличия огромного количества копий генов) геном инфузорий трудно поддается определению последовательности и анализу. Кроме того, сам геном *E. crassus* обладает рядом особенностей, которые отличают его от остальных инфузорий и делает интересным объектом для анализа.

#### 1.1. Ядерный диморфизм у инфузорий

Как и все инфузории, *E. crassus* обладает ядерным диморфизмом, т.е. имеет два ядра – макронуклеус и микронуклеус.

Микронуклеус в вегетативном состоянии неактивен, но участвует в передаче генетического

материала. Макронуклеус активен во время вегетативного роста инфузории. У большинства инфузорий он характеризуется высокой степенью полиплоидии. При половом процессе он разрушается и заменяется новым, который образуется из микронуклеуса путем перестроек ДНК.

#### 1.2. Особенности генома *E. crassus*

Несмотря на универсальность генетического кода, инфузории являются наиболее яркими представителями исключения из этого правила. Все *Euplotes* обладают еще одной отличительной особенностью – кодон UGA отвечает за включение цистеина, а UAA и UAG являются обыкновенными стоп кодонами. Это необходимо учитывать при поиске похожих последовательностей при анализе генома.

Но инфузории представляют примеры исключения не только из правила универсальности генетического кода, но и универсальности механизмов трансляции. Так было показано, что трансляция некоторых генов *Euplotes* требует программируемого сдвига рамки считывания. Этот сдвиг происходит при достижении рибосомой стоп кодона, таким образом, изменения в генетическом коде могут быть связаны с изменениями в трансляции.

Программируемый сдвиг рамки считывания регулируется особыми последовательностями мРНК, которые заставляют рибосому перескочить на другую рамку считывания. Самый простой пример такого механизма – сдвиг +1. В этом случае транслируемая последовательность заканчивается слабыми стоп кодонами, за которыми располагается сдвигающая последовательность.

Впервые подобный механизм в *Euplotes* был описан для гена, кодирующего рекомбиназу в составе транспозона Tес2 [2]. Это далеко не единственный пример, и, возможно, программируемый сдвиг рамки считывания

является распространенным механизмом трансляции у *Euplotes*.

## 2. Методы

### 2.1. Данные

Геном *E. crassus* представляет собой 70328 контигов (из них 70312 уникальных) и 18742 последовательностей EST (из них 15170 уникальных).

### 2.2. Картирование EST на контиги.

EST были картированы на контиги используя метод сплайсированного выравнивания с помощью программы Pro-EST.

### 2.3. Фильтрация

Выравнивания с низким сходством (<95% identity вдоль всего выравнивания или <90% identity хотя бы в одном экзоне) были отброшены. Выравнивания, содержащие интроны с нестандартными сайтами, были подвергнуты ручному анализу.

### 2.4. Объединение

Частичные экзон-интронные структуры, полученные в результате выравнивания EST и контигов, были объединены в *экзон-интронные контиги (ЭИК)*. При этом использовалась следующая итеративная процедура: две структуры (ЭИК) объединялись, если все сайты сплайсинга в их пересечении в точности совпадали. В частности, в перекрывающемся участке не допускались удлинения экзонов за счёт альтернативных сайтов, кассетные экзоны, присутствующие в одном ЭИК, но отсутствующие в другом, а также удержанные интроны.

### 2.5. Поиск ортологов

Ортологичными генами в разных организмах называются такие гены, имеющие общее происхождение. Реализован алгоритм автоматического поиска ортологов. Для алгоритма поиска парой ортологов считались гены, которые в обе стороны являются друг для друга лучшими гомологами (BeT, best hit [3]) - т.е. опираясь на определение двусторонних лучших гомологов (BBH, best bidirectional hit [3]) В дальнейшем пара BBH является ядром, от

которого отталкивается поиск паралогичного семейства.

## 2.6. Поиск паралогичных семейств

Паралогичными генами называются гены, образовавшиеся в результате дупликации внутри одного генома. Для алгоритма поиска паралогичные гены определены следующим критерием:

- расстояния между ними должны быть меньше, чем до наиболее похожего гомолога, но из другого организма. Мерой расстояния является некоторое численное значение (score), которое тем больше, чем меньше расстояние.

## 3. Результаты

### 3.1. Экзон-интронная структура

После завершения процедуры объединения, большинство контигов (4244) содержали один ЭИК, 246 содержали два ЭИК и 5 контигов содержали три ЭИК. Случаи нескольких ЭИК на контиг распределены так: 197 пар ЭИК не пересекаются друг с другом, один ЭИК целиком лежит в интроне другого ЭИК, и ещё 63 пары, вероятно, представляют собой примеры альтернативного сплайсинга. В первом случае, не вполне ясно, являются ли эти ЭИК двумя различными генами или (что более вероятно) артефактами, вызванными недостаточным покрытием EST.

**3.1.1. Число экзонов на ген.** Около четверти ЭИК содержат более одного экзона. Т.к. имеющиеся EST покрывают лишь небольшую часть генома, доля многоэкзонных генов скорее всего превышает 25%.

**3.1.2. Длина экзонов.** Гистограмма длины экзонов выходит на плато в районе 30-200нп, далее следует пик на участке 200-250нп, а затем плавное снижение. Максимальная длина внутреннего экзона — 2211нп, минимальная — 7нп.

**3.1.3. Длина интронов.** Гистограмма длины интронов резко возрастает в районе “крошечных” интронов (23-30нп), и затем убывает почти монотонно. Длина больше 300нп встречается крайне редко, а большинство интронов — “крошечные” (порядка 40% интронов короче 30нп). Тем не менее максимальная длина интрона — 2821нп, а минимальная — 21нп (более короткие интроны встречались в выдаче

программы, но были отброшены после индивидуального анализа). Стоит отметить, что в области коротких длин распределение длин интронов выглядит бимодальным, причём второй (меньший) пик приходится на значения длин 37-42нп. Это наблюдение может быть объяснено наличием двух механизмов сплайсинга, и, как следствие, двух групп интронов; граница длины между этими группами — 33-35нп.

### 3.2 Альтернативный сплайсинг

#### 3.2.1. Нестандартные сайты сплайсинга.

Все выравнивания, содержащие нестандартные сайты сплайсинга были проверены вручную. После отбрасывания ненадёжных сайтов и псевдоинтронов (вероятно возникших из-за повторов, вызванных ошибками при секвенировании) осталось 14 потенциальных интронов с нестандартными сайтами. Среди них: 4 GC-AG интрона, 3 GT-TG интрона, 3 AT-AG интрона, 3 GT-AT интрона и один GT-AC интрон. Примечательно, что перед всеми 7 нестандартными акцепторными сайтами находится остаток T, при том что доля TAG среди интронов с каноническими сайтами составляет 93.63% (остальные это в основном CAG, 4.73%)

**3.2.2. Альтернативный сплайсинг.** Нами были найдено 63 примера альтернативного сплайсинга, среди них 55 относились к типу “удержанный интрон”, т.е. экзон одного ЭИК полностью или частично покрывал интрон другого ЭИК. В 48 случаях получившийся ЭИК состоял всего из одного экзона и, строго говоря, нельзя гарантировать, что соответствующие EST надо относить к одному и тому же типу альтернативного сплайсинга. Более того, невозможно по формальным критериям отличить случай удержанного интрона (аналогичный примерам среди частично перекрывающихся ЭИК) от случая удлинения экзона из-за альтернативного сайта. Однако в 7 случаях перекрытие было полным, что даёт основания для классификации таких вариантов как «удержанный интрон» (впрочем, не забывая о возможности неполного сплайсинга).

Альтернативные сайты были обнаружены в 8 парах ЭИК: 1 альтернативный донор, 2 альтернативных акцептора и 5 случаев, в которых варьировались оба сайта.

### 3.3. Одна хромосома – один ген

Из 70328 контигов обнаружено 36 случаев, когда один контиг выравнивается более, чем с одним белком из базы данных nr, с  $evalue < 0.001$ . Но только один случай подтвержден наличием EST.

Таким образом, показано, что для *E. crassus* характерна тенденция: одна хромосома – один ген.

### 3.4. Ортологи

Около 2000 генов *E. crassus* не имеют каких-либо гомологов в других инфузориях, большинство из этих генов имеют наиболее похожих гомологов в бактериальных геномах. У подавляющего большинства (1071) теломеры отсутствовали. Видимо это является результатом погрешностей процедуры определения последовательности генома.

### 3.5. Паралогичные семейства

Благодаря амплификации генов, макронуклеарный геном содержит семейства паралогичных генов.

В рамках этого же проекта предполагается провести анализ семейств паралогичных белков, выявить наиболее крупные семейства паралогичных генов и определить связь с особенностями жизнедеятельности *E. crassus*.

## 4. Благодарности

Авторы выражают благодарность В. Гладышеву и А. Лобанову за предоставленные данные, А. А. Миронову за ценное обсуждение и комментарии.

## 5. Список литературы

- [1] A.A. Turanov, A.V. Lobanov, D.E. Fomenko, H.G. Morrison, M.L. Sogin, L.A. Klobutcher, D.L. Hatfield, and V.N. Gladyshev. “Genetic code supports targeted insertion of two amino acids by one codon.” *Science*, American Assn. for the Advancement of Science, United States, 2009, pp. 259-261.
- [2] M.F. Krikau, and C.L. Jahn. “Tec2, a second transposon-like element demonstrating developmentally programmed excision in *Euplotes crassus*.” *Mol Cell Biol*, American Society for Microbiology, United States, 1991, pp. 4751-4759.
- [3] R.L. Tatusov, E.V. Koonin, and D.J. Lipman. “A genomic perspective on protein families.” *Science*, American Assn. for the Advancement of Science, United States, 1997, pp. 631-637

# Автоматная интерпретация фрагментов последовательности ДНК

Епифанов А.С.

*Институт Проблем Точной Механики и Управления РАН, г.Саратов*  
[desimalorlimewax@rambler.ru](mailto:desimalorlimewax@rambler.ru)

## Аннотация

*В работе с использованием аппарата геометрических образов автоматов и спектра динамических параметров (см.[1]) проведен анализ фрагментов последовательностей ДНК человека, других приматов, некоторых птиц и рептилий. Используемый аппарат геометрических образов позволяет задавать законы функционирования с использованием геометрических кривых и числовых последовательностей. Последовательность ДНК рассматривается как последовательность вторых координат точек геометрического образа автомата, которая при выбранном множестве  $X$  входных сигналов и зафиксированном порядке  $\omega_1$  на элементах множества входных слов  $X^*$  однозначно определяет законы функционирования автомата. Это позволяет исследовать свойства последовательностей ДНК на основе анализа автоматов. В статье осуществляется построение автоматов по фрагментам ДНК, исследуется зависимость числа состояний автомата от мощности входного алфавита.*

## 1. Введение

Конечные детерминированные автоматы как математические модели сформировались, начиная с 1943 года (Мак-Каллок и Питтс) для описания связей множеств сигналов и состояний с небольшим числом элементов. Это отразилось в способах задания автоматов, основанных на явном указании функции (таблицы, конечные графы, матрицы, логические уравнения с переменными, заданными на конечных множествах). Функционирование автоматов базируется на рекурсии, которая позволяет представлять как угодно большой, но только начальный, фрагмент процесса функционирования.

В.А. Твердохлебовым в работе [1] предложен и разработан новый подход для задания законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем, основанный на числовых структурах. Данный подход позволяет использовать мощные идеализации классической непрерывной

математики: бесконечно малой величины, актуальной бесконечности, суммирования бесконечных рядов, предельного перехода и т.п.. Геометрический образ  $\gamma_s$  определяет полностью законы функционирования автомата  $A_s$ , то есть, всю фазовую картину связей входных последовательностей с выходными сигналами. Конкретные варианты процессов функционирования, то есть, фазовые траектории, имеют геометрические образы  $\gamma_s(p)$ ,  $p \in X^*$ , в виде сечений  $\gamma_s$  по отдельным точкам. Геометрические образы  $\gamma_s(p)$  могут задаваться числовыми, а не символьными, уравнениями. Использование аппарата геометрических образов позволяет рассматривать с автоматной интерпретацией геометрические кривые на плоскости и числовые последовательности. В работе [1] Твердохлебовым разработаны методы синтеза автомата по последовательностям и геометрическим кривым. Последовательность элементов из конечного множества, совмещенная с линейным порядком на множестве входных слов, определяет законы функционирования дискретной детерминированной динамической системы (автомата). В монографии [2] содержатся результаты анализа более 100000 последовательностей, имеющих различную интерпретацию, в том числе 8594 числовых последовательностей, задающих приближения фундаментальных математических величин ( $\pi$ ,  $e$ ,  $\phi$ ,  $\sqrt{2}$  и др.). В данной статье содержатся результаты по построению и анализу КДА, законы функционирования которых определены начальными отрезками геометрических образов и выбором числа входных сигналов автомата. Для этого из банка последовательностей ДНК [5] извлечены начальные фрагменты ДНК человека, шимпанзе, дельфина, собаки, летучей мыши, слона и др. длины 100000. По каждой последовательности синтезируются законы функционирования автоматов при различных значениях мощности входного алфавита ( $|X|=2, 5, 10, 20, 50, 100, 1000, 2000, 5000, 10000$ ), автоматы минимизируются по числу состояний и построенный класс автоматов разбивается на подклассы эквивалентных по сложности автоматов по числу состояний в минимальном автомате. Проверка эквивалентности состояний

автоматов осуществляется на основе использования аппарата геометрических образов автоматов. Классические методы проверки эквивалентности состояний автомата (см., например, монографию А.Гилла [2]) при указанных размерностях множества входных сигналов и памяти автомата практически не могут быть реализованы (например, при анализе последовательности длины 100000 в случае  $|X|=100$  число состояний автомата равно 1000 и для проверки эквивалентности состояний необходимо вычислить реакцию автомата на  $100^{999}$  входных последовательностей длины 100).

Кроме того, в данной работе содержатся результаты построения и анализа спектров динамических параметров (см. монографию [1]) для извлеченных из банка [5] последовательностей.

## 2. Геометрические образы законов функционирования автоматов

Геометрический образ  $\gamma_s$  законов функционирования (см. [1]) (функции переходов  $\delta: S \times X \rightarrow S$  и функции выходов  $\lambda: S \times X \rightarrow Y$ ) инициального конечного детерминированного автомата  $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$  с множествами состояний  $S$ , входных сигналов  $X$  и выходных сигналов  $Y$  определяется на основе введения линейного порядка  $\omega$  в автоматном отображении

$$\rho_s = \bigcup_{p \in X^*} \{ (p, \tilde{\lambda}(s, p)) \}, \quad \text{где } \tilde{\lambda}(s, p) -$$

последний знак последовательности  $\lambda(s, p)$ . Для этого с использованием линейных порядков  $\omega_1$  на множестве  $X^*$  всех конечных последовательностей входных сигналов и  $\omega_2$  на множестве выходных сигналов  $Y$  определяется система символьных координат  $D$  с осью абсцисс  $(X^*, \omega_1)$  и осью ординат  $(Y, \omega_2)$ . В системе координат  $D$  геометрический образ  $\gamma_s$  изображается как ломаная линия с вершинами, являющимися парами из  $\rho_s$ .

Преобразование геометрического образа  $\gamma_s$  с символьными координатами точек в числовую структуру определяется заменой каждой пары вида  $(p, \tilde{\lambda}(s, p))$ , где  $\tilde{\lambda}(s, p)$  - последний знак последовательности  $\lambda(s, p)$ , точкой с числовыми координатами  $(r_1(p), r_2(\lambda(s, p)))$ , где  $r_i$  - номер элемента по порядку  $\omega_i$ . Переход от символьных координат точек геометрического образа к числовым (в исходном случае положительным целочисленным) координатам позволяет размещать геометрические образы законов функционирования автомата на числовых кривых. При зафиксированном порядке на

множестве входных последовательностей специфика законов функционирования заключена только в последовательности вторых координат точек геометрического образа.

Проверка эквивалентностей состояний по геометрическому образу (см. глава 9 монографии [1]) требует сравнения двух бесконечных последовательностей и бесконечного геометрического образа  $\gamma_s$ . В общем случае эффективная проверка невозможна. Только принятие дополнительных предположений, условий и ограничений позволяет выделять случаи эффективной проверки по геометрическому образу эквивалентности состояний. Одним из фундаментальных предположений о свойствах геометрических образов является предположение о том, что геометрический образ  $\gamma_s$  - это периодическая ломаная линия. Известно (см. [2]), что если для некоторого  $k$  классы  $k$ -эквивалентных состояний совпадают с классами  $(k+1)$ -эквивалентных состояний, то эти классы являются классами эквивалентных состояний. Следует подчеркнуть, что это важнейшее утверждение не применимо без дополнительного ограничения в случае проверки эквивалентности по геометрическому образу. Дополнительное условие заключается в том, что уже все достижимые из  $s$  состояния автомата представлены при определении  $k$ -эквивалентности состояний. Новые состояния, не эквивалентные уже представленным в рассмотренном начальном отрезке геометрического образа, могут потребоваться для образования связей входных сигналов и выходных сигналов при увеличении начального отрезка геометрического образа.

Подробное описание основных положений аппарата геометрических образов законов функционирования автоматов, методов синтеза законов функционирования автоматов по геометрическим кривым и числовым последовательностям, а также методов проверки эквивалентности состояний и др. содержится в работе [1].

## 3. Спектр динамических характеристик рекуррентного определения числовых последовательностей

Для строгого представления свойств последовательности в работе [1] Твердохлебовым В.А. предложен и разработан спектр динамических параметров последовательности, характеризующий последовательность по взаимосвязям (взаиморасположению) элементов в ней. Спектр

параметров представляет правила построения последовательности с использованием рекуррентных форм различных порядков. Для этого рассматриваемой

последовательности  $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$

элементов из конечного множества  $U$  сопоставляются рекуррентные формы  $F(z_1, z_2, \dots, z_m) = z_{m+1}$ , у которых  $z_i, 1 \leq i \leq m+1$ , принимают значения из множества  $U$ , и которые определяют части или сразу всю последовательность  $\xi$ .

Определение последовательности рекуррентной формой  $F$  (или последовательностью рекуррентных форм) реализуется на основе совмещения переменных рекуррентной формы с элементами последовательности  $\xi$  по правилу: для любого  $t, t > m$  (или  $t$  принадлежит рассматриваемому интервалу целых положительных чисел)  $F(u(t-m), u(t-m+1), \dots, u(t-1)) = u(t)$ .

По предположению независимые и зависимые переменные рекуррентных форм определены на конечном множестве  $U$ , то есть, рекуррентной форме  $F$  соответствует конечное отображение вида  $F: U^m \rightarrow U$ . Это позволяет эффективно задавать рекуррентные формы, конечные семейства рекуррентных форм и правила их применения при определении последовательностей.

Спектр  $\Omega(\xi)$  для последовательности  $\xi$  имеет 5 уровней:  $\Omega(\xi) = (\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$ . В спектре числовыми значениями представлены порядки рекуррентных форм, длины отрезков последовательности, определяемые отдельными рекуррентными формами и количества смен рекуррентных форм. Каждый конкретный вариант реализации (представление значениями параметров) любого уровня  $\Omega_i(\xi)$  определяет разбиение множества  $U^*$  на подмножества по свойствам совпадения характеристик. Подмножества такого разбиения будем рассматривать как классы эквивалентности последовательностей. Ниже приводится формальное определение спектра  $\Omega(\xi)$ .

Пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  - конечное множество и  $\xi$  последовательность элементов из множества  $U$ :  $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$ . Введём следующие обозначения.

Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^V$ , где  $U^V$  - множество всех последовательностей длины  $v$  элементов из множества  $U$ , наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность  $\bar{\xi}$ , будем обозначать  $m_0(\bar{\xi})$ .

Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^V$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$ , наибольшую длину начального отрезка последовательности  $\bar{\xi}$ , определяемого рекуррентной формой порядка  $m$ , будем обозначать  $d^m(\bar{\xi})$ . Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^V$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq |\bar{\xi}| - 1$ , число смен рекуррентных форм порядка  $m$ , требующихся при определении последовательности  $\bar{\xi}$ , будем обозначать  $r^m(\bar{\xi})$ . Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^V$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$  и  $j$ , где  $1 \leq j \leq r^m(\bar{\xi})$  длину  $j$ -го отрезка в определении последовательности  $\bar{\xi}$  будем обозначать  $d_j^m(\bar{\xi})$ .

Используя введенные обозначения определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

$$- \Omega_0(\bar{\xi}) = \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle;$$

$$- \Omega_1(\bar{\xi}) = \langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \dots, d^\alpha(\bar{\xi}) \rangle;$$

$$- \Omega_2(\bar{\xi}) = \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \dots, r^\alpha(\bar{\xi}) \rangle;$$

$$- \Omega_3(\bar{\xi}) = \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle, \quad \text{где}$$

$$\alpha = m_0(\bar{\xi}) \text{ и } \Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \dots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \rangle$$

( $n_j$  - номер последнего отрезка в определении последовательности  $\bar{\xi}$  как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка  $j$ ). Четвёртый уровень  $\Omega_4(\bar{\xi})$  спектра  $\Omega(\bar{\xi})$  добавляет к характеристикам в предшествующих уровнях оценку сложности правил и вариантов использования правил. Формально  $\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$ , где  $\Theta$  - оператор замены в  $\Omega_3(\bar{\xi})$  величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

#### 4. Синтез законов функционирования автоматов по последовательности ДНК

В работе [1] предложен новый тип автомата -  $(H, m, d(H))$  - автомат. Законы функционирования данного типа автомата задаются числовой последовательностью  $H$ , которая полагается последовательностью вторых координат точек геометрического образа. Рассматривается начальный отрезок длины  $d(H)$

последовательности  $H$ . Величина  $m$  – мощность входного алфавита автомата, количество выходных сигналов определяется спецификой начального отрезка последовательности  $H$  длины  $d(H)$  (число различных значений элементов в начальном отрезке длины  $d(H)$ ).

В данной работе производится построение и анализ классов автоматов, законы функционирования которых определены последовательностью ДНК. Из банка последовательностей ДНК [5] извлечены начальные фрагменты длины 100000 знаков ДНК человека, гориллы, шимпанзе, ежа, коровы, собаки, мыши, курицы, дельфина и слона. Известно, что алфавит генетических записей состоит из 4 букв А, С, G, Т, которые обозначают соответственно четыре вида азотистых оснований (аденин, цитозин, гуанин и тимин), представляющих специфику последовательности ДНК. Извлеченные последовательности кодируются на основе замены знака аденина цифрой 1, знака цитозина цифрой 2, гуанина - 3 и тимина - 4. Соответственно все построенные в работе автоматы имеют выходной алфавит  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ .

При синтезе законов функционирования автоматов по последовательностям ДНК соответствующие последовательности первых координат точек геометрического образа определялись вариантами выбора числа входных сигналов автомата и линейным порядком  $\omega_1$  на множестве входных последовательностей. В работе использован один вид линейного порядка, т.н. модифицированный лексикографический порядок (см. монографию [1]). Существенным при синтезе законов функционирования автомата является способ доопределения функции переходов  $\delta$  автомата. Возможно циклическое доопределение, доопределение в начальное состояние, генерация состояния псевдослучайным образом (из множества возможных состояний). В случае, когда  $\frac{d(H)}{|X|} \neq \left\lfloor \frac{d(H)}{|X|} \right\rfloor$ , где  $|X|$  – мощность входного алфавита автомата, а  $d(H)$  – длина начального отрезка последовательности  $H$  (по которой строятся законы функционирования автомата), доопределение требуется и для функции выходов  $\lambda$ . В данной работе доопределение функции переходов осуществляется всеми указанными

способами, а значение мощности входного алфавита и длины начальных отрезков последовательностей выбраны таким образом,

что  $\frac{d(H)}{|X|} = \left\lfloor \frac{d(H)}{|X|} \right\rfloor$ , поэтому доопределение

функции  $\lambda$  не требуется. По каждой последовательности (цифровой) построено 300 автоматов (при рассмотрении набора начальных отрезков, имеющих длины 10000, 20000, ..., 100000 знаков, использовании 3 способов доопределения функции переходов и 10 различных значений мощности входного алфавита автомата  $|X|=2, 5, 10, 20, 50, 100, 1000, 2000, 5000, 10000$ ). Ввиду большой размерности построенных автоматов в качестве иллюстрации использованного метода синтеза автомата по последовательности в таблице 1 и 2 приведены законы функционирования автомата (таблицы переходов и выходов автомата), построенного по отрезку ДНК длины 100 знаков (извлеченному из хромосомы Y человека) при  $|X|=20$ .

Таблица 1.

Таблица переходов автомата (при циклическом доопределении функции переходов), построенного по фрагменту последовательности ДНК длины 100 знаков

$\delta$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
$x_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$
$x_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$
$x_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$
$x_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$
$x_5$	$s_0$	$s_0$	$s_0$	$s_0$	$s_0$
$x_6$	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$
$x_7$	$s_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$
$x_8$	$s_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$
$x_9$	$s_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$
$x_{10}$	$s_0$	$s_0$	$s_0$	$s_0$	$s_0$
$x_{11}$	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$
$x_{12}$	$s_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$
$x_{13}$	$s_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$
$x_{14}$	$s_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$
$x_{15}$	$s_0$	$s_0$	$s_0$	$s_0$	$s_0$
$x_{16}$	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$
$x_{17}$	$s_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$	$s_2$
$x_{18}$	$s_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$	$s_3$
$x_{19}$	$s_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$	$s_4$
$x_{20}$	$s_0$	$s_0$	$s_0$	$s_0$	$s_0$

В результате анализа свойств построенных автоматов отмечены следующие

специфические свойства. Отмечена зависимость числа состояний у автомата после минимизации от способа доопределения функции переходов. Так при циклическом доопределении функции переходов отмечено, что у всех построенных автоматов (по всем анализируемым ДНК) число классов эквивалентности практически совпадает с числом состояний, т.е. почти все такие автоматы уже являются минимальными по числу состояний. Уменьшение числа состояний после минимизации отмечено при доопределении в начальное состояние, а при и доопределении функции переходов на основе использования генератора случайных чисел (состояний выбирается из множества возможных состояний случайным образом) число классов эквивалентности совпадает с числом состояний, т.е. автоматы являются минимальными по числу состояний.

Таблица 2.

Таблица выходов автомата (имеющего 20 входных сигналов), построенного по фрагменту последовательности ДНК (части Y хромосомы человека)

$\lambda$	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
$x_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_2$
$x_2$	$y_1$	$y_1$	$y_1$	$y_3$	$y_3$
$x_3$	$y_2$	$y_4$	$y_2$	$y_3$	$y_1$
$x_4$	$y_2$	$y_1$	$y_4$	$y_3$	$y_2$
$x_5$	$y_2$	$y_2$	$y_2$	$y_3$	$y_1$
$x_6$	$y_4$	$y_4$	$y_1$	$y_4$	$y_4$
$x_7$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_4$	$y_2$
$x_8$	$y_1$	$y_4$	$y_3$	$y_1$	$y_2$
$x_9$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_3$	$y_3$
$x_{10}$	$y_1$	$y_3$	$y_4$	$y_3$	$y_1$
$x_{11}$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_3$
$x_{12}$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_2$	$y_1$
$x_{13}$	$y_2$	$y_3$	$y_3$	$y_4$	$y_2$
$x_{14}$	$y_4$	$y_2$	$y_1$	$y_4$	$y_4$
$x_{15}$	$y_2$	$y_2$	$y_3$	$y_2$	$y_3$
$x_{16}$	$y_3$	$y_1$	$y_3$	$y_1$	$y_3$
$x_{17}$	$y_4$	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_3$
$x_{18}$	$y_4$	$y_1$	$y_1$	$y_2$	$y_1$
$x_{19}$	$y_2$	$y_4$	$y_3$	$y_1$	$y_3$
$x_{20}$	$y_4$	$y_1$	$y_4$	$y_4$	$y_1$

Увеличение разницы между числом состояний у автомата до и после минимизации

при доопределении функции переходов в начальное состояние по сравнению с циклическим доопределением наблюдается в классе автоматов, построенных по фрагменту последовательности ДНК мыши и ежа.

Анализ построенных классов автоматов показал, что использование при построении автоматов доопределения функции переходов в начальное состояние дает наименьшее число состояний после минимизации, чем циклическое доопределение и случайное доопределение.

#### 4. Построение и анализ спектров для фрагментов последовательностей ДНК

Базовой моделью дискретных детерминированных динамических систем являются конечные детерминированные автоматы. Сравнение по сложности таких автоматов может быть сделано на основе сравнения математических структур, представляющих специфику законов функционирования автомата. В качестве таких структур могут быть использованы геометрические образы законов функционирования автоматов. Как было показано выше, специфика геометрического образа при зафиксированном множестве входных сигналов автомата  $X$  и линейном порядке  $\omega_1$  на множестве входных слов  $X^*$  представлена последовательностью вторых координат его точек. В качестве таких последовательностей в данной работе рассматриваются последовательности ДНК различных живых существ. Для оценки сложности последовательностей использован спектр динамических параметров, предложенный и разработанный В.А.Твердохлебовым в работе [1]. Проведенный вычислительный эксперимент включил построение спектров для более чем 5000 фрагментов последовательностей ДНК различной длины (от 500 до 100000 знаков). В результате анализа полученных результатов отмечена специфика анализируемых ДНК с точки зрения используемого математического аппарата. Например, начальный отрезок длины 10000 фрагмента ДНК человека, соответствующего гену BRCA2 (см.[5]) описывается без противоречий рекуррентной формой порядка 15 (т.е.  $m_0=15$ ). При этом, использование рекуррентных форм порядков 3 и 4 позволяет описать без противоречий один и тот

же начальный отрезок длины 23, использование рекуррентных форм порядков 10 и 11 - один и тот же начальный отрезок длины 765, а с порядками 13 и 14 определяется отрезок длины 6191. Специфические свойства с точки зрения рекуррентного описания имеет фрагмент ДНК кролика длины 10000, соответствующий гену SLC35F1. Длина начального отрезка, описываемого без противоречий рекуррентными формами порядков  $m=8,9,10,11,12$ , имеет одно и то же значение - 48 знаков. С порядками рекуррентной формы  $m=13, 14, 15, 16, 17$  также описывается начальный отрезок одинаковой длины - 73 знака. Длина начального отрезка, описываемого без противоречий рекуррентными формами порядков  $m=18,19,20,21,\dots,39$ , имеет значение - 1914 знаков. Такое специфическое изменение длины начального отрезка при увеличении порядка рекуррентной формы отмечено на всем проанализированном интервале до 10000 знаков, который без противоречия определяется рекуррентной формой порядка, превышающего почти в 100 раз аналогичную величину для определения указанного выше гена человека BRCA2. К сожалению, объем данной работы не позволяет привести подробные результаты исследования с использованием спектра даже одной хромосомы любого из выбранных для анализа живых существ.

## 6. Краткие выводы

Изложенные в статье результаты показывают возможность использования аппарата геометрических образов для анализа свойств последовательностей ДНК. Автоматная интерпретация последовательностей ДНК позволяет выявить новые, более глубокие и тонкие свойства ДНК. Построены и проанализированы классы дискретных детерминированных динамических систем (автоматов), определенные на основе выбора последовательности ДНК и числа входных сигналов автоматов. Проанализировано более 3000 автоматов, построены классы эквивалентных по сложности автоматов. Для начального фрагмента каждой анализируемой в работе последовательности ДНК вычислены значения показателей спектра  $\Omega$  и на основе совпадения значений показателей спектра проведена классификация последовательностей ДНК.

## 7. Литература

- [1] В.А. Твердохлебов, *Геометрические образы законов функционирования автоматов*, Изд-во Научная книга, Саратов, 2008.
- [2] А.Гилл, *Введение в теорию конечных автоматов*, Изд-во Наука, Москва, 1966.
- [3] А.С.Епифанов, *Анализ фазовых картин дискретных динамических систем*, Изд-во Научная книга, Саратов, 2008.
- [4] А.С.Епифанов, "Анализ геометрических образов законов функционирования автоматов", *Управление большими системами*, Выпуск 24, ИПУ РАН, Москва, 2009.С.81-98.
- [5] <http://www.ensembl.org/index.html>

# Iterative Statistical Approach for Discovering Evolutionary Conserved Members of Regulon

E.D. Stavrovskaya<sup>1,2</sup>, D.A. Rodionov<sup>3</sup>, A.A. Mironov<sup>1,2</sup>, I. Dubchak<sup>4</sup>, P. S. Novichkov<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Department of Bioengineering and Bioinformatics, Moscow State University, Leninskiye Gory 1-73, Moscow, 119992, Russia*

<sup>2</sup> *Institute for Information Transmission Problems, Bol'shoi Karetnyi per. 19, Moscow, 127994, Russia*

<sup>3</sup> *Burnham Institute for Medical Research, La Jolla, CA 92037*

<sup>4</sup> *Lawrence Berkeley National Laboratory, 1 Cyclotron Road, Berkeley, CA 94720, USA*

*stavrovskaya@gmail.com,  
psnovichkov@lbl.gov*

## Abstract

*Reconstruction of transcriptional regulatory networks is one of the major challenges facing the bioinformatics community in view of constantly growing number of complete genomes. The comparative genomics approach has been successfully used for the analysis of the transcriptional regulation of many metabolic systems in various bacterial taxa. The key step in this approach is, given a position weight matrix, find an optimal threshold for the search of potential binding sites in genomes. Here we demonstrate that this problem is tightly bound to a problem of discovering the optimal content of regulon and suggest an approach to solve both problems simultaneously. The approach can be applied several times to infer first, the most conservative members representing the core of the regulon, and then less conservative ones.*

## 1. Method

First, we select an arbitrary score of the transcriptional factor binding site (TFBS) as a potential optimal threshold  $S^*$ . For each orthologous group we calculate quality  $Z_i$ , which allows for ranking of all orthologous groups to get the most promising ones at the top of the list.

A particular orthologous group  $R_i$  is described by its size  $N_i$  (number of orthologous genes) and an average length of upstream regions  $L_i$  among all genes in  $R_i$ . After application of the TFBS profile to each gene upstream region, the number of genes  $K_i$  having potential regulatory site with score  $s \geq S^*$  can be calculated. We define the quality of orthologous

group in terms of probability to find the number of potentially regulated genes being  $K_i$  or greater given that upstream regions are random sequences. The corresponding probability can be calculated as:

$$P(k \geq K_i | N_i, L_i, S^*) = \sum_{K=K_i}^{N_i} C_{N_i}^K (P(s \geq S^* | L_i))^K (P(s < S^* | L_i))^{N_i-K}$$

Where  $P(s \geq S^* | L_i)$  is a probability to observe a binding site with a score  $s \geq S^*$  in a random sequence of length  $L$ , and in their turn can be calculated using the extreme value distribution as:

$$P(s \geq S^* | L) = 1 - (P(s < S^*))^{L-L_p}$$

where  $L_p$  is a length of the profile.  $P(s < S^*)$  is a probability to observe score  $s < S^*$  in a random sequence of the same length as a length of the profile.

Finally, the quality of the group  $R_i$  can be calculated as:

$$Z_i = -\log(P(k \geq K_i | N_i, L_i, S^*))$$

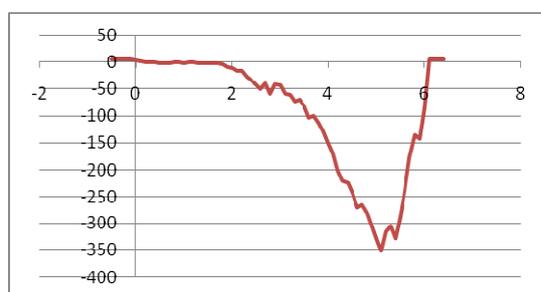
At the second step we use “Bernoulli Estimator” (BE) routine(1) to select a subset of orthologous groups of high quality which would deliver the lowest probability to observe such subset given that gene upstream regions are random sequences. BE assumes that input values are a mixture from two distributions: the background distribution describing the noise and the signal one, and automatically defines the optimal threshold to distinguish the signal from the noise. To do this BE requires the background distribution as an additional input. As  $P(k \geq K_i | N_i, L_i, S^*)$  is a cumulative distribution function,  $Z$  is distributed as

$$P(Z \geq Z_i | S^*) = -\exp(Z_i)$$

Thus, for an arbitrary selected threshold  $S^*$ , the application of BE to orthologous group qualities provides the most probable set of orthologous groups of genes under regulation, as well as the probability to observe such set given random sequences of upstream regions (BE probability). Iterating through all potential thresholds  $S^*$ , the optimal threshold delivering the minimum to BE probability, can be obtained.

## 2. Testing

The approach was tested on 7 *Shewanella* genomes using position-specific weight matrix of SOS response regulator LexA.



**Fig. 1. The dependence of BE probability (log scale) on the TFBS score threshold.**

The clear deep minimum of the probability (fig 1) corresponds to the score threshold value 5.4, and selects 7 orthologous groups as potential members of LexA regulon. The manual analysis of LexA regulon in *Shewanella* genomes yields 15 orthologous groups being the true members of the regulon. The comparison of the seven orthologous groups with results of manual analysis shows that all of them are true positives.

## 3. Iterative approach

All the regulon members can be subdivided into several groups according to their binding strength and evolutionary conservation. The selected seven orthologous groups are forming the core of the regulon (the strongest binding type and presented in all the genomes under consideration). We applied our approach several times. Every time we excluded the orthologous groups selected on previous iteration. After 4 iterations all the 15 true regulon members were found without any false positives.

## 4. References

[1] O.V. Kalinina, A.A. Mironov, M.S. Gelfand, A.B. Rakhmaninova, "Automated selection of positions

determining functional specificity of proteins by comparative analysis of orthologous groups in protein families", *Protein Sci.*, The Protein Society, USA, February 2004, Vol. 13, pp. 443–456.

## Автоматический перенос аннотации между геномами близкородственных организмов.

Дмитрий Малько  
ГосНИИгенетика  
genetikabox.yandex.ru

### Аннотация

*Для аннотации вновь сиквенированных геномов применяются различные методы сравнительной геномики и предсказаний *ab initio*. Рост количества уже аннотированных геномов позволяет переносить существующие аннотации геномов близкородственных организмов и использовать их в качестве отправной точки для дальнейших, более детальных предсказаний структурных элементов новой геномной последовательности. Разработан программный комплекс, выполняющий перенос аннотации геномной последовательности одного организма на геномную последовательность другого близкородственного организма, имеющего сходство по нуклеотидной последовательности с первым не менее чем 50%. Перенос аннотации учитывает возможные внутригеномные перестройки и позволяет выделять коллинеарные области.*

Развитие и удешевление технологии сиквенирования непрерывно увеличивает объем геномных данных. Так, размер базы данных GeneBank NCBI неуклонно растет с 1982 года, удваиваясь каждые 18 месяцев. Один из ее последних релизов насчитывает уже 106,073,709 сиквенов [1]. Появление большого количества новых полногеномных последовательностей с одной стороны вызывает необходимость их аннотации, с другой – позволяет более эффективно использовать информацию, представленную в уже аннотированных геномах.

Процесс аннотации геномных последовательностей состоит из двух основных этапов – выявления и локализации структурных элементов и определения их биологической функции. Для этих целей используются методы как сравнительной геномики, так и поиск *ab initio* значимых участков геномной последовательности.

В настоящее время существуют достаточно эффективные автоматические и

полуавтоматические системы аннотации [2,3,4], позволяющие получить предварительную разметку структурных элементов на геномной последовательности и даже карту метаболических путей. Идеология работы таких систем основана на предсказании значимых участков сиквенса на основе данных из многих источников и дальнейшем разрешении противоречий, вызванных использованием различных биоинформатических методов.

Однако, в случаях, когда для нового генома существует хорошо аннотированный геном близкородственного организма, кажется целесообразным использовать на предварительной стадии аннотации прямое картирование этого генома на новый геном с переносом аннотации между участками с высокой степенью гомологии. Такое картирование может учитывать как возможные внутригеномные перестройки, так и синтению структурных элементов. Одним из инструментов, позволяющих выполнить такое картирование, может являться программа множественного выравнивания MAUVE [5].

Для реализации этой идеи был разработан программный комплекс автоматической аннотации геномов прокариотических организмов, объединяющий в себе программы GLIMMER [6], BLAST [7] и MAUVE [5]. Процесс аннотации начинается с поиска ближайшего близкородственного организма на основе данных, полученных при трансляции наиболее длинных открытых рамок считывания аннотируемого генома. После этого, программой MAUVE строится полногеномное выравнивание двух геномных последовательностей – аннотируемой и аннотированной. Выделяются участки с высокой степенью гомологии, и внутри них аннотация переносится с одного генома на другой. Для участков аннотируемого генома с низкой степенью гомологии и участков, не покрытых перенесенной аннотацией, проводится стандартная процедура предсказания структурных элементов с помощью программ GLIMMER и BLAST.

Таким образом, перенос информации о разметки геномов близкородственных организмов на предварительной стадии процесса аннотации нового генома позволяет сократить время и увеличить точность предсказаний.

## Литература

[1] The GenBank release notes.  
<ftp://ftp.ncbi.nih.gov/genbank/gbrel.txt>

[2] Aziz RK, Bartels D, Best AA, DeJongh M et al.  
“The RAST Server: rapid annotations using subsystems technology.”  
*BMC Genomics*. 2008 Feb 8;9:75.

[3] Vasily T. Tcherepanov, Angelika Ehlers, Chris Upton  
“Genome Annotation Transfer Utility (GATU): rapid annotation of viral genomes using a closely related reference genome.”

*BMC Genomics*. 2006 Jun 13;7:150.

[4] Maltsev N, Glass E, Sulakhe D, Rodriguez A et al.  
“PUMA2 – grid-based high-throughput analysis of genomes and metabolic pathways.”  
*Nucleic Acids Res*. 2006 Jan 1;34(Database issue):D369-72.

[5] Aaron C.E. Darling, Bob Mau, Frederick R. Blatter, and Nicole T. Perna.  
“Mauve: multiple alignment of conserved genomic sequence with rearrangements.”  
*Genome Research*. 2004, 14(7):1394-1403.

[6] Delcher AL, Bratke KA, Powers EC, Salzberg SL  
“Identifying bacterial genes and endosymbiont DNA with Glimmer.”  
*Bioinformatics*. 2007 Mar 15;23(6):673-9.

[7] Altschul SF, Gish W, Miller W, Myers EW, Lipman DJ  
“Basic local alignment search tool”  
*J Mol Biol*. 1990, 215 (3): 403–410.

## Моделирование конкуренции РНК-полимераз: влияние нокаута сигма-субъединицы и температуры на экспрессию генов

О.А. Зверков, А.В. Селиверстов, Л.И. Рубанов, В.А. Любецкий  
ИППИ РАН  
lyubetsk@iitp.ru

### Аннотация

Разработаны алгоритм и программа для многопроцессорной вычислительной системы, моделирующие конкуренцию РНК-полимераз, транскрибирующих гены на разных цепях ДНК. Показано, что модель воспроизводит два основных экспериментально установленных феномена у растений: изменение экспрессии генов после нокаута определенной сигма-субъединицы холофермента РНК-полимеразы пластидного кодирования и аналогично – при изменении температуры клетки. Например, у ячменя *Hordeum vulgare* locus, включающий ген *psbA*, другие гены и ген *rpl23* с экзонем гена *rpl2*, содержит опероны на комплементарных цепях ДНК, и на них происходит конкуренция РНК-полимераз. При повышении температуры в изолированных хлоропластах наблюдается почти двукратное уменьшение числа транскриптов *psbA* и более чем двукратное увеличение числа транскриптов *rpl23-rpl2*, как в эксперименте, так и в нашей модели.

### 1. Введение

Пластиды – полуавтономные органеллы растений, которые обладают собственной транскрипционной системой. В пластидах растений и водорослей транскрипцию осуществляют РНК-полимеразы разных типов: одна-две фагового типа (NEP) и одна эубактериального типа (PEP): NEP – моносубъединичные полимеразы ядерного кодирования – связываются с NEP-промоторами, а PEP – многосубъединичные РНК-полимеразы пластидного кодирования – связываются с PEP-промоторами, причем инициация транскрипции требует участия одной из нескольких сигма-субъединиц. Каждой из сигма-субъединиц соответствуют в той или иной степени предпочитаемые PEP-промоторы и, тем самым, регулируется активность инициации транскрипции, осуществляемой PEP. Последовательности ДНК, кодирующие сигма-субъединицы у растений, описаны недавно, и, например, у *Arabidopsis thaliana* их определено шесть: Sig1-Sig6. Одни сигма-субъ-

единицы достаточно универсальные, например, Sig1-2, а другие – специфичные, например, Sig4-5 соответственно для генов *ndhF* и *psbD* [1]. Для определения специфичности Sig3 и Sig4 к промоторам проведены следующие эксперименты. Дикый тип *Arabidopsis thaliana* сравнивался с мутантом, в котором выполнен нокаут по Sig3 [2]. Для каждого гена подсчитаны усредненные частные sig3/WT уровня транскрипции мутантного типа к дикому типу и стандартные отклонения этих отношений. В мутантных растениях значительно изменяется содержание мРНК многих генов. Аналогично рассматривались нокауты по Sig4 [3] и влияние на уровни транскрипции изменения температуры клетки [4] и изменения уровня фитогормонов [5].

Исследование ответа на тепловой шок показало значительное различие в поведении хлоропластов в составе эукариотических клеток и в изолированном состоянии. Таким образом, изменение температуры запускает как внутренний механизм регуляции транскрипции (сразу после изменения температуры), так и внешний, связанный с поступлением в хлоропласты из цитоплазмы белков, кодируемых в ядре. Для моделирования поведения изолированных хлоропластов мы, в частности, используем данные о зависимости скорости элонгации РНК-полимеразы от температуры у кишечной палочки [6-7].

Консенсусы для NEP-промоторов разных типов известны (и в целом более изучены, чем PEP-промоторы для минорных сигма-субъединиц), но они, как и PEP-промоторы, определялись нами вместе с регуляциями соответствующих генов. Использовались данные о зависимости (от нуклеотидных замен) уровня связывания с промотором бактериального типа РНК-полимераз с субъединицами Sig1-3 [8]. Известны данные по Sig5-зависимому промотору перед геном *psbD* [9], по зависимости (от нуклеотидных замен) уровня связывания с промотором фагового типа RpoTr РНК-полимераз [10], по PEP- и NEP-зависимым промоторам пластид [11-13].

У зеленых водорослей из таксономической группы Chlorophyta положение генов на хромо-

сое быстро меняется. Это позволяет предполагать, что транскрипционная регуляция и конкуренция РНК-полимераз не играют важной роли для хлоропластов этих видов, а регуляция экспрессии идет в основном на уровне трансляции посредством кодируемых в ядре белков. В частности, это справедливо для хорошо изученной водоросли *Chlamydomonas reinhardtii* [14-15]. Например, у этой водоросли для *psbA* экспериментально показана именно такая регуляция [16]. С другой стороны, для водорослей и растений группы Streptophyta многие гены сохраняют позиционную связь на хромосоме, причем часто такие гены располагаются на комплементарных цепях ДНК, т.е. не образуют оперон. Это делает актуальным исследование роли конкуренции РНК-полимераз именно у Streptophyta. Некоторые гены хлоропластов у Streptophyta регулируются на уровне трансляции, что делает актуальным поиск и моделирование одновременно нескольких разных типов регуляции и определение вклада каждой из них.

## 2. Методы

В процессе транскрипции локуса ДНК могут одновременно участвовать много РНК-полимераз, которые связываются со своими промоторами и затем двигаются вдоль своей цели, вообще говоря, навстречу друг другу. При их столкновении на последовательности некоторого гена его транскрипция, вообще говоря, прерывается. Для каждой полимеразы этот процесс протекает асинхронно по отношению к другим и представляет собой композицию случайного (в первом приближении пуассоновского) и детерминированного процессов. Такую систему взаимодействующих процессов трудно исследовать аналитически (это – новый класс случайных процессов), поэтому мы построили (пока предварительную) модель монте-карловского типа.

Чтобы верно воспроизвести динамику реального процесса, важно было сохранить правильную очередность событий, из которых складывается конкуренция полимераз (т.е. очередность коллизий разного рода). Это не позволяет применить равномерное квантование времени из-за асинхронности процессов, описывающих поведение полимераз.

Вместо этого модель реализована как система с многими агентами, которые независимо действуют в пределах изучаемого локуса.

Часть таких агентов неподвижны – это гены, промоторы, сайты посадки белка-репрессора, терминаторы, внешние источники полимераз, служащие для компенсации искусственного выделения локуса из всей геномной последовательности. Их поведение выражается изменением внутрен-

них параметров (например, счетчика числа транскрипций гена) или возникновением/исчезновением самого этого агента (скажем, репрессора), либо порождением других агентов (например, для РЕР-промотора это появление на цепи ДНК нового холофермента в результате успешного связывания). Другие агенты, в дополнение к перечисленному, еще и меняют свое положение на ДНК – это холоферменты и полимеразы зубактериального (кор-ферменты) и фагового типов. Моделируя поведение каждого агента, начиная с момента запуска модели, мы определяем момент времени наступления следующего события с этим агентом. Например, таким событием может быть попытка связывания холофермента с промотором, сдвиг полимеразы на следующий нуклеотид, появление новой полимеразы, исчезновение полимеразы в результате коллизии или выхода за пределы локуса и т.д. Моменты наступления всех событий в модели организованы в единую очередь, которая обслуживается в хронологическом порядке.

Таким образом, в модели реализована схема неравномерного дискретного времени, отсчеты которого задаются возникающими событиями. В этом отношении модель построена по типу многозадачной операционной системы, управляемой событиями, а не системы квантования времени.

Благодаря отказу от равномерной временной сетки, удалось достичь высокой скорости моделирования (в среднем на 1-2 порядка быстрее физического процесса в клетке). Это важно для получения сопоставимых данных, поскольку биологические эксперименты длятся часами или сутками на культуре из многих сотен тысяч клеток, так что величины экспрессии генов усредняются естественным образом, а на модели приходится усреднять результаты по многочисленным траекториям моделирования, что зачастую заставляет применять высокопроизводительные кластеры.

Результатом каждой траектории моделирования являются значения числа транскрипций каждого гена из данного локуса; тем самым после усреднения и учета физического времени моделирования мы получаем оценку частоты транскрипции каждого гена. После варьирования неизвестных параметров (интенсивностей связывания промоторов и т.п.) в исследуемой области выбираются пары точек – кандидатов на нокаутированный и дикий тип, следующим образом.

Пусть локус образован генами  $g_1, \dots, g_n$ . Обозначим  $R_M(g_i)$  полученное в модели отношение частоты транскрипции гена  $g_i$  при нокауте к соответствующей частоте в диком типе. То же отношение, известное из лабораторного эксперимента (точнее, его среднее значение), обозначим

$R_E(g_i)$ , а наблюдавшийся в эксперименте разброс значений –  $R_D(g_i)$ . Пусть  $D(g_i) = |R_M(g_i) - R_E(g_i)|$ ,  $R_N(g_i) = D(g_i) / R_D(g_i)$ . Определим меру качества  $Q$  данного набора констант связывания как максимум  $Q = \max_{i=1, \dots, n} [R_N(g_i)]$ . Лучшим для данного локуса набором констант связывания считался набор с наименьшим значением  $Q$ .

### 3. Результаты

На основе прототипа компьютерной модели нами рассмотрены несколько локусов, в которых имеет место конкуренция РНК-полимераз. Из них ниже приведены результаты для трех локусов и для них получено хорошее согласие с экспериментами по нокаутам сигма-субъединиц и по изменению температуры клетки. Расчеты проводились на суперкомпьютере МВС-100К Межведомственного Суперкомпьютерного Центра РАН.

Первый локус (рис. 1а): **P-psbB-psbT-(T1-psbN-P\*)-psbH-petB-petD-(T2-rpoA-rps11-P^-rpl36-trnI-N)**, где P, P<sup>^</sup>, P\* – РЕР-промоторы, N – NЕР-промотор, в скобках пишутся объекты на комплементарной цепи. T1, T2 – возможные терминаторы, влияющие на процесс транскрипции. Здесь после нокаута Sig3 происходят сложные изменения интенсивностей транскрипции генов оперонов, которые были экспериментально определены у *Arabidopsis thaliana* [2]. Они хорошо воспроизводятся в нашей предварительной модели.

Второй локус (рис. 1б): **N1-N2-P-ycf1-(ndhF-P\*)-rpl32**, где некоторые РЕР- и NЕР-промоторы известны, а другие были определены нами. Здесь после нокаута по Sig4 подсчитывалось [2] отношение sig4/WT, которое также хорошо воспроизводится в нашей предварительной модели.

Третий локус (рис. 1в): *Hordeum vulgare* содержит две одинаковые копии локуса: **trnI-rpl23-rpl2-(trnH)-rps19**. В работе [4] экспериментально определено, как меняется суммарная интенсивность транскрипции этих генов и связанного с ними гена *psbA* при изменении температуры клетки.

Здесь также некоторые промоторы были определены нами, другие пока не учитывались, это предварительное исследование дало хорошее согласие с данными из [4].

Итак, получены следующие результаты. Обозначение промотора ниже используется и для указания константы связывания с ним.

**По 1-му локусу** в модели получен результат:  $P=0.35+0.45$ ,  $P^*=0.15+0.35$ ,  $P^{\wedge}=0.1+0$ ,  $N=0.35$ ,  $T1=0.2$ ,  $T2=0.25$  с качеством  $Q=1.65$ . Здесь и далее первые слагаемые указывают значения константы связывания холофермента или полимеразы фагового типа со своим промотором в случае нокаута, а вторые слагаемые – добавки к ним для случая дикого типа. В таблице 1 приведено сравнение изменения при нокауте частот транскрипции генов в эксперименте и в модели.

**По 2-му локусу** в модели получен результат:  $N2=0.26$ ,  $P=0.05+0.15$ ,  $P^*=0.35+0.20$  с качеством  $Q=1.32$ . В таблице 2 приведено сравнение изменения при нокауте частот транскрипции генов в эксперименте и в модели.

**Для 3-го локуса** место мутанта в эксперименте и модели занимает клетка в условиях температурного шока. Один из вариантов полученного в модели результата:  $trnI-56=1.4$ ,  $trnH-36=0.7$ ,  $psbA-79=0.3$ ,  $R1=20$ ,  $R2=70$ , где R1, R2 – скорости элонгации РНК-полимеразы в условиях низких и высоких температур соответственно. В таблице 3 приведено сравнение изменения при увеличении температуры частот транскрипции генов в эксперименте и в модели.

Статистически расхождения везде укладываются в известное правило «трех сигма».

### 4. Обсуждение

Хорошо известно, что при тепловом шоке изолированные хлоропласты ведут себя не так, как в составе клетки. Моделирование конкуренции РНК-полимераз позволяет объяснить быстрые изменения уровней транскрипции при тепловом шоке в изолированных хлоропластах, которые не подвергаются воздействию белков, кодируемых в

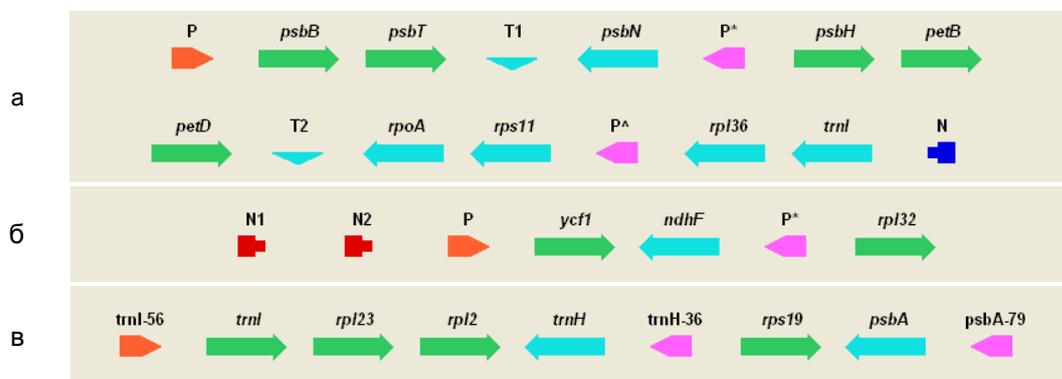


Рисунок 1. Схематическое изображение промоторов и генов трех локусов.

**Таблица 1. Сравнение изменения частот транскрипции генов в эксперименте и в модели по локусу 1.**

ген	эксперимент	модель
<i>psbB</i>	1.02 ± 0.36	0.60
<i>psbT</i>	0.98 ± 0.25	0.57
<i>psbN</i>	0.49 ± 0.46	1.12
<i>psbH</i>	1.31 ± 0.05	1.26
<i>pefB</i>	0.91 ± 0.15	1.02
<i>pefD</i>	0.92 ± 0.09	0.88
<i>rpoA</i>	0.94 ± 0.14	1.00
<i>rps11</i>	0.92 ± 0.33	1.00
<i>rp136</i>	0.88 ± 0.11	1.00
<i>trnI</i>	нет данных	1.00

**Таблица 2. Сравнение изменения частот транскрипции генов в эксперименте и в модели по локусу 2.**

ген	эксперимент	модель
<i>psbB</i>	1.02 ± 0.36	0.57
<i>psbT</i>	0.98 ± 0.25	0.64
<i>Rpl32</i>	1.52 ± 0.06	1.48

**Таблица 3. Сравнение изменения частот транскрипции генов в эксперименте и в модели по локусу 3.**

ген	эксперимент	модель
<i>rp123</i>	2.42 ± 0.27	2.29
<i>rp12</i>	2.42 ± 0.27	2.28
<i>psbA</i>	0.54 ± 0.01	0.55

ядре. Кроме того, поиск оптимальных параметров модели позволяет уточнить некоторые трудно-измеримые в прямых экспериментах параметры РНК-полимеразы, например, интенсивность связывания холофермента с промотором в зависимости от его нуклеотидного состава и типа сигма-субъединицы.

## 5. Список литературы

- [1] Е.А. Лысенко "Plant Sigma Factors and Their Role in Plastid Transcription" *Plant Cell Reports*, 2007, 26, 845-859.
- [2] J.-J. Favory, M. Kobayashi, K. Tanaka, G. Peltier, M. Kreis, J.-G. Valay, S. Lerbs-Mache "Specific function of a plastid sigma factor for *ndhF* gene transcription" *Nucleic Acids Research*, 2005, 33 (18), 5991-5999.
- [3] W. Zghidi, L. Merendino, A. Cottet, R. Mache, S. Lerbs-Mache "Nucleus-encoded plastid sigma factor SIG3 transcribes specifically the *psbN* gene in plastids" *Nucleic Acids Research*, 2007, 35(2), 455-464.
- [4] Я.О. Зубо, Е.А. Лысенко, А.Ю. Алейникова, В.В. Кузнецов, Н.Л. Пшибыгто «Изменение листовых

параметров как показатель смены функциональных типов степных растений вдоль градиента аридности» *Физиология растений*, 2008, 55(3), 323-331.

[5] Ya.O. Zubo, M.V. Yamburenko, S.Yu. Selivankina, F.M. Shakirova, A.M. Avalbaev, N.V. Kudryakova, N.K. Zubkova, K. Liere, O.N. Kulaeva, V.V. Kusnetsov, Th. Börner "Cytokinin stimulates chloroplast transcription in detached barley leaves" *Plant Physiology*, 2008.

[6] E.A. Abbondanzieri, J.W. Shaevitz, S.M. Block "Picocalorimetry of Transcription by RNA Polymerase" *Biophysical Journal: Biophysical Letters*, 2005, L61-L63.

[7] J. Ryals, R. Little, H. Bremer "Temperature dependence of RNA synthesis parameters in *Escherichia coli*." *Journal of Bacteriology*, 1982, 151(2), 879-887.

[8] A. Homann, G. Link "DNA-binding and transcription characteristics of three cloned sigma factors from mustard (*Sinapis alba* L.) suggest overlapping and distinct roles in plastid gene expression" *European Journal of Biochemistry* 2003, 270(6), 1288-1300.

[9] P.H. Hoffer, D.A. Christopher "Structure and Blue-Light-Responsive Transcription of a Chloroplast *psbD* Promoter from *Arabidopsis thaliana*" *Plant Physiol.* 1997. 115, 213-222.

[10] K. Liere, P. Maliga "In vitro characterization of the tobacco *rpoB* promoter reveals a core sequence motif conserved between phage-type plastid and plant mitochondrial promoters" *The EMBO Journal*, 1999, 18(1), 249-257.

[11] M. Swiatecka-Hagenbruch, K. Liere, Th. Börner "High diversity of plastidial promoters in *Arabidopsis thaliana*" *Molecular Genetics and Genomics*, 2007, 277, 725-734.

[12] M. Swiatecka-Hagenbruch, C. Emanuel, B. Hedtke, K. Liere, Th. Börner "Impaired function of the phage-type RNA polymerase RpoTp in transcription of chloroplast genes is compensated by a second phage-type RNA polymerase" *Nucleic Acids Research*, 2008, 36(3), 785-792.

[13] P. Westhoff, R.G. Herrmann "Complex RNA maturation in chloroplasts" *European Journal of Biochemistry*, 1988, 171, 551-564.

[14] W. Zerges "Translation in chloroplasts" *Biochimie*, 2000, 82(6-7), 583-601.

[15] E.J. Stauber, M. Hippler "Chlamydomonas reinhardtii proteomics" *Plant physiology and biochemistry : PPB / Société française de physiologie végétale* 2004, 42(12), 989-1001.

[16] C.R. Hauser, N.W. Gillham, J.E. Boynton "Translational regulation of chloroplast genes. Proteins binding to the 5'-untranslated regions of chloroplast mRNAs in *Chlamydomonas reinhardtii*" *The Journal of biological chemistry*, 1996, 271(3), 1486-97.

## Реконструкция эволюции белковых семейств

К.Ю. Горбунов, Е.В. Любецкая

ИППИ РАН

lyubetsk@iitp.ru

### Аннотация

*Проведен анализ эволюции ряда белковых семейств на основе модели и алгоритма, предложенного в [1]. Алгоритм позволяет построить сценарий эволюции семейства генов, описанного данным деревом генов, относительно эволюции набора видов, описанного данным деревом видов. В частности, получен результат об эволюции NAD-зависимой ДНК-лигазы (COG0272), эволюция характеризуется: 5 дупликациями, 23 потерями и 2 горизонтальными переносами с сохранением. Эти события привязаны к определенным вершинам в деревьях генов и видов. В частности, перенос гена *ycf* из *E. coli* с источником в геноме спирохет совпадает с предсказанием в [2].*

### 1. Введение

Изучение совместной эволюции генов (белков) и соответствующих видов (первые эволюционируют «внутри» вторых) является фундаментальной проблемой эволюции. Центральная трудность (или одна из центральных) состоит в том, что эволюция гена описывается своим деревом, а эволюция вида своим, и отсутствует «единое время», в котором можно было бы рассмотреть события на том и другом деревьях. Традиционный способ преодоления этой трудности состоит в использовании так называемого отображения «альфа» дерева генов в дерево видов, введенного в [3] и широко используемого с того времени. Однако оно позволяет говорить об эволюционных событиях с генами внутри видов очень косвенным образом. Например, горизонтальный перенос гена на основе отображения «альфа» описывается в терминах окрестностей листьев в первом и втором деревьях [2], что не кажется естественным. Потеря гена не может быть показана на дереве генов, а число потерь вообще вычисляется очень косвенно на основании некоторой теоремы [4] через числа односторонних дупликаций и пропусков. Нами развивается другой подход: на основе «прямого

изображения» эволюции гена внутри дерева видов. В этой работе мы ставим целью показать, что наш подход согласуется с традиционным и в то же время дает больше информации об эволюционных событиях молекулярного уровня. Для этого мы рассмотрели эволюцию нескольких КОГов.

### 2. Методы

В работе [1] развита следующая модель эволюции гена (белкового семейства) внутри соответствующих видов. Рассматриваются корневые растущие вниз деревья генов  $G$  и видов  $S$ , к которым добавлены выходящие из корня вверх ребра. Эти ребра называются корневыми, а новая самая высокая вершина называется суперкорнем. Множество ребер в дереве видов  $S$  разбито на части, называемые временными слоями; при этом исходные ребра иногда разбиваются добавленными вершинами. Предполагается, что горизонтальный перенос гена может происходить с ребра  $a$  дерева  $S$  на несравнимое с ним ребро  $b$  этого дерева из того же временного слоя. Пусть каждый лист дерева генов  $G$  помечен именем некоторого гена, а каждый лист дерева  $S$  помечен именем некоторого вида и множеством имен генов, взятых из этого вида, это множество может быть и пустым. Деревья  $G$  и  $S$  бинарные, вспомогательное также бинарное дерево  $G'$ , которое мы сейчас опишем, имеет у некоторых из его листьев крестик, который означает потерю гена, приписанного этому листу. Оно называется внутренним деревом.

Дано семейство (ортологичных или гомологичных) генов, имена которых представлены в листьях дерева видов  $S$ . Типично это – множество генов, приписанных листьям некоторого дерева генов  $G$ . Представим себе ребра дерева  $S$  в виде полых труб и будем называть их трубами. Вершины дерева  $S$  будем называть началом или концом соответствующей трубы. Рассмотрим некоторое дерево  $G'$ , листьям которого взаимно однозначно приписаны имена генов из данного их семейства. Оно расположено внутри труб дерева  $S$  следующим образом. Дерево  $G'$  имеет суперкорень в корневой трубе и имеет ребра, идущие вниз

целиком внутри труб, его листья вместе с именами совпадают с соответствующими листьями дерева  $S$ . В трубе могут проходить несколько ребер, ребро должно разветвиться в развилке труб (что означает: ген удвоился в связи с видообразованием), но может разветвиться и внутри самой трубы (что означает дубликацию гена); листу этого дерева может быть приписан крестик (потеря гена). Все разветвления в дереве  $G'$ , которые не относятся к видообразованию (или к горизонтальным переносам, ниже), считаются дубликациями. Задача состоит в том, чтобы найти внутреннее дерево  $G'$  в данном дереве видов  $S$ , которое после удаления ребер, помеченных крестиками, было бы изоморфно  $G$ . Для описания горизонтальных переносов в бинарном внутреннем дереве  $G'$  разрешается провести ребро от одной его вершины  $a$ , лежащей внутри некоторой трубы, к другой его вершине  $b$ , лежащей уже в несравнимой трубе (из того же временного слоя) или в ее конце. Переносом гена (точнее, переносом гена с сохранением копии) называется перенос, при котором в трубе, содержащей вершину  $a$ , сохраняется копия гена из этой вершины, в то время как другая копия перенеслась по стрелке в несравнимую трубу. Иногда рассматривают событие переноса гена без сохранения его копии. Это – последовательность двух событий: переноса гена с сохранением копии с последующей потерей этой копии. Рассматриваются только те деревья  $G'$ , на которых достигается минимума функция (цена вложения), равная сумме с некоторыми положительными весами значений чисел дубликаций, потерь и горизонтальных переносов с сохранением исходного гена. В счете, результаты которого приведены ниже, веса принимают следующие значения: за каждую потерю полагаем цену 2, за каждую дубликацию – цену 3, за каждый перенос с сохранением – цену 11 (переносу без сохранения соответствует цена 13). Таким образом, авторы этой работы продолжили построение и анализ внутренних деревьев и соответственно эволюции гена внутри соответствующих видов. Из этих результатов ниже приводится случай COG0272 из базы данных GenBank, NCBI.

### 3. Результаты

В эволюции COG0272 (NAD-зависимая ДНК-лигаза) модель и алгоритм из [1] указали на следующие эволюционные события (перед скобками указан номер трубы, который по определению совпадает с номером ее конца, а в скобках перечислены вершины внутреннего дерева, соответствующие генам, которые в этой трубе дублировались или потерялись; число штрихов указы-

вает номер копии исходного гена, которая потерялась):

пять дубликаций: 0(0); 1(20,22,32); 5(35); 23 потери: 2(21',23'); 3(2'); 5(57'); 7(38'); 18(39'); 19(39''); 21(57''); 24(50'); 25(34'); 28(34'',56'); 35(2'',56''); 36(23'); 38(21''); 39(55'); 40(21'''); 41(21''',53'); 42(23'''); 56(20'); 57(17'); и два горизонтальных переноса с сохранением: гена 9 из трубы 32 в трубу 42 и гена 7 из трубы 33 в трубу 12. Этот последний перенос является переносом гена *yicF*. Дерево этого КОГа показано на рис. 1.

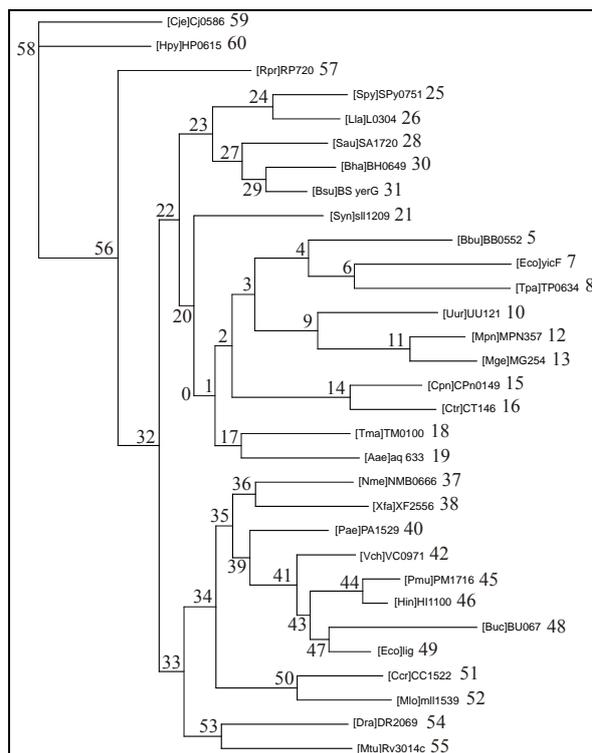
На рис. 2 приведено использованное нами дерево видов.

На рис. 3 показан фрагмент построенного нами вложения (т.е. внутреннего дерева  $G'$ ) дерева данного КОГа в данное дерево видов (для удобства на рисунке не показаны древние виды Tma и Aae, кроме того в этом КОГе нет представителей архей).

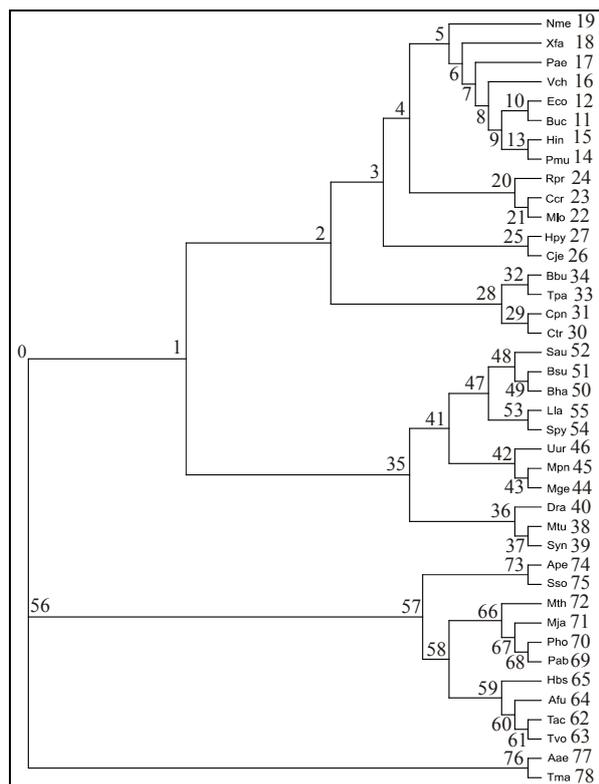
В данном случае такое дерево  $G'$  единственно.

### 4. Обсуждение

Алгоритм из [2] показал, что ген *yicF* из *E. coli* горизонтально перенесен из генома спирохет.



**Рисунок 1. Дерево КОГа COG0272. Числа нумеруют вершины дерева, корень помечен нулем; в квадратных скобках перед обозначением гена приведено сокращенное название вида, которому принадлежит ген.**

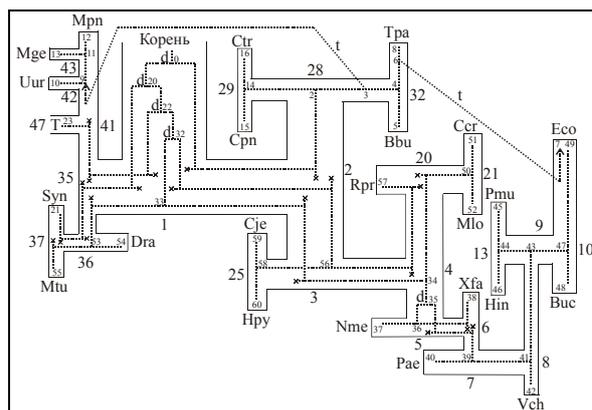


**Рисунок 2. Дерево видов. Числа нумеруют вершины дерева, корень помечен нулем; в листьях стоят сокращенные названия видов.**

Таким образом, этот и другие полученные нами результаты согласуются с известными предсказаниями горизонтальных переносов, а в ряде случаев дают новые предсказания. При этом возникает более полная картина эволюции, чем та, которая возникает на основе широко применяемого вложения «альфа» дерева генов в дерево видов, предложенного в [3].

## 5. Список литературы

[1] К.Ю. Горбунов, В.А. Любецкий, “Реконструкция эволюции генов вдоль дерева видов”, *Молекулярная биология*, 2009, т. 43, №5, сс. 1-14.



**Рисунок 3. Фрагмент вложения дерева КОГа COG0272 в дерево видов. Внутреннее дерево показано пунктирной линией внутри дерева видов. Его вершины, соответствующие дубликации гена, помечены буквой “d”, соответствующие видообразованию не помечены, а соответствующие потере помечены крестиком. Горизонтальные переносы помечены буквой “t”. Вложение поддерва дерева КОГа с корнем 23 в поддерево дерева видов с корнем 47 оказалось тождественным и не показано (корень этого поддерва отмечен буквой “Т”).**

[2] V.A. Lyubetsky, K.Yu. Gorbunov, L.Y. Rusin, V.V. V'yugin. “Algorithms to reconstruct evolutionary events at molecular level and infer species phylogeny”. In: *Bioinformatics of Genome Regulation and Structure II*, Springer Sci. & Business Media, Inc., 2006, pp. 189–204.

[3] R. Guigo, I. Muchnik, T.F. Smith, “Reconstruction of ancient molecular phylogeny”, *Mol. Phylogenet. Evol.*, 1996, vol. 6, pp. 189–213.

[4] O. Eulenstein, B. Mirkin, M. Vingron, “Duplication-based measures of difference between gene and species trees”, *J. Comput. Biol.*, 1998, vol. 5, pp. 135–148.

## Антифаговый иммунитет прокариот

Ирена И. Артамонова

*Институт общей генетики им. Н.И. Вавилова РАН,  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
irenart@gmail.com*

### Аннотация

*Данное исследование посвящено описанию CRISPR-систем в Океаническом метагеноме с точки зрения эволюции кассет.*

### 1. Введение

Наряду с известными ранее и хорошо изученными типами прокариотического иммунитета, основанными на эволюции клеточных рецепторов или системах рестрикции-модификации, важную роль играет недавно открытый тип антифагового иммунитета - CRISPR (Clustered Regularly Interspaced Palindromic Repeats) системы. Эти системы представлены в геномах прокариот отдельным локусом, который содержит гены белков специальных функциональных классов и CRISPR-кассеты. Такие кассеты состоят из точных прямых повторов длиной 21-48 нуклеотидов, разделенных близкими по длине спейсерами, уникальными для данного генома. Заметная доля спейсеров кассет сходна с известными последовательностями фагов, что и позволило предположить за этой системой функцию антифагового иммунитета (например, [1]). Эта функция была недавно доказана в прямом эксперименте [2]. Описанный иммунитет направлен против чужеродной ДНК, проникшей в клетку, и использует механизм, сходный, как полагают, с РНК-интерференцией эукариот.

Гипотетически, механизм функции CRISPR-системы заключается в следующем. Участок впервые проникшей в клетку чужеродной ДНК служит источником нового спейсера в CRISPR-кассете, который встраивается в существующую кассету, всегда с одной и той же стороны, в составе нового звена с дополнительной копией повтора. Вся кассета транскрибируется, а затем транскрипт нарезается на короткие молекулы РНК, каждая из которых содержит один спейсер. Такая молекула служит

для узнавания чужеродной ДНК, комплементарной ее спейсеру, с целью последующей деградации. Таким образом, фаги, заражавшие данный штамм бактерий или архей, оставляют отпечаток своей ДНК в геноме клетки-хозяина. Это явление служит удобным средством для детекции и описания взаимодействий прокариотических организмов и специфичных к ним вирусов, обитающих в одной экологической нише.

До настоящего момента исследования CRISPR систем ограничивались только хорошо изученными организмами, геномы которых полностью определены ([2], [3] и т.п.), или же описывали экологические системы, сильно обогащенные одним микроорганизмом [4]. В то же время, интерес представляет экологическая динамика взаимоотношений разнообразных сосуществующих прокариот и их вирусов. Поэтому мы решили расширить исследование CRISPR систем на метагеномы. Метагеномы представляют собой набор секвенированных фрагментов тотальной фракции ДНК из одной экологической пробы, включающей самые разнообразные микроорганизмы, сосуществующие в данной экологической нише. С точки зрения изучения прокариотического иммунитета у такого объекта исследования есть два значительных преимущества: во-первых, проба объединяет все организмы, существующие вместе, а значит, содержит одновременно и жертву, и агрессора заражения; и, во-вторых, основная часть организмов, составляющих метагеномную пробу, некультивируема, то есть никогда ранее не являлась объектом микробиологического исследования.

Первый, самый большой и самый известный, метагеном явился результатом двухлетней экспедиции под руководством К. Вентера на борту яхты *Sorcerer II* (от которой унаследовал свое название и сам метагеном) по сбору генетического материала сначала в Саргассовом море, а затем в более чем 50 географических точках Тихого и Атлантического

океанов с целью исследования генетического разнообразия морских микробных сообществ [5]. Океанический метагеном особенно интересен как потенциальный объект изучения и всестороннего описания механизмов функционирования CRISPR системы вследствие обогащения фаговыми последовательностями.

## 2. База данных

Целью данной работы был анализ распределения CRISPR-кассет в метагеноме Sorcerer II. К настоящему моменту разработаны и общедоступны три программы для поиска CRISPR-кассет в нуклеотидных последовательностях. Это CRT [6], PILER-CR [7] and CRISPRfinder [8]. Однако все они не приспособлены для анализа столь большого объема данных и каждая из них дает большое количество ложно положительных предсказаний. Поэтому мы разработали специальный метод надежного поиска CRISPR-систем в метагеномных коллекциях, основанный на комбинации результатов всех трех программ и последующей фильтрации результатов. Разработанный метод был применен к Океаническому метагеному [5]. В результате, было предсказано 192 кассеты, включающие 1908 спейсеров.

Все кассеты, предсказанные каждой из программ, были собраны в базу данных, названную MeCRISPR. Интерфейс базы данных позволяет пользователю выбрать по целому ряду параметров и анализировать подмножество предсказанных кассет, а также их фланкирующие последовательности. Кроме того, разработан поиск сходных последовательностей среди множества всех спейсеров, повторов и метагеномных контигов, содержащих CRISPR-кассеты. База данных доступна для пользователей по адресу <http://iitp.bioinf.fbb.msu.ru/vsorokin/crispr/>.

## 3. Эволюционный анализ кассет

Мы исходили из предположения, что CRISPR-кассеты, повторы которых гомологичны, имеют общее происхождение. Для выявления таких кассет мы построили кластеры на множестве всех повторов кассет. Затем для тех кассет, чьи повторы входили в состав одного и того кластера, мы также сравнивали спейсеры и фланкирующие последовательности. Уровни сходства между парами кассет их одного кластера сильно варьируют: от кассет, сходных только по последовательности повтора до кассет, идентичных с точностью до одного-двух спейсеров в одинаковом геномном окружении.

Для каждой пары кассет, имеющих хотя бы один общий спейсер, мы описали возможную цепь эволюционных событий, связывающую эти кассеты. Для этого мы построили словарь элементарных событий, который включал семь различных классов.

Все выявленные примеры сходства между CRISPR-кассетой и глобально отличным метагеномным контигом можно разделить на два типа – похожие кассеты, возможно, появившиеся в результате горизонтального переноса, и сходства типа “спейсер-протоспейсер”, по-видимому, являющиеся результатом встраивания сегмента одного контига в кассету другого в качестве спейсера. Случаи сходства обоих типов обогащены парами контигов, принадлежащих пробам из одних и тех же точек океана. Это свидетельствует о постоянном обмене генетическим материалом в результате CRISPR-опосредованных взаимодействий между бактериальными клетками, а также клетками бактерий и бактериофагов, сосуществующих в одной экологической нише.

## 4. Благодарности

Это совместная работа с В.А. Сорокиным и М.С. Гельфандом. Эта работа частично поддержана грантами по программам фундаментальных исследований Президиума РАН “Молекулярная и клеточная биология” и “Фундаментальные проблемы океанологии”.

## 5. Список литературы

- [1] Makarova, K.S., Grishin, N.V., Shabalina, S.A., et al. A putative RNA-interference-based immune system in prokaryotes: computational analysis of the predicted enzymatic machinery, functional analogies with eukaryotic RNAi, and hypothetical mechanisms of action. *Biol Direct.*, 2006, 1:7.
- [2] Barrangou, R., Fremaux, C., Deveau, H., et al. CRISPR provides acquired resistance against viruses in prokaryotes. *Science*, 2007, 315, 1709-12.
- [3] Semenova, E., Nagornykh, M., Pyatnitskiy, M., et al. Analysis of CRISPR system function in plant pathogen *Xanthomonas oryzae*. *FEMS Microbiol. Lett.*, 2009, 296, 110-6.
- [4] Heidelberg, J.F., Nelson, W.C., Schoenfeld, T., et al. Germ warfare in a microbial mat community: CRISPRs provide insights into the co-evolution of host and viral genomes. *PLoS One*, 2009, 4, e4169.
- [5] Rusch, D.B., Halpern, A.L., Sutton, G., et al. The Sorcerer II Global Ocean Sampling expedition: northwest Atlantic through eastern tropical Pacific. *PLoS Biol.*, 2007, 5:e77.

[6] Bland, C., Ramsey, T.L., Sabree F., et al. CRISPR recognition tool (CRT): a tool for automatic detection of clustered regularly interspaced palindromic repeats. *BMC Bioinformatics*, 2007, 8:209.

[7] Edgar, R.C. PILER-CR: fast and accurate identification of CRISPR repeats. *BMC Bioinformatics*, 2007, 8:18.

[8] Grissa, I., Vergnaud, G., and Pourcel, C. CRISPRFinder: a web tool to identify clustered regularly interspaced short palindromic repeats. *Nucleic Acids Res.*, 2007, 35:W52-7.

# Полиморфизм CRISPR-систем в природных популяциях *Escherichia Coli*

Казнадзей А.Д.  
ИППИ РАН  
vzmisha4@gmail.com

## Аннотация

Данное исследование посвящено изучению полиморфизма CRISPR-кассет у природных штаммов *E. coli*. Был выявлен оптимальный способ секвенирования CRISPR-локусов, после чего были установлены последовательности кассет и участков кассет для различных штаммов и проведен сравнительный анализ с учетом ранее известных данных, касающихся этого вида и близкородственных бактерий. Наблюдался значительный полиморфизм спейсерного состава, преобладающее количество уникальных, неизвестных ранее спейсеров, практически полное отсутствие родства спейсеров *E. coli* известным бактериофагам, а также ряд специфических особенностей строения CRISPR-кассет у *E. coli*. На основе полученных результатов была создана доступная в онлайн-режиме база данных с набором инструментов, позволяющих изучать и сравнивать структуры спейсерного состава различных штаммов.

## 1. Введение

CRISPR (Clustered Regularly Interspaced Short Palindromic Repeats) - это специфические области в геноме прокариот, содержащие характерно организованные кассеты коротких повторов. CRISPR-кассеты устроены следующим образом: серия коротких повторов длиной около 20-40 нуклеотидов, чаще всего представляющих собой несовершенные палиндромы, разделена так называемыми "спейсерами" - участками ДНК примерно такого же размера или чуть длиннее, последовательности которых, как правило, различны и неродственны. Длины спейсеров в одной и той же кассете близки. Число повторов в кассете может варьировать от 2 до 250. Последовательность повтора консервативна внутри каждого вида для каждого CRISPR-локуса. Исклчением является "терминальный", конечный повтор, который часто отличается от других повторов довольно существенно. Спейсеры обладают высокой вариабельностью как внутри каждой кассеты, так и у разных штаммов одного вида, не говоря уже о межвидовом разнообразии. Именно

последовательность спейсеров определяет специфичность защитных функций кассет.

Спейсерный состав характеризуется очень высокой изменчивостью, кассета способна приобретать новые спейсеры и за счет делеций избавляться от старых.

CRISPR-кассеты есть практически у всех известных архей и у большинства бактерий, как грамположительных, так и грамотрицательных. Эти структуры встречаются как в составе геномной ДНК, так и в составе плазмид. Одновременно в одном геноме может присутствовать несколько кассет.

CRISPR-кассеты в большинстве случаев расположены рядом с кластером так называемых cas-генов (CRISPR-associated genes), варьирующим по своему составу среди разных видов и даже штаммов конкретных видов. Cas-геновое окружение необходимо для функционирования защитного механизма CRISPR. Продукты cas-генов - cas-белки.

Защитный механизм работает следующим образом. При попадании в клетку чужеродного генома его участок используется как основа для создания нового спейсера (идентичного участку по нуклеотидной последовательности) в составе CRISPR. Далее, за счет этой идентичности, при взаимодействии продуктов процессинга транскрипта CRISPR и cas-белков инфекция блокируется, поскольку происходит "узнавание" транскриптом спейсера соответствующего участка на чужеродном (например, фаговом) геноме.

## 2. Методика

Оптимальной методикой для амплификации CRISPR-локусов различных штаммов *E. coli* является ПЦР с вырожденными праймерами, последовательность которых комплементарна участкам генов *iap* и *cas1*, расположенных по обеим сторонам кассеты. Секвенирование проводится с помощью первого праймера (со стороны гена *iap*). В случае слишком длинных кассет целесообразно проводить добавочное секвенирование в обратном направлении, комплементарного последовательности участка гена *cas2*, расположенного ближе к кассете, чем *cas1*. Если кассеты поднимаются не вполне

эффективно, в программу для амплификатора вводится более сложная схема циклов амплификации, включающая "тач-даун"-метод. CRISPR-локусы идентифицировались с помощью программы CRISPRFinder. CRISPR-последовательности известных штаммов были получены из баз данных GenBank и CRISPRDatabase. Спейсеры различных штаммов сравнивались между собой и с вирусными и прокариотическими геномами с помощью ряда программ, написанных в ходе исследования, позволяющих проводить как строгое, так и нестрогое сравнение и демонстрировать результат в графическом режиме.

Данные, касающиеся спейсерных составов известных на данный момент CRISPR *E. coli* систематизированы и доступны в онлайн-режиме на сайте <http://imagenome.net>. Были разработаны инструменты, позволяющие пополнять базу данных, сравнивать новые кассеты с уже имеющимися и структуру и полиморфизм всего массива известных CRISPR-кассет в целом.

### 3. Результаты

Спейсеры штаммов *E. coli* характеризуются большим разнообразием. В 21 исследованном штамме *E. coli* лошадей, содержащем в целом 167 спейсеров, было обнаружено семь вариантов спейсерных наборов. Эти наборы представляют собой комбинации из 37 различных спейсерных последовательностей, из которых 33 являются уникальными в исследованных изолятах (89%).

15 полученных спейсерных последовательностей (13 - от штаммов *E. coli* лошади, 2 - от человека) являются уникальными полностью, т.е. не встречались ранее ни в каких известных штаммах *E. coli*.

По результатам анализа схем строения CRISPR-кассет в работе выявлено несколько наиболее встречаемых спейсеров и спейсерных наборов, в том числе у штаммов, полученных от разных лошадей-хозяев. Их наличие указывает на возможное преимущество одних спейсеров перед другими.

Среди исследованных в данной работе и ранее известных штаммов *E. coli* наблюдается всего два варианта лидерной последовательности. Полиморфизм лидерных последовательностей может быть использован в изучении эволюции различных штаммов *E. coli*.

"Несовершенный" терминальный повтор и следующий за ним "универсальный" спейсер в CRISPR-кассете, по-видимому, играют важную роль в функционировании CRISPR, поскольку они обладают исключительной консервативностью, как в исследованных в данной работе, так и в ранее известных штаммах *E. coli* и близкородственных им. Консервативность положения "универсального" спейсера позволяет утверждать, что эффективная

интеграция новых спейсеров никогда не идет с терминального конца кассеты.

Случаи "инвертированных" спейсеров, располагающихся в разных ориентациях в составе CRISPR-кассет разных штаммов, позволяют говорить о возможных нестандартных вариантах рекомбинационных процессов, связанных с CRISPR, не влияющих, по-видимому, на функциональность спейсеров.

Часть спейсеров и даже участки спейсерных наборов у штаммов лошади, человека и мамонта идентичны. Вероятно, функциональность некоторых спейсеров не зависит от вида хозяина штамма. Совпадения исследованных спейсеров со спейсерами известных ранее штаммов *E. coli*, полученных из разных сред, подкрепляют эту гипотезу.

Только одна спейсерная последовательность из исследованных обнаруживается в составе чужеродного генома - бактериофага P7, и соответственно, может быть задействована в защите от него. Это согласуется с литературными данными; среди ранее известных спейсеров *E. coli* всего лишь около 1% соответствует чужеродным геномам - фагам и плазмидам. Значение и происхождение всех остальных спейсеров *E. coli* пока остается неясным. Такая картина совершенно не совпадает с характеристиками спейсерных наборов CRISPR таких бактерий, как *Streptococcus thermophilus* и др. Возможно, известно еще слишком мало фагов и плазмид *E. coli* или CRISPR-кассеты *E. coli* участвуют в каких-то иных, пока не исследованных процессах (второе предположение не объясняет, впрочем, происхождения спейсеров).

Разнообразие спейсерных наборов *E. coli* позволяет строить гипотезы относительно происходивших в них делеций и рекомбинационных процессов, затронувших CRISPR-локусы. Оно дает возможность судить об эволюции различных штаммов, о значимости разных спейсеров (или наборов спейсеров) в зависимости от частот их встречаемости и разнообразия экологических аспектов сред, из которых они были получены. Однако полиморфизм спейсеров среди изученных на данный момент штаммов *E. coli* столь значителен, что не дает пока возможности строить полноценные филогенетические деревья, так как число уникальных спейсеров значительно превосходит число остальных.

### 4. Благодарности

В заключение хотелось бы поблагодарить моих научных руководителей - К.В. Северинова и М.С.Гельфанда, а также К.С.Пугач, помогавшую мне в экспериментальной части работы.

## 5. Литература

1. Young, R.F. Molecular biology. Secret weapon. *Science* 321, 922-923(2008).
2. Bland, C. et al. CRISPR recognition tool (CRT): a tool for automatic detection of clustered regularly interspaced palindromic repeats. *BMC Bioinformatics* 8, 209(2007).
3. Edgar, R.C. PILER-CR: fast and accurate identification of CRISPR repeats. *BMC Bioinformatics* 8, 18(2007).
4. Grissa, I., Vergnaud, G. & Pourcel, C. CRISPRFinder: a web tool to identify clustered regularly interspaced short palindromic repeats. *Nucleic Acids Res* 35, W52-57(2007).
5. Kunin, V., Sorek, R. & Hugenholtz, P. Evolutionary conservation of sequence and secondary structures in CRISPR repeats. *Genome Biol* 8, R61(2007).
6. Haft, D.H. et al. A guild of 45 CRISPR-associated (Cas) protein families and multiple CRISPR/Cas subtypes exist in prokaryotic genomes. *PLoS Comput. Biol* 1, e60(2005).
7. Horvath, P. et al. Diversity, activity, and evolution of CRISPR loci in *Streptococcus thermophilus*. *J. Bacteriol* 190, 1401-1412(2008).
8. Godde, J.S. & Bickerton, A. The repetitive DNA elements called CRISPRs and their associated genes: evidence of horizontal transfer among prokaryotes. *J. Mol. Evol* 62, 718-729(2006).
9. Bolotin, A. et al. Clustered regularly interspaced short palindrome repeats (CRISPRs) have spacers of extrachromosomal origin. *Microbiology (Reading, Engl.)* 151, 2551-2561(2005).
10. Barrangou, R. et al. CRISPR provides acquired resistance against viruses in prokaryotes. *Science* 315, 1709-1712(2007).
11. Deveau, H. et al. Phage response to CRISPR-encoded resistance in *Streptococcus thermophilus*. *J. Bacteriol* 190, 1390-1400(2008).
12. Grissa, I., Vergnaud, G. & Pourcel, C. CRISPRcompar: a website to compare clustered regularly interspaced short palindromic repeats. *Nucleic Acids Res* 36, W145-148(2008).
13. Makarova, K.S. et al. A putative RNA-interference-based immune system in prokaryotes: computational analysis of the predicted enzymatic machinery, functional analogies with eukaryotic RNAi, and hypothetical mechanisms of action. *Biol. Direct* 1, 7(2006).
14. Brouns, S.J.J. et al. Small CRISPR RNAs guide antiviral defense in prokaryotes. *Science* 321, 960-964(2008).
15. Marraffini, L.A. & Sontheimer, E.J. CRISPR interference limits horizontal gene transfer in staphylococci by targeting DNA. *Science* 322, 1843-1845(2008).
16. Tyson, G.W. & Banfield, J.F. Rapidly evolving CRISPRs implicated in acquired resistance of microorganisms to viruses. *Environ. Microbiol* 10, 200-207(2008).
17. Sorek, R., Kunin, V. & Hugenholtz, P. CRISPR--a widespread system that provides acquired resistance against phages in bacteria and archaea. *Nat. Rev. Microbiol* 6, 181-186(2008).
18. Pourcel, C., Salvignol, G. & Vergnaud, G. CRISPR elements in *Yersinia pestis* acquire new repeats by preferential uptake of bacteriophage DNA, and provide additional tools for evolutionary studies. *Microbiology (Reading, Engl.)* 151, 653-663(2005).
19. Mrázek, J. et al. AIMIE: a web-based environment for detection and interpretation of significant sequence motifs in prokaryotic genomes. *Bioinformatics* 24, 1041-1048(2008).
20. Mojica, F.J.M. et al. Short motif sequences determine the targets of the prokaryotic CRISPR defence system. *Microbiology (Reading, Engl.)* 155, 733-740(2009).
21. Heidelberg, J.F. et al. Germ warfare in a microbial mat community: CRISPRs provide insights into the co-evolution of host and viral genomes. *PLoS ONE* 4, e4169(2009).
22. Vergnaud, G. et al. Analysis of the three *Yersinia pestis* CRISPR loci provides new tools for phylogenetic studies and possibly for the investigation of ancient DNA. *Adv. Exp. Med. Biol* 603, 327-338(2007).
23. Grissa, I., Vergnaud, G. & Pourcel, C. The CRISPRdb database and tools to display CRISPRs and to generate dictionaries of spacers and repeats. *BMC Bioinformatics* 8, 172(2007).
24. Mojica, F.J.M. et al. Intervening sequences of regularly spaced prokaryotic repeats derive from foreign genetic elements. *J. Mol. Evol* 60, 174-182(2005).

## Особенности транскрипции хромосомных перестроек в геноме человека

Храмеева Екатерина  
ИППИ им. А.А. Харкевича  
khrameeva@yandex.ru

Мазин Павел  
МГУ им. М.В. Ломоносова  
iaa.aka@gmail.com

### Аннотация

*По последним данным, в хромосомных перестройках принимают участие не менее 30% генома. К ним относят делеции, инверсии, дупликации и транслокации. Известно, что хромосомные перестройки часто носят патологический характер и могут приводить к гибели организма. Однако особенности транскрипции участков генома, задействованных в хромосомных перестройках, до сих пор не были изучены. В данной работе выяснено, что картина экспрессии участков генома, подверженных хромосомным перестройкам, значительно отличается от экспрессии среднестатистических участков генома: происходит резкое снижение экспрессии экзонов и повышение экспрессии интронов. Мы полагаем, что наблюдаемые изменения связаны с нарушением паттернов сплайсинга в результате хромосомных перестроек.*

### 1. Введение

Хромосомными перестройками называют различные изменения структуры хромосом. К ним относятся делеции (удаление участка хромосомы), инверсии (изменение порядка генов участка хромосомы на обратный), дупликации (повторение участка хромосомы), а также транслокации (перенос участка хромосомы на другую). Известно, что хромосомные перестройки часто носят патологический характер и могут приводить к гибели организма [1, 2, 3, 4].

Многие исследователи занимаются поиском хромосомных перестроек, сравнивая геномы неродственных индивидуумов. Все известные к настоящему времени хромосомные перестройки собраны в базе данных Database of Genomic Variants <http://projects.tcag.ca/variation/> [5]. Согласно этой базе данных, в геномных пере-

стройках участвует около 30% человеческого генома. И следует ожидать, что этот процент будет расти с открытием новых хромосомных перестроек.

Однако особенности транскрипции участков генома, задействованных в хромосомных перестройках, до сих пор не были изучены. В данной работе показано, что картина экспрессии участков генома, подверженных хромосомным перестройкам, значительно отличается от экспрессии среднестатистических участков генома. Мы предполагаем, что наблюдаемое смещение экспрессии в сторону интронов может быть связано с нарушением паттернов сплайсинга, вызванным хромосомными перестройками.

### 2. Материалы и методы

#### 2.1. Экспериментальная процедура

Тотальная РНК шести образцов мозга (3 возраста, 2 технических реплики) была расщеплена на участки длиной около 250 нуклеотидов и просеквенирована на Illumina/Solexa секвенаторе Ф. Хайтовичем и коллегами. В результате оказались расшифрованными концы каждого такого участка (по 36 нуклеотидов). Будем называть их в дальнейшем парами ридов. Всего было получено 32385206 парных ридов. Из них удалили риды, в которых более пяти нуклеотидов имели вес менее 25 или доля наиболее частого остатка составляла более 90%. Риды из пары удаляли независимо друг от друга. После фильтрации осталось 21645589 (66,7%) парных ридов и 4898097 одиночных.

#### 2.2. Картирование ридов

Пары ридов были картированы на геном человека (ncbi, build 36.2) и на все возможные экзон-экзон объединения программой анализа коротких олигонуклеотидных последовательностей SOAP [6]. Допускалось не более 2-

х ошибок, гэпы не допускались. Риды из пары картировались независимо. Для каждого рида рассматривались все вхождения с минимально возможным числом замен. В результате однозначно картировалось 10884421 парных ридов (50,3% от прошедших фильтрацию парных ридов). Еще 1686776 (7,8%) легло не однозначно, остальные либо не спарились (13,2%), либо у них один из концов (или оба) не имеют ни одного вхождения. Далее рассматривались только 10884421 парных ридов, картированных однозначно.

Среди этих пар нами были выбраны такие, которые удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий. (1) Риды из пары лежат на разных хромосомах. (2) Риды из пары лежат на одной цепи (по процедуре секвенирования должны на разных). (3) Риды из пары лежат концами в разные стороны (т.е. рид на прямой цепи лежит после рида на обратной, чего тоже не должно быть по процедуре секвенирования). (4) Риды лежат на расстоянии более 2,4 мегобаз (больше длины максимального гена).

Такие пары ридов должны указывать на хромосомные перестройки, реализующиеся в геномах исследуемых индивидуумов. Потенциальные хромосомные перестройки, поддерживаемые единичными ридами, не рассматривались, поскольку такие события могут быть связаны с ошибками экспериментальной процедуры или картирования.

### 2.3. Кластеризация

Чтобы оценить уровень покрытия ридами отдельных участков генома и связанный с этой величиной уровень экспрессии, пары ридов были кластеризованы. При этом кластером называется последовательность ридов на хромосоме, в которой каждый рид отстоит от соседнего на расстояние не более  $W$  нуклеотидов. Также требуется, чтобы в кластер входило не менее  $U$  уникальных ридов, а общее количество ридов в кластере (любых, не уникальных) было не менее  $N$ . Эти требования должны выполняться одновременно для обоих ридов из пары. В дальнейшем было использовано три набора параметров: ( $N=80$   $U=20$   $W=70$ ) - соответствует высокому покрытию и высокому уровню экспрессии, ( $N=15$   $U=5$   $W=70$ ) - среднему уровню и ( $N=3$   $U=3$   $W=70$ ) - низкому уровню.

Кластеры, образованные из пар, риды которых лежат на разных хромосомах, будем называть в дальнейшем транс-кластерами. Если риды из пары лежат на одной цепи и/или концами в разные стороны, то составленный из таких пар кластер будем называть кластером-

инверсией. Все остальные кластеры назовем цис-кластерами.

### 3. Результаты и обсуждение

Необходимо заметить, что результаты эксперимента Ф. Хайтовича и коллег являются количественными и позволяют оценить относительный уровень экспрессии того или иного участка генома, поскольку секвенированию подверглась тотальная РНК образца мозга. Относительный уровень экспрессии участка прямо пропорционален покрытию данного участка ридами.

Было изучено, как цис-кластеры, транс-кластеры и кластеры-инверсии располагаются в геноме относительно генов, экзонов, интронов, 5'UTR- и 3'UTR-областей. Для оценки коэффициента покрытия и связанного с ним уровня экспрессии была введена следующая мера покрытия  $C$ :

$$C = \frac{\eta_{is}}{\eta_{cl} * \eta_{el}}, \quad (1)$$

где  $\eta_{cl}$  - доля генома, покрытая кластерами;  $\eta_{el}$  - доля генома, покрытая генами, экзонами, интронами, 5'UTR или 3'UTR;  $\eta_{is}$  - доля генома, покрытая их пересечениями.

Из результатов, представленных в Таблице 1, видно, что в случае цис-кластеров (участки генома без хромосомных перестроек) экзоны транскрибируются гораздо лучше интронов. Такого результата и следовало ожидать. Кроме того, неожиданно хорошо транскрибируются 3'UTR. Причем относительное покрытие "сильными" кластерами для 3'UTR значительно выше, чем слабыми кластерами. Данное наблюдение также свидетельствует в пользу высокого уровня экспрессии 3'UTR-областей. Интроны же, наоборот, транскрибируются слабо, как и 5'UTR-области.

Картина экспрессии хромосомных перестроек (транс-кластеры) совершенно другая. Покрытие экзонов падает в несколько раз, а покрытие интронов, наоборот, возрастает на фоне общего уменьшения покрытия генов. Транскрипция 5'UTR-областей остается примерно на том же уровне, а 3'UTR-области не транскрибируются совсем.

Мы полагаем, что такой эффект связан с нарушением паттерна сплайсинга в результате хромосомных перестроек (Рисунок 1). Если при делеции или инсерции участка сайты сплайсинга оказываются затронуты (вырезаются или вставляются), интроны могут не удаляться сплайсосомаой и входить в состав зрелой мРНК. Поскольку интроны человека срав-

**Таблица 1. Покрытие генов, экзонов, интронов, 5'UTR- и 3'UTR-областей цис-кластерами, транс-кластерами и кластерами-инверсиями.**

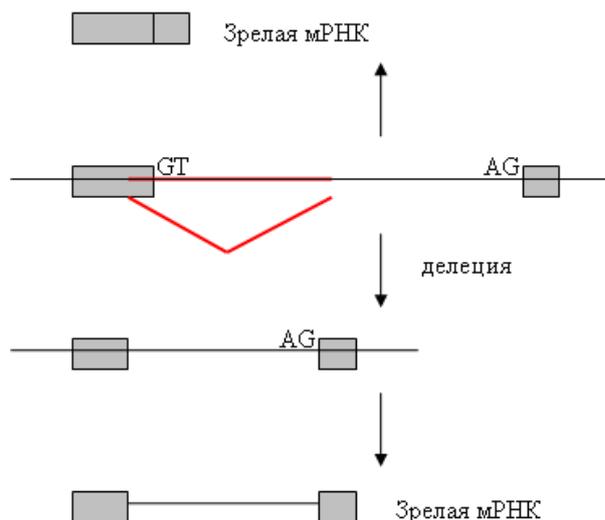
	N=80 U=20 W=70	N=15 U=5 W=70	N=3 U=3 W=70
Цис-кластеры			
Экзоны	16,49	21,29	15,31
Интроны	0,21	0,32	1,22
5'UTR	0,30	0,62	1,33
3'UTR	36,56	28,83	11,57
Гены	2,03	2,02	2,03
Транс-кластеры			
Экзоны	0,59	4,76	8,83
Интроны	0,61	0,55	0,53
5'UTR	0,31	0,38	0,34
3'UTR	0,00	0,00	0,20
Гены	1,00	1,07	1,20
Кластеры-инверсии			
Экзоны	10,71	30,35	46,34
Интроны	0,38	0,20	0,12
5'UTR	0,17	0,56	0,90
3'UTR	0,55	4,31	12,91
Гены	1,69	1,94	2,24

нительно длинные, такие события должны вносить значительный вклад в общую картину экспрессии.

Характер экспрессии участков генома, покрытых кластерами-инверсиями, представляет собой некий переходный вариант между цис-кластерами и транс-кластерами. Это означает, что некоторые кластеры-инверсии действительно попадают в участки хромосомных перестроек. Остальные же являются либо ошибками экспериментальной процедуры, либо ошибками картирования.

Чтобы проверить, не реализуются ли в геномах изучаемых индивидуумов ещё какие-либо хромосомные перестройки, мы выбрали цис-кластеры, пересекающиеся с хромосомными перестройками из базы данных Database of Genomic Variants, и изучили их транскрипцию (Таблица 2). Казалось бы, для них тоже должно наблюдаться хотя бы слабое смещение экспрессии в сторону транс-кластеров (это потенциальные хромосомные перестройки, и какие-то из них могут реализовываться у рассматриваемых индивидуумов).

Однако мы видим, что хромосомных перестроек из базы транскрибируются абсолютно так же, как обычные цис-кластеры. Это сред-



**Рис. 1. Пример хромосомной перестройки (делеция), которая приводит к удерживанию интрона в зрелой мРНК.**

нестатистические участки генома в плане экспрессии (по крайней мере, для выборки индивидуумов Ф. Хайтовича). Может быть, какие-то из этих хромосомных перестроек действительно реализуются у изучаемых индивидуумов, но их не удается заметить в общей массе транскриптов.

#### 4. Заключение

Экспрессия участков, в которых происходят хромосомные перестройки, значительно отличается от экспрессии среднестатистических участков генома. Наблюдается резкое снижение экспрессии экзонов и повышение экспрессии интронов. Мы полагаем, что наблюдае-

**Таблица 2. Покрытие генов, экзонов, интронов, 5'UTR- и 3'UTR-областей цис-кластерами, перекрывающимися с хромосомными перестройками из базы данных Database of Genomic Variants.**

	N=80 U=20 W=70	N=15 U=5 W=70	N=3 U=3 W=70
Экзоны	15,87	21,37	16,16
Интроны	0,21	0,31	1,20
5'UTR	0,35	0,56	1,36
3'UTR	34,85	29,32	11,89
Гены	2,00	2,05	2,05

мые изменения связаны с нарушением паттернов сплайсинга в результате хромосомных перестроек. Такой эффект наблюдается только для хромосомных перестроек, реализующихся у рассматриваемых индивидуумов. В местах других потенциальных хромосомных перестроек нарушений экспрессии не происходит. По всей видимости, данные хромосомные перестройки не реализуются в выборке рассматриваемых индивидуумов.

Авторы выражают благодарность Ф. Хайтовичу за предоставленные данные, а также М. Гельфанду, А. Миронову и Д. Первушину за обсуждение результатов и ценные замечания.

## 5. Литература

- [1] T. Aitman, "Copy number polymorphism in *fcgr3* predisposes to glomerulonephritis in rats and humans," *Nature*, vol. 439, p. 851–855, 2006.
- [2] E. Hollox, "Psoriasis is associated with increased b-defensin genomic copy number," *Nature Genet.*, vol. 40, p. 23–25, 2007.
- [3] E. Gonzalez, "The influence of *ccl3l1* gene-containing segmental duplications on hiv-1/aids susceptibility," *Science*, vol. 307, p. 1434–1440, 2005.
- [4] K. Fellermann, "Achromosome 8 gene-cluster polymorphism with low human b-defensin 2 gene copy number predisposes to crohn disease of the colon," *Am. J. Hum. Genet.*, vol. 79, p. 439–448, 2006.
- [5] A. Iafrate, L. Feuk, M. Rivera, M. Listewnik, P. Donahoe, Y. Qi, S. Scherer, and C. Lee, "Detection of large-scale variation in the human genome," *Nat Genet.*, vol. 36, pp. 949–951, 2004.
- [6] R. Li, Y. Li, K. Kristiansen, and J. Wang, "Soap: short oligonucleotide alignment program," *Bioinformatics*, vol. 24, p. 713–714, 2008.

# Evolution of signal peptide appearance/disappearance in bacterial genomes

Bykova N.A., Mironov A.A.

*Department of Bioengineering and Bioinformatics, Moscow State University, Moscow,*

*GSP-2, building 73, Leninskiye Gory, Moscow, 119992, Russia*

*nadelle4@mail.ru*

## Abstract

*Signal peptide is an 15-30 amino acid sequence in the N-terminus of protein that directs it to the way of export from cytoplasm. In previous works we have shown that the presence of signal peptide is not conserved in clusters of orthologous genes and that it is not only because of prediction programs mistakes (non-published data). In present work we studied evolution events of signal peptide appearance and disappearance in such clusters. We have found evidences of as ancient as recent events existence. Also we tried to characterize clusters and genomes overrepresented with this events. One of the important overcomes of this work is a list of recent signal peptide appearance.*

*We suggested that signal peptide appearance is anticipated by gene duplication, so we studied also clusters and genomes rich of paralogous pairs, in which one protein has signal peptide and another has not. The most active were some symbiotic and pathogenic bacteria and even there were slight differences between strains of the same species, for example pathogenic and non-pathogenic strains. That shows correlation between their adaptation requirements and high rates of signal peptides appearance. All the data including tree pictures and signal/non-signal paralogous is available at <http://www.bioinf.fbb.msu.ru/SignalWeb/>*

## 1. Introduction

It is well known that the synthesis of proteins by the ribosomal translation of messenger RNA takes place in the cytosol. For the proteins with a function in another compartment of the cell or in the extracellular environment to reach their destination, they have signal sequences. In present work we concentrate on the bacterial N-terminal signal peptides, that direct proteins on the way of export

from cytoplasm. Signal peptide is usually 15-30 amino acids length. It consist of following three domains: N-domain, H-domain and C-domain. H-domain(15-20 aa) is suggested to play key role in signal peptide function forming hydrophobic alpha-helix, that can interact with translocase components. On the C-terminal of C-domain there is signal peptidase proteolytic site, where signal peptide will be cleaved off after translocation through membrane.

## 2. Materials and Methods

1) Protein clusters were downloaded from NCBI Protein Clusters database [1]. We took into consideration only clusters that contain more than 8 proteins.

2) For signal peptide prediction we used SignalP3.0-NN [2] with the standart thresholds.

3) We have also performed correction of annotation errors in suspicious pairs of proteins (id %>70 and different signal peptide prediction): pair alignment and further searching signal peptides in 150 bp upstream relative to start of local alignment.

## 3. Results

From 37863 clusters we analysed, 25471 were predicted as completely non-signal and 2168 as completely signal, so 27% of such clusters has some potential appearance/disappearance events. For our purpose we took only clusters that contain at least 3 signal and 3 non-signal peptides. After the correction of gene starts, we analysed the distribution of predicted signal peptides on the evolutionary tree of such clusters using the Events Number value and E(economy) value. We found out that there are significant number of relatively ancient divergences (see [Table1](#)). For example deaminase cluster (PRK06846), where divergence happened on the level of gram-positive/gram-negative bacteria.

**Table1.Signal peptide appearance/disappearance events**

Events number	All clusters	Clusters with signal/non-signal paralogs
1	908	140
2	1303	241
3	969	187
>3	955	268
Total	4135	837

On the other hand we also found recent events, which are not likely to be a prediction errors because of deletion of signal peptide in one of the sequences (and there is stop codon immediately before start of local alignment) - for example disappearance of signal peptide in a cluster of endo-1,4-D-glucanase (PRK11097; catalyzes the hydrolysis of 1,4-beta-D-glucosidic linkages in cellulose, lichenin and cereal beta-D-glucans) in 4 strains of *Yersinia pestis* and *Yersinia pseudotuberculosis* IP 32953, while it is still present in *Y. enterocolitica* and all other members of this cluster. So we can conclude that signal peptide appearance/disappearance events are relatively fast and some symbiotic/pathogenic bacteria use this feature for their adaptation as we can see comparing pathogenic and non-pathogenic

strains (for example pathogenic strain of *Echerichia coli* O157:H7 has 5 additional clusters with diverged signal/non-signal paralogs in compare with simple *E.coli* K12).

#### 4. Discussion

As for resent events, we are going to extend our work with searching positive selection in branches where signal peptide appearance/disappearance were happened.

#### 5. Acknowledgements

Howard Hughes Medical Institute [grant number 55005610]; the Program 'Molecular and Cellular Biology' of the Russian Academy of Sciences; and Russian Foundation of Basic Research [grants number 09-04-92742, 07-04-91555].

#### 12. References

- [1] Klimke W. et al., "The National Center for Biotechnology Information's Protein Clusters Database", *Nucleic Acids Res.*, 2009, 37(Database issue):D216–23.
- [2] Bendtsen J.D. et al., "Improved prediction of signal peptides: SignalP 3.0", *J. Mol. Biol.*, 2004, 340:783-795.

## Эволюция моделей альтернативного сплайсинга паралогичных генов человека

Александр Ю. Панчин

*Институт Проблем Передачи Информации им. А.А. Харкевича РАН,  
Факультет биоинженерии и биоинформатики Московского Государственного  
Университета им. М.В. Ломоносова*

[alexpanchin@yahoo.com](mailto:alexpanchin@yahoo.com)

Ирена И. Артамонова

*Институт Общей Генетики им. Н.И. Вавилова РАН,  
Институт Проблем Передачи Информации им. А.А. Харкевича РАН,*

[irenart@gmail.com](mailto:irenart@gmail.com)

### Аннотация

*Геномные дубликации являются одним из основных источников новых генов. Две копии гена, возникшие в результате дубликации, могут эволюционировать разными путями, что приводит к повышению разнообразия белков в организме. Альтернативный сплайсинг так же является механизмом, позволяющим повышать разнообразие синтезируемых белков. Одним из способов дивергенции функции генов, возникших в результате дубликации, может стать возникновение новых сайтов сплайсинга в одном из генов или перераспределение сайтов сплайсинга между разными копиями. Цель данного исследования - систематический анализ эволюции сайтов сплайсинга многоэкзонных генов человека, возникших в результате недавних дубликаций.*

*Собрана исчерпывающая статистика консервативных, неконсервативных и уникальных сайтов сплайсинга для конститутивных и альтернативных сайтов паралогичных генов человека. На основе данной статистики сделаны выводы о закономерностях эволюции сайтов сплайсинга после дубликации. Например, количество консервативных между паралогами альтернативных сайтов сплайсинга очень невелико, что согласуется с гипотезой о том, что перераспределение альтернативных сайтов сплайсинга после дубликации генов может служить механизмом перераспределения функций между копиями дублицированных генов.*

### 1. Введение

Одним из основных источников новых генов являются геномные дубликации. Различные пути

эволюции двух копий гена могут приводить к повышению разнообразия белков в организме. В свою очередь, альтернативный сплайсинг является механизмом, позволяющим повышать разнообразие синтезируемых белков.

По современным оценкам более 90% генов человека альтернативно сплайсируются [1]. Возникновение новых сайтов сплайсинга в одном из генов, появившихся в результате дубликации, может способствовать расхождению функций соответствующих белков. Поэтому описание закономерностей эволюции сайтов сплайсинга и моделей альтернативного сплайсинга после дубликации генов представляет исследовательский интерес.

Некоторые закономерности взаимосвязи между дубликациями генов и альтернативным сплайсингом уже были описаны. Например, у дублицированных генов больше сайтов альтернативного сплайсинга и больше альтернативных изоформ, чем у генов, не подвергавшихся дубликации [2].

### 2. Методы

Картированные на геном человека последовательности мРНК, входящие в состав базы данных RefSeq (<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/RefSeq/>), были объединены в 18413 кластеров (генов) на основании перекрытия геномных координат. Геномные последовательности генов сравнивали попарно программой BLAT (<http://genome.ucsc.edu/cgi-bin/hgBlat>), предварительно замаскировав повторяющиеся элементы программой RepeatMasker (<http://www.repeatmasker.org/>). Два гена группировали вместе, если уровень сходства между ними превышал 75% на участках, включающих не менее 20% средней длины

интронов и не менее 50% средней длины экзонов. Генные семейства формировали методом single linkage clustering (<http://www.statistics.com/resources/glossary/s/singlelinkg.php>).

Для определения альтернативных и конститутивных экзонов использовали транскрипционные данные, включающие полный спектр доступных библиотек EST и полноразмерных мРНК, доступные на сервере UCSC Genome Browser (<http://genome.ucsc.edu/>). Участок гена считался экзонным сегментом, если его принадлежность к экзону подтверждалась последовательностями EST из двух и более библиотек коллекции Unigene (<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/unigene>) или хотя бы одной мРНК базы данных RefSeq. Для определения альтернативно сплайсируемых участков мы определяли долю транскриптов, подтверждающих экзон, от общего количества транскриптов, соответствующих этому участку генома. Участок гена считался конститутивным экзонном в том случае, если он сохранялся во всех транскриптах, альтернативным если вырезался в части транскриптов и интроном, если вырезался из всех транскриптов.

Множественные выравнивания геномных последовательностей генов, входящих в состав каждого семейства, строили программой ClustalW2 (<http://www.ebi.ac.uk/Tools/clustalw2/>). На основании построенных выравниваний отождествляли соответствующие нуклеотидные позиции генов, входящих в состав одного семейства.

### 3. Результаты и обсуждение

Нами было выделено 104 генных семейства, включающих 534 многоэкзонных гена человека. Среднее покрытие последовательностями EST составило 95 EST на ген. Среднее покрытие последовательностями мРНК составило 9.5 мРНК на ген. По имеющимся транскрипционным данным для всех генов были восстановлены карты интрон-экзонной структуры, разделяющие не только экзоны и интроны, но также и конститутивные и альтернативные экзоны. При этом внутри семейств сайты классифицировались

на консервативные, полуконсервативные, неконсервативные и уникальные, в зависимости от того, сохраняется ли сайт во всем семействе. Консервативные сайты служат подтвержденными сайтами сплайсинга во всех генах-паралогах семейства. Полуконсервативные сайты используются для сплайсинга более чем в половине генов семейства. Неконсервативные сайты используются для сплайсинга в половине или менее, чем в половине генов, но более чем в одном гене. Уникальными называются сайты, которые используются при сплайсинге лишь в одном гене семейства.

Кроме того, сайты можно классифицировать по степени альтернативности геномных сегментов, лежащих слева и справа от сайта сплайсинга во всех генах семейства. Например, если сайт разделяет конститутивный экзон и интрон в одном гене семейства, а в остальных генах служит внутренним альтернативным донорным сайтом альтернативного экзона, то мы отметим, что это консервативный сайт, у которого с одной стороны бывает конститутивный или альтернативный экзон (“слева от сайта” = **“Альтернативный, Конститутивный”**), а с другой стороны интрон или альтернативный интрон (“справа от сайта” = **“Альтернативный, Интрон”**).

Для данной классификации сайтов мы получили полную статистику представленности сайтов в описанной выборке генных семейств. Данная статистика проиллюстрирована в таблице 1. На основе этой статистики можно сделать выводы о закономерностях эволюции сайтов сплайсинга после дупликации. Например, количество консервативных между паралогами альтернативных сайтов сплайсинга очень невелико (см. Таблица 1), что согласуется с гипотезой о том, что перераспределение альтернативных сайтов сплайсинга после дупликации генов может служить механизмом перераспределения функций между копиями дублированных генов. Количество консервативных (см. Таблица 1) и полуконсервативных (см. Таблица 2) донорных и акцепторных сайтов практически не отличается, и распределение сайтов различного типа между донорными и акцепторными сайтами сплайсинга симметрично.

Тип сайта	Тип сайта	Слева от сайта	Справа от сайта	Число
Консервативный	Акцепторный	Интрон	Конститутивный	222
Консервативный	Акцепторный	Интрон	Альтернативный, Конститутивный	112
Консервативный	Акцепторный	Альтернативный, Интрон	Альтернативный, Конститутивный	22
Консервативный	Акцепторный	Альтернативный, Интрон	Конститутивный	13
Консервативный	Акцепторный	Интрон	Альтернативный	7
Консервативный	Акцепторный	Альтернативный, Интрон	Альтернативный	2
Консервативный	Донорный	Конститутивный	Интрон	220
Консервативный	Донорный	Альтернативный, Конститутивный	Интрон	93
Консервативный	Донорный	Альтернативный, Конститутивный	Альтернативный, Интрон	28
Консервативный	Донорный	Конститутивный	Альтернативный, Интрон	17
Консервативный	Донорный	Альтернативный	Интрон	4
Консервативный	Донорный	Альтернативный	Альтернативный, Интрон	3

Таблица 1. Распределение консервативных сайтов сплайсинга разного типа.

Полуконсервативные сайты используются в большинстве генов семейства. Поэтому, можно допустить, что этот сайт использовался и в предковом гене. То есть, в тех генах семейств, где данные сайты не задействованы в качестве сайтов сплайсинга, по-видимому, мутации привели к их деактивации. Подробный анализ этих мутаций важен для понимания наиболее эффективных путей деактивации сайтов сплайсинга, а паралогичные генные семейства предоставляют уникальный объект для такого исследования.

С целью изучения наиболее частых мутаций, приводящих к деактивации сайтов сплайсинга, мы проанализировали выборку полуконсервативных сайтов. В частности, мы оценили в каких позициях относительно данного сайта сплайсинга несплайсируемый паралог чаще всего отличается от сплайсируемых. Для этого мы сравнивали несплайсируемые паралоги с предковыми последовательностями генных

семейств. В качестве предковых последовательностей мы использовали консенсусы семейств, построенные по множественным выравниваниям.

Мы оценили частоты замен в позициях, важных для сайта сплайсинга: для акцепторных сайтов мы оценили частоты замен в позициях от -15 до +3 относительно сайта сплайсинга, а для донорных сайтов от -3 до +6. В случае акцепторных сайтов, мы обнаружили, что чаще всего изменения происходят в позиции -13. В консенсусе сплайсируемых генов обычно в позиции -13 находится нуклеотид Т, который чаще всего меняется на С у несплайсируемых по данному сайту генов. В 58% случаев у генов, утративших акцепторный сайт сплайсинга, полуконсервативный для данного семейства, произошла замена в сайте -13 относительно консенсуса. Интересные наблюдения сделаны и для ряда других позиций и будут представлены в докладе.

Тип сайта	Тип сайта	Слева от сайта	Справа от сайта	Число
Полуконсервативный	Акцепторный	Инtron	Конститутивный	128
Полуконсервативный	Акцепторный	Инtron	Альтернативный, Конститутивный	104
Полуконсервативный	Акцепторный	Альтернативный, Инtron	Альтернативный, Конститутивный	21
Полуконсервативный	Акцепторный	Альтернативный, Инtron	Конститутивный	11
Полуконсервативный	Акцепторный	Инtron	Альтернативный	11
Полуконсервативный	Акцепторный	Альтернативный	Инtron	10
Полуконсервативный	Акцепторный	Альтернативный	Альтернативный, Конститутивный	1
Полуконсервативный	Донорный	Конститутивный	Инtron	119
Полуконсервативный	Донорный	Альтернативный, Конститутивный	Инtron	91
Полуконсервативный	Донорный	Альтернативный, Конститутивный	Альтернативный, Инtron	37
Полуконсервативный	Донорный	Конститутивный	Альтернативный, Инtron	18
Полуконсервативный	Донорный	Альтернативный	Конститутивный	1
Полуконсервативный	Донорный	Альтернативный, Конститутивный	Альтернативный	1
Полуконсервативный	Донорный	Конститутивный	Альтернативный	1

Таблица 2. Распределение полуконсервативных сайтов сплайсинга разного типа

#### 4. Список литературы

[1] E.T. Wang, et al. "Alternative isoform regulation in human tissue transcriptomes", *Nature*, 2008 Nov 27;456(7221):470-6.

[2] L. Jin, et al. "The evolutionary relationship between gene duplication and alternative splicing", *Gene*, 2008 Dec 31;427(1-2):19-31

## Исключительные последовательности в геномах различных организмов

Митрофанов Сергей Игоревич  
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова  
Факультет биоинженерии и биоинформатики  
[mitroser04@mail.ru](mailto:mitroser04@mail.ru)

Панчин Александр Юрьевич  
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова  
Факультет биоинженерии и биоинформатики,  
Институт проблем передачи информации РАН  
[alexpanchin@yahoo.com](mailto:alexpanchin@yahoo.com)

Спирин Сергей Александрович  
Институт физико-химической биологии им. А.Н. Белозерского  
[sas@belozersky.msu.ru](mailto:sas@belozersky.msu.ru)

Панчин Юрий Валентинович  
Институт проблем передачи информации РАН  
[ypanchin@yahoo.com](mailto:ypanchin@yahoo.com)

Алексеевский Андрей Владимирович  
Институт физико-химической биологии им. А.Н. Белозерского  
[aba@belozersky.msu.ru](mailto:aba@belozersky.msu.ru)

### Аннотация

Молекулы ДНК генома состоят из 4 типов нуклеотидов (букв). Уникальные последовательности таких букв длиной в сотни и тысячи нуклеотидов образуют гены, определяющие фенотип организма. Короткие слова от одной до десятка букв также не представлены в геноме случайным образом. Анализ распределения слов разной длины в геномах различных организмов начался с появлением методов чтения ДНК и обнаружил ряд важных закономерностей. В данной работе мы продолжили исследования в этом направлении используя ВСЕ доступные геномы эукариот и сравнили частоты встреченных слов разной длины с ожидаемыми частотами, рассчитанными разными методами на основе наблюдаемых частот слов меньшей длины и определенной статистической гипотезе. Выяснилось, что из всех разобранных нами методов наблюдаемые частоты слов лучше всего описывает метод Карлина [1,2], который оказался наиболее успешным в 53% испытаний. Нами определено несколько исключительно недопредставленных и перепредставленных слов, включая как уже известные, так и новые.

### 1. Введение

С появления первых прочитанных генетических последовательностей начались исследования их нуклеотидного состава. Молекулы ДНК генома состоят из 4 типов нуклеотидов (букв). Уникальные последовательности таких букв длиной в сотни и тысячи нуклеотидов образуют гены, определяющие фенотип организма. Короткие слова от одной до десятка букв также не представлены в геноме случайным образом. При этом интерес представляет не только содержание отдельных нуклеотидов (АТ/ГС состав), но и частоты коротких слов, состоящих из нескольких нуклеотидов. Существует множество методов оценки этой недопредставленности и перепредставленности [1, 3, 4]

В связи с ростом количества прочитанных геномов возникает все больше возможностей для поиска закономерностей недопредставленности или перепредставленности слов в различных таксонах. В то же время, расширяются возможности для поиска исключений из уже известных правил. Общие закономерности, как и исключения из них, могут пролить свет на механизмы эволюции и мутагенеза в различных группах организмов. Таксономическое распределение изученных геномов представлено в Таблице 1. Целью этой работы является систематическое изучение состава слов в уже прочитанных геномах и геномах, чтение которых еще не завершено. Нами было опробовано

множество методов определения некоторой статистической гипотезе. недопредставленности и перепредставленности слов в геноме, каждый из которых основан на

Таксон	Полных геномов	Маскированных геномов	EST геномов	Сшитых геномов
Vertebrata	31	23	3	
Chordata (not vertebrata)	2	2	5	
Arthropoda	15	13	46	
Nematoda	7	6	3	
Mollusca	1		16	
Other metazoa	1		50	
Fungi	17		14	
Plants	3			
Chroalveolata	1		23	
Other Eukaryota	1	1	43	
Archea				1
Bacteria				1
dsDNA viruses				1
Total	79	45	203	3

Таблица 1. Распределение изученных геномов по таксонам.

## 2. Методы

Введем несколько понятий.

### Перепредставленными

**последовательностями** мы называем слова, встретившиеся в геноме существенно больше раз, чем можно было бы ожидать в соответствии с принятой статистической моделью.

### Недопредставленными (избегаемыми)

**последовательностями** мы называем слова, встретившиеся существенно меньше раз, чем можно было бы ожидать в соответствии с принятой статистической моделью.

### Исключительными

**последовательностями** мы называем как перепредставленные, так и недопредставленные последовательности в данном геноме.

Можно выбирать различные статистические модели встречаемости слов. В первом приближении ожидаемое число встреч слова в геноме можно рассчитать из предположения, что в каждой позиции с равной вероятностью (0,25) стоит одна из букв А, Т, Г, Ц, и независимости выбора букв в разных позициях.

Несколько лучше описывает последовательность нуклеотидов в ДНК бернуллиевская модель с вероятностями букв, равными частотам встреч каждой из букв в геноме. Однако основное предположение бернуллиевской модели – независимость выбора букв в разных позициях – не соответствует наблюдаемым закономерностям в геномах. Так, например, если слово из двух букв «TG» перепредставлено в геноме, то по бернуллиевской модели будут перепредставлены все более длинные слова, содержащие в себе «TG».

Был предложен метод расчета ожидаемого числа встреч слов, основанной на марковской модели второго порядка.[5]

В этом методе для определения ожидаемой

числа встреч слова  $W$  рассматриваются подслова: «левое», получающееся выкидыванием последней буквы из слова, «правое», получающееся выкидыванием первой буквы из слова, и «среднее», получающееся выкидыванием и первой и последней букв из слова  $W$ . ЧислоВстреч(«левого») / ЧислоВстреч(«среднего») считается вероятностью продолжения «среднего» налево первой буквой исходного слова. Аналогично ЧислоВстреч(«правого»)/ЧислоВстреч(«среднего») считается вероятностью продолжения «среднего» направо последней буквой исходного слова. В предположении независимости появления букв слева и справа перемножением указанных вероятностей получаем вероятность  $P$  того, что «среднее» продолжается до исходного слова. Таким образом получается, что ожидаемое число встреч слова  $W$  равно  $K(W) = P * \text{ЧислоВстреч(«среднего»)}$ . Можно рассчитать также среднеквадратичное отклонение  $S$  от ожидаемого числа встреч. Величина  $C(W) = (N(W) - K(W)) / S$ , где  $N(W)$  – фактическое число встреч слова  $W$  в геноме, называется **контрастом**. Если  $C(W) \ll 0$ , то слово  $W$  недопредставлено, а если  $C(W) \gg 0$ , то слово  $W$  перепредставлено в геноме.

Формулы расчета контраста, взятые из работы [6], приведены ниже.

Пусть  $W = w_1...w_m$  – слово длины  $m$ . За  $N(W)$  обозначим фактическое число встреч слова  $W$  в геноме. Ожидаемое число встреч слова  $W$  равно:

$$K(w_1...w_m) = N(w_1...w_{m-1}) \cdot N(w_2...w_m) / N(w_2...w_{m-1}).$$

Контрастом для  $W$  называется величина:

$$C(W) = ([N(W) - K(W)] / L^{1/2}) / [\text{sigma}], \text{ где } L - \text{длина все последовательности генома.}$$

Основная формула для вычисления [sigma] была получена Schbath с соавторами. Получаем:

$$[\text{sigma}]^2 = [K(W) / L] \cdot [1 - N(w_1...w_{m-1}) / N(w_2...w_{m-1})] \cdot [1 - N(w_2...w_m) / N(w_2...w_{m-1})].$$

Суммарная формула:

$$C(W) = \{N(W)\} / \{K(W) \cdot [1 - N(w_1...w_{m-1}) / N(w_2...w_{m-1})] \cdot [1 - N(w_2...w_m) / N(w_2...w_{m-1})]\}^{1/2}.$$

Формула может быть переписана так:

$$C(W) = \{N(W) - K(W)\} / \{K(W) \cdot [1 - N(w_1...w_{m-1}) / N(w_2...w_{m-1})] \cdot [1 - N(w_2...w_m) / N(w_2...w_{m-1})]\}^{1/2},$$

где  $K(w_1...w_m) = N(w_1...w_{m-1}) \cdot N(w_2...w_m) / N(w_2...w_{m-1})$ .

Нами были рассчитаны контрасты всех коротких слов в больших геномах (геноме человека и др.). Оказалось, что значения контраста бывают порядка нескольких тысяч по абсолютной величине. Одной из причин таких больших значений может быть наличие дубликаций и повторов в геномах. Для того, чтобы получить величины, сравнимые для геномов разных размеров, мы использовали величину  $\hat{C}(W) = C(W) / S$ .

Слово	Мин. контраст	Макс. контраст	Геномов с контрастом			
			< -5	> +5	< -10	> +10
ТА	-77	0	345	0	77	0
CG	-87	66	277	50	58	5
AC	-34	8	300	6	54	0
GT	-39	18	301	14	43	0
AT	-35	16	258	8	34	0
TAG	-82	23	276	7	27	1
СТА	-55	15	165	14	24	0
GACGCC	-69	23	111	7	17	0

**Таблица 2.** Наиболее недопредставленные слова. Для каждого слова указано минимальное наблюдаемое значение контраста, максимальное наблюдаемое значение контраста, количество геномов, в которых слово недопредставлено (или перепредставлено) с разными порогами контраста. Чем больше контраст, тем больше слово перепредставлено. Чем меньше контраст, тем оно больше недопредставлено.

Известным примером недопредставленного слова является слово CG, которое, если избегается в геноме, то избегается намного сильнее, чем все остальные двухбуквенные слова. Но, не смотря на распространенное мнение о глобальной закономерности – избегании «CG» (= CpG), во многих геномах это правило не соблюдается. Например, у *C.elegans* и *P.pacificus* это двухбуквенное слово почти не избегается, а в ряде геномов она даже перепредставлена. Принято считать, что в основе недопредставленности CG лежит конкретный биохимический механизм. Белок метилтрансфераза узнает пару CpG и метилирует цитозин, что в дальнейшем приводит к замене пары CG на TG. Таким образом, простой анализ последовательности ДНК может свидетельствовать о важной физиологической функции – метилировании нуклеотидов ДНК. Действительно, в геномах ряда нематод и насекомых метилтрансферазы не обнаружено, и недопредставленность CG отсутствует. У *Aplysia californica* пара «CG» весьма недопредставлена, что предположительно подтверждает предсказанное в работе, посвященной исследованию транскриптома моллюска *Aplysia* [7], наличие у этого организма гомолога ДНК-метилтрансферазы DNMT1.

В то же время во всех исследованных геномах обнаружена весьма сильная недопредставленность слова «ТА» (кроме *P.falciparum*, в геноме которого это слово лишь слегка недопредставлено), и чуть менее

### 3. Результаты и обсуждения

Мы сформировали базу данных количества встреч 1-7 буквенных слов в 347 геномах, включая CDS и мРНК человека, некоторое количество маскированных геномов, объединенные геномы архей, бактерий и двухцепочечные геномы ДНК-вирусов. В нашу выборку вошло 79 полных геномов эукариот, относящихся почти ко всем крупным таксонам, и 45 маскированных полных геномов. Нами определено несколько исключительно недопредставленных и перепредставленных слов, включая как уже известные, так и новые слова (Таблица 2). Предсказанное ранее наличие ДНК-метилтрансферазы в *Aplysia* было подтверждено недостатком слова «CG» в геноме этого моллюска.

выраженная недопредставленность комплементарных слов «AC» и «GT». Из трехбуквенных слов чаще всего недопредставлены слова «TAG» и «СТА». В существенной части изученных геномов недопредставлено шестибуквенное слово «GACGCC». Интересно предположить, что и в этих случаях существует конкретный биохимический механизм, приводящий к наблюдаемым эффектам.

### 4. Список литературы

- [1] S.Karlin and L.R.Cardon, COMPUTATIONAL DNA SEQUENCE ANALYSIS, *Annu. Rev. Microbial.* 1994.48:619-54
- [2] S.Karlin et al., COMPARATIVE DNA ANALYSIS ACROSS DIVERSE GENOMES, *Annu. Rev. Genet.* 1998. 32:185-225
- [3] M.Regnier and M.Vandenbogaert, Comparison Of Statistical Significance Criteria, *JBCB* 4(2) (2006) 537-551
- [4] S.Schbath et al., Exceptional Motifs in Different Markov Chain Models for a Statistical Analysis of DNA Sequences, *J. COMP. BIOL.* 2(3), 1995, 417-437
- [5] M.S. Gelfand and E.V. Koonin, Avoidance of palindromic words in bacterial and archaeal genomes: a close connection with restriction enzymes, *Nucleic Acids Research*, Volume 25, Number 12, Pp. 2430-2439
- [6] EMBOSS WordCount Page, <http://bioweb2.pasteur.fr/docs/EMBOSS/wordcount.html>
- [7] L. Moroz et. al, Neuronal Transcriptome of *Aplysia*: Neuronal Compartments and Circuitry, *Cell*, Volume 127, Issue 7, 1453-1467

## Species demography and evolution of alternative splicing sites

Evgeny V. Leushkin<sup>1</sup>, Stepan V Denisov<sup>2</sup>, Mikhail S Gelfand<sup>2</sup>, Konstantin Yu. Popadin<sup>2</sup>, Georgii A. Bazykin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*School of bioengineering and bioinformatics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Building B, Moscow 119899, Russia;* <sup>2</sup>*Institute for Information Transmission Problems RAS, Bolshoi Karetny pereulok 19, Moscow 127994, Russia*  
E-mail: Evgeny V. Leushkin – leushkin@gmail.com

### Abstract

*The demographic characteristics of individual species play a major role in molecular evolution. The generation time is positively correlated with the neutral rate of evolution, while the effective population size is negatively correlated with the rate of accumulation of slightly deleterious mutations. Here, we study the interplay of these effects in evolution of splicing sites in mammals. The overall rate of evolution of splicing sites is elevated in species with short generation time due to the generation-time effect. The information content of the splicing sites is similar in different species. However, the weights of individual nucleotide positions within sites are significantly correlated with the effective population size, with some correlations being positive, and others negative. Together, these results suggest that the population demography plays a complex role in the rate of evolution of splicing sites.*

### Introduction

Species with short generations have a high mutation rate per unit time and evolve rapidly (“generation-time effect”). On the other hand, in accordance with the nearly neutral theory, species with high effective population size have a low rate of accumulation of slightly deleterious and slightly advantageous mutations, and therefore have a lower rate of evolution of functional features (“population-size effect”). To complicate matters more, the generation length is negatively correlated with the effective population size: there are more mice than elephants, and mice have a shorter lifespan. The different demographic parameters of species have a different contribution to the rate of evolution of different features: while the rate of evolution of functionally important features such as nonsynonymous positions of proteins have a positive correlation with the time to maturation, the less functionally important features

such as synonymous positions show the opposite trend [2,3].

Splicing sites are well conserved, due to high conservation of the spliceosome components such as U1 RNA which determines the consensus of 5'-sites. However, they are not invariant. The weight (information content) of sites is important for proper splicing; however, the exact sequence is not critical. This makes splicing sites a good object for testing the predictions of nearly neutral theory. We hypothesized that the functionally important positions of splicing sites show a population-size effect, while the less important positions show a generation-time effect.

### Methods

Human splicing sites from EDAS database [1] were mapped onto whole-genome alignments of 34 mammalian species to human genome from UCSC (<http://hgdownload.cse.ucsc.edu/goldenPath/hg18>). To estimate the evolutionary rates of different sites we performed baseml analysis of site concatenation for each type. We used molecular clock free model (runmode = 0) and REV model as nucleotide substitution model. Lengths of external branches of the tree obtained were interpreted as rates of evolution.

LOG-ODD scores were calculated with the scoring function  $S_i(X) = \log_2(P_i(X)/Q_i(X))$ , where  $P_i(X)$  is the frequency of finding X at position i that is equal to  $C_i(X)/D_i$ , the normalization  $D_i$  is the sum of the counts  $C_i(X)$  over X (= A, C, G, T), and  $Q(X) = 1/4$  was used for all X as the random background frequency. The score for a splice site is the sum of the scores for each individual nucleotide.

### Results and Discussion

In line with the previous findings, the rate of evolution of splicing sites is significantly lower in splicing sites than in introns. It declines with

increased generation time, consistently with the generation-time model (Fig. 1). This pattern holds for both donor and acceptor sites of both constitutive and alternative exons.

We used the ratio  $kP/kS$  of the evolutionary rates in splicing sites  $kP$  and synonymous sites  $kS$  within a genome to estimate negative selection on splicing

sites. This measure is analogous to  $kN/kS$  commonly used as measure of the strength of selection on coding sequences. We found  $kP/kS$  to be independent of the time to maturation (data not shown), suggesting that the rate of accumulation of mutations in splicing sites is independent of the effective population size of the species.

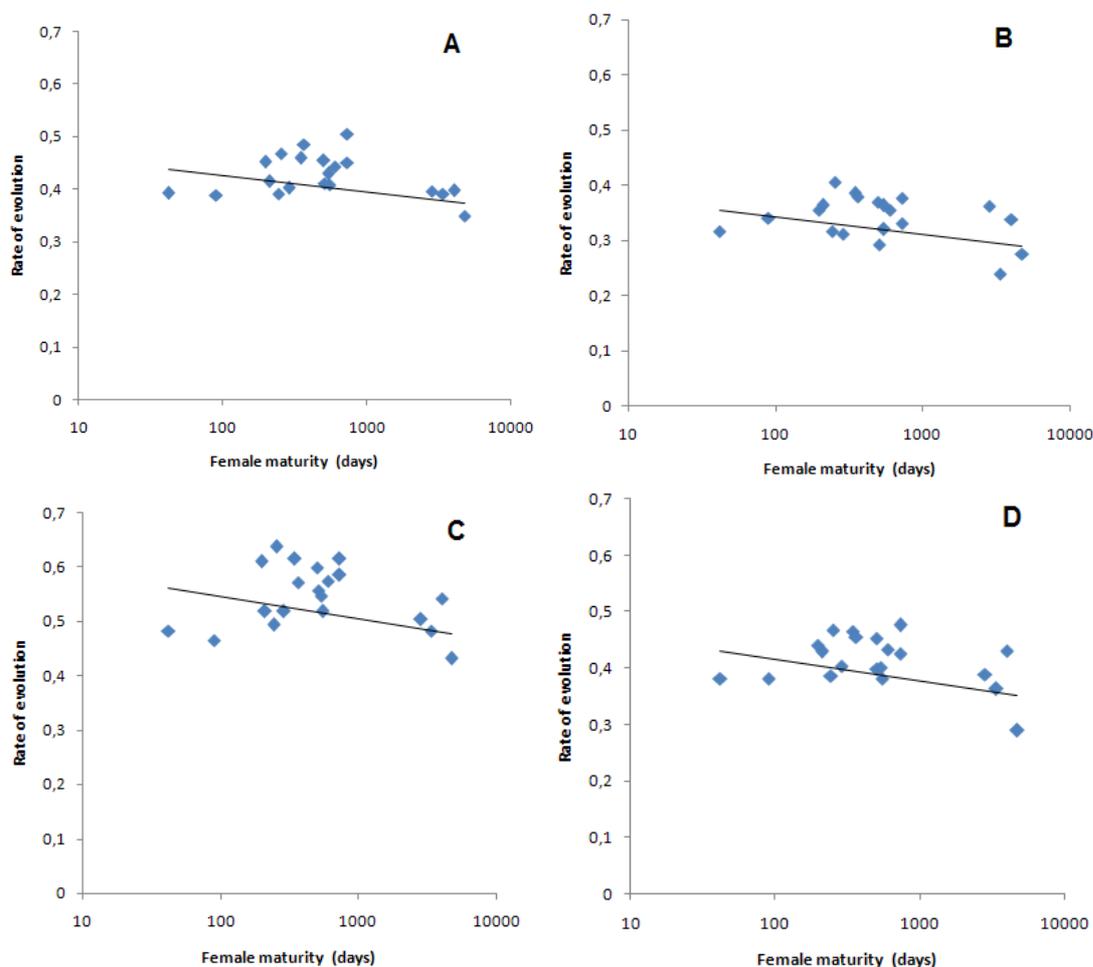


Fig. 1. Rate of evolution of splicing sites vs. the species maturation time (days). The rate of evolution has been measured on the terminal branch leading to the corresponding species. (A) constitutive donor sites, (B) cassette donor sites, (C) constitutive acceptor sites, (D) cassette acceptor sites

Next, we hypothesized that the weights of the splicing sites in species with low effective population size will have a lower mean, and probably a broader distribution. Indeed, for a range of selection coefficients, natural selection is inefficient in species with a low effective population size, and slightly deleterious mutations that deteriorate the site can get fixed. If the selection on splicing sites falls within this dangerous zone, we would expect that the

splicing sites in species with large effective population size will have a “lower quality”.

However, the average weights of splicing sites within individual species were independent of time to maturation of this species (Fig. 2). The distributions of weights didn't show any dependency either (data not shown), suggesting that these parameters are insensitive to generation time and population size.

Unexpectedly, however, while the average weights of whole sites appear to be independent of species properties, this was not true for individual nucleotide sites composing the binding site. A fraction of nucleotide positions is significantly correlated with the time to maturation, with some correlations being

positive, and some negative. This indicated that the relative roles of generation time and population size differ between nucleotide positions of splicing sites. The strongest correlations were observed in the donor sites, with the 5' positions of the site showing strong positive correlations, and the 3' positions showing strong negative correlations.

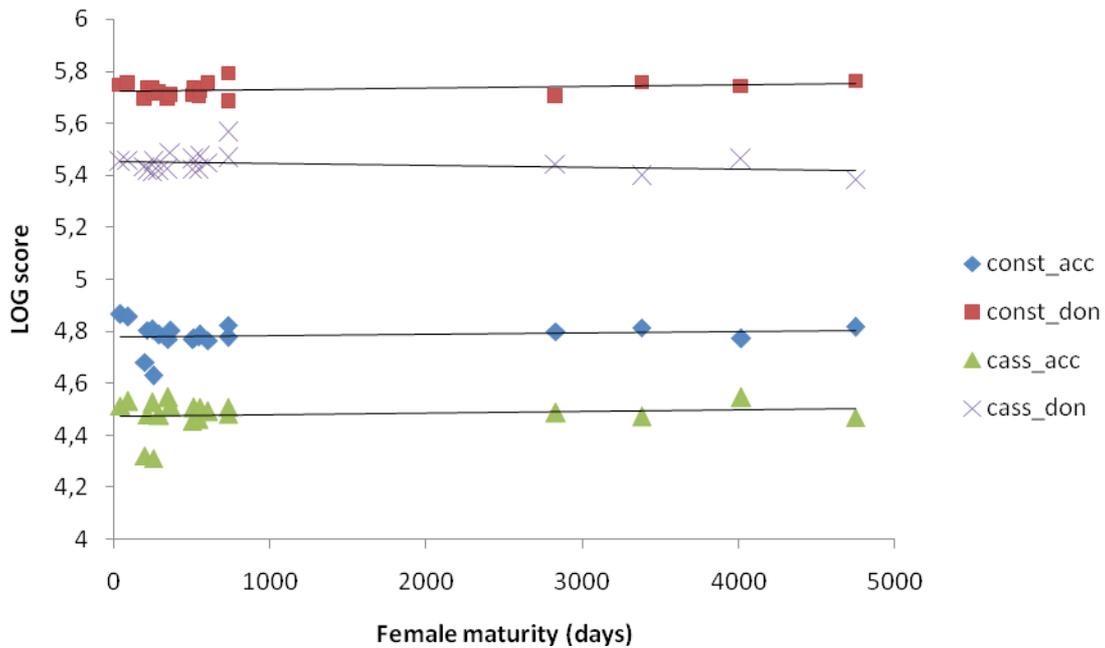


Fig. 2. Average weight of splicing site, depending on species maturation time (days).

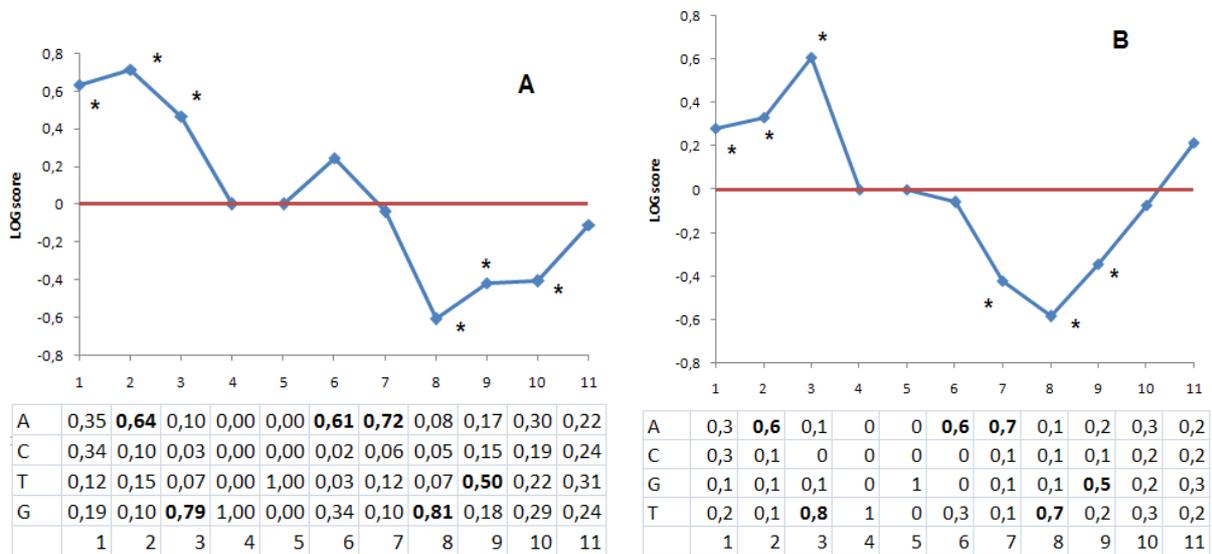


Fig. 3. Spearman correlations of position weights with time to maturation for individual positions of binding sites are shown together with the corresponding consensus. Significant ( $p < 0.05$ ) correlations are marked with asterisks. (A) constitutive donor sites, (B) cassette donor sites.

In summary, our results reveal that the apparent independence of the rate of evolution of splicing sites and species demography conceals a complex pattern which varies between positions of splicing sites. This complex interdependency and its link with the functional significance of the corresponding positions deserves further study.

## References

- [1] [\[EDAS, databases of alternatively spliced human genes\]](#)  
Nurtdinov RN, Neverov AD, Mal'ko DB, Kosmodem'ianskiĭ IA, Ermakova EO, Ramenskiĭ VE, Mironov AA, Gel'fand MS.  
Biofizika. 2006 Jul-Aug;51(4):589-92. Russian.
- [2] [A manually curated database of tetrapod mitochondrially encoded tRNA sequences and secondary structures.](#)  
Popadin KY, Mamirova LA, Kondrashov FA.  
BMC Bioinformatics. 2007 Nov 14;8:441.  
PMID: 17999775 [PubMed - indexed for MEDLINE]
- [3] [Life-history traits drive the evolutionary rates of mammalian coding and noncoding genomic elements.](#)  
Nikolaev SI, Montoya-Burgos JI, Popadin K, Parand L, Margulies EH; National Institutes of Health Intramural Sequencing Center Comparative Sequencing Program, Antonarakis SE.  
Proc Natl Acad Sci U S A. 2007 Dec 18;104(51):20443-8.  
Epub 2007 Dec 11.

## Свойства компенсаторных замен в белках

Ольга Калинина<sup>1,2</sup>, Анастасия Анашкина<sup>3</sup>, Александра Мирина<sup>4</sup>, Василий Раменский<sup>3</sup>

(1) Учреждение Российской академии наук Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РВН, 127994, Москва; (2) European Molecular Biology Laboratory, Germany; (3) Учреждение Российской академии наук Институт молекулярной биологии им. В. А. Энгельгардта РАН, Москва, 119991; (4) МГУ им. Ломоносова, Москва, 119992

Email: ramensky@gmail.com

### Abstract

*Compensatory amino acid substitutions in proteins (also known as suppressor mutations) mask the deleterious effects of another mutation and comprise an important mechanism for the adaptation and evolution of most organisms. In particular, resistance to antibiotics, antivirals, and antifungals is usually associated with a fitness cost. The initial fitness costs conferred by resistance mutations (or other deleterious mutations) can be reduced by compensatory substitutions. We present the literature-derived set of experimentally verified 77 deleterious amino acid replacements and corresponding 348 compensatory substitutions observed in 36 proteins with source organisms ranging from human to E.coli. The sequence- and structure-related properties of mutants and their suppressors are discussed.*

### Введение

Компенсаторные замены в белках (называемые также супрессорами) частично или полностью восполняют негативный эффект других замен и представляют собой важный механизм адаптации и эволюции у различных организмов. В качестве примера замен с негативным эффектом можно привести мутации, вызывающие устойчивость к антибиотикам у белков патогенных организмов. В данной работе мы приводим результаты анализа 348 экспериментально наблюдаемых компенсаторных замен аминокислот в 36 белках различных организмов.

### Результаты

В данной выборке наблюдается до 20 различных компенсаторных замен для одной исходной, со средним числом 4,5 супрессора. Существуют

«универсальные супрессоры», которые способны компенсировать негативный эффект различных замен. На основе анализа консервативности позиций замен с помощью программы A12Co и особенностей замен двух типов с помощью программы PolyPhen показано, что в сравнении с исходными мутациями компенсаторные замены в среднем более «мягкие» с точки зрения потенциального влияния на структуру и функцию белка и происходят на менее консервативных позициях.

Были проанализированы распределения расстояний между Ca-атомами 225 пар мутант-супрессор и 1041 пар супрессор-супрессор в 15 белках, для которых известна 3D-структура. Вопреки ожиданиям, типичная пара мутант-супрессор не образует непосредственный пространственный контакт (мода распределения 20-30 Å). В то же время, среди супрессоров наблюдается тенденция к кластеризации: примерно 60% пар супрессор-супрессор находятся друг от друга на расстоянии не более 20 Å

## Orthologous genes in mammals: what's about orthologous CpG islands?

Oparina Nina, Fridman Marina, Makeev Vsevolod

*Institute of genetics and selection of industrial microorganisms, GosNIIgenetika, Moscow, Russia*

*Engelhardt Institute of Molecular Biology, RAS, Moscow, Russia*  
oparina@gmail.com

### Abstract

*In the mammalian genomes CpG dinucleotides are underrepresented due to frequent C->T mutation. CpG-island containing stretches of CpGs were found in mammalian genomes and studied during last decades. Despite long history of CpG-island investigation there's still no idea on their function-based search algorithm. The classic approach of CpG-island search is based on the CpGs frequency in the 200bp window. Several new algorithms were proposed recently. What method gives "true" results? All tests concern "good" CpG-islands as gene-intersecting ones, in contrast to repetitive element-intersecting CpG-islands. We have studied CpG-islands and there orthology in the set of orthologous promoters.*

### 1. Introduction

CpG islands are clusters of CpG dinucleotide frequently found in mammalian genomes. Due to CpG methylation, CpGs are rare in other genomic loci. At the early stages of investigation, CpG islands were mostly considered as functional motifs (Gardiner-Garden and Frommer, 1987). The simplest criterion included not only such features as frequency of CpG-dinucleotides and GC-contents, but also the SP1-binding sites and unmethylated state in the germline. By the way, all functional criteria are not so simple to be calculated, mostly simple algorithmic approaches of CpG islands search evolved. For example, there's still almost absent information of germline methylomes. However, the idea of unmethylated state of CpG-islands in the germline is on the date for decades (Gardiner-Garden and Frommer, 1987; Bird, 1987). The recent data demonstrated that CpGs remain highly mutable even in CpG islands and in several phyla CpG-islands are depleted and shortened (Cuadro M. Et al, 2001, Jiang C., 2007). Nevertheless, even in these genomes there're still a lot of CpG islands (Han L. Et al, 2008).

Among detected CpG-islands, mainly – in promoter-associated, there're numerous binding sites of tissue-

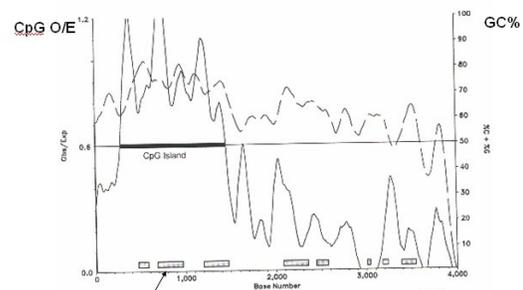
nonspecific transcription factors, such as: ETS, NRF-1, BoxA, Sp1, CRE, E-Box, (Rosenberg J. M., 2008). Promoters of most of housekeeping genes are associated with CpG-islands. Thus one can see that numerous functions could be associated with such genomic loci. But modern algorithms are still based on CpG-frequencies and GC-content. Traditional algorithms are based on three sequence parameters (length, GC content, and ratio of the observed over the expected CpGs (ObsCpG/ExpCpG)) (see Garniner-Garden and Frommer, 1987). Several modifications use more stringent criteria (Takai-Jones, 2002). Other approaches include statistic algorithms like CpGcluster (Hackenberg et al., 2006).

But there's still no good ideas on how to select "good" CpG-islands considering this "goodness" as anyhow functionality. While no specific functions are associated with CpG-island subgroups, we're still to compare there frequencies in the vicinities of genes and near repetitive elements.

### 2. CpGs and comparative genomics

We have selected several tools for CpG-islands detection, including traditional algorithm and CpGcluster.

**Figure 1. Example of CpG-island.**



At the first stage we have compared frequencies and nucleotide spanning of all CpG-maps along mammalian genomes:

**Table 1. Traditional algorithm shows high frequency of CpG-islands in all mammals.**

Species	CpG islands				Obs <sub>CpG</sub> /Exp <sub>CpG</sub>
	Number of CGIs	CGI density (/Mb)	Average length (bp)	GC content (%)	
Human	37,531	13.2	1,089	62.0	0.743
Mouse	20,458	8.2	1,043	60.6	0.756
Rat	19,568	7.9	1,004	59.7	0.758
Dog	58,327	25.3	1,102	62.2	0.753
Cow	36,729	16.0	1,023	61.2	0.740
Horse	33,135	16.3	937	59.2	0.749
Opossum	24,938	7.5	919	60.8	0.698

Nevertheless, overall number of CpG-islands remains very unstable in the studied organisms. We have supposed that in the case of gene-associated CpG-islands there should be much more stable numbers due to their intersection with conserved protein-coding exons and gene starts. For example, for UCSC 2006 version of human genome (hg18) among 28,226 traditional CpG-islands 17,680 intersect with RefSeq genes (~63%). We have proposed that the fraction of CpG-intersecting genes should be larger in case of conserved genes due to lower level of noise and larger fraction of “good” functional CpG-islands:

Intersections according to UCSC (<http://genome.ucsc.edu>) genome browser for traditional CpG-islands:

Hg18/Cow\_2007:

18,306 (13,574 gene-intersecting)

hg18/ Dog\_2005:

17,817 (12,152 gene-intersecting)

hg18/ Mouse\_2007:

13,270 (11,264 gene-intersecting)

All four genomes:

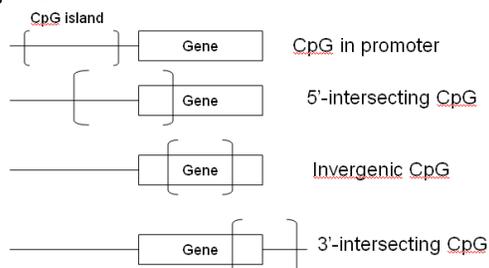
11,073 (8,271 gene-intersecting).

Thus one can see that the fraction of gene-intersecting CpG-islands indeed is larger in conserved genes.

What’s about the most famous CpG-islands – the promoter ones? We have selected the orthologous genes in a set of mammalian genomes (human, cow, dog and mouse) according to Round-Up orthology database

(<http://roundup.hms.harvard.edu/site/index.php>).

**Figure 2. CpG islands and genes.**



We have mapped known gene starts on every genome

according to UCSC genome data (version 2006 for human; 2007 for mouse; 2005 for dog; 2009 for cow). The database was constructed containing data on orthologous upstreams. Only mapping data and conservation scores are included while functional information on genes and regulatory signals in these upstreams is still under construction. We have tested the level of upstream conservation in CpG-containing and CpG-free upstreams. Besides high mutability of CpG-dinucleotides there was no significant difference between these groups at the level of pair of genomes orthology. >50% of traditional CpG-islands mapped onto human sequences were aligned to their mammalian orthologs. By the way, in many cases there were rearrangements in upstreams and even in case of sequences homologous to human CpG-islands there were no CpGs at the same upstream position in orthologous mammalian loci. Nevertheless, while considering CpG-associated rather than CpG-conservation, ~80% of human genes with CpG-islands in their 1kb-upstream have their orthologous sequences in >2 genomes also associated with CpG-islands in 1kb-upstream. This could indicate that GC-rich enriched with CpGs are important for proper functioning of several genes despite the mutability of CpG-dinucleotides and lack of sequence conservation in them.

We have added data on other algorithms of CpG-search to our database of orthologous CpG-islands. Such algorithms like CpG-cluster showed much less level of sequence conservation but higher degree of CpG-associated (>90% of CpG-cluster associated upstreams).

We have proposed that the most conserved housekeeping genes characterized by unique important functions are frequently associated with CpG-islands in any of CpG-mapping algorithms. The example on the vertebrate-conserved orthologs, present with high conservation in all genomes from the set was studied (human, mouse, rat, dog, cow, chicken, zebrafish, xenopus). 506 orthologous genes were found. 80% of 1kb-upstreams of them were associated with CpG-islands in human genome (in comparison to overall 59% level for human RefSeq genes). Despite highly differing GC-content, the same levels of 79% and 76% was obtained for CpG-island intersection in orthologous loci in mouse and chicken genomes, respectively.

All these data show that CpG-islands, including promoter-associated, are highly functional genomic elements with functionality not related to overall sequence conservation.

[1]. Bird AP: CpG islands as gene markers in the vertebrate nucleus. Trends Genet 1987, 3:342-347.

[2]. Gardiner-Garden M, Frommer M: CpG islands in vertebrate

- genomes. *J Mol Biol* 1987, 196:261-282.
- [3]. Takai D, Jones PA: Comprehensive analysis of CpG islands in human chromosomes 21 and 22. *Proc Natl Acad Sci USA* 2002, 99:3740-3745.
- [4]. Hackenberg M, Previti C, Luque-Escamilla PL, Carpena P, Martinez-Aroza J, Oliver JL: CpGcluster: a distance-based algorithm for CpG-island detection. *BMC Bioinformatics* 2006, 7:446.
- [5]. Han L, Su B, Li WH, Zhao Z: CpG island density and its correlations with genomic features in mammalian genomes. *Genome Biol* 2008, 9:R79.
- [6]. Jiang C, Han L, Su B, Li WH, Zhao Z: Features and trend of loss of promoter-associated CpG islands in the human and mouse genomes. *Mol Biol Evol* 2007, 24:1991-2000.

## Геномная энциклопедия метаболических путей утилизации сахаров полученная методами сравнительного анализа бактериальных геномов.

Родионов Д.А.

Институт Проблем Передачи  
Информации РАН, 127994, Москва,  
Большой Каретный пер. 19

[rodionov@iitp.ru](mailto:rodionov@iitp.ru)

### Аннотация

Для решения фундаментальной задачи реконструкции аппарата утилизации сахаров в любом микроорганизме напрямую из его геномной последовательности был разработан новый подход основанный на метаболической реконструкции и сравнительной анализе подсистем. Новый подход был применен к группе из 19 различных бактерий рода *Shewanella* с доступными геномными последовательностями. Основные этапы данного подхода: обнаружение генов-кандидатов на основе сходства аминокислотных последовательностей с генами из коллекции известных компонент путей утилизации сахаров; функциональная аннотация ортологов и предсказание альтернативных генов и вариантов путей используя анализ их геномного и функционального контекстов (опероны, регулоны, подсистемы); проверка биоинформатических предсказаний с помощью биохимических, генетических и физиологических экспериментов. Новая геномная энциклопедия путей утилизации сахаров содержит около 170 белковых семейств (ферменты, транспортеры, регуляторы), неравномерно распределенных в исследуемых геномах *Shewanella* и формирующих 17 индивидуальных метаболических путей. Сравнение соответствующих генов из *Shewanella* и других бактерий позволяет смоделировать их возможную эволюцию и влияние на адаптацию бактерий к различным условиям окружающей среды. Более трети обнаруженных генов и более двух третей реконструированных путей являются ранее неизвестными вариантами, то есть либо неортологичными замещениями известных генов или генами, использующимися в альтернативных биохимических путях. Некоторые биоинформатические предсказания были

экспериментально подтверждены в ходе работы. Предложенный подход может быть применен к любой другой группе бактерий с имеющимися геномными последовательностями. Аккумулированные геномные аннотации всех компонент путей утилизации углеводов в полных микробных геномах позволит провести аккуратное распознавание соответствующих функций и вариантов метаболизма в новых метагеномных данных.

### 1. Сравнительно-геномные методы реконструкции метаболизма бактерий

Для реконструкции метаболических путей катаболизма сахаров были использованы их следующие отличительные черты:

А) Единообразная функциональная организация. Типичный путь катаболизма углевода содержит специфичный транспортер и набор ферментов для превращения углевода в один из центральных клеточных метаболитов клетки, а также транскрипционный фактор для контроля экспрессии генов этого пути. Типичными классами ферментов катаболизма сахаров являются киназа, изомераза, гидролаза, альдолаза и оксидоредуктаза.

Б) Универсальность и ограниченность семейств белков участвующих в катаболизме углеводов. Представители таких белковых семейств могут быть найдены методами поиска гомологичных последовательностей в исследуемом геноме.

В) Сильное функциональное сцепление между генами, участвующими в одном и том же метаболическом пути катаболизма углевода. Например, гены из одного пути часто образуют опероны или компактные группы на хромосоме, и/или принадлежат к одному регулону (ко-регулируются)

Для функционального анализа генов и метаболических путей катаболизма углеводов использовалась геномная база данных SEED [1]. Для реконструкции регулонов контролирующей экспрессию соответствующих метаболических путей использовался сравнительно-геномный подход более подробно описанный в обзоре [2].

### 2. Результаты

Новый биоинформатический подход основанный на сочетании методов сравнительного анализа геномного контекста генов (ко-регуляции, ко-

локализации) и метаболической реконструкции был использован для анализа путей катаболизма углеводов в 19 геномах бактерий рода *Shewanella*. Используя базу данных SEED, была подобрана коллекция из 480 различных генов, участвующих в известных путях катаболизма сахаров у бактерий и использована для полногеномного поиска их гомологов у *Shewanella*. Найденные гены выступали в роли «затравок» в ходе метаболической реконструкции.

Всего в 19 геномах *Shewanella* было найдено 168 групп ортологичных генов, составляющих 17 различных путей утилизации углеводов, а также центральные реакции сахарного катаболизма (пути Энтнер-Дудорова и пентозо-фосфатный). Большинство из периферических путей утилизации сахаров в *Shewanella* содержат отклонения от ранее известных вариантов путей, когда один или несколько участвующих генов замещены на новые их варианты (неортологичные замещения) или используется ранее не описанная новая цепочка биохимических реакций. Всего у *Shewanella* были обнаружены и функционально проаннотированы 62 ортологичных группы новых генов участвующих в катаболизме углеводов, которые кодируют 34 компоненты транспортных систем, 11 регуляторов, 12 ферментов и 5 вспомогательных белка. Например, в пути утилизации N-ацетилглюкозамина участвуют два новых фермента (киназа и деаминаза), и новый транскрипционный регулятор.

В целом, полученные в ходе метаболической реконструкции пути являются полными и связными, то есть отсутствуют пробелы в путях, а также гены вне функционального контекста. Также, были реконструированы соответствующие регулоны для каждого из изученных метаболических путей и были предсказаны, последовательность и локализация сайтов связывания 17 транскрипционных факторов во всех геномах *Shewanella*, где они присутствуют.

Были получены экспериментальные подтверждения для ряда новых ферментов и транспортеров из метаболических путей утилизации сахарозы, целлобиозы, глицерата, и N-ацетилглюкозамина. Двумя независимыми экспериментальными подходами (EMSA, RT-PCR) была подтверждена функция транскрипционного репрессора NagR, контролирующего катаболизм N-ацетилглюкозамина. Были проанализированы фенотипы утилизации 18 диагностических сахаров 8 видами бактерий рода *Shewanella*, а результаты были сопоставлены с результатами метаболической реконструкции, показав полную согласованность предсказаний основанных на

геномных данных и результатов фенотипических экспериментов.

### 3. Дискуссия

Метаболические пути катаболизма сахаров отличаются особым разнообразием среди 19 видов *Shewanella* и делятся на хорошо консервативные пути (4 пути, присутствуют в >70% геномов), относительно консервативные (4 пути), и редкие (9 путей, присутствуют в 1-4 геномах *Shewanella*). Редкие пути были, по-видимому, занесены в результате событий горизонтального переноса от других бактерий, и отражают результат возможной адаптации бактерий к специальным внешним условиям (например, *S. frigidimarina*, *S. pealena* имеют различные наборы из трех редких путей).

Наибольшая группа новых генов, которая отличает пути утилизации сахаров в *Shewanella* от ранее изученных путей представлена транспортерами, необходимыми для специфического транспорта утилизируемых сахаров внутрь клетки. Из 49 генов приписанных к данной роли в *Shewanella*, 34 гена кодируют новые компоненты транспортных систем. В отличие от энтеробактерий, *Shewanella* не используют транспортеры PTS типа, и редко используют ABC транспортеры; большинство сахарных транспортеров в *Shewanella* принадлежат к нескольким семействам пермеаз (осуществляют транспорт метаболита через внутреннюю мембрану), а также новому семейству TopB-зависимых транспортеров (осуществляют транспорт метаболитов через внешнюю мембрану).

Другим, крайне измененным аспектом системы утилизации сахаров в *Shewanella* является механизм их транскрипционной регуляции. Реконструкция сахарных регулонов показала, что 11 из 17 обнаруженных регулонов в *Shewanella* контролируются новыми транскрипционными факторами, не имеющими ортологов в энтеробактериях. Наиболее распространенными семействами сахарных регуляторов являются LacI, GntR и DeoR.

### 4. Литература

- [1] R. Overbeek, T. Begley, R.M. Butler, J.V. Choudhuri, H.Y. Chuang, M. Cohoon, V. de Crecy-Lagard, и др.: "The subsystems approach to genome annotation and its use in the project to annotate 1000 genomes", *Nucleic Acids Res.*, 2005, Vol. 33, pp. 5691-5702.
- [2] D.A. Rodionov. "Comparative genomic reconstruction of transcriptional regulatory networks in bacteria", *Chem. Rev.*, 2007, Vol. 107, pp.3467-3497

# Parallel evolutionary trajectories at sites of multiple amino acid replacements in *Drosophila* evolution

Nadegda Terekhanova, Georgii A. Bazykin

*Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Bolshoi Karetny pereulok 19, Moscow, 127994, Russia*

*Department of Bioengineering and Bioinformatics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Vorbyevy Gory 1-73, Moscow, 119992, Russia*

[gbazykin@iitp.ru](mailto:gbazykin@iitp.ru), [nadterekhanova@yandex.ru](mailto:nadterekhanova@yandex.ru)

## Abstract

*Homoplasies, and parallelisms in particular, can carry information about the fitness landscape. We studied the codons in which the same amino acid originated by two nonsynonymous substitutions from a common ancestor twice independently in the phylogeny of *Drosophila* genus. Under a neutral evolution scenario, the two substitutions in such codons will have proceeded in a random order, and we correspondingly expect that the order of these substitutions in different species will coincide in 50% of cases. However, in 23 of 30 such cases, both substitutions occurred in the same order, i.e. went through the same intermediate amino acid, as evidenced by an ingroup species. This result implies that the fitness of the two intermediate variants in two-substitution codons is usually substantially different, with one variant being more fit than the other.*

## 1. Introduction

Amino acids at orthologous positions of proteins are prone to parallel substitutions. Such extensive parallelism can be due either to parallel episodes of positive selection favoring the same substitution in different species, or to negative selection favoring a constant limited set (covarion) of amino acids at each site [1, 2].

Not just individual substitutions, but whole sets of amino acid substitutions can proceed in parallel, especially under strong positive selection [3, 4]. However, the fitness of the intermediate variants in such rapid successions of substitutions is usually unknown. In particular, it is unknown whether the order of substitutions matters; i.e., whether the different intermediate variants have substantially different fitness.

## 2. Methods

Multiple alignments of genome assemblies of 11 *Drosophila* species to *D. melanogaster* (dm2) were obtained from UCSC Genome Bioinformatics Site (<http://genome.ucsc.edu>). The set of FlyBase canonical splice variants (BDGP release 4) was used to map *D. melanogaster* protein-coding genes onto the alignment. Multiple alignment of each coding region was then obtained by joining the aligned segments corresponding to exons of FlyBase canonical genes in *D. melanogaster*. Codons masked by RepeatMasker, not aligned, or containing gaps or non-ACGT characters, as well as codons within 6 nucleotides of any of such codons in *D. yakuba*, *D. erecta*, *D. ananassae*, *D. pseudoobscura*, *D. persimilis*, *D. willistoni*, *D. virilis*, *D. mojavensis*, or *D. grimshawi*, were excluded from analysis.

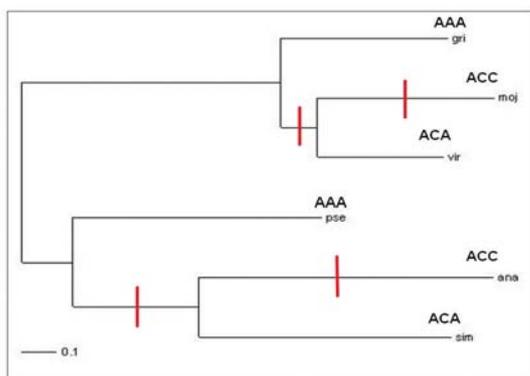
For the analysis of pairs of substitutions at a single codon, only those cases were considered where both substitutions are non-synonymous along each of the two possible paths between the two codons [5]. We only considered codon sites where in each of the *D. simulans* and *D. sechellia* and *D. pseudoobscura* and *D. persimilis* pairs of species both species carry the same amino acid, in order to make sure that the results are not affected by sequencing errors. Amino acid-level common ancestry was inferred [5].

## 3. Results and Discussion

We analyzed the cases in which an identical pair of amino acid substitutions occurred independently in two parts of the *Drosophila* phylogeny: between *D. ananassae* and *D. pseudoobscura*, on the one hand, and between *D. mojavensis* and *D. grimshawi*, on the other hand (Figure). We only selected the cases in which both substitutions happened along the same branch of the phylogeny in each subtree,

specifically, in *D. ananassae* branch and in *D. mojavensis* branch. Next, where possible, we used the ingroup species (*D. simulans* and *D. virilis*, respectively) to identify the state of the intermediate variant (Table).

**Figure.** Phylogeny of the analyzed *Drosophila* species. An example set of orthologous codons is shown. In this example, the intermediate states in both sequences of double substitutions coincide.



**Table.** Patterns of parallel double nonsynonymous substitutions in *Drosophila* phylogeny. Columns correspond to the ingroup state along *D. ananassae* branch; rows correspond to the ingroup state along *D. mojavensis* branch. “With ancestor”, ingroup coincides with the ancestral amino acid; “with descendant”, ingroup coincides with the descendant amino acid; “intermediate”, ingroup coincides with an intermediate amino acid; “away”, intermediate state unknown due to divergence of the ingroup species.

dana, dsim, dpse dgri, dmoj, dvir	With ancestor	With descendant	Intermediate	away
With ancestor	12	12	13	18
With descendant	12	16	15	11
Intermediate	10	14	30	19
away	4	7	4	13

In 30 cases, the intermediate state of the pair of parallel substitutions could be established in each of the two subtrees (Table). In 23 (77%) of these cases, both substitutions proceeded through the same intermediate state, while only 15 (50%) of such cases are expected if the order of the substitutions was random (chi-square,  $p=0.03$ ).

It is unlikely that this difference from expectations is due to mutation effects. Indeed, the same pair of nucleotide substitutions is involved in the two-substitution codons, no matter whether the intermediate state was the same or different. Therefore, the non-uniformity of mutation rates shouldn't lead to the observed effect. Strong context-specific non-uniformities of mutation rates are unknown in *Drosophila*.

Therefore, the frequent coincidence of the intermediate states in parallel pairs of substitutions implies that the two intermediate states differ in their fitness, with one intermediate being substantially more fit than the other.

Our analysis doesn't reveal the relative fitnesses of the ancestral and the derived codons. Rapid changes in two-substitution codons have been interpreted as the evidence of positive selection [5, 6, 7, 8]. However, our analysis only deals with the cases in which the intermediate state could be inferred from the ingroup, and by selecting such cases, we enrich our sample for “slow” pairs of substitutions. As a result, we can't say if the analyzed pair of substitutions was positively selected or neutral. In either case, however, the observed difference in fitness of the two intermediate states implies that the evolution of two-substitution codons typically proceeds along a fitness ridge.

[1] G. A. Bazykin, F. A. Kondrashov, M. Brudno, A. Poliakov, I. Dubchak and A. S. Kondrashov, *Extensive parallelism in protein evolution* (Biology Direct (2007), 2:20 doi:10.1186/1745-6150-2-20)

[2] A. Rokas and S. B. Carroll, *Frequent and Widespread Parallel Evolution of Protein Sequences* (Mol. Biol. Evol. **25**,1943–54 (2008))

[3] T. Karasov, P. W. Messer, and D. A. Petrov, submitted

[4] S. F. Elena and R. E. Lenski, *Evolution experiments with microorganisms: the dynamics and genetic bases of adaptation* (Nature reviews, **4**, 457-71(2003))

[5] G. A. Bazykin, F. A. Kondrashov, A. Y. Ogurtsov, S. Sunyaev, A. S. Kondrashov, *Nature* **429**, 558-62 (2004).

[6] G. A. Bazykin, J. Dushoff, S. A. Levin, A. S. Kondrashov, *Proc Natl Acad Sci U S A* **103**, 19396-401 (2006).

[7] Meer et al. submitted

[8] Bazykin and Kondrashov submitted

## High Frequency of Reversals in Evolution of Vertebrates and Insects

S. Naumenko  
*D.Mendeleyev University  
of Chemical Technology  
of Russia,  
Keldysh Institute of  
Applied Mathematics of  
the Russian Academy of  
Sciences*  
[sergey.naumenko@yahoo.com](mailto:sergey.naumenko@yahoo.com)

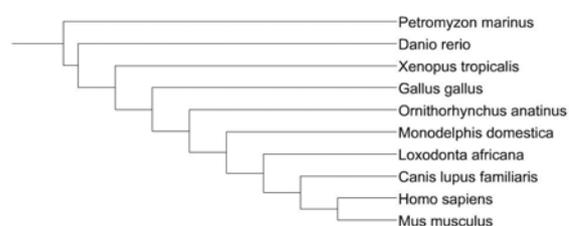
A. Kondrashov  
*Life Sciences Institute and  
Department of Ecology  
and Evolutionary  
Biology, University of  
Michigan*  
[kondrash@umich.edu](mailto:kondrash@umich.edu)

G. Bazykin  
*Institute for Information  
Transmission Problems of  
the Russian Academy of  
Sciences (Kharkevich  
Institute)*  
[gbazykin@iitp.ru](mailto:gbazykin@iitp.ru)

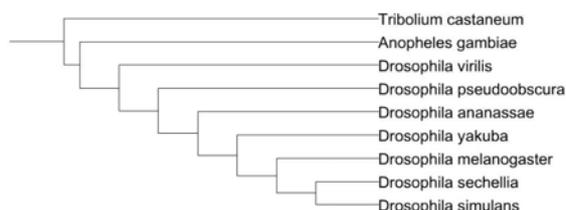
### Abstract

*Functional evolution of protein sequences takes place on a fitness landscape, and each amino acid substitution can increase or decrease fitness or leave it invariant. The rate of reversals – amino acid substitutions that give rise to an ancestral amino acid – is relevant to the shape of the fitness landscape and its dynamics. Here, we show that reversals are very frequent in evolution of vertebrates and insects. The fact that amino acid has been present in the evolutionary history of a given amino acid position significantly increases the probability of reversal into this amino acid. The rate of reversals decreases with increased phylogenetic distance.*

We studied how the probability of an amino acid substitution at a site depends on the fact that the target amino acid has already been present at this site at some point in its evolutionary history. We used parsimony to map the amino acid substitution events onto the phylogenies of 10 vertebrate species (Fig.1) and 9 insect species (Fig.2). Specifically, we analyzed how the rate of the substitution between H. sapiens (D. simulans) and M. musculus (D. sechellia) depends on the rate of the reciprocal substitution at different phylogenetic distances, as evidenced by different pairs of outgroups. Two outgroup species were always required to support the ancestral state, and three other species were required to support the intermediate state, in order to avoid ambiguity in parsimony inference.



**Figure 1. Phylogenetic tree of 10 vertebrates**



**Figure 2. Phylogenetic tree of 9 insects**

Reversals are more likely than non-reversing amino acid substitutions both in vertebrates (Table 1) and in insects (Table 1, 2). Increased probability of reversals can be due either to the constraint on the set of the permitted amino acid at a given site or to changes in the structure of the fitness landscape [1,2].

**Table 1. Frequencies of reversals for vertebrate species**

Outgroup	xyyyxx/ yyyyxx	xyyy?/?/ yyyy?/?	D
M.Dom O.Ana	0,0379	0,0084	4,512
O.Ana G.Gal	0,0346	0,0081	4,272
G.Gal X.Tro	0,0273	0,008	3,413
X.Tro D.Rer	0,0202	0,0077	2,623
D. Rer P. Mar	0,0158	0,0071	2,225

**Table 2. Frequencies of reversals for insect species**

Outgroup	xyyxx/ yyyxx	xyyy?/? yyyy??	D
D.Ana .Pse	0,0137	0,0085	1,612
D.Pse D.Vir	0,0090	0,0085	1,059
D.Vir A.Gam	0,0102	0,0085	1,200
A.Gam T.Cas	0,0080	0,0085	0,941

The rate of reversal decreases with the increased phylogenetic distance (Table 1). For example, the presence of an amino acid in the last common ancestor of mammals is a 2-fold better predictor of an amino acid substitution between mouse and rat than its presence in the last common ancestor of all vertebrates, although the effect is still strong at all analyzed phylogenetic distances.

The higher rate of reversals at low phylogenetic distances seems to argue for the nearly neutral substitutions within a permitted set, and against positive selection on a variable landscape, as a cause of reversals.

## References

- [1] G.A. Bazykin, F.A. Kondrashov, M. Brudno, A. Poliakov, I. Dubchak, and A.S. Kondrashov, "Extensive parallelism in protein evolution", *Biology Direct*, 2:20, 2007.
- [2] A. Rokas and S.B. Carroll, "Frequent and Widespread Parallel Evolution of Protein Sequences", *Mol.Biol.Evol.*, 25(9), pp. 1943-1953, 2008.

## Оценка варибельности протоспейсеров CRISPR-систем фагов, специфичных к *Xanthomonas oryzae*

Москвин Илья Александрович  
Московский государственный  
университет им. М. В. Ломоносова  
iamoskvin@gmail.com

Артамонова Ирена Игоревна  
Институт общей генетики им. Н. И.  
Вавилова РАН, Институт проблем  
передачи информации им. А.А.  
Харкевича РАН,  
irenant@gmail.com

### Аннотация

CRISPR-системы обеспечивают бактериям иммунитет к фагам и требуют точного соответствия последовательностей спейсера CRISPR-кассеты и протоспейсера в геноме фага. Малоизученным является вопрос о механизмах вставки нового спейсера в кассету. В частности, представляется интересным, выбираются ли в качестве протоспейсеров случайные участки фагового генома или же в их роли может выступать ограниченное количество фрагментов генома, несущих определенные сигналы. В первом случае варибельность последовательностей, ортологичных протоспейсерам, в геномах родственных бактериофагов ожидается такая же, как и в среднем для геномов, тогда как, во втором случае протоспейсеры могут подвергаться более сильному давлению отбора из-за частого встраивания в CRISPR-кассеты, а значит, будут более изменчивы, нежели геномы в среднем. В данной работе мы сравнивали варибельность протоспейсеров со средним значением варибельности для геномов близкородственных бактериофагов, специфичных к *Xanthomonas oryzae*. Статистически достоверных отличий выявлено не было.

### 1. Введение

У бактерий и архей имеется система защиты от чужеродной ДНК, основанная на специфическом узнавании ДНК, когда-либо уже заражавшей клетку, и последующей ее деградации [1]. Основу ее составляют CRISPR-кассеты (кластеры коротких повторяющихся последовательностей), которые состоят из прямых консервативных повторов ДНК длиной от 21 до 48 п.н. Повторяющиеся последовательности специфичны для конкретной CRISPR-системы и разделены варибельными последовательностями,

называемыми спейсерами. Длина последних обычно составляет от 20 до 58 п.н. Показано, что при заражении бактериофагом бактерии, имеющей CRISPR-кассету, может происходить добавление к кассете нового спейсера, идентичного по последовательности участку фагового генома (этот участок в геноме называют протоспейсером), что придает иммунитет такой бактерии к фагу [2]. Однако для потери иммунитета достаточно мононуклеотидной замены в протоспейсере [2].

Неясным остается вопрос о том, выбираются ли в качестве протоспейсеров случайные участки фагового генома или же в их роли может выступать ограниченное количество фрагментов генома, несущих определенные сигналы. В первом случае варибельность последовательностей, ортологичных протоспейсерам, в геномах родственных бактериофагов ожидается такая же, как и в среднем для геномов, потому что после единичной замены протоспейсер перестает подвергаться дополнительному давлению естественного отбора, определяемого взаимодействием фага с CRISPR-системой. Напротив, во втором случае протоспейсеры могут подвергаться более сильному давлению отбора из-за частого встраивания в CRISPR-кассеты, а значит, будут более изменчивы, нежели геномы в среднем (так как после встраивания протоспейсера, фаги, несущие хотя бы единичную мутацию в протоспейсеры, получают преимущество).

Задачей данной работы было сравнить варибельность протоспейсеров с таковой для геномов в среднем у близкородственных бактериофагов. Удобным объектом для такого исследования является протеобактерия *Xanthomonas oryzae* и ее бактериофаги. Для разных штаммов *X. oryzae* известны CRISPR-кассеты, содержащие от 48 до 75 спейсеров [3], а кроме того, сиквенированы полные геномы

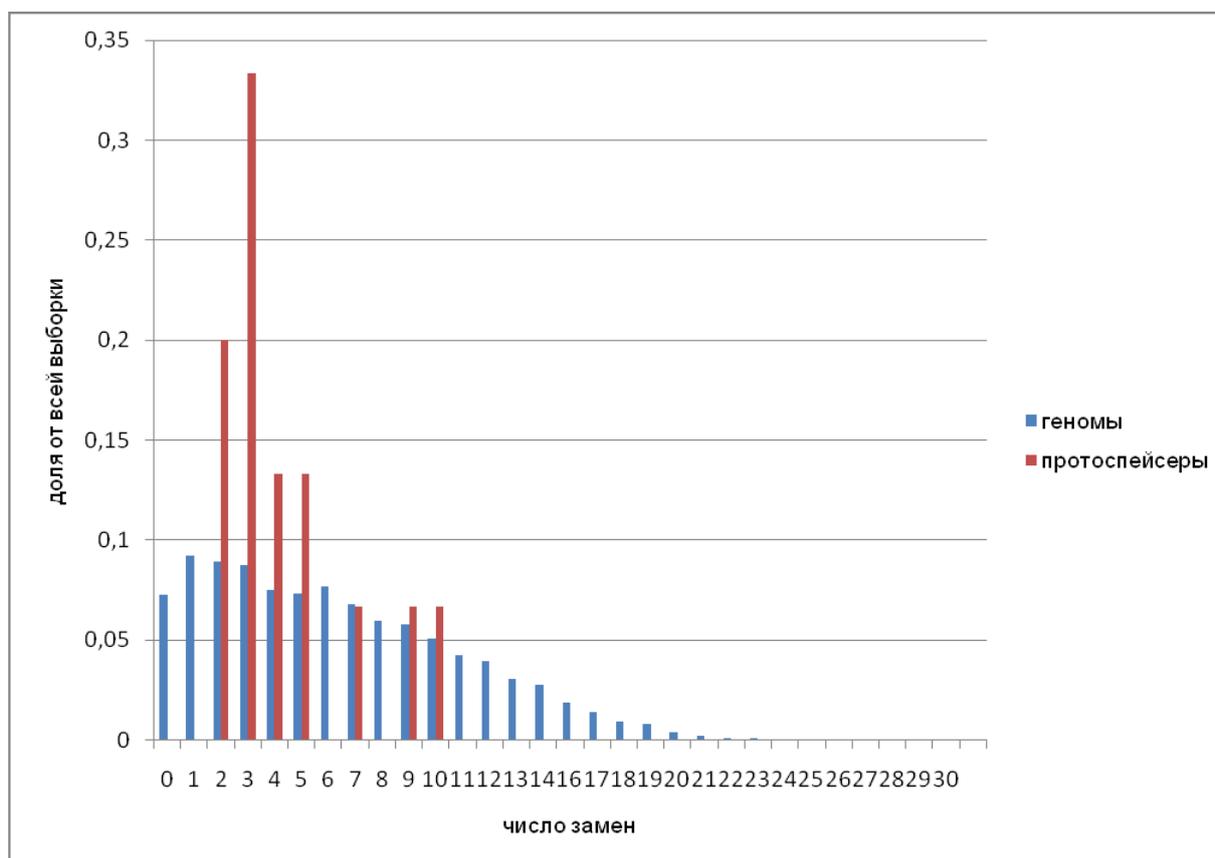
нескольких бактериофагов, специфичных к этой бактерии [4, 5].

## 2. Результаты

Из базы данных GenBank (<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/Genbank>) были получены последовательности геномов трех бактериофагов, поражающих *Xanthomonas oryzae*: Xanthomonas phage OP1 (AP008979), Xanthomonas phage Хор411 (DQ777876), Xanthomonas phage Хр10 (AY299121). Глобальное выравнивание геномов проводили при помощи программы mVista (<http://genome.lbl.gov/vista/mvista/submit.shtml>). Гомология составила 85-88%. Далее искали протоспейсеры в этих геномах, выравнивая геномы со спейсерами CRISPR-кассет доступных штаммов *X. oryzae* (данные получены из базы данных CRISPRdb [6]) при помощи BLAST и подсчитывали число несовпадений

в протоспейсерах для трех геномов. Параллельно при помощи python-скрипта на основе геномного выравнивания считали количество замен в 30-нуклеотидных (средний размер спейсера) фрагментах вдоль всего выравнивания с шагом в один нуклеотид. Полученные распределения представлены на рисунке 1.

На завершающем этапе проверяли гипотезу о различии полученных распределений числа замен в протоспейсерах и полных геномах в среднем по методу Колмогорова-Смирнова. В результате, статистически значимых различий между двумя распределениями при уровне значимости 0.05 не обнаружили (вероятность ошибки первого рода больше 0,1). Таким образом, в данной работе мы не смогли выявить отличие варибельности протоспейсеров от среднего значения варибельности для геномов близкородственных бактериофагов, специфичных к *Xanthomonas oryzae*.



**Рисунок 1.** Распределения частот встречаемости протоспейсеров или 30-нуклеотидных фрагментов выравнивания геномов фагов OP1, Хор411 и Хр10, содержащих различное число замен.

## 3. Список литературы

[1] Kunin, V., R. Sorek, and P. Hugenoltz, *Evolutionary conservation of sequence and*

*secondary structures in CRISPR repeats.* Genome Biol, 2007. 8(4): p. R61.

[2] Barrangou, R., et al., *CRISPR provides acquired resistance against viruses in*

- prokaryotes*. Science, 2007. **315**(5819): p. 1709-12.
- [3] Salzberg, S.L., et al., *Genome sequence and rapid evolution of the rice pathogen Xanthomonas oryzae pv. oryzae PXO99A*. BMC Genomics, 2008. **9**: p. 204.
- [4] Yuzenkova, J., et al., *Genome of Xanthomonas oryzae bacteriophage Xp10: an odd T-odd phage*. J Mol Biol, 2003. **330**(4): p. 735-48.
- [5] Lee, C.N., et al., *Comparison of genomes of three Xanthomonas oryzae bacteriophages*. BMC Genomics, 2007. **8**: p. 442.
- [6] The CRISPRdb database and tools to display CRISPRs and to generate dictionaries of spacers and repeats. BMC Bioinformatics. 2007 May 23;8(1):172.

## Эволюция сайтов сплайсинга: изменения в отдельных позициях и в сайтах в целом

Степан Денисов<sup>1</sup>, Александр Фаворов<sup>2</sup>, Андрей Миронов<sup>1,3</sup>, Рамиль Нуртдинов<sup>4</sup>,  
Михаил Гельфанд<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Факультет биоинженерии и биоинформатики МГУ им. М.В. Ломоносова,

<sup>2</sup> Johns Hopkins University

<sup>3</sup> ИППИ РАН им. А.А. Харкевича

<sup>4</sup> INSERM U563, University of Toulouse

stepan@bioinf.fbb.msu.ru

### Аннотация

Сайты сплайсинга являются высококонсервативными последовательностями в геномах эукариот. Они маркируют границы экзонов и интронов. В данной работе исследовалась эволюция сайтов сплайсинга на нуклеотидном уровне. Для каждой позиции и для каждой ветки дерева были посчитаны матрицы замен с использованием метода максимального правдоподобия. Были проанализированы некоторые свойства полученных матриц: несимметричность матриц, "предковый", "потомковый" и стационарный вектора частот нуклеотидов. Во многих случаях стационарные вектора существенно отличались как от соответствующих "предковых" векторов, так и от векторов в потомке (т.е. в геномах человека, мыши или собаки). Было обнаружено, что в зависимости от типа сайта (донорный/акцепторный) и от вида альтернативы (кассетный/конститутивный экзон) вес сайта может как увеличиваться от предка к потомку, так и уменьшаться. Данный эффект зачастую весьма слабый, но статистически значимый. Кроме того было показано, что в большинстве случаев мутации в сайтах не происходят независимо друг от друга. Мутации в одних позициях часто компенсируются мутациями в других позициях так, что сила сайта остается относительно стабильной.

### 1. Введение

Сайты сплайсинга являются высококонсервативными последовательностями в

геномах эукариот. Они играют ключевую роль в экспрессии генов. Сайты сплайсинга маркируют границы экзонов и интронов. Сплайсосома связывается непосредственно с этими последовательностями, после чего осуществляет реакции сплайсинга [1]. Целью данной работы является исследование эволюции сайтов сплайсинга на нуклеотидном уровне: проанализировать паттерн замен в каждой позиции и сравнить (посчитанную) силу сайтов в предполагаемом общем предке и в каждом из потомков. Все эволюционные события рассматривались независимо на каждой ветке филогенетического дерева для разных альтернатив (кассетный/конститутивный экзон) и отдельно для донорных и акцепторных сайтов.

### 2. Материалы и методы

#### 2.1. Выборка

Изначальная выборка состояла из ~30000 тройных выравниваний ортологичных донорных сайтов сплайсинга и такого же числа акцепторных сайтов из геномов человека (*H. sapiens*), мыши (*M. musculus*) и собаки (*C. familiaris*) из базы данных EDAS (<http://edas.bioinf.fbb.msu.ru/>, [2]). Выравнивания являются безделеционными, сопоставление букв основано на выравнивании экзон-интронных границ. В выборку попали только сайты, функциональность которых подтверждена наличием мРНК/EST в геномах человека и мыши. Выборка разделена на подвыборки в зависимости от типа сайта (донорный / акцепторный), вида альтернативы (константный экзон / кассетный экзон) и генома, в котором определялся вид альтернативы.

## 2.2. Восстановление вектора частот в предке и матриц переходных вероятностей на ветках.

Наша задача состояла в том, чтобы исходя из данных выравниваний сайтов, отдельно для каждой позиции выравнивания восстановить частоты нуклеотидов в предке (вектор частот) и матрицы переходных вероятностей по каждой ветке филогенетического дерева.

Под переходными вероятностями подразумеваются условные вероятности  $p(X|Y)$  нуклеотида  $X$  в потомке (т.е. человеке, мыши или собаке), при условии наличия нуклеотида  $Y$  в предке. А предковый вектор – это вектор  $(p(Y=A), p(Y=C), p(Y=G), p(Y=T))$ .

В методе максимального правдоподобия максимизируется вероятность наблюдать имеющиеся данные (в нашем случае – это набор выравниваний, точнее – набор колонок выравниваний, соответствующих одной и той же позиции) при условии данной топологии дерева. Оптимизируемыми параметрами являются переходные вероятности и предковый вектор. Мы применили метод, подобный максимальному правдоподобию. По своей сути он близок к методу максимального правдоподобия, т.к. также решает задачу аппроксимации данных (data fitting).

Введём обозначения. Исходными данными являются тройки BCD, где  $B = \{b_1...b_k\}$  – сайт (последовательность) в геноме человека,  $C = \{c_1...c_k\}$  – ортологичный сайт в геноме мыши и  $D = \{d_1...d_k\}$  – ортологичный сайт в геноме собаки,  $k$  – длина сайта.  $A = \{a_1...a_k\}$  – сайт в геноме общего предка человека, мыши и собаки (неизвестен).

Рассмотрим множество выравниваний сайтов. Вычленим столбцы, соответствующие определенной позиции в выравнивании (позиции  $l$ ). Теперь для каждой позиции мы имеем множество столбцов – троек ортологичных букв. Всего существует  $4^3 = 64$  различных типов троек букв. Вероятность наблюдать заданную тройку в позиции  $l$  можно оценить из частоты данной тройки среди всех наблюдаемых.

Можно записать следующую систему уравнений:

$$P(AAA) = \sum_{a_l} p(a_l) p(b_l = A | a_l) p(c_l = A | a_l) p(d_l = A | a_l)$$

$$P(AAC) = \sum_{a_l} p(a_l) p(b_l = A | a_l) p(c_l = A | a_l) p(d_l = C | a_l)$$

.....

$$P(TTT) = \sum_{a_l} p(a_l) p(b_l = T | a_l) p(c_l = T | a_l) p(d_l = T | a_l)$$

Данная система уравнений является переопределенной (64 уравнения и 39 независимых переменных). Приближенное решение данной системы (минимизирующее “неувязку” правой и левой частей уравнений) находилось методом наименьших квадратов. Найденные приведенным способом матрицы переходных вероятностей и вектор частот в предке использовались для последующего анализа, в частности для нахождения собственных векторов матриц.

## 2.3. Оценка устойчивости решений: бутстреп.

Для того чтобы оценить насколько найденные матрицы переходных вероятностей и вектора частот в предке, а также вычисляемые с их помощью собственные векторы и векторы частот в потомках устойчивы относительно данной выборки сайтов, была проведена процедура бутстрепа. Будем называть все эти переменные – оцениваемые параметры.

Процедура состояла в следующем. Рассмотрим выборку сайтов, на которой мы считаем все оцениваемые параметры. Случайным образом выбираем с возвращением из нее элементы, причем столько раз, каков размер изначальной выборки. Получим другую выборку того же размера, что и была изначальная. Заметим, что она отличается от изначальной тем, что некоторые элементы первой выборки могут входить во вторую несколько раз, когда как другие отсутствовать вовсе.

На сгенерированной таким способом выборке считаем все оцениваемые параметры. Повторяем процедуру многократно (100 – 500 раз) и оцениваем насколько существенно оцениваемые параметры варьируют (считаем среднее и среднеквадратичное отклонение).

## 2.4. Вычисление вероятностей наблюдения сайта у предка.

Рассмотрим конкретное выравнивание. Сайты в этом выравнивании ортологичны друг другу, т.е. у общего предка рассматриваемых организмов имелся сайт, от которого они произошли. Мы не знаем каков был этот сайт, однако можем оценить вероятность того, что та или иная последовательность была предковой для данных трех сайтов.

Используем принятые ранее обозначения. Предполагая, что разные нуклеотиды внутри сайта эволюционируют независимо друг от друга, вероятность, того, что последовательность  $A$

является предковой для сайтов В, С и D будет равна:

$$p(A|BCD) = \prod_{l=1}^k p(a_l | b_l c_l d_l), \text{ где}$$

$p(a_l | b_l c_l d_l)$  - вероятность того, что в позиции  $l$  стоит нуклеотид  $a_l$ , при условии того, что нуклеотиды потомков в данной позиции - это  $b_l, c_l$  и  $d_l$

Вероятность наблюдать в какой-то позиции  $l$  нуклеотиды  $a_l, b_l, c_l$  и  $d_l$  в предке и тех потомках соответственно равна

$$p(a_l b_l c_l d_l) = p(a_l) p(b_l | a_l) p(c_l | a_l) p(d_l | a_l).$$

По формуле Байеса имеем:

$$\begin{aligned} p(a_l | b_l c_l d_l) &= \frac{p(a_l b_l c_l d_l)}{\sum_{x \in \{A, C, G, T\}} p(x b_l c_l d_l)} = \\ &= \frac{p(a_l) p(b_l | a_l) p(c_l | a_l) p(d_l | a_l)}{\sum_{x \in \{A, C, G, T\}} p(x) p(b_l | x) p(c_l | x) p(d_l | x)}. \end{aligned}$$

Итого, получаем, что , вероятность, того, что последовательность  $A$  является предковой для сайтов  $B, C$  и  $D$  равна

$$p(A|BCD) = \prod_{l=1}^k \frac{p(a_l) p(b_l | a_l) p(c_l | a_l) p(d_l | a_l)}{\sum_{x \in \{A, C, G, T\}} p(x) p(b_l | x) p(c_l | x) p(d_l | x)}.$$

## 2.5. Вес сайта.

Вес сайта вычислялся по формуле:

$$\begin{aligned} W(S) &= \log \frac{p(S|M)}{p(S|R)} = \\ &= \log \frac{\prod_{\alpha} \prod_{i=1}^N p_M(\alpha, i)^{\delta(\alpha, S(i))}}{\prod_{\alpha} \prod_{i=1}^N p_R(\alpha, i)^{\delta(\alpha, S(i))}} = \\ &= \sum_{i=1}^N \log \frac{\prod_{\alpha} p_M(\alpha, i)^{\delta(\alpha, S(i))}}{\prod_{\alpha} p_R(\alpha, i)^{\delta(\alpha, S(i))}} \end{aligned}$$

Обозначения:  $p(S|M)$  – вероятность последовательности в данной модели,  $p(S|R)$  – вероятность последовательности в случайной модели,  $\alpha \in \{A, C, G, T\}$ ,  $\delta(\alpha, S(i)) = 1$ , если  $\alpha = S(i)$  и  $\delta(\alpha, S(i)) = 0$ , если  $\alpha \neq S(i)$ ,  $p_M(\alpha, i)$  - вероятность нуклеотида  $\alpha$  в позиции  $i$  в соответствии с данной моделью,  $p_R(\alpha, i)$  - вероятность нуклеотида  $\alpha$  в позиции  $i$  в соответствии со случайной моделью.

$p_M(\alpha, i)$  в нашем случае равна частоте нуклеотида  $\alpha$  в позиции  $i$  в позиционной матрице частот с учетом псевдокаунтов. Для того, чтобы понять насколько выбор позиционной матрицы влияет на величину веса, использовались несколько разных позиционных матриц: а)

матрица, построенная по набору сайтов данного организма (например, множество сайтов В для человека), б) матрица, построенная по множеству предковых сайтов.

$p_R(\alpha, i)$  считалась равной 0,25 для всех  $\alpha$  и  $i$ . Стоит отметить, что выбор случайной модели не имеет значения, т.к. для нас важен не вес сайта, а разница весов сайтов. Как несложно видеть, при неизменной случайной модели, разница весов двух сайтов не зависит от  $p(S|R)$  [2].

## 2.6. Оценка изменения веса сайта.

Для удобства в качестве сайта в потомке будем рассматривать  $B$ . Понятно, что аналогичные рассуждения могут быть перенесены на сайты  $C$  и  $D$ .

Задача состоит в том, чтобы установить, как вес сайта изменялся от предка к потомку.

Вес предкового сайта - это математическое ожидание веса всех возможных сайтов в предке. Рассмотрим это подробнее. Возьмём конкретную тройку  $BCD$  из выборки. Рассмотрим случайную величину  $w(A^*) - w(B)$ , где  $A^*$  пробегает все возможные сайты (их кол-во  $4^k$ , где  $k$  – длина сайта)). Для каждого  $A^*$  и  $BCD$  мы знаем  $p(A^*|BCD)$  (см. выше). Теперь оценим насколько изменяется вес сайта между “предковым” и “потомковым” состояниями. Для этого рассмотрим случайную величину  $w(A^*) - w(B)$ , где  $A^*$  пробегает все возможные сайты, а  $B$  – все “предковые” сайты из выборки. Теперь просуммируем по всем возможным  $A^*$ . Получим следующую случайную величину:

$$\begin{aligned} \sum_{A^*} [w(A^*) - w(B)] p(A^*|BCD) &= \\ &= \sum_{A^*} w(A^*) p(A^*|BCD) - w(B). \end{aligned}$$

Данная величина принимает разные значения для каждого  $BCD$  из выборки. Первая часть этого выражения по сути есть средний вес “предкового” сайта  $\langle w(A^*) \rangle$ .

Принимая во внимание аддитивность веса ( $w(A^*) = \sum_{i=1}^k w(a_i^*)$ ) и взаимную независимость позиций

$$(p(A^*|BCD) = \prod_{i=1}^k p(a_i^* | b_i c_i d_i)) \text{ путем}$$

преобразований получим, что средний вес “предкового” сайта равен

$$\begin{aligned} \langle w(A^*) \rangle &= \sum_{A^*} w(A^*) p(A^*|BCD) = \dots = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{a_i^*} w(a_i^*) p(a_i^* | b_i c_i d_i) \end{aligned}$$

В итоге, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{A^*} [w(A^*) - w(B)] p(A^* | BCD) = \\ & = \sum_{l=1}^k \sum_{a_l^*} w(a_l^*) p(a_l^* | b_l, c_l, d_l) - w(B). \end{aligned}$$

Для этой случайной величины строится гистограмма оцениваются параметры, такие как мат. ожидание и медиана.

## 2.6. Проверка предположения о независимости изменений в различных позициях.

Необходимо ответить на следующий вопрос: зависит ли изменение весов отдельных позиций друг от друга? Для того чтобы это сделать, необходимо смоделировать эволюцию последовательностей при условии взаимной независимости позиций и сравнить полученные данные с реально наблюдаемыми.

Предположим, что позиции эволюционируют независимо друг от друга. Возьмем тройку BCD и всех её возможных предков  $A^*$  (их количество равно  $4^k$ , где  $k$  – длина сайта). Для любой  $A^*$ , мы знаем вероятность появления из нее в результате эволюционного процесса любой заданной последовательности в предке  $B^{**}$ :

$$p(B^{**} | A^*) = \prod_{l=1}^k p(b_l | a_l)$$

Вероятность наблюдать в предке любую заданную последовательность  $B^{**}$  при условии данной тройки сайтов BCD и учитывая предположение о независимости эволюции позиций будет равна:

$$p(B^{**} | BCD) = \sum_{A^*} p(B^{**} | A^*) p(A^* | BCD).$$

Таким образом, для каждой тройки реально наблюдаемых сайтов BCD, можно разыграть в соответствии с вероятностью, написанной выше случайного “потомка”  $B^{**}$  (а также, аналогично,  $C^{**}$  и  $D^{**}$ ). Затем сравниваются дисперсии случайных величин  $w(B)$  и  $w(B^{**})$ , а также  $w(C)$  и  $w(C^{**})$ ,  $w(D)$  и  $w(D^{**})$ .

Если дисперсии оказываются равными (точнее статистический тест на равенство дисперсий не позволяет сделать обратного утверждения), то нет оснований полагать, что позиции эволюционируют независимо. Если дисперсия  $w(B)$  оказывается меньше дисперсии  $w(B^{**})$ , то это свидетельствует о наличии компенсаторных мутаций. Скажем, если одна мутация приводит к увеличению веса сайта, то другая, компенсаторная, приводит к его уменьшению или наоборот. Понятно, что в компенсации могут участвовать не две, а несколько мутаций в разных позициях. Если ситуация обратная, т.е. дисперсия  $w(B^{**})$  меньше

дисперсии  $w(B)$ , то имеет место антикомпенсация.

## 3. Результаты и обсуждение

### 3.1. Эволюция индивидуальных позиций сайтов сплайсинга.

Рассмотрим какую-то позицию в сайте сплайсинга. Какие эволюционные события произошли в этой позиции? Для каждой позиции и для каждой ветви филогенетического дерева мы имеем матрицу переходных вероятностей, а также вектор частот в предке.

Полученная матрица ( $M$ ) обладает следующим свойством:

$$M \times a = d,$$

где  $a$  – вектор-столбец частот нуклеотидов в данной позиции в предке (**ancestor**),

$d$  – вектор-столбец частот нуклеотидов в данной позиции в потомке (**descendant**).

Отсюда мы находим вектор частот в потомке для данной матрицы. Разница между частотами нуклеотидов в предке и потомке в часто невелика, однако в некоторых случаях статистически значима. Мы измеряли средний вес данной позиции в предке  $w(a)$  и в потомке  $w(d)$  и сравнивали эти величины на каждой из выборок сайтов. Статистическую значимость того, что среднее величины  $w(d) - w(a)$  отличается от нуля была подсчитана с помощью бутстрепа (см. Материалы и методы).

Во многих подвыборках донорных сайтов как кассетных, так и конститутивных экзонов с течением эволюции уменьшается вес позиции - 2(A). В эволюции акцепторных сайтов можно видеть уменьшение веса ряда позиций в полипиримидиновом тракте, причем это характерно для кассетных и для конститутивных экзонов. Однако на выборке конститутивных экзонов увеличивается вес в позиции -5(Y) в линии мыши. В позиции -3(C) и позиции -4(N) почти на всех подвыборках конститутивных экзонов наблюдается уменьшение веса. Аналогичная тенденция, но в меньшей степени имеет место у кассетных экзонов. Изменение веса чаще всего невелико (доли процента), но статистически значимо.

Представляется интересным для каждой матрицы вычислить стационарный вектор частот  $s$ , т.е. вектор, удовлетворяющий следующему соотношению:

$$M \times s = s$$

**Таблица 1. Медиана разницы весов сайтов между потомком и предком.**

Тип сайта	Вид альтернативы	Референтный геном*	Ветвь филоген. дерева			Ветвь филоген. дерева		
			человек	мышь	собака	человек	мышь	собака
PWM для расчета веса построена на:			сайтах потомка			сайтах предка		
Акцепт. сайт	Конститутивный экзон	чел.	-0,00520	-0,04510	-0,05654	-0,02081	-0,07202	-0,07503
		чел.+мышь	-0,00789	-0,04315	-0,05971	-0,02735	-0,06644	-0,08097
	Кассетный экзон	чел.	0,00063	0,00100	0,00132	0,00027	0,00064	0,00110
		чел.+мышь	0,00073	0,00073	0,00094	0,00056	0,00045	0,00068
Дон. сайт	Конститутивный экзон	чел.	0,00153	0,00151	0,00150	0,00154	0,00152	0,00151
		чел.+мышь	0,00153	0,00150	0,00150	0,00152	0,00151	0,00151
	Кассетный экзон	чел.	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007
		чел.+мышь	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003

Положительные значения соответствуют увеличению веса сайта от потомка к предку. Значения, выделенные серым цветом, не являются статистически значимыми (критерий знаков, р-значение > 0,01).

\*Референтный геном – это геном, по которому определялся вид альтернативы.

**Таблица 2. Разница стандартных отклонений между распределениями весов “реальных” сайтов и “виртуальных” сайтов (сгенерированных в предположении независимости эволюции позиций).**

Тип сайта	Вид альтернативы	Референтный геном	Ветвь филоген. дерева			Ветвь филоген. дерева		
			человек	мышь	собака	человек	мышь	собака
PWM для расчета веса построена на:			сайтах потомка			сайтах предка		
Акцепт. сайт	Конститутивный экзон	чел.	0,04254	0,045261	-0,01309	0,050333	0,035504	0,007378
		чел.+мышь	0,034612	0,054404	0,005792	0,04773	0,052519	0,004714
	Кассетный экзон	чел.	0,014393	0,041864	-0,00179	0,0315	0,018847	-0,00471
		чел.+мышь	0,03331	0,011916	0,008941	0,031132	0,033038	0,009172
Дон. сайт	Конститутивный экзон	чел.	0,0327	0,047856	0,046901	0,019377	0,060642	0,042536
		чел.+мышь	0,032659	0,048249	0,040817	0,06506	0,042173	0,046361
	Кассетный экзон	чел.	0,019338	0,029609	0,008352	0,014065	0,028978	-0,00682
		чел.+мышь	0,013123	0,059646	0,015451	0,01883	0,036784	-0,0021

Обозначения те же, что и в Таблице 1. Положительные значения соответствуют компенсации. Значения, выделенные серым цветом, не являются статистически значимыми (критерий Фишера, р-значение > 0,05).

Оказалось, что стационарные частоты букв практически в любой позиции существенно отличаются как от наблюдаемых частот (т.е. частот в потомке), так и от частот в общем предке. Это довольно неожиданное наблюдение можно интерпретировать следующим образом: в сайтах сплайсинга человека, мыши и собаки не достигнуто состояние эволюционного равновесия, т.е. в сайтах сплайсинга и сейчас продолжает идти направленная эволюция под действием отбора. Сравнение векторов  $s$  и  $d$  дает возможность контрастно выявить эволюционные тенденции, которые наблюдались на ветвях человека, мыши и собаки и наблюдаются в настоящий момент. Стоит, однако, отметить, что не стоит интерпретировать стационарные частоты, как те частоты, которые будут достигнуты когда-то в будущем. Это было бы верно, если матрица  $M$  осталась неизменной на протяжении долгого периода эволюции. И, конечно, это может быть совсем не так.

### 3.2. Эволюция сайтов в целом.

Как изменился средний вес сайтов в потомке по сравнению с весом сайтов в предке? Медиана разницы весов между потомком и предком представлена в Таблице 1. Из таблицы видно, на всех выборках, кроме выборки акцепторных сайтов конститутивных экзонов, вес сайта увеличивается в течение эволюции. Хотя данный результат является статистически достоверным, но величина эффекта невелика: обычно изменение веса составляет доли процента от веса сайта. Это вероятно объясняется относительно небольшим эволюционным расстоянием между рассматриваемыми видами. Зависит ли изменение весов отдельных позиций друг от друга? Для каждого реально наблюдаемого сайта в потомке (B, C или D) реконструировался “виртуальный” сайт  $B^{**}$ ,  $C^{**}$  и  $D^{**}$  соответственно в предположении, что позиции эволюционируют

независимо друг от друга. Сравнение дисперсий  $w(B)$  и  $w(B^{**})$ ,  $w(C)$  и  $w(C^{**})$  и  $w(D)$  и  $w(D^{**})$  позволяет ответить на поставленный вопрос (см. подробнее Материалы и методы). В Таблице 2 представлены среднеквадратичные отклонения весов реальных и “виртуальных” потомков. (По построению, средние этих величин равны). Видно, что в большинстве случаев дисперсия веса “виртуальных” сайтов (построенных в предположении независимости) меньше дисперсии веса реальных сайтов. Это означает, что эволюция позиций не происходит независимо, имеют место компенсаторные мутации. Скажем, возникновение мутаций, увеличивающих вес сайта сопровождается появлением мутаций уменьшающих его и наоборот. Это особенно характерно для конститутивных экзонов.

По-видимому, вес сайта стремится оставаться относительно постоянным, чтобы обеспечить оптимальное связывание со сплайсосомой. Известно, что ослабление веса сайта может ингибировать сплайсинг [4]. Малые ядерные РНК, входящие в состав сплайсосомы (U1, U2, U4, U5 и U6) высококонсервативны по последовательности между геномами дрожжей и позвоночных [5]. Этими двумя наблюдениями вероятно объясняется то, что среднее изменение веса в большинстве случаев положительно, и при этом очень невелико (доли процента). Главным фактором, влияющим на эффективность сплайсинга, является энергия связывания мРНК со сплайсосомой. [1, 4]. Отбор действует на сайт сплайсинга в целом, поэтому мутации в одной позиции могут быть скомпенсированы мутациями в другой, при этом энергия связывания остается относительно постоянной. Скореллированность изменений нуклеотидов донорных сайтах сплайсинга между геномами млекопитающих была отмечена ранее [6], однако рассматривались только парные корреляции, тогда как в данной работе учитываются все возможные корреляции.

Стоит отметить, что тенденции к компенсаторным заменам были также показаны на сайтах связывания некоторых транскрипционных факторов [7].

## 12. Литература

- [1] D.A. Wasserman and J.A. Steitz, “Interactions of small nuclear RNA's with precursor messenger RNA during in vitro splicing” *Science*, American Association for the Advancement of Science, USA, 1992, 257(5078):1918-1925.
- [2] R.N. Nurtdinov et al., “EDAS, databases of alternatively spliced human genes”, *Biofizika*, Izdatelstvo Nauka, Russia, 2006, 51(4):589-592.
- [3] S. Stamm et al, “An alternative-exon database and its statistical analysis” *DNA Cell Biol.*, Mary Ann Liebert, USA, 2000, 19(12):739-756.
- [4] X. Roca, R. Sachidanandam, A.R. Krainer, “Determinants of the inherent strength of human 5' splice sites” *RNA*, Cold Spring Harbor Laboratory Press, USA, 2005, 11(5):683-698.
- [5] E. Bon el al., “Molecular evolution of eukaryotic genomes: hemiascomycetous yeast spliceosomal introns”, *Nucleic Acids Res.*, Oxford University Press, England, 2003, 31(4):1121-1135.
- [6] I. Carmel, S. Tal, I. Vig, G. Ast, “Comparative analysis detects dependencies among the 5' splice-site positions” *RNA*, Cold Spring Harbor Laboratory Press, USA, 2004, 10(5):828-840.
- [7] V. Mustonen, J. Kinney, G.C.Jr. Callan, M. Lässig, “Energy-dependent fitness: a quantitative model for the evolution of yeast transcription factor binding sites”, *Proc Natl Acad Sci U S A*, National Academy of Sciences, USA, 2008, 105(34):12376-12381.

## Developing the UEPHA-MS network database the tool for organizing and accessing the clinical and biological information for patients with multiple sclerosis

Ramil N. Nurtdinov

INSERM U563, Pole des Neurosciences, University of Toulouse, BP 3048, CHU Purpan,  
Toulouse 3, 31024, France  
n\_ramil@mail.ru

### Abstract

*Multiple sclerosis (MS) is a chronic inflammatory, disabling disease of the CNS. There is no definitive cure for the disease. Immunomodulatory therapies, such as IFN-beta and glatiramer acetate, are only partially effective. Various new therapies in the final stages of clinical trials are being developed in the absence of efficacy biomarkers. The focus of the multicenter research initiative United Europeans for the development of pharmacogenomics in MS (UEPHA\*MS) is to promote and improve training opportunities in the novel supradisciplinary area of pharmacogenomics, biomarker research and systems biology applied to MS. UEPHA\*MS is composed of eleven internationally recognized research teams from five countries with an assortment of expertise in complementary disciplines. The aim of this work is developing the UEPHA-MS network database that should content information provided by clinical laboratories, store it in uniform format and allow performing different cross-laboratorial searches.*

### Objectives

The first objective is gather in a centralized web-designed database all clinical data of European response-classified sample collections already available from the different UEPHA\*MS groups and associated or collaborating neurological clinics (Figure 1, [1,2]). UEPHA-MS members will have access to generated data through a composite database that will gather relevant clinical and biological information.

The second objective is the validation of potential biomarkers from the recent studies. All UEPHA-MS group members have active research programs in the area of biomarker/pharmacogenomics/proteomics research applied to MS. Through the use of divergent experimental approaches these lines of research have

resulted in the identification of various biomarkers. But the validation of the best-scoring markers from these studies has not yet been performed, and studies have remained restricted to limited sample collections or datasets.

The third and fourth objectives are discovery and validation of novel biomarkers. In addition to the validation studies a further objective is to identify additional, novel biomarkers of disease and drug response. Discovery of novel markers will be approached through proteomics-driven biomarker research in CSF, and through analysis of the functional proteomics of daclizumab, a humanized monoclonal antibody that binds the alpha-chain of the interleukin-2 receptor (IL-2RA).

In addition, novel gene expression profiling studies using cDNA or oligonucleotide microarrays will be performed in cohorts of treated RR-MS patients with long clinical follow-up, who will be classified into good or poor responders to treatment. Dedicated systems biology and bioinformatics approaches will be applied to integrate data from SNP, transcription and proteomics screens so as to identify powerful predictive markers of response.

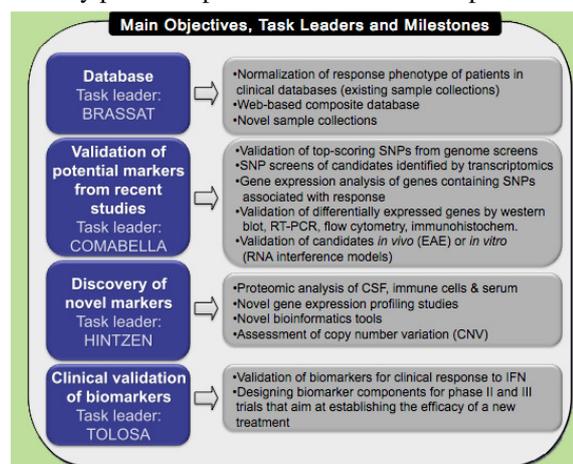


Figure 1. The main objectives of UEPHA\*MS project.

## Database construction

The database is designed to content information provided by all ten clinical laboratories. This information is stored in uniform format that allows performing different cross-laboratorial searches. The key object of database is a patient. In general the database consists of three large blocks, the clinical block, the biological sample block and the experimental results block.

The clinical block contains some patients' personal details like age and gender state and the clinical history that consists of information about the medicines they take and results of such therapy.

The biological sample block contents information about all types of biological samples that are stored in the particular lab for the particular patient from the clinical block and their availability state.

The last block contents information about the concrete experimental results that the particular lab wants to share with the network. For the first time this block should content information about SNP and the state of other biomarkers from tested patients.

## Security system

Patients should be protected from disclosure of information about their disease state, but the information about their clinical data and biomarkers data (SNP) is available through the database interface.

Each laboratory has a data with personal information about patients, usually this data are supported by the corresponding patient identifiers. These identifiers should not be used or stored in network database. Each lab developed their especial patient identifiers for the network database and kept the relation between them and original ones secure.

Modern technologies allow performing fast and cheap genotyping thus it is possible to identify the patient in database according to his/her SNPs. To avoid this problem we break the connection between experimental results block and clinical block, but this connection is necessary for the scientific purposes.

Each laboratory developed two patient identifiers one for the clinical another for the experimental block. These identifiers are used independently in corresponding blocks and connection between these blocks is developed manually by request.

## Future plans

At the current stage we are focusing on the developing the uniform data format and optimizing the process of database completion. Database is optimized to define patients (represented by patient identifiers) with interested conditions (clinical and/or biomarkers state) and request for additional information/samples for defined list of identifiers to the corresponding laboratory head.

I am also involved in biomarkers validation and new biomarkers discovery project. Next year project will be the validation of therapeutic targets from combined clinical and MRI-defined phenotypes associated with responder status to IFN-beta. Development of analytical tests from surrogate end-points that predict response to treatment.

## References

- [1] K. Vandenbroeck, M. Comabella, E. Tolosa, R. Goertsches, D. Brassat, R. Hintzen, C. Infante-Duarte, A. Favorov, S. Escorza, R. Palacios, J.R. Oksenberg, and P. Villoslada. "United Europeans for development of pharmacogenomics in multiple sclerosis network", *Pharmacogenomics*. 2009, 5: 885-894.
- [2] <http://www.reem.es/objectives.html>

## Evolution of Mitochondrial Genome Size: Large Genomes in Small Mammals and Small Genomes in Large Mammals

Konstantin Popadin

*Institute for information transmission problems of the Russian Academy of Sciences  
(Kharkevich Institute) Bolshoy Karetny per. 19, Moscow, 127994, Russia*

*KonstantinPopadin@gmail.com*

### Abstract

*Human oocytes spend from 12 to 50 years in non-dividing condition (in arrested phase of meiosis I). What is the fate of mitochondrial genome during this prolonged period of dormancy? Oocytes are similar with non-dividing cells such as neurons and skeletal muscle fibers, where clonal expansion of short mitochondrial genomes during cell lifetime leads to a series of encephalomyopathies and aging. An oocyte with high fraction of large-scale deletions most likely will be eliminated and won't reach ovulation. But, small deletions, especially in non-coding region might be fixed (reach high fraction in the oocyte) as if effectively-neutral mutations. Because the probability of clonal expansion of short mitochondrial genomes is higher in case of long period of dormancy I hypothesize that mammalian species with long generation time possess smaller mitochondrial genome as compared to mammalian species with short generation time. Here I test this hypothesis using 131 complete mitochondrial genomes of placental mammalian species.*

Oogonia of human female embryo halt their mitotic divisions as early as 7 months of prenatal development. After that a primary oocytes begin the first meiotic division, but the process stops in prophase and the cells remain in a dormant stage until puberty. At the beginning of puberty primary oocytes start to grow again each month and resume meiosis I and transform to secondary oocytes. The secondary oocytes begin the second meiotic division, followed by ovulation and fertilization. In total each ovulated human oocyte spends 12 - 50 years in non-dividing condition (arrested phase of meiosis I).

What happens with mitochondria during this prolonged period of dormancy? Although the metabolic rate in arrested primary oocytes is decreased, the mtDNA turnover rate is not zero due to autophagy of old or damaged mitochondria and

synthesis of new mtDNA. So, there is a possibility for intracellular selection, which leads to replication advantage of the shortest mitochondrial genomes (genomes with deletion). In this respect primary oocytes are similar with non-dividing cells such as neurons and skeletal muscle fibers, where clonal expansions of short mitochondrial genomes during cell lifetime lead to encephalomyopathies and aging.

An oocyte with high fraction of large-scale deletions most likely will be eliminated and won't reach ovulation. But, small deletions, especially in non-coding regions might be fixed in an oocyte as if effectively-neutral mutations. Because the clonal expansion of short mitochondrial genomes is more probable during long period of dormancy, I hypothesize that mammalian species with long generation time possess smaller mitochondrial genome as compared to mammalian species with short generation time.

(I) genome size and generation time. I found out significant negative linear regression between mitochondrial genome length (bp) and generation time (days) for 131 placental mammals ( $genome\ length = generation\ time * (-0.04933) + 16720, p = 0.00473, R^2 = 0.06$ ). Additionally I demonstrated that genome size variation is associated mainly with copy number variation of tandem repeats, located preferable in control region of mtDNA ( $genome\ length = tandem\ length * (0.9837) + 16430, p = < 0.001, R^2 = 0.82$ ). Finally, I found out significant negative regression between generation time and total length of tandem repeats ( $tandem\ length = generation\ time * (-0.0527) + 297, p = 0.001, R^2 = 0.082$ ).

(II) genome size variation on phylogenetic tree. To understand the evolution dynamic of mitochondrial genome size I (i) reconstructed phylogenetic tree, (ii) reconstructed complete mitochondrial genome sequence at each node of the tree assuming indels (insertions and deletions) as the fifth character and (iii) estimated change in genome size for each branch of the tree ( $\Delta l$ ). Sample of 34

short-lived animals with generation time < 500 days (the lower quartile) demonstrated significantly higher increase of genome size as compared to 34 long-lived mammals with generation time > 1643 days (the upper quartile) (acctrans:  $\Delta l$  for short-lived is +56.8 nucleotides while for long-lived is -3.8,  $P = 0.03$ , t-test; deltrans:  $\Delta l$  for short-lived is +83.3 nucleotides while for long-lived is +4.6,  $P = 0.025$ , t-test). After that I performed Kendall's rank correlation between  $\Delta l$  and generation time of modern species. The both models of reconstruction of nodes demonstrated significant negative trend: the shorter the generation time the larger was increase in genome size on the external branch (acctrans: Kendall's tau = -0.104,  $P = 0.041$ ; deltrans: Kendall's tau = -0.117,  $P = 0.025$ ).

The trends observed above could be explained by either (i) strong selective constraints on small genome size in long-lived mammals during

prolonged period of the oocytes dormancy or (ii) adaptive effect of tandem repeats in short-lived mammals. The first explanation implies that tandem repeats are selfish slightly-deleterious elements, which are accumulated in short-lived mammals due to less effective intracellular selection. The second explanation implies that for some reasons tandem repeats are favorable in short-lived mammals. The first explanation seems more plausible, because there is (i) high intra-species variation in the tandem repeat number in short-lived species; (ii) independent loss of tandem repeats in a few lineages of long-lived mammals, originated from short-lived ones and (iii) absence of good evidences of biological function of tandem repeats in mtDNA.

## Higher cryptic variation in rate of transversions than transitions

V. Seplyarskiy\* and G. Bazykin\*\*

\*School of Bioengineering and Bioinformatics Moscow State University \*\*Institute for Information Transmission Problem

### Abstract

*In most organisms, the average genome-wide rate of transitions is several fold higher than the rate of transversions. However, the mutation rate is known to vary across the genome, depending both on simple nucleotide contexts such as CpG, not-so-simple weak contexts [1] and chromatin properties [2]. Here we investigate the strength of context effects in relation to different mutation types. Using polymorphism data from *D. melanogaster* and *D. simulans*, we observe that a SNP in *D. melanogaster* significantly increases the probability of a SNP in homologous site in *D. simulans*. Coincident SNPs involving a transversion in each of the species are overrepresented to a significantly higher extent than other coincident SNPs, implying that the cryptic variation in mutation rate affects transversions more. Correspondingly, the transition-transversion (ti/tv) ratio is ~15% lower at sites of coincident SNPs than in genome as a whole. This difference is not due to biases in frequencies of ancestral polymorphism or natural selection. A similar pattern is observed in frequencies of triallelic SNPs within a population: the SNPs involving two transitions are overrepresented by 60% more than the SNPs involving a transition and a transversion. Together, our results imply that the non-uniformity of mutation rate along the sequence is stronger for rare types of mutations.*

### 1. Introduction

The mutation rate is known to vary across the genome on different scales. However, the causes of this variation remain obscure. Such variation may be studied by correlations between the mutation events in different species, as well as within a species. Interspecific comparisons are capable of revealing strong context effects [1] closely related species are more adequate for such analyses, because the variation in mutation rate is expected to get blurred as species diverge. Ideally, such variation should be studied with data from a single population. Indeed, segregation of multiple variants of a single nucleotide

site (polyallelic SNPs) within a population can shed light on the non-uniformity of mutation rate.

### 2. Results and discussion

Table 1 shows the overrepresentation of polarized pairs of parallel and coincident SNPs between *D. melanogaster* and *D. simulans*, compared to the expectations based on frequencies of SNPs in each of the species. Both parallel and coincident SNPs are significantly overrepresented, with transversions being overrepresented more than transitions. The transversion in one species increases the probability of a transversion in another species by a factor of 1.15 (exons: 1.91; introns: 1.19; intergenic regions: 1.06). While this effect in exons is partially explainable by the structure of the genetic code, the effect in introns and intergenic regions can not be thus explained.

**Table 1.** The excess of parallel and coincident SNPs for different nucleotide combinations. Ancestral nucleotide was inferred using *D. yakuba-D.erecta* pair. Derived nucleotides in *D. melanogaster* and *D. simulans* are shown, together with the observed/expected ratio for the frequency of the corresponding pattern. Expectation was calculated by multiplication of frequencies of corresponding diallelic SNPs. (A) parallel SNPs; (B) coincident SNPs. (tvtv)/(titv), ratio of average overrepresentation in cases in which both substitutions from the ancestral nucleotide involved a transversion (bold lines), to average representation in cases in which one substitutions from the ancestral nucleotide involved a transversion and the other a transition (regular lines).

(A)

Coincident SNP		
Ancestral nucleotide	Derived nucleotides in <i>D. melanogaster</i> and <i>D. simulans</i>	Observed/expected
A	CG	1,54
<b>A</b>	<b>CT</b>	<b>1,62</b>
A	GC	1,35
A	GT	1,15
<b>A</b>	<b>TC</b>	<b>1,36</b>
A	TG	1,69
<b>C</b>	<b>AG</b>	<b>2,27</b>
C	AT	1,43
<b>C</b>	<b>GA</b>	<b>1,48</b>
C	GT	1,22
C	TA	1,58
C	TG	1,71
G	AC	1,63
G	AT	1,17
G	CA	1,28
<b>G</b>	<b>CT</b>	<b>1,95</b>
G	TA	1,45
<b>G</b>	<b>TC</b>	<b>1,48</b>
T	AC	1,08
<b>T</b>	<b>AG</b>	<b>1,53</b>
T	CA	1,33
T	CG	1,42
<b>T</b>	<b>GA</b>	<b>1,57</b>
T	GC	1,08
(tvtv)/(titv)		<b>1,17</b>
mean		1,47

(B)

Paralell SNP		
Ancestral nucleotide	Derived nucleotides in <i>D. melanogaster</i> and <i>D. simulans</i>	Observed/expected
<b>A</b>	<b>CC</b>	<b>1,95</b>
A	GG	2,74
<b>A</b>	<b>TT</b>	<b>2,95</b>
<b>C</b>	<b>AA</b>	<b>3,16</b>
<b>C</b>	<b>GG</b>	<b>2,39</b>
C	TT	2,10
G	AA	2,33
<b>G</b>	<b>CC</b>	<b>3,11</b>
<b>G</b>	<b>TT</b>	<b>2,09</b>
<b>T</b>	<b>AA</b>	<b>2,66</b>
T	CC	2,74
<b>T</b>	<b>GG</b>	<b>3,24</b>
(tvtv)/(titv)		<b>1,08</b>
mean		2,62

A similar pattern can be seen in triallelic SNPs segregating in populations of *D. melanogaster* and *D. simulans*. Using matching *D. yakuba-D.erecta* positions as outgroup state, we are able to infer the ancestral state of the allele in the population and the types of mutations that gave rise to derived variants, assuming that both derived variants originated from the ancestral variant. We then can compare the frequencies of triallelic SNPs to the frequencies expected on the basis of diallelic SNPs. Two methods of comparison were used: (1) using the raw frequencies of SNPs; (2) using the relative frequencies of SNPs with the same ancestral state. The two methods led to essentially identical results; the data presented are for method (2). The cases in which both mutations were transversions were overrepresented much more, compared to the frequencies of individual corresponding mutations, than the cases in which one mutation was transition and the other transversion (Table 2). A transversion in a nucleotide position increases the probability of another transversion in the same position by a factor of 1.62 (exons: 1.60; introns: 1.56; intergenic regions: 1.75).

Similar results were obtained using triallelic SNPs in the human population polarized with chimpanzee genome (Table 2).

**Table 2.** The excess of triallelic SNPs for different nucleotide combinations. Ancestral nucleotide was inferred using *D. yakuba-D.erecta* pair or chimpanzee. Derived sets of nucleotides in *D. melanogaster* (A) and *D. simulans* (B) are presented, together with the observed/expected ratio for the frequency of the corresponding pattern and (C) for human. Expectation was calculated by multiplication of frequencies of corresponding diallelic SNPs.  $tv/vt/titv$ , ratio of average overrepresentation in cases in which both substitutions from the ancestral nucleotide involved a transversion (bold lines), to average representation in lines in which one substitutions from the ancestral nucleotide involved a transversion and the other a transition (non-bold lines).

(A)

Triallelic SNP in <i>D. melanogaster</i>		
Ancestral nucleotide	Derived and ancestral nucleotides in <i>D. melanogaster</i>	observed/expected
A	ACG	0,70
<b>A</b>	<b>ACT</b>	<b>1,45</b>
A	AGT	1,02
<b>C</b>	<b>ACG</b>	<b>1,46</b>
C	ACT	0,86
C	CGT	0,99
G	ACG	0,90
G	AGT	0,95
<b>G</b>	<b>CGT</b>	<b>1,36</b>
T	ACT	0,84
<b>T</b>	<b>AGT</b>	<b>1,66</b>
T	CGT	0,79
<b>(<math>tv/vt</math>)/(<math>titv</math>)</b>		<b>1,67</b>

(B)

Triallelic SNP in <i>D. simulans</i>		
ancestral nucleotide	Derived and ancestral nucleotides in <i>D. melanogaster</i> and <i>D. simulans</i>	Observed/expected
A	ACG	0,91
<b>A</b>	<b>ACT</b>	<b>1,47</b>
A	AGT	0,84
<b>C</b>	<b>ACG</b>	<b>1,21</b>
C	ACT	1,10
C	CGT	0,72
G	ACG	0,70
G	AGT	1,05
<b>G</b>	<b>CGT</b>	<b>1,41</b>
T	ACT	0,81
<b>T</b>	<b>AGT</b>	<b>1,68</b>
T	CGT	0,82
<b>(<math>tv/vt</math>)/(<math>titv</math>)</b>		<b>1,65</b>

(C)

Triallelic SNP in human		
Ancestral nucleotide	Derived and ancestral nucleotide	Observed/expected
A	ACG	0,64
<b>A</b>	<b>ACT</b>	<b>2,00</b>
A	AGT	1,08
<b>C</b>	<b>ACG</b>	<b>1,73</b>
C	ACT	1,02
C	CGT	0,78
G	ACG	0,68
G	AGT	0,85
<b>G</b>	<b>CGT</b>	<b>2,82</b>
T	ACT	0,94
<b>T</b>	<b>AGT</b>	<b>2,20</b>
T	CGT	0,72
<b>(<math>tv/vt</math>)/(<math>titv</math>)</b>		<b>2,60</b>

A large fraction of parallel SNPs between two *Drosophila* species may originate from ancestral polymorphism [3]. However, the coincident SNPs can not be explained this way, and all the events we see here actually represent two independent mutation events in two species. Therefore, coincident SNPs allow us to study patterns of variation in mutation rate even in closely related species.

The higher overrepresentation of transversions, compared to transitions, in sites of multiple mutations is apparent both in interspecific and intraspecific comparisons. This difference could be due to history

of individual alleles, effect of natural selection, or non-uniformities in mutation matrix.

The expectations of the relative frequencies of triallelic SNPs are based on the frequencies of 2-allelic SNPs. If we erroneously identify the order of mutations, this could lead to an error. Specifically, if one of the two derived alleles originated by a mutation of the other derived allele, we would erroneously assume that the triallelic SNP originated from two transitions, while in fact it originated from one transition and one transversion. Such repeated mutations in the same lineage can be expected when the intermediate variant reaches a substantial frequency. However, we observed no correlation between the frequency of the ancestral variant and the excess of transversions. To further test this possibility, we analyzed the haplotype structure of each allele in each triallelic SNP. The two derived alleles were more similar to each other than each of them was to the ancestral allele in only ~20% of cases, suggesting that in the vast majority of cases, both alleles originated from the ancestral allele. Taken together, these results argue against the repeated mutations in the same nucleotide in a lineage. In addition, the errors in identification of the order of mutations can't explain the pattern in interspecific data.

Our pattern could be due to natural selection. While this explanation appears likely in exons, it doesn't explain the same difference in introns and intergenic regions.

Therefore, the excess of transversions can be best explained by mutation non-uniformities and cryptic contexts. Such contexts are known to be responsible for the non-uniformity of the mutation rate along the sequence. Our results suggest that they are also responsible for strong non-uniformity of the mutation matrix.

### 3. References

- [1] Hodgkinson A, Ladoukakis E, Eyre-Walker A (2009) Cryptic variation in the human mutation rate. *PLoS Biol* 7(2): e1000027. doi:10.1371/journal.pbio.1000027
- [2] Stamatoyannopoulos JA, Adzhubei I, Thurman RE, Kryukov GV, Mirkin SM, Sunyaev SR. Human mutation rate associated with DNA replication timing. *Nat Genet.* 2009 Apr;41(4):393-5. Epub 2009 Mar 15.
- [3] Begun DJ, Holloway AK, Stevens K, Hillier LW, Poh YP, et al. (2007) Population genomics: whole-genome analysis of polymorphism and divergence in *Drosophila simulans*. *PLoS Biol* 5(11): e310. doi:10.1371/journal.pbio.0050310

## Происходит ли падение приспособленности в результате накопления слабовредных мутаций в малочисленных видах млекопитающих?

Мария Баранова

Факультет биоинженерии и  
биоинформатики МГУ имени МВ  
Ломоносова  
manyashka06@mail.ru

Константин Попадьян

Институт Проблем Передачи  
Информации имени АА Харкевича  
KonstantinPopadin@gmail.com

### Аннотация

Эффективно-нейтральная теория молекулярной эволюции гласит, что подавляющее большинство межвидовых различий на уровне ДНК составляют нейтральные или эффективно нейтральные мутации – мутации, которые не влияют или очень слабо влияют на приспособленность организмов. Поскольку случайное изменение в ДНК скорее будет вредным, нежели полезным, то среди новых эффективно-нейтральных мутаций должны преобладать слабо-вредные, а не слабо-полезные мутации. Поэтому именно на классе слабо-вредных мутаций были сконцентрированы многочисленные исследования последних 30 лет. Слабо-вредной мутацией называется мутация, коэффициент отбора  $s$  которой (на сколько процентов уменьшается приспособленность организма – носителя данной мутации) не превышает обратное значение эффективной численности популяции ( $N_e$ ), то есть  $s \leq 1/N_e$ . Такие мутации могут фиксироваться в популяции в результате случайного генетического дрейфа, и, в соответствии с определением, чем меньше  $N_e$ , тем большая доля мутаций будет эффективно-нейтральной и тем выше вероятность фиксации этих мутаций. На данный момент показано, что все организмы, имеющие низкую численность популяции, действительно быстрее накапливают слабо-вредные мутации: островные популяции по сравнению с материковыми, популяции крупных млекопитающих по сравнению с мелкими, млекопитающие по сравнению с дрозофилами, приматы по сравнению с грызунами, внутриклеточные бактерии по сравнению со свободноживущими. Хотя скорость накопления слабавредных мутаций научились оценивать и сравнивать между разными видами, до сих пор не ясно – насколько сильно (в эволюционном плане) эти мутации в совокупности влияют на

приспособленность организмов? Обсуждению данного вопроса посвящена статья.

### 1. Введение

Большинство эволюционных моделей подразумевает существование мутационно-селективного равновесия – то есть равновесия между появлением и элиминацией всех вредных и слабавредных мутаций. Это предположение очевидно справедливо для сильно вредных мутаций (например, летали или полубетали), поскольку они не имеют шансов зафиксироваться в популяции, однако оно может быть нарушено для класса слабо-вредных мутаций, которые лишь чуть-чуть (на сотые доли одного процента) уменьшая приспособленность организма могут накапливаться в популяции в результате генетического дрейфа. Поскольку стохастические процессы играют особенно большую роль в малочисленных популяциях, мы ожидаем увидеть более быстрое накопление слабо-вредных мутаций в малочисленных популяциях. Недавно мы показали, что популяции крупных млекопитающих быстрее накапливают несинонимичные и радикальные мутации по сравнению с мелкими млекопитающими [1]. Говорят ли эти результаты об уменьшении приспособленности крупных млекопитающих?

### 2. Вероятность фиксации слабавредных мутаций и темп мутирования

Подавляющее большинство сравнительно-геномных работ до настоящего времени имело дело с относительным признаком – скоростью накопления слабавредных мутаций относительно нейтральных. Однако остаётся открытым вопрос об общем числе вредных

мутаций в геноме, и, соответственно, о приспособленности разных организмов (Kondrashov 1995). На первый взгляд, кажется, что скорость накопления вредных мутаций должна положительно коррелировать с общим числом вредных мутаций в геноме: большая скорость  $\rightarrow$  много слабо-вредных мутаций в геноме  $\rightarrow$  низкая приспособленность. Однако, это не обязательно так. Во-первых, у большинства видов с высокой  $N_e$  более короткое время достижения половой зрелости, что приводит к более быстрому молекулярным часам – за одно и тоже время у этих организмов проходит большее число поколений и соответственно, появляется большее число мутаций. Таким образом, хотя эффективность отбора у таких организмов выше, число появляющихся мутаций тоже выше и конечный результат не ясен: что лучше - много зафиксированных мутаций с очень слабым эффектом (у видов с высокой  $N_e$ ) вместо небольшого числа мутаций с более сильным эффектом (у видов с низкой  $N_e$ )? Возможно, что результирующий суммарный мутационный груз видов с разной эффективной численностью одинаков, что может объяснять примерное постоянство скорости эволюции разных видов [2].

### 3. Слабополезные и слабовредные мутации

Если бы в эволюции существовали только слабовредные мутации, то единственным эволюционным трендом всех видов была бы непрерывная (пусть даже очень медленная) деградиация, ведущая к вымиранию. Очевидно, что большую роль должны играть и слабополезные мутации, восстанавливающие приспособленность и компенсирующие накопленные ранее слабавредные мутации. Недавно было показано, например, что перемещение видов с острова на материк, сопровождаемое увеличением эффективной численности популяции, приводит к краткосрочному ускорению темпа эволюции за счёт фиксации большого количества слабополезных мутаций, компенсирующих накопленные ранее (при жизни на острове) слабавредные [3]. Таким образом, теоретически наши результаты могут объясняться быстрым накоплением как слабавредных так и слабополезных мутаций у крупных видов, и в этом случае быстрая аминокислотная скорость эволюции крупных видов может быть не связана с понижением их приспособленности. Действительно, эти два класса мутаций (слабавредные и слабополезные) сложно отличить нашими методами, поскольку

слабополезные мутации также могут быть несинонимичными и радикальными, как и слабавредные. Для ответа на вопрос о том, какие же мутации вносят вклад в обнаруженные нами зависимости, мы реконструировали аминокислотную последовательность всех митохондриально кодируемых белков на каждом узле дерева и сравнили физико-химическую дистанцию между белком последнего предка и современным видом. Если слабополезные мутации полностью компенсируют эффект слабавредных, мы обнаружим, что физико-химическая дистанция между предковым белком и современным в среднем одинакова и не зависит от массы тела. Однако, мы обнаружили, что физико-химическая дистанция между предковым белком и современным больше для крупных млекопитающих, чем для мелких [1]. Таким образом, класс слабополезных мутаций, по крайней мере, не компенсирует полностью эффект слабавредных мутаций, и приспособленность крупных млекопитающих должна плавно уменьшаться с накоплением всё большего и большего числа слабавредных мутаций.

### 4. вымирание – существует ли генетическая компонента?

Среди классических экспериментов по скорости накопления вредных мутаций распространены эксперименты со схемой скрещивания двух случайных организмов из потомства. В результате поддержания минимальной эффективной численности в течение нескольких десятков поколений заметно существенное падение приспособленности. Вопрос, который мы ставим перед собой – влияет ли падение приспособленности из-за накопления слабавредных мутаций на естественное вымирание видов?

Влияние мутаций на приспособленность можно проанализировать косвенно, оценивая генетическую компоненту вымирания видов. Для данного анализа необходимо оценить темп накопления слабо-вредных мутаций и вероятность вымирания каждого вида из анализируемой выборки.

Поскольку мы работаем только с теми видами, у которых полностью отсекут митохондриальный геном, оценить темп накопления вредных мутаций можно с помощью методов биоинформатики, таких как

Kn/Ks, Kr/Kc а также изменение стабильности молекул транспортных РНК. Все эти показатели при адекватном статистическом анализе говорят о скорости накопления вредных мутаций.

Оценить вероятность вымирания для каждого вида можно несколькими способами. Во-первых, можно использовать данные палеонтологической летописи – вымер к данному моменту изучаемый вид или нет. Во-вторых, можно оценить вероятность вымирания вида по его присутствию или отсутствию в красной книге. Можно также комбинировать оба этих подхода и выделить три группы видов – (i) вымершие виды (американский мастодонт *Mammut americanum*, мамонт *Mammuthus primigenius*, неандерталец *Homo sapiens neanderthalensis*, медведь *Arctodus simus*, шерстистый носорог *Coelodonta antiquitatis*, тасманский волк *Thylacinus cynocephalus*), (ii) находящиеся под угрозой вымирания в данный момент; (iii) виды не находящиеся под угрозой вымирания.

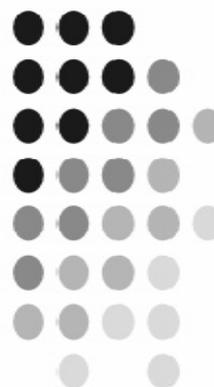
Происходит ли вымирание млекопитающих из-за груза слабовредных мутаций? – всё ещё открытый вопрос, на который мы постараемся ответить до 15 декабря 2009 года.

## 5. список литературы

- [1] Popadin *et al.* Accumulation of slightly deleterious mutations in mitochondrial protein-coding genes of large versus small mammals. *Proc Natl Acad Sci U S A.* 2007 104:13390-5.
- [2] Eyre-Walker *et al.* Quantifying the Slightly Deleterious Mutation Model of Molecular Evolution. *Mol. Biol. Evol.* 2002. 19:2142–2149.
- [3] Charlesworth *et al.* The other side of the nearly neutral theory, evidence of slightly advantageous back-mutations. *Proc Natl Acad Sci U S A.* 2008. 104: 16992–16997.

# Раздел 7

Математика: алгебра, логика,  
теория вероятностей и теория  
дифференциальных  
уравнений



# On the Monomial Automorphism Group of $p^s$ -Components in the $q$ -ary Hamming Code

Evgeny V. Gorkunov\*

Novosibirsk State University, RUSSIA

evgumin@gmail.com

## Abstract

Linear and simple components of the  $q$ -ary Hamming code play an important role in studying perfect  $q$ -ary (not necessarily linear) codes. These components are the spans of the Hamming code codewords having weight 3 and a unit in the given coordinate position over the finite field  $\mathbb{F}_q$  and its prime subfield  $\mathbb{F}_p$  respectively. In [1, 2] the monomial automorphism groups of a linear and simple components are investigated. In this paper we continue research on properties of the Hamming code components. The notion of a  $p^s$ -component of the Hamming code is introduced and the structure of the monomial automorphism group of a such component is described.

## 1. Introduction

Let  $\mathbb{F}_q^n$  be an  $n$ -dimensional vector space over the Galois field  $\mathbb{F}_q = GF(q)$ , where  $q = p^r$  is a prime power. Let  $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$  be the multiplicative subgroup of  $\mathbb{F}_q$ . The Hamming distance  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  between vectors  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_q^n$  is defined as the number of coordinates where  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{y}$  differ. The support of the vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  from  $\mathbb{F}_q^n$  is the set  $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{i: x_i \neq 0\}$ . The number  $w(\mathbf{x}) = |\text{supp}(\mathbf{x})|$  is called the weight of  $\mathbf{x}$ .

Any subset  $C$  of the space  $\mathbb{F}_q^n$  is called a  $q$ -ary code of length  $n$ . Elements of  $C$  are called codewords, and a codeword having the Hamming weight 3 is called a triple. The support of a code  $C$  denoted by  $\text{supp}(C)$  is defined as the union of supports of all its codewords. A linear subspace of  $\mathbb{F}_q^n$  is called a linear code of length  $n$  or a  $[n, k]$ -code, where  $k$  is dimension of the code.

If for some integer  $t \geq 0$  every  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n$  is within the distance  $t$  from exactly one codeword of a code  $C$ , then the code is called perfect. It is well known (see, e.g., MacWilliams and Sloane [3]) that the only nontrivial perfect codes over finite fields

are perfect  $q$ -ary codes with the minimum distance between codewords equals 3 and the binary and ternary Golay codes, which have the minimum distance 7 and 5 respectively. Hereinafter we deal with perfect  $q$ -ary codes that have the minimum distance 3. Such a code must have length  $N = (q^m - 1)/(q - 1)$  and cardinality  $q^{N-m}$  for some integer  $m \geq 2$ . The only linear perfect code is the Hamming code denoted by  $\mathcal{H}$ . This code exists for any  $m \geq 2$ . However there exist a lot of nonlinear perfect  $q$ -ary codes. A large class of nonlinear perfect codes was first constructed by Vasil'ev [4] for  $q = 2$  in 1962.

A linear component of the Hamming code is the span of the set  $T_i = \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} : w(\mathbf{x}) = 3, x_i = 1\}$ . Using switchings of linear components, Avgustinovich and Solov'eva [5] proposed the method of  $\tilde{\alpha}$ -components to construct a large family of perfect binary codes. Los' evolved this method for  $q$ -ary codes with  $q \geq 2$  in [6]. In contrast to a linear component, a simple component is the span of the set  $T_i$  over the prime subfield  $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$ . So, if the integer  $q$  is prime, then these components are equal. In [7] a class of  $q$ -ary codes was constructed by Los' who used switchings of simple components. The cardinality of this class has a maximum within code families known at present in case of  $q > 2$ . Linear and simple components of the Hamming code appeared to be very fruitful not only to construct new nonlinear perfect  $q$ -ary codes but also investigate structural properties of such codes (see, e.g., lectures [8] by Solov'eva and paper [9] by Phelps et al.).

In this paper we generalize the notion of a simple component and introduce a  $p^s$ -component of the  $q$ -ary Hamming code. A  $p^s$ -component is the span of the set  $T_i$  over the subfield  $\mathbb{F}_{p^s} \subset \mathbb{F}_q$ , where  $s \leq r$ . In case of  $s = 1$  we get a simple component, and for  $s = r$  we obtain a linear component of the Hamming code. It should be emphasized that all the components coincide if we deal with binary codes. We study the monomial automorphism group of a  $p^s$ -component and describe the structure of this group.

\*Supported in part by the NSU-Intel Laboratory.

## 2. Notation and some results on automorphisms of codes

An automorphism of a code is an isometry of the vector space  $\mathbb{F}_q^n$  mapping the code into itself.

One type of isometries in the space  $\mathbb{F}_q^n$  can be obtained by means of an action of  $S_n$  on coordinate positions of vectors. Let  $\pi$  be a permutation from the symmetric group  $S_n$  acting on the set  $\{1, 2, \dots, n\}$ . The image  $\mathbf{x}\pi$  of any vector  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  from  $\mathbb{F}_q^n$  is defined by

$$\mathbf{x}\pi = (x_{1\pi^{-1}}, \dots, x_{n\pi^{-1}}). \quad (1)$$

For example, for  $n = 3$  and  $\pi = (123)$  we have

$$(x_1, x_2, x_3)(123) = (x_3, x_1, x_2).$$

On the other hand, consider a transformation  $\sigma: \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$  such that

$$\mathbf{x}\sigma = (x_1\sigma_1, \dots, x_n\sigma_n), \quad (2)$$

where  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  are permutations from the symmetric group  $S_q$  acting on the field  $\mathbb{F}_q$ . The map  $\sigma$  give us another type of isometries. Following Constantinescu and Heise [10], we say such a mapping to be a *configuration*.

Markov [11] in 1956 established that the isometry group of the space  $\mathbb{F}_q^n$  denoted by  $\text{Aut}(\mathbb{F}_q^n)$  is the semidirect product of the group  $S_n$  on the group  $S_q^n$  of all space configurations, i.e.

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{F}_q^n) &= S_n \ltimes S_q^n = \\ &= \{(\pi; \sigma) : \pi \in S_n, \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_q^n\}. \end{aligned} \quad (3)$$

The group operation between any two elements  $(\pi; \sigma)$  and  $(\tau; \delta)$  in the semidirect product  $S_n \ltimes S_q^n$  is defined by

$$(\pi; \sigma)(\tau; \delta) = (\pi\tau; (\sigma\tau) \cdot \delta). \quad (4)$$

The action of the permutation  $\tau$  on the configuration  $\sigma$  is defined in the same way as that given by (1) on a vector. The multiplication between configurations  $\sigma\tau$  and  $\delta$  is performed componentwise.

The group of isometries of  $\mathbb{F}_q^n$  mapping a code  $C$  into itself we call the *automorphism group* of the code  $C$  and denote by

$$\text{Aut}(C) = \{(\pi; \sigma) \in \text{Aut}(\mathbb{F}_q^n) : C(\pi; \sigma) = C\}.$$

It should be noted that the automorphism group of a  $q$ -ary code is usually defined (see, e.g., [3, 12]) as the group of all *semilinear* isometries mapping the code into itself. If  $q \geq 5$ , then the group of all semilinear isometries of  $\mathbb{F}_q^n$  is a proper subgroup of  $\text{Aut}(\mathbb{F}_q^n)$  defined in (3).

Within the group  $\text{Aut}(C)$  we can consider automorphisms of the code  $C$  that have the identity configuration. Formally, suppose  $\varepsilon = (e, \dots, e)$ , where  $e$  denote the identity permutation from  $S_q$ . The *permutation automorphism group* of a code  $C$  is defined as the group

$$\text{PAut}(C) = \{(\pi; \varepsilon) \in \text{Aut}(C)\}.$$

A permutation automorphism of a code is the special case of monomial automorphisms of the code. The action of monomial automorphisms on vectors can be expressed in terms of matrix multiplication. More precisely, let us define the *multiplying permutation* from  $S_q$  as a permutation given by multiplying all elements of the field  $\mathbb{F}_q$  on some nonzero element  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ , i.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha^0 & \alpha^1 & \dots & \alpha^{q-2} \\ 0 & \alpha^0\lambda & \alpha^1\lambda & \dots & \alpha^{q-2}\lambda \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Here  $\alpha$  is a primitive element of  $\mathbb{F}_q$ . Denote by  $S_q^*$  the subgroup of  $S_q$  generated by all multiplying permutations. It is easy to see that  $S_q^* \cong \mathbb{F}_q^*$ . In what follows, we denote the element  $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$  and the corresponding multiplying permutation in the same way. One can always easily understand from the current context what  $\lambda$  means.

Define the *monomial automorphism group* of a code  $C$  as

$$\text{MAut}(C) = \{(\pi; \sigma) \in \text{Aut}(C) : \sigma \in (S_q^*)^n\}.$$

The semidirect product  $S_n \ltimes (S_q^*)^n$  is the group of all monomial automorphisms of the space  $\mathbb{F}_q^n$ . There is a natural isomorphism between  $S_n \ltimes (S_q^*)^n$  and the group  $M_n(q)$  of  $n \times n$  monomial matrices over  $\mathbb{F}_q$ . Recall that a matrix is called monomial if it contains exactly one nonzero element from  $\mathbb{F}_q$  in every its row and column. The action of the monomial automorphism  $(\pi; \sigma)$  on any vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n$  defined by (1) and (2) agrees with the usual matrix multiplication, i.e.  $\mathbf{x}(\pi; \sigma) = \mathbf{x}M$ .

To complete notation let us consider projections of the groups  $\text{Aut}(C)$  and  $\text{MAut}(C)$  on the symmetric group  $S_n$  and, following Huffman [12], denote them by  $\text{Aut}_{\text{pr}}(C)$  and  $\text{MAut}_{\text{pr}}(C)$  respectively, i.e.

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{\text{pr}}(C) &= \{\pi : \exists (\pi; \sigma) \in \text{Aut}(C)\}, \\ \text{MAut}_{\text{pr}}(C) &= \{\pi : \exists (\pi; \sigma) \in \text{MAut}(C)\}. \end{aligned}$$

It is well known (see, e.g., [3]) that the permutation automorphism group of the binary Hamming code  $\mathcal{H}$  of length  $N = 2^m - 1$  is isomorphic to the general linear group  $GL_m(2)$ . Since the Hamming code is linear, the automorphism group of the code can be represented as  $\text{Aut}(\mathcal{H}) \cong GL_m(2) \ltimes \mathcal{H}$ , in the binary case.

Solov'eva and Topalova (see [13]) proved that the group  $\text{Aut}(\mathcal{H})$  has the maximal order within automorphism groups of perfect binary codes of the same length. In addition, in [14] these authors established that the only perfect binary code that has an automorphism group of maximal order within all perfect binary codes of the same length is the Hamming code. At the same time Mal'yugin [15] showed that for any perfect binary code  $C$  the inequality  $|\text{Aut}(C)| \leq \frac{1}{2}|\text{Aut}(\mathcal{H})|$  is true.

From Theorem 7.2 by Huffman [12] we see that  $\text{MAut}(\mathcal{H}) \cong \text{GL}_m(q)$ . In [16, 17] it is proved that if the Hamming code has a parity check matrix with every column such that  $(0 \dots 01 * \dots *)^\top$ , then  $\text{PAut}(\mathcal{H}) \cong \text{UT}_m(q)$ .

Avgustinovich et al. [18] established that the permutation automorphism group of a linear component in the binary Hamming code of length  $N = 2^m - 1$  is isomorphic to the semidirect product  $S_n \ltimes S_2^n$ , where  $n = 2^{m-1} - 1$ . The monomial automorphism groups of linear and simple components of the  $q$ -ary Hamming code are described in [1, 2].

### 3. Structure of a $p^s$ -component

Let  $\mathbb{F}_{p^s}$  be a subfield of  $\mathbb{F}_q$ . Recall that  $q = p^r$ , where  $p$  is prime and  $r$  is a positive integer. It is known (see, e.g., [3]) that the Galois field  $\mathbb{F}_{p^r}$  contains  $\mathbb{F}_{p^s}$  as a subfield if and only if the positive integer  $s$  divides  $r$ .

Let  $N = \frac{q^m - 1}{q - 1}$  and  $n = \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1}$ .

Consider the subset

$$T_i = \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} \mid w(\mathbf{x}) = 3, x_i = 1\}$$

of the Hamming code  $\mathcal{H}$  and the span  $Q_i = \langle T_i \rangle_{p^s}$  of the subset over  $\mathbb{F}_{p^s}$ . The subcode  $Q_i \subset \mathcal{H}$  is a linear space over the subfield  $\mathbb{F}_{p^s} \subset \mathbb{F}_q$  and we will refer to it as a  $p^s$ -component of the Hamming code  $\mathcal{H}$ .

It should be noted that the  $p^s$ -component  $Q_i$  coincides with the Hamming code  $\mathcal{H}$  if  $q = p$  and  $N = q + 1$ .

The parity check matrix  $H_m$  of the Hamming code  $\mathcal{H}$  of length  $N$  consists of all pairwise linearly independent column vectors from the space  $\mathbb{F}_q^m$ . There is one-to-one correspondence between the columns of the parity check matrix  $H_m$  and the points of the projective geometry  $PG(m-1, q)$  of dimension  $m-1$  over  $\mathbb{F}_q$ . In this case, three points are in a line if and only if the corresponding columns are linearly dependent (cf. [3]).

Let  $\mathbf{h}_i$  denote the  $i$ -th column of the matrix  $H_m$  and  $\alpha$  be a primitive element of  $\mathbb{F}_q$ , that is  $\mathbb{F}_q^* = \{\alpha^0, \dots, \alpha^{q-2}\}$ . Fix two columns  $\mathbf{h}_i$  and  $\mathbf{h}_j$  in  $H_m$ . By definition, the matrix  $H_m$  does not contain any two linearly dependent columns. Thus for each

$t \in \{0, 1, \dots, q-2\}$  there is a unique column  $\mathbf{h}_{k_t}$  in  $H_m$  and a unique element  $\beta_t \in \mathbb{F}_q^*$  such that the following equality hold

$$\mathbf{h}_i + \alpha^t \mathbf{h}_j + \beta_t \mathbf{h}_{k_t} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

To simplify further notation we will refer to the set  $L = \{\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j, \mathbf{h}_{k_0}, \dots, \mathbf{h}_{k_{q-2}}\}$  of the columns defined in (6) as a *line*. If it is necessary to emphasize that a line is defined with the columns  $\mathbf{h}_i$  and  $\mathbf{h}_j$ , we will denote the line by  $L(i, j)$ . We say the set  $\text{supp}(L) = \{j: \mathbf{h}_j \in L\}$  to be the *support of the line*  $L$ .

It is easy to prove that an arbitrary line is uniquely defined with any its two columns. In other words, for the set of lines defined on columns of the parity check matrix  $H_m$  the following axiom of projective geometry is hold:

*There is exactly one line through any two points.*

**Proposition 1.** *If a line  $L$  contains  $\mathbf{h}_k, \mathbf{h}_l$ , then  $L = L(k, l)$ .*

Equalities (6) are equivalent to the fact that the triples

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{e}_i + \alpha^t \mathbf{e}_j + \beta_t \mathbf{e}_{k_t}, \quad t = 0, 1, \dots, q-2, \quad (7)$$

belong to the Hamming code  $\mathcal{H}$  and the set  $T_i$ . Here  $\mathbf{e}_l$ ,  $l \in \{1, \dots, N\}$ , denotes the vector with 1 in the position  $l$  and zeroes in all the others. It is obvious that  $\text{supp}(\mathbf{x}^t) \subset \text{supp}(L(i, j))$ ,  $t = 0, 1, \dots, q-2$ .

The span of the triples (7) over  $\mathbb{F}_q$  is the linear subcode  $\mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}$  of dimension  $q-1$  called the *Hamming subcode*. Being shortened to its support  $\text{supp}(\mathcal{H}_j) = \{i, j, k_0, \dots, k_{q-2}\}$ , the Hamming subcode becomes the Hamming code  $\mathcal{H}_j^*$  of length  $q+1$ . Note that

$$\mathcal{H}_j = \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} \mid \text{supp}(\mathbf{x}) \subseteq \text{supp}(L(i, j))\}. \quad (8)$$

At the same time, we consider the span of the triples (7) over  $\mathbb{F}_{p^s}$ . Denote it by  $\mathcal{C}_j$ . It is clear that  $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}$  and  $\text{supp}(\mathcal{C}_j) = \text{supp}(\mathcal{H}_j)$ . Being shortened to its support, the subcode  $\mathcal{C}_j$  becomes the code  $\mathcal{C}_j^*$  that is a  $p^s$ -component of the Hamming code  $\mathcal{H}_j^*$  with length  $q+1$ .

Let  $+_{p^s}$  and  $\oplus_{p^s}$  denote the sum and the direct sum of subsets from  $\mathbb{F}_q^N$  over  $\mathbb{F}_{p^s}$  respectively. In other words,  $A +_{p^s} B = \langle A \cup B \rangle_{p^s}$ , where  $A, B \subset \mathbb{F}_q^N$  are linear spaces over the subfield  $\mathbb{F}_{p^s}$ . Moreover, the sum  $A +_{p^s} B$  is direct if and only if  $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ , and in this case we use the sign  $\oplus_{p^s}$  instead of  $+_{p^s}$ .

**Lemma 1.** *Given the Hamming code of length  $N = \frac{q^m - 1}{q - 1}$ , a  $p^s$ -component  $Q_i$  can be represented as*

$$Q_i = \mathcal{C}_1 \oplus_{p^s} \mathcal{C}_2 \oplus_{p^s} \dots \oplus_{p^s} \mathcal{C}_n, \quad (9)$$

where  $n = \frac{q^{m-1}-1}{q-1}$  and the subcodes  $\mathcal{C}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , are  $p^s$ -components of the Hamming subcodes of dimension  $q-1$ . This representation is unique up to the ordering of the subcodes  $\mathcal{C}_j$ .

*Proof.* Note that for any triple  $\mathbf{x} \in T_i$  it is true that  $\text{supp}(\mathbf{x}) \subset L$ , where  $L$  is a line through the column  $\mathbf{h}_i$ . From Proposition 1 we obtain that the following conditions are equivalent:

- 1)  $L(i, j) = L(i, k)$ ,
- 2)  $\mathbf{h}_j \in L(i, k)$ ,
- 3)  $\mathbf{h}_k \in L(i, j)$ .

So, for different  $j, k \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i\}$  it is true

$$\begin{aligned} & \text{either } L(i, j) = L(i, k), \\ & \text{or } L(i, j) \cap L(i, k) = \{\mathbf{h}_i\}. \end{aligned} \quad (10)$$

For the corresponding subcodes  $\mathcal{C}_j$  and  $\mathcal{C}_k$  we have

$$\text{either } \mathcal{C}_j = \mathcal{C}_k, \text{ or } \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_k = \{\mathbf{0}\}. \quad (11)$$

There are  $n$  lines through the point  $\mathbf{h}_i$ . Let  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  be the subcodes corresponding to these lines. Since  $T_i \subset \bigcup_{j=1}^n \mathcal{C}_j \subset Q_i$ , we get

$$Q_i = \mathcal{C}_1 + p^s \mathcal{C}_2 + p^{2s} \dots + p^{(n-1)s} \mathcal{C}_n.$$

Moreover, from (10) and (11) it follows that  $(\sum_{j \neq k} p^s \mathcal{C}_j) \cap \mathcal{C}_k = \{\mathbf{0}\}$ . This implies that for  $Q_i$  the semidirect product (9) holds.

This representation is unique due to there are no other lines through the point  $\mathbf{h}_i$ .  $\square$

In the sequel, the subcodes  $\mathcal{C}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , in (9) are referred to as the *base subcodes* of the  $p^s$ -component  $Q_i$ .

#### 4. Monomial automorphisms of a $p^s$ -component

By definition, a  $p^s$ -component  $Q_i$  is a linear code over  $\mathbb{F}_{p^s}$ . Further, we consider an arbitrary code  $C \subset \mathbb{F}_q^n$  that is linear over the subfield  $\mathbb{F}_{p^s}$  and call such a code  $p^s$ -linear. Dimension over  $\mathbb{F}_{p^s}$  of a  $p^s$ -linear code  $C$  we will call  $p^s$ -dimension and denote by  $\dim_{p^s}(C)$ . Now we show that the image of a  $p^s$ -linear code under the action of any monomial automorphism from  $\text{MAut}(\mathbb{F}_q^n)$  is a  $p^s$ -linear code of the same  $p^s$ -dimension.

**Proposition 2.** *If  $C \subset \mathbb{F}_q^n$  is a  $p^s$ -linear code such that  $\dim_{p^s}(C) = k$ , and  $(\pi; \sigma) \in \text{MAut}(\mathbb{F}_q^n)$ ; then the code  $C(\pi; \sigma)$  is  $p^s$ -linear and has  $p^s$ -dimension  $k$ .*

*Proof.* Since given the automorphism  $(\pi; \sigma) \in \text{MAut}(\mathbb{F}_q^n)$ , there is a monomial matrix  $M$  such that

the equality  $\mathbf{x}(\pi; \sigma) = \mathbf{x}M$  is true for any  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^n$ , we see that

$$\begin{aligned} & (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})(\pi; \sigma) = (\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y})M = \\ & \lambda \mathbf{x}M + \mu \mathbf{y}M = \lambda \mathbf{x}(\pi; \sigma) + \mu \mathbf{y}(\pi; \sigma), \end{aligned} \quad (12)$$

where  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_q^n$  and  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q$ . In particular, this implies that the code  $C(\pi; \sigma)$  is  $p^s$ -linear.

It is evident that  $\mathbf{0}(\pi; \sigma) = \mathbf{0}$ . Therefore from (12) it follows that any vectors from  $C$  are linearly independent over  $\mathbb{F}_{p^s}$  if and only if the corresponding vectors from  $C(\pi; \sigma)$  are linearly independent over  $\mathbb{F}_{p^s}$ . This proves the proposition.  $\square$

From Lemma 1 and Proposition 2 we get

**Lemma 2.** *Any monomial automorphism  $(\pi; \sigma) \in \text{MAut}(Q_i)$  maps every base subcode of  $Q_i$  either into the other one, or into itself.*

As a consequence we obtain

**Lemma 3.** *If  $(\pi; \sigma) \in \text{MAut}(Q_i)$  and length  $N$  of  $Q_i$  satisfies  $N > q + 1$ , then  $i\pi = i$ .*

It is easy to prove that in a  $p^s$ -component two codewords having the same support and minimal nonzero weight differ from each other by a factor. In other words, it is true

**Proposition 3.** *If codewords  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q_i$  have the weight  $w(\mathbf{x}) = w(\mathbf{y}) = 3$  and  $i \in \text{supp}(\mathbf{x}) = \text{supp}(\mathbf{y})$ , then  $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$  for some  $\lambda \in \mathbb{F}_{p^s}^*$ .*

Denote by  $e$  the identity permutation from  $S_N$ . Proposition 3 is crucial in the proof of

**Lemma 4.** *Let  $(e; \sigma) \in \text{MAut}(Q_i)$ ; then there exists  $\lambda \in \mathbb{F}_{p^s}^*$  such that  $\mathbf{x}\sigma = \lambda \mathbf{x}$  holds for any vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^N$ .*

*Proof.* We have  $\mathbf{x}(e; \sigma) = \mathbf{x}\sigma$  for any  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_q^N$  and  $\mathbf{0}\sigma = \mathbf{0}$ . Hence  $\text{supp}(\mathbf{x}) = \text{supp}(\mathbf{x}\sigma)$ . Consider  $j \neq i$  and the corresponding triples (7) from  $T_i \subset Q_i$ . Since  $Q_i$  is a  $p^s$ -linear code, we see that  $\gamma^\mu \mathbf{x}^t \in Q_i$  for any  $u \in \{0, 1, \dots, p^s - 2\}$ ,  $t \in \{0, 1, \dots, q - 2\}$ , where  $\gamma \in \mathbb{F}_q$  is a primitive element of the subfield  $\mathbb{F}_{p^s}$ . From Proposition 3 we obtain

$$(\gamma^\mu \mathbf{x}^t)\sigma = \mu_{ut} \gamma^\mu \mathbf{x}^t \quad \text{for some } \mu_{ut} \in \mathbb{F}_{p^s}^*. \quad (13)$$

From (7) and (13) we get  $\gamma^\mu \sigma_i = \mu_{ut} \gamma^\mu$ , therefore  $\mu_{ut} = (\gamma^\mu \sigma_i) \gamma^{-u}$  for  $u = 0, 1, \dots, p^s - 2$  and  $t = 0, 1, \dots, q - 2$ . Let

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^0 & \alpha^1 & \dots & \alpha^{q-2} \\ 0 & \lambda \alpha^0 & \lambda \alpha^1 & \dots & \lambda \alpha^{q-2} \end{pmatrix},$$

where  $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ . Since  $(e; \sigma) \in \text{MAut}(Q_i)$  and for any  $\mathbf{x} \in Q_i$  it is true  $x_i \in \mathbb{F}_{p^s}$ , the element  $\lambda$  is in  $\mathbb{F}_{p^s}$ .

In particular,  $\gamma^u \sigma_i = \lambda \gamma^u$ ,  $u = 0, 1, \dots, p^s - 2$  and  $\mu_{ut} = (\gamma^u \sigma_i) \gamma^{-u} = \lambda$  for all admissible  $u, t$ . Then we can rewrite (13) as follows:

$$\begin{aligned} (\gamma^u \mathbf{x}^t) \sigma &= (\gamma^u \sigma_i) \mathbf{e}_i + ((\gamma^u \alpha^t) \sigma_j) \mathbf{e}_j + ((\gamma^u \beta_t) \sigma_{k_t}) \mathbf{e}_{k_t} = \\ &= \lambda \gamma^u \mathbf{x}^t = \lambda \gamma^u \mathbf{e}_i + \lambda \gamma^u \alpha^t \mathbf{e}_j + \lambda \gamma^u \beta_t \mathbf{e}_{k_t}. \end{aligned}$$

From the last equalities we have

$$\begin{aligned} (\gamma^u \alpha^t) \sigma_j &= \lambda \gamma^u \alpha^t, & (14) \\ u = 0, 1, \dots, p^s - 2, & t = 0, 1, \dots, q - 2. \end{aligned}$$

Putting  $u = 0$  in (14), we obtain  $\alpha^t \sigma_j = \lambda \alpha^t$  for any  $t \in \{0, 1, \dots, q - 2\}$ . This means that  $\sigma_j$  is the multiplying permutation corresponding to  $\lambda \in \mathbb{F}_{p^s}$ .

So,  $\sigma_j = \sigma_i = \lambda$ . Since  $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$  is arbitrary, it follows that  $\sigma = (\lambda, \dots, \lambda)$ . This proves the lemma.  $\square$

**Corollary 1.** *If  $(\pi; \sigma), (\pi, \delta) \in \text{MAut}(Q_i)$ , then  $\delta = \sigma \cdot (\lambda, \dots, \lambda)$  for some  $\lambda \in S_{p^s}^*$ .*

From Lemma 3 and Corollary 1 we immediately obtain

**Lemma 5.** *For a  $p^s$ -component  $Q_i$  it holds*

$$\text{MAut}(Q_i) \cong \text{MAut}_{\text{pr}}(Q_i) \times \mathbb{F}_{p^s}^*.$$

Let us denote by  $G$  the group  $\text{MAut}_{\text{pr}}(Q_i^{q+1})$ , where  $Q_i^{q+1}$  is  $p^s$ -component of the Hamming code  $\mathcal{H}^{q+1}$  with length  $q + 1$ . Lemmas 2 and 3 help us to describe the structure of the group  $\text{MAut}_{\text{pr}}(Q_i)$ .

**Lemma 6.** *For a  $p^s$ -component  $Q_i$  the following is true*

$$\text{MAut}_{\text{pr}}(Q_i) \cong S_n \ltimes (\text{St}_G(i))^n.$$

Combining Lemmas 5 and 6 we state the main result of this paper.

**Theorem 1.** *Let  $q$  be a prime power and  $m$  be an integer such that  $q \geq 2$  and  $m > 2$ ; then for a  $p^s$ -component  $Q_i$  of the  $q$ -ary Hamming code of length  $N = (q^m - 1)/(q - 1)$  it holds*

$$\text{MAut}(Q_i) \cong (S_n \ltimes (\text{St}_G(i))^n) \times \mathbb{F}_{p^s}^*,$$

where  $n = (q^{m-1} - 1)/(q - 1)$  and  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

## 5. Conclusion

We introduced the notion of a  $p^s$ -component in the  $q$ -ary Hamming code, where  $q$  is a prime power. The monomial automorphism group of such component was investigated. The structure of the group was described.

It should be noted that this paper gives no answer to the question on the nature of the monomial automorphism group of a  $p^s$ -component of

the Hamming code  $\mathcal{H}^{q+1}$  with length  $q + 1$ . This question is a point for the future research.

Some statements above are given without proofs. One can find analogous propositions and lemmas with detailed proofs in [1, 2].

## Acknowledgment

The author is very grateful to Prof. F. I. Solov'eva for her help and support in making this work possible.

## References

- [1] E. V. Gorkunov, Monomial automorphisms of linear components of the Hamming code, *Proc. XII Int. Symp. Probl. of Redundancy in Inform. and Control Systems*, Saint-Petersburg, Russia, May 26–30, 2009, pp. 76–80.
- [2] E. V. Gorkunov, Monomial automorphisms of linear and simple components of the Hamming code, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2009 (submitted, in Russian).
- [3] F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, *The theory of error-correcting codes*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1977.
- [4] Yu. L. Vasil'ev, On nongroup close-packed codes, *Probl. Kibernetiki*, vol. 8, pp. 337–339, 1962 (in Russian).
- [5] S. V. Avgustinovich, F. I. Solov'eva, Construction of perfect binary codes by sequential shifts of  $\tilde{\alpha}$ -components, *Probl. Inform. Transm.*, vol. 33, no. 3, pp. 202–207, 1997.
- [6] A. V. Los', Construction of perfect  $q$ -ary codes by sequential switchings of  $\tilde{\alpha}$ -components, *Probl. Inform. Transm.*, vol. 40, no. 1, pp. 37–43, 2004.
- [7] A. V. Los', Construction of perfect  $q$ -ary codes by switchings of simple components, *Probl. Inform. Transm.*, vol. 42, no. 1, pp. 30–37, 2006.
- [8] F. I. Solov'eva, *On perfect codes and related topics*, Com<sup>2</sup>MaC Lect. Note Series, vol. 13, 2004.
- [9] K. T. Phelps, J. Rifà, M. Villanueva, Kernels and  $p$ -kernels of  $p^r$ -ary 1-perfect codes, *Des. Codes Cryptography*, vol. 37, no. 2, pp. 243–261, 2005.
- [10] I. Constantinescu, W. Heise, On the concept of code-isomorphy, *J. Geom.*, vol. 57, pp. 63–69, 1996.
- [11] A. A. Markov, On transformations nonpropagating distortion, *Selected works*. Moscow, Russia: Moscow Centre of Continuous Mathematical Education, vol. II, pp. 70–93, 2003 (in Russian).
- [12] W. C. Huffman, Codes and groups, in: V. S. Pless, W. C. Huffman, eds., *Handbook of coding theory*, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science, Chap. 17, pp. 1345–1440, 1998.
- [13] F. I. Solov'eva, S. T. Topalova, On the automorphism groups of perfect binary codes and Steiner triple systems, *Probl. Inform. Transm.*, vol. 36, no. 4, pp. 331–335, 2000.
- [14] F. I. Solov'eva, S. T. Topalova, Perfect binary codes and Steiner triple systems with automor-

- phism groups of maximal order, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, Ser. 1, vol. 7, no. 4, pp. 101–110, 2000 (in Russian).
- [15] S. A. Malyugin, On the order of the automorphism group of perfect binary codes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, Ser. 1, vol. 7, no. 4, pp. 91–100, 2000 (in Russian).
- [16] E. V. Gorkunov, On permutation automorphism groups of  $q$ -ary Hamming codes, *Proc. 11th Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, Pamporovo, Bulgaria, June 16–22, 2008, pp. 119–124.
- [17] E. V. Gorkunov, The permutation automorphism group of the  $q$ -ary Hamming code, *Problemy Peredachi Inform.*, vol. 45, no. 4, pp. 18–25, 2009 (to appear, in Russian).
- [18] S. V. Avgustinovich, F. I. Solov'eva, O. Heden, On the structure of symmetry groups of Vasil'ev codes, *Probl. Inform. Transm.*, vol. 41, no. 2, pp. 105–112, 2005.

## Изменчивые ключи подписи \*

Федюкович В.Е.  
Интропро, Киев  
vf@unity.net

### Аннотация

*Рассматриваются протоколы проверки справедливости утверждений на основе косвенной информации. Изучается проблема проверки утверждения о совпадении ключей с учётом порога точности сравнения, а также с учётом необходимости неразглашения проверяемых ключей создания подписи. Построена схема электронной подписи, такая, что успешно проверяется экземпляр подписи, созданный ключом, совпадающим в пределах порога точности сравнения с ключом-эталоном, и в которой открытый ключ проверки подписи получен из ключа-эталона. Схема является неинтерактивным вариантом протокола аргумента, в предположении о сложности задачи поиска логарифма в используемой конечной группе.*

### 1. Введение

Утверждения, проверяемые с помощью электронных подписей, обычно формулируются в виде совпадения полученного и подписанного сообщений. Кроме того, ключ создания экземпляра подписи обычно совпадает с ключом, из которого был получен открытый ключ проверки подписи. Задачам проверки утверждений о “почти совпадающих” ключах (с учётом порога точности сравнения и некоторой метрики близости) уделялось недостаточное внимание.

В этой работе решена задача создания схемы электронной подписи, позволяющая проверять условие о “почти совпадающих” ключах подписи. Ключом подписи в предложенной схеме является множество ненулевых элементов конечного поля, степень “близости” ключей определяется количеством элементов в разности множеств-ключей, открытым ключом проверки - множество экземпляров при-

вязки к элементам множества “ключа-эталона”. Алгоритмы создания и проверки экземпляра подписи предложенной схемы получены как неинтерактивный вариант протокола аргумента знания ключа создания подписи и “ключа-эталона”. Протокол построен на основе новой схемы запрос-ответ, предложенной для проверки условий, представленных в виде алгебраических уравнений над конечным полем. Значения переменных, входящих в уравнения, остаются недоступными проверяющей стороне во время такой проверки. Протоколы, построенные на основе такой схемы запрос-ответ, могут рассматриваться как расширение протокола Шнора. Проверяемое условие о количестве элементов в разности множеств сформулировано в виде условия о характеристических полиномах множеств. Показано, что вероятность ошибки предложенной схемы подписи (ошибки корректности протокола) является ничтожной; параметром безопасности является количество бит двоичного представления порядка используемой группы.

Схема групповой подписи [1] может быть примером проверки утверждения о ключе создания подписи участника группы. Схема имеет свойство неотличимости экземпляров подписи, созданных ключами различных участников группы, а также всегда позволяет менеджеру группы определить, каким ключом был создан экземпляр подписи. Такое свойство может быть реализовано в виде протокола знания ключа подписи, схема подписи может быть получена как неинтерактивный вариант протокола, экземпляр подписи может содержать шифротекст идентификатора ключа участника группы, а сертификат ключа участника группы может содержать публичные ключи менеджера. Протокол для проверки утверждения о кодовом слове кода Гошпы и верхней границе веса ошибки был получен [2] на основе этой же схемы запрос-ответ. Были также построены протоколы для проверки утверждений о строках [3] и о графах [4]. Протоколы аргумента знания логарифма в конечной группе оказались удобным

\*Предварительная версия протокола была представлена на научно-практической конференции “Безопасность информации в информационно-телекоммуникационных системах”, Киев, 2007.

практическим инструментом для создания ряда протоколов, в том числе для создания систем электронного голосования, электронных монет, схемы Direct Anonymous Attestation [7]. Алгебраическая структура ответа доказывающей стороны в виде линейного полинома над конечным полем на запрос проверяющей стороны была предложена в работе Chaum et al. [8]; запросы Проверяющего, выбранные из конечного поля, были предложены в работе Шнорра [9]. Способ преобразования протокола в схему электронной подписи был предложен в работе Фиата и Шамира [10].

Предложенный протокол и схема подписи могут использоваться при проверке статистических гипотез и для сравнения результатов измерений, а также могут быть полезны при принятии решений на основе персональных данных.

## 2. Обозначения и определения

Мы используем стандартные определения интерактивной системы (протокола) [5, 6] и схемы привязки. Мы используем альтернативное определение схемы подписи, предусматривающее множество допустимых ключей создания подписи, и требующее совпадения в пределах точности сравнения ключа, которым был создан экземпляр подписи, и ключа, из которого был получен открытый ключ проверки.

### 2.1. Полиномиальное представление

Мы используем вариант полиномиального представления множества, предложенного ранее для решения задачи согласования (reconciliation) двух “мало отличающихся” множеств [11]. В оригинальной работе был предложен характеристический полином, который является произведением линейных взаимно простых полиномов, соответствующих различным элементам множества. Такая структура полинома позволяет сокращать сомножители, соответствующие элементам пересечения множеств. Кроме того, выполняется условие единственности представления в виде произведения взаимно простых сомножителей.

**Определение 1.** *Характеристическим полиномом множества ненулевых элементов конечного поля  $S \subset \mathbb{F}_q$  будем называть*

$$f(x, S) = \prod_{s \in S} (1 + xs) \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что для произвольных множеств  $S_a$  и  $S_b$

$$f(x, S_a)f(x, S_b \setminus S_a) - f(x, S_b)f(x, S_a \setminus S_b) \equiv 0 \quad (2)$$

### 2.2. Вероятностная проверка

Мы проверяем справедливость утверждения о равенстве нулю всех коэффициентов некоторого полинома над конечным полем  $F(x) \in \mathbb{F}_q[X]$ , получив значение этого полинома при некотором значении переменной, выбранной случайно в качестве запроса из множества большой мощности. Мы выбираем запрос произвольно из  $\mathbb{F}_q$ . Любой такой ненулевой полином имеет не более  $\deg(F(x))$  корней, откуда следует, что вероятность случайно выбрать корень не превышает  $\frac{\deg(F(x))}{q}$ .

### 2.3. Схема привязки

Мы используем вариант схемы Педерсена [12] привязки к ненулевому элементу конечного поля. Пусть  $g, h$  - элементы некоторой конечной циклической группы  $\mathbb{G}$  порядка  $q$  для некоторого простого  $q$ , такие, что  $\log_h(g)$  неизвестен доказывающей стороне, а задача поиска логарифма в группе  $\mathbb{G}$  является сложной. Мы используем обозначения, характерные для мультипликативных групп классов вычетов.

**Определение 2 (Commitment).** *Экземпляром привязки к элементу  $\sigma$  конечного поля  $\mathbb{F}_q$  для некоторого дополнительного значения  $\omega \in \mathbb{F}_q$  будем называть  $M = (gh^\omega)^\sigma$ .*

**Теорема 1 (Binding).** *Предложенная схема привязки имеет вычислительно-стойкое свойство связывания в предположении о сложности задачи поиска логарифма в используемой группе.*

*Доказательство.* Пусть доказывающая сторона нашла две пары значений  $(\sigma_1, \omega_1), (\sigma_2, \omega_2)$ , таких, что  $(gh^{\omega_1})^{\sigma_1} = (gh^{\omega_2})^{\sigma_2}$  и  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Тогда  $\log_h(g) = -\frac{\omega_1\sigma_1 - \omega_2\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$ .  $\square$

Предложенная схема привязки имеет протокол знания значений  $(\sigma, \omega)$ , из которых был получен экземпляр привязки  $M$ . Мы строим такой протокол с ответами Доказывающего, имеющими альтернативную алгебраическую структуру, что облегчает дальнейшую проверку утверждения о верхней границе для количества элементов в разности множеств.

1. Доказывающий выбирает случайные  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{F}_q$ , получает  $(V, W)$ , пересылает  $(V, W)$  Проверяющему:

$$V = g^\alpha h^{\beta\sigma + \omega\alpha}, \quad W = (gh^\beta)^\alpha \quad (3)$$

2. Проверяющий выбирает запрос  $e$ .

3. Доказывающий получает ответы и пересылает их Проверяющему:

$$\Sigma = \sigma + e\alpha, \quad \Omega = \omega + e\beta \quad (4)$$

4. Проверяющий рассматривает аргумент как убедительный, если

$$(gh^\Omega)^\Sigma M^{-1}V^{-e}W^{-e^2} = 1 \quad (5)$$

**Теорема 2** (Of knowledge). *Предложенный протокол имеет свойство знания.*

*Доказательство.* Построим алгоритм extractor, позволяющий получить значения, из которых был получен экземпляр привязки, из двух пар приемлемых ответов Доказывающего при условии rewinding. Пусть имеется две пары ответов  $(\Sigma_1, \Omega_1)$ ,  $(\Sigma_2, \Omega_2)$  на различные запросы  $(e_1, e_2)$ , такие, что

$$(gh^{\Omega_1})^{\Sigma_1} V^{-e_1} W^{-e_1^2} = (gh^{\Omega_2})^{\Sigma_2} V^{-e_2} W^{-e_2^2} = M$$

Тогда

$$\omega = -\frac{e_2\Omega_1 - e_1\Omega_2}{e_2 - e_1}, \quad \sigma = -\frac{e_2\Sigma_1 - e_1\Sigma_2}{e_2 - e_1}$$

□

### 3. Протокол

Рассмотрим задачу проверки справедливости утверждения

$$|S_a \setminus S_b| \leq T_a \quad \wedge \quad |S_b \setminus S_a| \leq T_b \quad (6)$$

**Теорема 3.** *Для любых множеств  $S_a, S_b$  ненулевых элементов конечного поля существуют полиномы, представленные в виде коэффициентов  $\{m_k\}, \{m'_k\}$ , такие, что выполняется*

$$f(x, S_b) \left(1 + \sum_{k=1}^{T_a} x^k m_k\right) - f(x, S_a) \left(1 + \sum_{k'=1}^{T_b} x^{k'} m'_{k'}\right) \equiv 0 \quad (7)$$

тогда, и только тогда, когда выполняется (6).

*Доказательство.* Пусть имеет место (6). Тогда

$$f(x, S_a \setminus S_b) = 1 + \sum_{k=1}^{T_a} x^k m_k \quad (8)$$

$$f(x, S_b \setminus S_a) = 1 + \sum_{k'=1}^{T_b} x^{k'} m'_{k'} \quad (9)$$

Обратно, пусть имеет место (7). Тогда

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{T_a} x^k m_k\right) |f(x, S_a \setminus S_b)| \quad \wedge$$

$$\left(1 + \sum_{k'=1}^{T_b} x^{k'} m'_{k'}\right) |f(x, S_b \setminus S_a)|$$

откуда следует утверждение о степенях полиномов (6). □

**Определение 3.** *Проверочным полиномом множества  $S = \{a_j\}$  будем называть полином двух переменных, полученный из характеристического полинома (1) заменой элементов множества на линейные полиномы  $\Sigma(y)$  - ответы (4) доказывающей стороны, причём запрос  $e$  рассматривается как свободная переменная у.*

$$p(x, y, S, \{\alpha_j\}) = \prod_{a_j \in S} (1 + x(a_j + y\alpha_j)) \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что младший коэффициент проверочного полинома произвольного множества всегда совпадает с характеристическим полиномом этого множества. Ответы Доказывающего, в отличие от элементов множества, доступны Проверяющему, что позволяет использовать значения проверочного полинома при тестировании справедливости утверждений. В рамках предложенного протокола Доказывающий предоставляет для проверки экземпляры привязки, полученные из всех коэффициентов проверочного полинома, за исключением младшего. Проверяется справедливость утверждения (2) о множествах, представленных характеристическими полиномами (1). Оценка полиномов выполняется при некотором значении переменной  $x = d$ , выбранном в качестве запроса Проверяющего. Коэффициенты  $\{m_k\}, \{m'_k\}$  предоставлены Проверяющему только в виде экземпляров привязки схемы Педерсена, имеющей свойство аддитивного гомоморфизма.

Протокол для проверки справедливости утверждения (6) о множествах  $S_a, S_b$ , имеющих в распоряжении Доказывающего, представлен в разделе 3.1.

#### 3.1. Протокол аргумента

Общая информация Проверяющего и Доказывающего: порядок  $q$  и пара элементов циклической конечной группы  $(g, h)$ , таких, что  $\log_h(g)$  неизвестен Доказывающему, экземпляры привязки  $\{A_j\}$  и  $\{B_{j'}\}$  к элементам множеств  $S_a = \{a_j\}$  и  $S_b = \{b_{j'}\}$ , верхняя граница мощности разности множеств  $(T_a, T_b)$ .

Информация Доказывающего: элементы множеств  $S_a = \{a_j\}$ ,  $S_b = \{b_{j'}\}$  и дополнительные значения  $\{\alpha_j\}, \{\beta_{j'}\}$ , такие, что  $A_j = g^{a_j} h^{\alpha_j}$ ,  $B_{j'} = g^{b_{j'}} h^{\beta_{j'}}$ , и для которых выполняется (6).

Доказывающий демонстрирует знание элементов множеств  $\{a_j\}, \{b_{j'}\}$  и дополнительных значений  $\{\alpha_j\}, \{\beta_{j'}\}$ , из которых были получены экземпляры привязки  $\{A_j\}, \{B_{j'}\}$ , а также справедливость утверждения о количестве элементов в разности множеств:

1. Доказывающий выбирает  $\{\tau_k\}_{k=1\dots T_b}$ ,  $\{\rho_{k'}\}_{k'=1\dots T_a}$ , получает коэффициенты  $\{m_k\}$ ,  $\{m'_{k'}\}$  и экземпляры привязки  $\{M_k\}$ ,  $\{M'_{k'}\}$ :

$$\prod_{c \in \mathcal{S}_b \setminus \mathcal{S}_a} (1 + xc) = 1 + \sum_{k=1}^{T_b} x^k m_k \quad (11)$$

$$\prod_{c' \in \mathcal{S}_a \setminus \mathcal{S}_b} (1 + xc') = 1 + \sum_{k'=1}^{T_a} x^{k'} m'_{k'} \quad (12)$$

$$M_k = g^{m_k} h^{\tau_k}, \quad M'_{k'} = g^{m'_{k'}} h^{\rho_{k'}} \quad (13)$$

Доказывающий пересылает  $\{M_k\}$ ,  $\{M'_{k'}\}$  Проверяющему.

2. Проверяющий выбирает запрос  $d \in \mathbb{F}_q$  и пересылает его Доказывающему.
3. Доказывающий выбирает  $\{\zeta_j, \mu_j\}_{j=1\dots|S_a|}$ ,  $\{\eta_{j'}, \delta_{j'}\}_{j'=1\dots|S_b|}$ ,  $\{\chi_t\}_{t=1\dots\max(|S_a|, |S_b|)}$ , получает коэффициенты  $\{u_t\}$ , экземпляры привязки  $\{U_t\}$ ,  $\{V_j\}$ ,  $\{W_j\}$ ,  $\{V'_{j'}\}$ ,  $\{W'_{j'}\}$ :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sum_{k=1}^{T_b} d^k m_k\right) \prod_{a_j \in \mathcal{S}_a} (1 + d(a_j + y\zeta_j)) - \\ & \left(1 + \sum_{k'=1}^{T_a} d^{k'} m'_{k'}\right) \prod_{b_{j'} \in \mathcal{S}_b} (1 + d(b_{j'} + y\eta_{j'})) \\ & = \sum_{t=1}^{\max(|S_a|, |S_b|)} y^t u_t, \quad U_t = g^{u_t} h^{\chi_t} \quad (14) \end{aligned}$$

$$V_j = g^{\zeta_j} h^{\mu_j a_j + \alpha_j \zeta_j}, \quad W_j = (gh^{\mu_j})^{\zeta_j} \quad (15)$$

$$V'_{j'} = g^{\eta_{j'}} h^{\delta_{j'} b_{j'} + \beta_{j'} \eta_{j'}}, \quad W'_{j'} = (gh^{\delta_{j'}})^{\eta_{j'}} \quad (16)$$

Доказывающий пересылает  $\{U_t\}$ ,  $\{V_j\}$ ,  $\{W_j\}$ ,  $\{V'_{j'}\}$ ,  $\{W'_{j'}\}$  Проверяющему.

4. Проверяющий выбирает запрос  $e \in \mathbb{F}_q$  и пересылает его Доказывающему.
5. Доказывающий получает ответы  $\{\Phi_j\}$ ,  $\{\Theta_j\}$ ,  $\{\Psi_{j'}\}$ ,  $\{\Delta_{j'}\}$ ,  $\Gamma$  и пересылает их Проверяющему.

$$\Phi_j = a_j + e\zeta_j \quad \Theta_j = \alpha_j + e\mu_j \quad (17)$$

$$\Psi_{j'} = b_{j'} + e\eta_{j'} \quad \Delta_{j'} = \beta_{j'} + e\delta_{j'} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma = & - \prod_{j=1}^{|\mathcal{S}_a|} (1 + d\Phi_j) \sum_{k=1}^{T_b} e^k \tau_k + \\ & \prod_{j'=1}^{|\mathcal{S}_b|} (1 + d\Psi_{j'}) \sum_{k'=1}^{T_a} e^{k'} \rho_{k'} + \sum_{t=1}^{\max(|S_a|, |S_b|)} e^t \chi_t \quad (19) \end{aligned}$$

6. Проверяющий получает значения проверочных полиномов:

$$F_a = \prod_{j=1}^{|\mathcal{S}_a|} (1 + d\Phi_j), \quad F_b = \prod_{j'=1}^{|\mathcal{S}_b|} (1 + d\Psi_{j'}) \quad (20)$$

Проверяющий рассматривает аргумент как убедительный, если

$$\begin{aligned} & \left(g \prod_{k=1}^{T_b} (M_k)^{e^k}\right)^{F_a} \left(g \prod_{k'=1}^{T_a} (M'_{k'})^{e^{k'}}\right)^{-F_b} \\ & h^{\Gamma} \prod_{t=1}^{\max(|S_a|, |S_b|)} U_t^{-e^t} = 1 \quad \wedge \\ & (gh^{\Theta_j})^{\Phi_j} A_j^{-1} V_j^{-e} W_j^{-e^2} = 1 \quad \wedge \\ & (gh^{\Delta_{j'}})^{\Psi_{j'}} B_{j'}^{-1} (V'_{j'})^{-e} (W'_{j'})^{-e^2} = 1 \quad (21) \end{aligned}$$

### 3.2. Свойства протокола

Нетрудно убедиться, что имеется свойство *полноты* предложенного протокола: честный Проверяющий всегда принимает положительное решение для честного Доказывающего, располагающего двумя множествами значений, для которых выполняется проверяемое условие.

**Теорема 4 (Soundness).** *Ошибка корректности протокола, представленного в разделе 3.1, не превышает  $\frac{|S_a \cup S_b| + \max(|S_a|, |S_b|)}{q}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим случай с честным Проверяющим и произвольным Доказывающим, в распоряжении которого имеются множества  $S_a$  и  $S_b$  ненулевых элементов поля, для которых не выполняется (6) для некоторых  $T_a$  и  $T_b$ . Тогда согласно теореме 3, не существует пары полиномов степени  $T_a$  и  $T_b$ , заданных коэффициентами  $\{m_k\}$  и  $\{m'_{k'}\}$ , таких, что  $\bar{u}(x) \equiv 0$ , где

$$\bar{u}(x) = \left(1 + \sum_{k=1}^{T_b} x^k m_k\right) f(x, S_a) - \left(1 + \sum_{k'=1}^{T_a} x^{k'} m'_{k'}\right) f(x, S_b)$$

Степень  $\deg(\bar{u}(x)) \leq |S_a \cup S_b|$ . Тогда вероятность случайно выбрать корень  $x = d$  полинома  $\bar{u}(y)$  не превышает  $\frac{|S_a \cup S_b|}{q}$ .

Пусть  $\bar{u}(d) \neq 0$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} \hat{u}(y) = & \prod_{a_j \in \mathcal{S}_a} (1 + d(a_j + y\zeta_j)) \left(1 + \sum_{k=1}^{T_b} d^k m_k\right) - \\ & \prod_{b_{j'} \in \mathcal{S}_b} (1 + d(b_{j'} + y\eta_{j'})) \left(1 + \sum_{k'=1}^{T_a} d^{k'} m'_{k'}\right) - \sum_{t=1}^{\max(|S_a|, |S_b|)} y^t u_t \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для любых  $\{\zeta_j\}, \{\eta_{j'}\}$  и для любого полинома, заданного коэффициентами  $\{u_t\}$ ,  $\hat{u}(d)$  является младшим коэффициентом  $\hat{u}(y)$  и степень  $\deg(\hat{u}(y)) \leq \max(|S_a|, |S_b|)$ . Тогда  $\hat{u}(y) \neq 0$  и вероятность случайно выбрать корень  $y = e$  полинома  $\hat{u}(y)$  не превышает  $\frac{1}{q}$ .

Пусть  $\hat{u}(e) \neq 0$ . Тогда такой доказывающий получает логарифм из приемлемых ответов:  $\log_h(g) = -\frac{u'}{\hat{u}(e)}$ , где

$$u' = F_a \sum_{k=1}^{T_b} e^k \tau_k - F_b \sum_{k'=1}^{T_a} e^{k'} \tau_{k'} + \Gamma - \sum_{t=1}^{\max(|S_a|, |S_b|)} e^t \chi_t$$

Таким образом, протокол является аргументом в предположении о сложности задачи поиска логарифма, вероятность ошибочного положительного решения Проверяющего убывает экспоненциально, параметром безопасности  $l$  является количество бит в двоичном представлении порядка группы.  $\square$

### 3.3. Схема электронной подписи

Протокол аргумента, представленный в разделе 3.1, может быть преобразован в неинтерактивный вариант в соответствии со схемой Фиат-Шамира. Запросы Проверяющего получают как значения хэш-функции подписываемого сообщения и части стенограммы протокола, сформировавшейся к моменту выбора запроса:

$$d = \text{Hash}(\text{Msg} || \{A_j\} || \{B_{j'}\} || \{M_k\} || \{M'_{k'}\}) \quad (22)$$

$$e = \text{Hash}(d || \{U_t\} || \{V_j\} || \{W_j\} || \{V'_{j'}\} || \{W'_{j'}\}) \quad (23)$$

Проверка экземпляра подписи заключается в проверке справедливости утверждения (21) для запросов  $(d, e)$ , полученных в соответствии с (22), (23), и ответов  $\{\Phi_j\}, \{\Theta_j\}, \{\Psi_{j'}\}, \{\Delta_{j'}\}, \Gamma$ .

## Список литературы

- [1] A practical and provably secure coalition-resistant group signature scheme / G. Ateniese, J. Camenisch, M. Joye, G. Tsudik // CRYPTO. — 2000. — Pp. 255–270.
- [2] Федюкович В. Протокол аргумента знания слова кода Гошпы и ошибки ограниченного веса // Прикладная дискретная математика, Приложение. — 2009. — Pp. 30–32.
- [3] Федюкович В., Шарпов В. Протокол демонстрации К-кратного вхождения строки // Информационные технологии и системы (ИТиС'08). — 2008. — Pp. 459–466.
- [4] Федюкович В. Протокол аргумента для цикла Гамильтона // Математика и безопасность информации. — 2008.
- [5] Goldwasser S., Micali S., Rackoff C. The knowledge complexity of interactive proof systems // SIAM J. Comput. — 1989. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 186–208.
- [6] Goldreich O., Micali S., Wigderson A. Proofs that yield nothing but their validity for all languages in NP have zero-knowledge proof systems // J. ACM. — 1991. — Vol. 38, no. 3. — Pp. 691–729.
- [7] Brickell E., Camenisch J., Chen L. Direct anonymous attestation. — Cryptology ePrint Archive, Report 2004/205. — 2004.
- [8] Chaum D., Evertse J.-H., van de Graaf J. An improved protocol for demonstrating possession of discrete logarithms and some generalizations. // EUROCRYPT. — 1987. — Pp. 127–141.
- [9] Schnorr C.-P. Efficient identification and signatures for smart cards. // CRYPTO. — 1989. — Pp. 239–252.
- [10] Fiat A., Shamir A. How to prove yourself: Practical solutions to identification and signature problems. // CRYPTO. — 1986. — Pp. 186–194.
- [11] Minsky Y., Trachtenberg A., Zippel R. Set reconciliation with nearly optimal communication complexity // International Symposium on Information Theory. — 2001. — P. 232.
- [12] Pedersen T. P. Non-interactive and information-theoretic secure verifiable secret sharing. // CRYPTO. — 1991. — Pp. 129–140.

## ТОРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

В. М. БУХШТАБЕР, Т. Е. ПАНОВ

Аннотация. В обзоре излагаются методы и основные результаты новой активно развивающейся области исследований — *торической топологии*.

### 1. ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теория действий тора имеет длинную историю развития и образует важную область алгебраической топологии. За последние 15 лет на стыке эквивариантной топологии, алгебраической и симплектической геометрии, комбинаторики, коммутативной и гомологической алгебры возникла новая область исследований — *торическая топология*, которая быстро привлекла внимание большого числа исследователей и активно развивается в настоящее время.

В центре внимания торической топологии находятся действия тора, пространства орбит которых несут богатую комбинаторную структуру. В ней решаются задачи на основе изучения алгебраических, комбинаторных и топологических свойств таких действий, естественно возникающих в различных направлениях исследований. Благодаря торической топологии фундаментальные результаты ряда областей математики получили новое развитие и нашли неожиданные замечательные приложения.

Первоначальный импульс этому развитию придала *торическая геометрия* — теория *торических многообразий* в алгебраической геометрии. Эта теория устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексными алгебраическими многообразиями с действием комплексного тора, имеющим плотную орбиту, и комбинаторными объектами, называемыми *веерами*. При помощи вееров алгебро-геометрические свойства торических многообразий полностью переводятся на язык комбинаторики. Торическая геометрия предоставляет богатый источник явных примеров алгебраических многообразий и имеет яркие приложения в таких областях, как теория особенностей и математическая физика. Пространство орбит  $2n$ -мерного неособого проективного торического многообразия по действию компактного тора  $T^n$  представляет собой выпуклый  $n$ -мерный простой многогранник  $P$ .

В симплектической геометрии, после появления теоремы выпуклости Атья–Гиллёмана–Стернберга [At82] и формулы Дуистермаата–Хекмана [DH82] в начале 1980-х годов, активно изучались гамильтоновы действия групп. В работе Делзанта [De88] было показано, что в случае действия тора размерности, равной половине размерности многообразия, образ отображения моментов определяет многообразие с точностью до эквивариантного симплектоморфизма. В симплектической геометрии, как и в торической геометрии, различные геометрические конструкции имеют комбинаторную интерпретацию в терминах многогранников.

Имеется тесная взаимосвязь между алгебраическими и симплектическими многообразиями с действием тора: проективное вложение неособого торического многообразия определяет симплектическую форму и отображение моментов. Образом отображения моментов является многогранник, двойственный к вееру. Как в алгебраической, так и в симплектической ситуации, действие

компактного тора локально изоморфно стандартному действию тора  $T^n$  на  $\mathbb{C}^n$  покоординатными вращениями. Факторпространство многообразия по такому действию тора представляет собой многообразие с углами, которое несёт комбинаторную структуру, отражающую структуру частично упорядоченного множества стационарных подгрупп. Это позволяет полностью восстановить многообразие и действие. Замечательно, что такой подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространства с действием тора удаётся интерпретировать и доказывать весьма тонкие комбинаторные результаты топологически. Оказалось, что данная специфика алгебраических торических многообразий имеет чисто топологическую природу, что вызвало глубокое проникновение идей и методов торической и симплектической геометрии в алгебраическую топологию с начала 1990-х годов.

Дальнейшие исследования выявили ряд важных классов многообразий с действием тора, происхождение которых восходит к торическим или симплектическим многообразиям. Эти более общие многообразия как правило не являются алгебраическими или симплектическими, но в то же время обладают важнейшими топологическими свойствами их алгебраических или симплектических предшественников. Таким образом, была существенно расширена область приложений методов торической топологии в комбинаторике и коммутативной алгебре. Опишем некоторые из этих классов.

Подход Дэвиса–Янушкиевича [DJ91] к изучению торических многообразий топологическими методами привёл к появлению *квазиторических многообразий*. Этот класс многообразий определяется двумя условиями: действие тора локально выглядит как стандартное представление  $T^n$  в комплексном пространстве  $\mathbb{C}^n$ , а пространство орбит  $Q$  является комбинаторным простым многогранником. Оба условия выполнены для действия тора на неособом проективном торическом многообразии. Работы Бухштабера–Рэя [BP98], [BR01] показали, что квазиторические многообразия играют важную роль в теории комплексных кобордизмов — классической области алгебраической топологии [St68]. В отличие от торических многообразий, квазиторические многообразия могут быть не комплексными и даже не почти комплексными, однако они всегда допускают стабильно комплексную структуру, которая определяется в чисто комбинаторных терминах — при помощи так называемой *характеристической функции*, сопоставляющей каждой гипергранни многогранника некоторый примитивный вектор целочисленной решётки. Характеристическая функция играет роль веера, сопоставляемого торическому многообразию в алгебраической геометрии.

Комбинаторный подход к изучению гамильтоновых действий тора привёл к понятию *ГКМ-многообразий*. Согласно [GZ99], компактное  $2n$ -мерное многообразие  $M$  с эффективным действием тора  $T^k$ ,  $k \leq n$ , называется ГКМ-многообразием, если множество неподвижных точек конечно,  $M$  обладает инвариантной почти комплексной структурой, и веса представлений тора  $T^k$  в касательных пространствах к неподвижным точкам попарно линейно независимы. Эти многообразия были названы в честь Горески, Котвица и Макферсона, которые впервые ввели их в [GKM98]. Там же было показано, что «1-остов» такого многообразия  $M$ , т.е. множество точек, имеющих стационарную подгруппу коразмерности не больше 1, может быть описано при помощи графа с метками  $(\Gamma, \alpha)$ . Этот граф, называемый *графом весов* (или *ГКМ-графом*), позволяет вычислять важные топологические инварианты многообразия  $M$ , такие как его числа Бетти или кольцо эквивариантных когомологий. Изучение таких графов приобрело самостоятельный комбинаторный интерес благодаря работам Гиллёмана–Зары [GZ99] и других. Отметим, что в топологии

идея сопоставления графа с метками многообразию с действием окружности использовалась начиная с 1970-х годов, см., например, работу Мусина [Му80].

Стенли был одним из первых, кто осознал большой потенциал торических действий для комбинаторных приложений, используя их для доказательства гипотезы Макмюллена о числах граней симплицальных многогранников и гипотезы о верхней границе для триангуляций сфер. Его результаты и методы легли в основу известной монографии [St96] и предопределили дальнейшие приложения коммутативной алгебры и гомологических методов в комбинаторной геометрии.

Многие идеи Стенли нашли топологические применения; так оказалось, что кольцо граней (или кольцо Стенли–Риснера)  $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$  симплицального комплекса  $\mathcal{K}$  является важной составляющей в вычислении кольца когомологий квазиторического многообразия  $M$ . В [DJ91] показано, что эквивариантные когомологии многообразия  $M$  изоморфны кольцу граней  $\mathbb{Z}[\mathcal{K}_P]$  симплицального комплекса  $\mathcal{K}_P$ , двойственного к границе простого многогранника  $P$ . Кольцо обычных когомологий  $H^*(M)$  получается из  $\mathbb{Z}[\mathcal{K}_P]$  факторизацией по идеалу, порождённому некоторыми линейными формами, в точности как и в случае торических многообразий.

С появлением кольца граней стало ясно, что многие тонкие комбинаторные свойства комплексов  $\mathcal{K}$  можно интерпретировать алгебраически. Изучение колец граней получило самостоятельное развитие и привело к новому классу колец Коэна–Маколея, имеющих геометрическую природу. В частности, возникло новое топологическое понятие симплицального комплекса Коэна–Маколея  $\mathcal{K}$ , для которого  $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]$  является кольцом Коэна–Маколея. Подробное изложение этих понятий можно найти в монографии [ВН98], где также подчёркивается важность гомологического подхода. Например, в [St96] и [ВН98] рассматриваются размерности биградуированных компонент векторных пространств  $\text{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$ , называемые алгебраическими числами Бетти кольца  $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ , для любого поля  $\mathbf{k}$ . Эти числа являются весьма тонкими инвариантами: они зависят от комбинаторики  $\mathcal{K}$ , а не только от топологии его реализации  $|\mathcal{K}|$ , и полностью определяют «обычные» топологические числа Бетти для  $|\mathcal{K}|$ . Теорема Хохстера [Ho77] выражает алгебраические числа Бетти через когомологии полных подкомплексов в  $\mathcal{K}$ .

Более подробно ознакомиться с основными этапами развития торической топологии можно по монографии [БП04] и недавнему обзору Бухштабера–Рэя [BR08]. Среди других работ по торической топологии сотрудников и аспирантов кафедры высшей геометрии и топологии выделим [Ба03], [ББП04], [До01], [Ер08].

## 2. ТОРИЧЕСКИЕ И КВАЗИТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрим выпуклый  $n$ -мерный многогранник с  $m$  гипергранями в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , заданный как пересечение  $m$  полупространств:

$$(2.1) \quad P = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) + b_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq m \},$$

где  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$  — некоторые векторы и  $b_i \in \mathbb{R}$ . Многогранник  $P$  называется простым, если ограничивающие его гиперплоскости находятся в общем положении в каждой его вершине; далее мы будем рассматривать лишь простые многогранники.

Многогранник (2.1) можно задать одним матричным неравенством

$$A_P \mathbf{x} + b_P \geq 0,$$

4

В. М. БУХШТАБЕР, Т. Е. ПАНОВ

где  $A_P$  — матрица размера  $m \times n$  со строками  $\mathbf{a}_i$ , а  $b_P$  — столбец из чисел  $b_i$ ; неравенство считается покоординатным. Тогда аффинное отображение

$$i_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad \mathbf{x} \mapsto A_P \mathbf{x} + b_P$$

отождествляет  $P$  с пересечением *положительного ортанта*  $\mathbb{R}_{\geq}^m$  и  $n$ -мерной плоскости  $i_P(\mathbb{R}^n)$ . Ортант  $\mathbb{R}_{\geq}^m$  является пространством орбит *стандартного* (покоординатного) действия тора  $T^m$  на комплексном пространстве  $\mathbb{C}^m$ ; в качестве проекции на пространство орбит возьмем отображение

$$\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m; \quad (z_1, \dots, z_m) \mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2).$$

Теперь определим пространство  $\mathcal{Z}_P$  из коммутативной диаграммы

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_Z} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}_{\geq}^m. \end{array}$$

По построению,  $\mathcal{Z}_P$  является  $T^m$ -инвариантным подмножеством в  $\mathbb{C}^m$  с пространством орбит  $P$ , а  $i_Z$  является  $T^m$ -эквивариантным вложением.

**Теорема 2.1.** *Пространство  $\mathcal{Z}_P$  является  $T^m$ -инвариантным гладким вещественным  $(m+n)$ -мерным подмногообразием в  $\mathbb{C}^m$  с тривиальным нормальным расслоением.*

Выбрав вещественную  $(m-n) \times m$ -матрицу  $D = (d_{ki})$  ранга  $(m-n)$ , такую что  $DA_P = 0$ , можно задать  $\mathcal{Z}_P$  как полное пересечение вещественных квадрик в  $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ :

$$\sum_{i=1}^m d_{ki} (|z_i|^2 - b_i) = 0, \quad 1 \leq k \leq m-n.$$

Мы называем  $\mathcal{Z}_P$  *момент-угол многообразием* многогранника  $P$  (название связано с тем, что  $\mathcal{Z}_P$  является поверхностью уровня для *отображения моментов* в симплектической конструкции торических многообразий [БП04, §9.2]).

Действие тора  $T^m$  на  $\mathcal{Z}_P$  не является свободным: вершины многогранника имеют максимальные ( $n$ -мерные) стационарные подгруппы. Во многих случаях удаётся найти  $(m-n)$ -мерную подгруппу в  $T^m$ , действующую на  $\mathcal{Z}_P$  свободно. Важнейшие примеры возникают, когда многогранник  $P$  является *целочисленным*, т.е. имеет вершины в точках целочисленной решётки  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ . В этом случае векторы  $\mathbf{a}_i$  в (2.1) можно выбрать целочисленными и примитивными; тогда отображение  $A_P$  происходит из эпиморфизма решёток  $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ , который задаёт эпиморфизм торов  $T^m \rightarrow T^n$ . Обозначим его ядро через  $K(P)$ .

**Лемма 2.2.** *Пусть для каждой вершины многогранника  $P$  набор из  $n$  векторов  $\mathbf{a}_i$ , ортогональных к гиперграням, содержащим эту вершину, образует базис целочисленной решётки. Тогда  $K(P)$  является  $(m-n)$ -мерным тором, действующим на  $\mathcal{Z}_P$  свободно.*

Соответствующее фактор-многообразие  $V_P = \mathcal{Z}_P/K(P)$  (размерности  $2n$ ) называется *торическим многообразием*, соответствующим целочисленному многограннику  $P$ . Оно является неособым проективным алгебраическим многообразием с действием алгебраического тора  $(\mathbb{C}^\times)^n$ , имеющим плотную орбиту [Да78], [Фу93]. Компактный тор  $T^n = T^m/K(P)$  является максимальной компактной подгруппой в  $(\mathbb{C}^\times)^n$ .

Торические подгруппы в  $T^m$ , действующие на  $\mathcal{Z}_P$  свободно, можно также получать из следующей более общей конструкции. Пусть  $\Lambda$  — целочисленная

$m \times n$ -матрица, строки которой удовлетворяют условию на векторы  $\mathbf{a}_i$  из леммы 2.2. Тогда ядро  $K(\Lambda)$  соответствующего отображения торов  $T^m \rightarrow T^n$  также действует на  $\mathcal{Z}_P$  свободно. Фактор-многообразие  $M = M(P, \Lambda) = \mathcal{Z}_P / K(\Lambda)$  называется *квазиторическим многообразием*, задаваемым данными  $(P, \Lambda)$ . Торические многообразия получаются как частный случай при  $\Lambda = A_P$ . Действие тора  $T^n = T^m / K(\Lambda)$  на  $M$  обладает двумя свойствами, которые привели Дэвиса и Янушкевича к понятию квазиторического многообразия (см. Введение). Можно доказать, что любое многообразие с действием тора  $T^n$ , удовлетворяющим этим условиям, получается из предыдущей конструкции как факторпространство момент-угол многообразия.

Следующая конструкция показывает, что на каждом квазиторическом многообразии имеется *стабильно комплексная структура*.

Пусть  $F_1, \dots, F_m$  — гиперграни многогранника  $P$  и  $\pi: M \rightarrow P$  — проекция на пространство орбит квазиторического многообразия. Тогда  $M_i = \pi^{-1}(F_i)$  является ориентируемым подмногообразием в  $M$  коразмерности два, называемым *характеристическим подмногообразием*. Тем самым определено вещественное 2-мерное ориентируемое расслоение  $\rho_i$  над  $M$ , ограничение которого на  $M_i$  совпадает с нормальным расслоением вложения  $M_i \subset M$ .

**Теорема 2.3** ([DJ91, BR01]). *Имеет место изоморфизм вещественных 2t-мерных расслоений*

$$TM \oplus \mathbb{R}^{2(m-n)} \cong \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m,$$

где  $TM$  — касательное расслоение, а  $\mathbb{R}^{2(m-n)}$  — тривиальное  $2(m-n)$ -мерное расслоение над  $M$ .

Так как выбор ориентации в вещественном 2-мерном расслоении эквивалентен заданию на нём комплексной структуры, стабильное касательное расслоение к  $M$  допускает комплексную структуру. Выбор этой структуры становится однозначным, если зафиксировать ориентацию самого  $M$  и всех характеристических подмногообразий  $M_i$ . Такой набор ориентаций называется *полиориентацией*. Для каждого полиориентированного квазиторического многообразия  $M$  определён его класс  $[M] \in \Omega_U$  в кольце комплексных кобордизмов.

**Теорема 2.4** ([BPR07]). *Каждый класс комплексных кобордизмов размерности  $> 2$  содержит квазиторическое многообразие (непрерывно связное), стабильно комплексная структура которого задаётся некоторой полиориентацией, а следовательно согласована с действием тора.*

Данный результат можно рассматривать как решение квазиторического аналога известной проблемы Хирцебруха о классах кобордизма, представляемых связными неособыми алгебраическими многообразиями.

**Следствие 2.5.** *Каждый класс комплексных кобордизмов размерности  $> 2$  представляется фактор-пространством полного пересечения вещественных квадратиков по свободному действию тора.*

### 3. МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСЫ И МНОГООБРАЗИЯ

Теория момент-угол комплексов является одним из основных инструментов приложений торической топологии и объединяет методы комбинаторной геометрии, гомологической алгебры и эквивариантной топологии.

В предыдущем разделе мы сопоставили каждому геометрическому простому многограннику (2.1) гладкое момент-угол многообразие  $\mathcal{Z}_P$  с действием тора  $T^m$ , получаемое как полное пересечение вещественных квадратиков в  $\mathbb{C}^m$ . Можно показать, что  $\mathcal{Z}_P$  отождествляется с факторпространством  $P \times T^m / \sim$  по некоторому отношению эквивалентности, откуда вытекает, что топологический тип

многообразия  $\mathcal{Z}_P$  определяется лишь комбинаторной структурой многогранника  $P$ . Эта последняя конструкция многообразия  $\mathcal{Z}_P$  впервые появилась в [DJ91] и была мотивирована конструкциями Винберга [Ви71] для групп Кокстера. Также в [DJ91] было получено обобщение конструкции  $\mathcal{Z}_P$  на произвольные конечные симплициальные комплексы  $\mathcal{K}$  с  $m$  вершинами (при этом простой многогранник  $P$  соответствует симплициальному комплексу  $\mathcal{K}_P$  — границе двойственного многогранника). Получаемые пространства  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  мы и называем *момент-угол комплексами*. В [DJ91] им отводилась лишь вспомогательная роль при изучении квазиторических многообразий, но вскоре стало ясно, что момент-угол комплексы имеют самостоятельное большое значение.

Пусть  $\mathcal{K}$  — конечный абстрактный симплициальный комплекс на множестве  $[m] = \{1, \dots, m\}$ . В [БП99] нами была предложена другая конструкция момент-угол комплекса  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ . Рассмотрим единичный комплексный полидиск

$$(\mathbb{D}^2)^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leq 1, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

С каждым симплексом  $\sigma \in \mathcal{K}$  свяжем подмножество

$$B_{\sigma} = \{(z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{D}^2)^m : |z_i|^2 = 1 \text{ при } i \notin \sigma\}$$

и определим *момент-угол комплекс*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} B_{\sigma} \subset (\mathbb{D}^2)^m,$$

где объединение берётся в полидиске  $(\mathbb{D}^2)^m$ . По построению,  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  является  $T^m$ -инвариантным подпространством, содержащим стандартный тор  $\mathbb{T}^m \subset (\mathbb{D}^2)^m$ .

**Пример 3.1.** Если  $\mathcal{K} = \partial(\Delta^{m-1})$  — граница  $(m-1)$ -мерного симплекса, то  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \partial((\mathbb{D}^2)^m) \cong S^{2m-1}$ .

### Предложение 3.2.

1. Пусть  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$  — граница симплициального многогранника, двойственного к простому многограннику  $P$ . Тогда соответствующий момент-угол комплекс  $T^m$ -эквивариантно гомеоморфен момент-угол многообразию  $\mathcal{Z}_P$ .

2. Если  $\mathcal{K}$  является симплициальным разбиением  $(n-1)$ -мерной сферы, то  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  является (замкнутым)  $T^m$ -многообразием.

3. Если  $\mathcal{K}$  является симплициальным разбиением  $(n-1)$ -мерного многообразия, то дополнение  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \setminus \mathbb{T}^m$  до стандартного тора  $\mathbb{T}^m \subset (\mathbb{D}^2)^m$  является открытым  $T^m$ -многообразием.

**Предложение 3.3.** Сопоставление  $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  задаёт функтор из категории симплициальных комплексов и симплициальных отображений в категорию пространств с действием тора и эквивариантных отображений.

Одним из наших основных результатов о момент-угол комплексах является вычисление их колец когомологий в терминах комбинаторики симплициальных комплексов. Напомним, что *кольцом граней* (или *кольцом Стенли–Риснера*) симплициального комплекса  $\mathcal{K}$  называется градуированное факторкольцо

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathcal{I},$$

где  $\deg v_i = 2$ , а идеал  $\mathcal{I}$  порождён мономами  $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ , где  $\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}$ .

**Теорема 3.4.** Имеют место функториальные по  $\mathcal{K}$  изоморфизмы градуированных алгебр

$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}^*(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}) \cong H[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d].$$

Здесь последняя часть формулы обозначает алгебру когомологий дифференциальной градуированной алгебры  $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$ , где образующие  $u_i$  внешней алгебры имеют степень 1, а дифференциал задан на образующих следующим образом:  $du_i = v_i$ ,  $dv_i = 0$ .

Второй изоморфизм в предыдущей теореме основан на стандартном вычислении Тог-алгебры при помощи комплекса Кошуля. Доказательство изоморфизма между когомологиями момент-угол комплекса и Тог-алгеброй основан на построении клеточного разбиения пространства  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  (при котором каждый диск  $\mathbb{D}^2$  разбивается на три клетки) и анализе умножения в клеточных коцепях при помощи специальной клеточной аппроксимации диагонального отображения  $\Delta: \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ , функториальной относительно отображений симплициальных комплексов. При этом показано, что биградуировка в Тог-модулях имеет явную геометрическую реализацию, обусловленную введённой в  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  биградуированной клеточной структурой. Детали см. в [БП04, §8.1].

Теорема 3.4 даёт достаточно эффективное описание кольца  $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$  и легко применяется для конкретных вычислений с симплициальными комплексами. В случае комплексов с большим числом вершин для вычисления размерностей биградуированных компонент Тог-модулей можно привлечь известные пакеты компьютерных программ (Macaulay2, Bistellar и др.). Кроме того, применение теоремы Хохстера позволяет свести вычисление к когомологиям полных подкомплексов в  $\mathcal{K}$ :

**Теорема 3.5.** *Имеют место изоморфизмы групп*

$$H^k(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{\omega \subset [m]} \tilde{H}^{k-|\omega|-1}(\mathcal{K}_{\omega}),$$

где  $\mathcal{K}_{\omega}$  — полный подкомплекс в  $\mathcal{K}$  (ограничение  $\mathcal{K}$  на подмножество  $\omega \subset [m]$ ).

Тем самым конструкция момент-угол комплексов позволила применить методы эквивариантной топологии для изучения комбинаторики симплициальных комплексов и алгебраических свойств их колец граней, придавая новое, геометрическое, измерение «комбинаторной коммутативной алгебре». В частности, вычисление когомологий момент-угол комплексов позволило топологически интерпретировать гомологические инварианты колец граней, такие как Тог-алгебры и алгебраические числа Бетти.

Несмотря на простоту конструкций момент-угол комплексов и многообразий, их топология достаточно сложна. Это видно уже из вычислений (на основе теоремы 3.4) когомологий момент-угол комплексов, соответствующих комплексам  $\mathcal{K}$  с небольшим числом вершин. Оказалось, что в алгебрах рациональных когомологий момент-угол комплексов существуют нетривиальные произведения Масси [Ба03]. В некоторых случаях (например, для границ многоугольников или остовов симплексов) удаётся явно описать топологический тип пространства  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  (см. пример 3.7), но всяких раз такое описание использует весьма тонкий анализ различных конструкций момент-угол комплексов.

Важным аспектом теории момент-угол комплексов является их тесная взаимосвязь с конфигурациями координатных подпространств и их дополнениями. Эти пространства играют важную роль в алгебраической геометрии, теории особенностей и теории шарнирных механизмов.

Координатное подпространство  $\mathbb{C}^m$  можно задать в виде

$$(3.1) \quad L_{\omega} = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\},$$

где  $\omega = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ .

Для каждого симплициального комплекса  $\mathcal{K}$  на множестве  $[m]$  рассмотрим конфигурацию комплексных координатных подпространств  $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \{L_{\omega} : \omega \notin \mathcal{K}\}$  и её дополнение в  $\mathbb{C}^m$ :

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\omega \notin \mathcal{K}} L_{\omega}.$$

Сопоставление  $\mathcal{K} \mapsto U(\mathcal{K})$  определяет взаимно однозначное соответствие между симплициальными комплексами на множестве  $[m]$  и дополнениями координатных конфигураций в  $\mathbb{C}^m$ , сохраняющее отношение вложения.

**Теорема 3.6.** *Для любого симплициального комплекса  $\mathcal{K}$  на множестве  $[m]$  имеется  $T^m$ -эквивариантная деформационная ретракция*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \hookrightarrow U(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$

Наличие гомотопической эквивалентности  $U(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  позволяет применять наши результаты о момент-угол комплексах в теории конфигураций. В частности, мы получаем решение известной задачи об описании кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Отметим, что другие известные результаты о когомологиях дополнений конфигураций координатных подпространств не описывают мультипликативной структуры (как общая теорема Горески–Макферсона [GM88]), либо дают лишь описание произведения двух данных коциклов в комбинаторных терминах (как результат де Лонгвилле [dL00]). Наш результат о момент-угол комплексах даёт исчерпывающее глобальное описание кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств. Результаты Горески–Макферсона (в части координатных конфигураций) и де Лонгвилле сводятся к частным случаям нашего результата при помощи двойственности Александера.

**Пример 3.7.** Пусть  $\mathcal{K}$  представляет собой набор из  $m$  точек. Тогда  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  гомотопически эквивалентно дополнению

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} \{z_i = z_j = 0\}$$

всех координатных плоскостей коразмерности два. Кольцо граней имеет вид

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / (v_i v_j, i \neq j).$$

Пространство коциклов в алгебре  $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$  имеет базис из мономов

$$v_{i_1} u_{i_2} u_{i_3} \cdots u_{i_k}, \quad k \geq 1 \text{ и } i_p \neq i_q \text{ при } p \neq q.$$

Пространство  $(k+1)$ -мерных кограней порождено элементами вида  $d(u_{i_1} \cdots u_{i_k})$ . Вычисляя размерности этих пространств, получаем

$$\begin{aligned} \dim H^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &= 1, & \dim H^1(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &= H^2(U(\mathcal{K})) = 0, \\ \dim H^{k+1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) &= m C_{m-1}^{k-1} - C_m^k = (k-1) C_m^k, & 2 \leq k \leq m, \end{aligned}$$

а умножение в когомологиях дополнения  $U(\mathcal{K})$  тривиально.

В частности, при  $m = 3$  получаем

$$H^*(U(\mathcal{K})) \cong H^*(S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^4 \vee S^4),$$

и можно показать, что этот изоморфизм колец когомологий индуцирован гомотопической эквивалентностью пространств. Более того, дополнение  $U(\mathcal{K})$  из этого примера гомотопически эквивалентно букету сфер для любого  $m$  [ГТ04].

#### 4. НОВЫЕ ОБЛАСТИ ПРИЛОЖЕНИЙ

Момент-угол комплексы нашли приложения в теории действий алгебраических групп, а именно, при построении *множеств типа Кемпфа–Несс* для действий алгебраического тора на квазиаффинных многообразиях. В классической ситуации действий алгебраических групп на аффинных многообразиях понятие множества Кемпфа–Несс позволяет заменить категорный фактор на факторпространство по действию максимальной компактной подгруппы. В [Па08] показано, что момент-угол комплекс  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$  играет роль множества Кемпфа–Несс для класса действий алгебраического тора на квазиаффинных

многообразиях (дополнениях конфигураций координатных подпространств), возникающих в подходе Батырева–Кокса к торическим многообразиям на основе геометрической теории инвариантов. Таким образом, наши результаты о момент-угол комплексах применимы и к вычислению когомологий этих «торических» множеств Кемпфа–Несс. В случае неособых проективных торических многообразий соответствующие множества Кемпфа–Несс могут быть описаны как полные пересечения вещественных квадрик в комплексном пространстве.

Возвращаясь к нашему описанию момент-угол многообразий  $\mathcal{Z}_P$  как полному пересечению вещественных квадрик, отметим область приложений, открытую в [ВМ06]. В этой работе был рассмотрен достаточно общий класс полных пересечений вещественных квадрик в  $\mathbb{C}^m$ , называемых *линками* (условия, накладываемые на уравнения квадрик обеспечивают неособость их пересечения). В [ВМ06] показано, что все линки допускают структуру некэлеровых комплексных многообразий (в случае линков нечётных размерностей необходимо взять произведение с окружностью), тем самым обобщая известные серии некэлеровых многообразий Хопфа и Калаби–Экмана. Можно показать, что класс линков совпадает с классом момент-угол многообразий  $\mathcal{Z}_P$ , соответствующих простым многогранникам. Тем самым открываются новые взаимосвязи между торической топологией и комплексной геометрией.

За последние 10 лет появились различные конструкции широкого класса простых многогранников, обобщающих замечательные серии пермutoэдров, ассоциэдров (многогранников Шташефа), циклоэдров (многогранников Бота–Таубса). Например, каждому связному простому графу (т.е. графу без петель и кратных ребер) с  $(n + 1)$  вершиной сопоставляется простой  $n$ -мерный многогранник, так что пермutoэдру соответствует полный граф, ассоциэдру — путь, а циклоэдру — цикл (см. например, [PRW07]).

Благодаря конструкции момент-угол многообразия  $\mathcal{Z}_P$  и квазиторического многообразия в виде  $M^{2n} = \mathcal{Z}_P/K(\Lambda)$  эти результаты позволили ввести явные примеры новых классов многообразий и бесспорно будут способствовать развитию взаимосвязей между комбинаторикой, теорией графов и алгебраической топологией (см. [Vu08]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ба03] И. В. Баскаков. *Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов*. Успехи мат. наук **58** (2003), вып. 5, 199–200.
- [БВП04] И. В. Баскаков, В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Алгебры клеточных коцепей и действия торов*. Успехи мат. наук **59** (2004), вып. 3, 159–160.
- [БП99] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия тора и комбинаторика многогранников*. Труды МИРАН им. Стеклова, **225**, 1999, 96–131.
- [БП04] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*. Издательство МЦНМО, Москва, 2004.
- [БР98] В. М. Бухштабер, Н. Рэй. *Торические многообразия и комплексные кобордизмы*. Успехи мат. наук **53** (1998), вып. 2, с. 139–140.
- [Ви71] Э. Б. Винберг. *Дискретные линейные группы, порождённые отражениями*. Известия АН СССР, сер. матем. **35** (1971), 1072–1112.
- [ГТ04] Е. Грбич, С. Терно. *Гомотопический тип дополнения конфигурации координатных подпространств коразмерности два*. Успехи мат. наук **59** (2004), вып. 6, 203–204.
- [Да78] В. И. Данилов. *Геометрия торических многообразий*. Успехи мат. наук **33** (1978), вып. 2, 85–134.
- [До01] Н. Э. Добринская. *Проблема классификации квазиторических многообразий над заданным простым многогранником*. Функ. ан. и его прил. **35** (2001), вып. 2, 3–11.
- [Ер08] Н. Ю. Ероховец. *Инвариант Бухштабера простых многогранников*. Успехи мат. наук **63** (2008), вып. 5, 187–188.
- [Му80] О. Р. Мусин. *О действиях окружности на гомотопических проективных пространствах*. Мат. заметки **28** (1980), вып. 1, 139–152.

- [Па08] Т. Е. Панов. *Торические множества типа Кемпфа–Несс*. Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова **263** (2008), 159–172.
- [At82] M. F. Atiyah. *Convexity and commuting Hamiltonians*. Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.
- [BM06] F. Bosio, L. Meersseman. *Real quadrics in  $\mathbb{C}^n$ , complex manifolds and convex polytopes*. Acta Math. **197** (2006), no. 1, 53–127.
- [BH98] W. Bruns, J. Herzog. *Cohen–Macaulay Rings*, revised edition. Cambridge Studies in Adv. Math., vol. **39**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [BP02] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*. University Lecture Series **24**. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 2002.
- [BPR07] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*. Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2, 219–242.
- [BR01] V. M. Buchstaber, N. Ray. *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes*. Internat. Math. Res. Notices **4** (2001), 193–219.
- [BR08] V. M. Buchstaber, N. Ray. *An invitation to toric topology: vertex four of a remarkable tetrahedron*, in: “Toric Topology” (M. Harada *et al.*, eds.). Contemp. Math., vol. **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 1–27.
- [Bu08] V. M. Buchstaber. *Lectures on Toric Topology*. Trends in Mathematics, Information Center for Mathematical Sciences, vol. **11**, 2008, no. 1, pp. 1–55.
- [DJ91] M. W. Davis, T. Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*. Duke Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.
- [dL00] M. de Longueville. *The ring structure on the cohomology of coordinate subspace arrangements*. Math. Z. **233** (2000), no. 3, 553–577.
- [De88] T. Delzant. *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment*. Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 315–339.
- [DH82] J. Duistermaat, G. Heckman. *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space*. Invent. Math. **69** (1982), no. 2, 259–268.
- [Fu93] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Ann. of Math. Studies **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
- [GKM98] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localisation theorem*. Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.
- [GM88] M. Goresky, R. MacPherson. *Stratified Morse Theory*. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1988. [Русский перевод: М. Горески, Р. Макферсон, *Стратифицированная теория Морса*, М.: Мир, 1991.]
- [GZ99] V. W. Guillemin, C. Zara. *Equivariant de Rham theory and graphs*. Asian J. Math. **3** (1999), no. 1, 49–76.
- [Ho77] M. Hochster. *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*, in *Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference)*. B. R. McDonald and R. Morris, eds., Dekker, New York, 1977, pp. 171–223.
- [PRW07] A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams. *Faces of generalized permutohedra*. Preprint arXiv:math/0609184.
- [St96] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, second edition. Progr. in Math. **41**. Birkhäuser, Boston, 1996.
- [St68] R. E. Stong. *Notes on Cobordism Theory*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1968. [Русский перевод: Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов (с приложением В. М. Бухштабера)*, М.: Мир, 1973.]

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ и ИППИ РАН

*E-mail address:* buchstab@mi.ras.ru

*E-mail address:* tpanov@mech.math.msu.su

# Финитная аппроксимируемость обобщенно-транзитивных симметричных модальных логик

Андрей Кудинов  
ИППИ РАН  
kudinov@iitp.ru

Илья Шапировский  
ИППИ РАН  
shapir@iitp.ru

## Аннотация

В работе рассматриваются модальные логики бинарных отношений, удовлетворяющих условиям вида  $R^m \subseteq R^n$ . Несмотря на то, что эти логики легко описываются и имеют весьма простую аксиоматику, вопрос о финитной аппроксимируемости таких логик открыт. Эта задача возникла в 60х годах прошлого века (для случая  $m = 3, n = 2$ ), и до сих пор остаётся нерешённой.

В работе рассматривается модификация этой задачи для симметричных отношений. Для этого случая при  $m = n + 1$  доказывается финитная аппроксимируемость.

## 1. Введение

В теории модальных логик первые результаты о финитной аппроксимируемости, т.е. о существовании класса конечных структур, характеризующих данную логику, были получены в сороковых годах прошлого века — первый такой результат получен, по-видимому, в [4], где доказывается разрешимость логики S4. (Напомним, что для логик с конечной аксиоматикой разрешимость следует из финитной аппроксимируемости.) В 1960х годах возникли уже общие методы для доказательства финитной аппроксимируемости модальных логик — сначала алгебраические [6, 7], а потом и собственно модальные [8], с помощью так называемых *эпифильтраций*.

Метод эпифильтраций Леммона-Сегерберга оказался весьма эффективным — в частности, с его помощью могут быть получены сравнительно простые доказательства финитной аппроксимируемости для логик рефлексивных, транзитивных, симметричных и многих других отношений.

Вероятно, простейшим примером логики элементарного (т.е. задаваемого формулой пер-

вого порядка) класса структур, для которой метод эпифильтраций перестаёт работать, оказывается логика, задаваемая формулой т.н. *2-транзитивности*

$$\diamond\diamond\diamond p \rightarrow \diamond\diamond p.$$

Эта формула имеет простую семантическую характеристику: её общезначимость на шкале Крипке равнозначна выполнению свойства  $R^3 \subseteq R^2$ . Несмотря на то, что 2-транзитивная логика неоднократно рассматривалась многими исследователями на протяжении последних десятилетий<sup>1</sup>, вопрос о её финитной аппроксимируемости (и разрешимости) остаётся открыт.

В нашей работе мы будем рассматривать  $m$ -транзитивные симметричные логики — логики классов симметричных отношений, задаваемых условиями вида  $R^{m+1} \subseteq R^m$  (в последние годы эти логики рассматривались в ряде работ в связи с вопросами полноты по Крипке и компактности, см., например, [5, 3]). Для этих логик мы докажем финитную аппроксимируемость, и, следовательно, разрешимость.

## 2. Основные понятия

В этом параграфе мы введем лишь самые необходимые понятия и обозначения, более подробно ознакомиться с теорией модальных логик читатель может, например, в [2].

В работе рассматриваются *одномодальные пропозициональные нормальные модальные логики* (далее — просто *логики*).

Множество *модальных формул* строится из счетного множества *пропозициональных переменных*  $PV = \{p_1, p_2, \dots\}$ , классических связок связок  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$  (*конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание*) и одноместной связки  $\Box$  (модальность «необходимо»). Модальность  $\diamond$

<sup>1</sup>(Например, логики задаваемые аксиомами вида  $\diamond^m p \rightarrow \diamond^n p$  рассматривались в [1] в связи с алгоритмическими проблемами для полугрупп Туэ.

(«возможно») рассматривается как сокращение:  $\diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$ . Логикой называется любое множество  $L$  модальных формул, содержащее все классические тавтологии, формулу

$$\Box(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\Box p_1 \rightarrow \Box p_2),$$

замкнутое относительно классических правил *Modus Ponens* и *подстановки*, и относительно следующего правила:

$$\text{если } \varphi \in L, \text{ то } \Box\varphi \in L.$$

$K$  обозначает наименьшую модальную логику. Для логики  $L$  и формулы  $\varphi$ ,  $L + \varphi$  обозначает наименьшую логику, содержащую  $L \cup \{\varphi\}$ .

*Шкалой Крипке* (или просто *шкалой*) называется пара  $(W, R)$ , где  $W$  — непустое множество и  $R \subseteq W \times W$ . *Оценкой* на шкале называется отображение

$$\theta : PV \rightarrow 2^W,$$

где  $2^W$  обозначает множество всех подмножеств  $W$ . *Моделью* (Крипке)  $M$  над шкалой  $(W, R)$  называется тройка  $(W, R, \theta)$ , где  $\theta$  — оценка на  $(W, R)$ . Отношение истинности  $M, w \models \varphi$  ("формула  $\varphi$  истинна в точке  $w$  модели  $M$ ") определяется с помощью индукции по построению формулы:

$$\begin{aligned} M, w \models p &\Leftrightarrow w \in \theta(p); \\ M, w \models \varphi \wedge \psi &\Leftrightarrow M, w \models \varphi \text{ и } M, w \models \psi; \\ M, w \models \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow M, w \models \varphi \text{ или } M, w \models \psi; \\ M, w \models \varphi \rightarrow \psi &\Leftrightarrow M, w \not\models \varphi \text{ или } M, w \models \psi; \\ M, w \models \neg\varphi &\Leftrightarrow M, w \not\models \varphi; \\ M, w \models \Box\varphi &\Leftrightarrow \forall v(wRv \Rightarrow M, v \models \varphi). \end{aligned}$$

Формула  $\varphi$  истинна в модели  $M$ , если она истинна в любой точке модели  $M$ ;  $\varphi$  *общезначима* в шкале  $F$ , если она истинна в любой модели над  $F$ ;  $\varphi$  *общезначима* в классе шкал  $\mathcal{F}$ , если  $\varphi$  общезначима в каждой шкале из  $\mathcal{F}$ ; в обозначениях:  $M \models \varphi$ ,  $F \models \varphi$ ,  $\mathcal{F} \models \varphi$  соответственно. Множество формул, общезначимых в классе  $\mathcal{F}$ , обозначается  $\text{LOG}(\mathcal{F})$ . Из данных определений следует

Предложение 1. Для всякого класса шкал  $\mathcal{F}$ ,  $\text{LOG}(\mathcal{F})$  является логикой.

Логика  $L$  называется *полной относительно класса шкал*  $\mathcal{F}$ , если  $L = \text{LOG}(\mathcal{F})$ ;  $L$  называется *полной* (по Крипке), если она полна относительно некоторого класса шкал;  $L$  называется *финитно аппроксимируемой*, если она полна относительно некоторого класса конечных шкал.

Множество формул  $\Psi$  называется *L-противоречивым*, если  $L \vdash \neg(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k)$  для некоторых  $\psi_1, \dots, \psi_k \in \Psi$ ; множество формул,

не являющееся  $L$ -противоречивым, называется *L-совместным*. Формула  $\varphi$  называется *L-совместной*, если  $L \not\vdash \neg\varphi$  (т.е.  $L$ -совместно множество  $\{\varphi\}$ ).

Формула называется  $\mathcal{F}$ -выполнимой, если она истинна в некоторой точке некоторой модели над некоторой шкалой из  $\mathcal{F}$ .

Из этих определений следует

Предложение 2. Пусть  $L$  — логика,  $\mathcal{F}$  — класс шкал,  $\text{LOG}(\mathcal{F}) \supseteq L$ .  $L$  полна относительно  $\mathcal{F} \iff$  всякая  $L$ -совместная формула является  $\mathcal{F}$ -выполнимой.

### 3. Обобщенная транзитивность и обобщенная плотность

Напомним, что отношение  $R$  называется *транзитивным*, если оно удовлетворяет следующему первопорядковому условию:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 R x_2 R x_3 \Rightarrow x_1 R x_3),$$

или, что эквивалентно, условию  $R^2 \subseteq R$ .

Пусть  $\mathcal{T}_{m,n}$  обозначает класс шкал

$$\{(W, R) \mid R^m \subseteq R^n\}.$$

При  $m > n$  шкалы из  $\mathcal{T}_{m,n}$  будем называть *обобщенно-транзитивными*. Положим также

$$\mathcal{T}_{m,n}^{\text{Sim}} = \{(W, R) \mid R^m \subseteq R^n, R = R^{-1}\},$$

т.е.  $\mathcal{T}_{m,n}^{\text{Sim}}$  — класс всех *симметричных* шкал из  $\mathcal{T}_{m,n}$ .

Легко проверить, что класс шкал  $\mathcal{T}_{m,n}$  характеризуется следующим первопорядковым условием:

$$\begin{aligned} \forall x_1, \dots, \forall x_{m+1} (x_1 R \dots R x_{m+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists y_1 \dots \exists y_{n-1} (x_1 R y_1 R \dots R y_{n-1} R x_{m+1})) \end{aligned}$$

(при  $n = 1$  заключение импликации принимает вид  $x_1 R x_{m+1}$ ); иными словами: если существует путь из  $x$  в  $y$  длины  $m$ , то существует путь из  $x$  в  $y$  длины  $n$ . (Путь длины  $m$  в шкале  $(W, R)$  — это кортеж  $(x_1, \dots, x_{m+1})$ , такой, что  $x_1 R \dots R x_{m+1}$ .)

Положим  $\text{KB} = K + p \rightarrow \Box\Diamond p$ . Напомним (см., например, [2]), что для всякой шкалы  $(W, R)$ ,

$$(W, R) \models p \rightarrow \Box\Diamond p \iff R = R^{-1}.$$

Пусть  $\Diamond^2\varphi$  служит сокращением для  $\Diamond\Diamond\varphi$ ,  $\Diamond^{m+1}\varphi$  — для  $\Diamond\Diamond^m\varphi$ . Для единообразия будем считать, что  $\Diamond^1\varphi = \Diamond\varphi$ .

Предложение 3. Пусть  $m, n \geq 1$ .

1. Для всякой шкалы  $F$ ,  
 $F \models \diamond^m p \rightarrow \diamond^n p \iff F \in \mathcal{T}_{m,n}$ ,  
 $F \models \diamond^m p \rightarrow \diamond^n p$  и  $F \models p \rightarrow \Box \diamond p \iff F \in \mathcal{T}_{m,n}^{sim}$ ;
2.  $K + \diamond^m p \rightarrow \diamond^n p = \text{LOG}(\mathcal{T}_{m,n})$ ;
3.  $KB + \diamond^m p \rightarrow \diamond^n p = \text{LOG}(\mathcal{T}_{m,n}^{sim})$ .

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы Салквиста (см., например, [2]).

Обобщенно-транзитивная симметричная логика — это логика вида  $KB + \diamond^m p \rightarrow \diamond^n p$  при  $m > n$ .

(При  $m < n$  шкалы из  $\mathcal{T}_{m,n}$  естественно рассматривать как обобщенные плотности, поскольку отношение  $R$  называется *плотным* в случае  $R \subseteq R^2$ . Вопрос о финитной аппроксимируемости логик обобщенных плотностей изучен лишь для случая  $m = 1, n = 2$  и представляет отдельный интерес, в данной работе этот вопрос мы рассматривать не будем.)

Формулу  $\diamond^{m+1} p \rightarrow \diamond^m p$  назовём формулой *m-транзитивности*, а отношение, удовлетворяющее свойству  $R^{m+1} \subseteq R^m$ , назовём *m-транзитивным*.

Предложение 4. Для  $m, k \geq 1$ ,

1.  $\mathcal{T}_{m+1,m} \subseteq \mathcal{T}_{m+1+k,m}$ ;
2.  $K + \diamond^{m+1} p \rightarrow \diamond^m p \vdash \diamond^{m+k+1} p \rightarrow \diamond^m p$ .

Доказательство.

1. Тривиально.
2. Следует из п.1 и предложения 3. ■

Предложение 5. Все логики  $KB + \diamond^{n+1} p \rightarrow \diamond^n p$  различны.

Доказательство. Положим  $F_n = (W, R)$ , где  $W = \{0, \dots, 2n\}$ ,

$$iRj \iff i = j \text{ или } |i - j| \equiv 1 \pmod{2n+1},$$

т.е. шкала  $F_n$  — это цикл длины  $2n+1$ , Рис. 1.

Покажем, что  $\text{LOG}(F_n) \supseteq KB + \diamond^{n+1} p \rightarrow \diamond^n p$ .

Согласно предложению 3 достаточно показать, что отношение  $R$  симметрично и что  $R^{n+1} \subseteq R^n$ . Симметричность очевидна.

Легко видеть, что для любых  $x, y \in W$  верно, что  $xR^k y$  для некоторого  $k \leq n$ . А в силу рефлексивности отношения  $R$  верно, что  $xR^n y$ . Поэтому

$$R = W \times W \Rightarrow R^{n+1} \subseteq R^n.$$

Теперь покажем, что  $F_n \not\models \diamond^n p \rightarrow \diamond^{n-1} p$ . Заметим, что  $0R^n n$ , но неверно, что  $0R^{n-1} n$ . Следовательно,  $R^n \not\subseteq R^{n-1}$ , т.е.  $F_n \not\models \diamond^n p \rightarrow \diamond^{n-1} p$ . ■

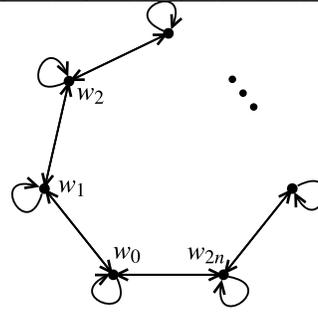


Рис. 1.

#### 4. Финитная аппроксимируемость $m$ -транзитивных симметричных логик

В этом параграфе мы докажем основной результат — финитную аппроксимируемость логик вида  $KB + \diamond^{m+1} p \rightarrow \diamond^m p$ . Для этого нам потребуется определение *эпифильтрации*.

Определение 6 (см., например, [2]). Пусть  $M = (W, R, \theta)$  — модель Крипке,  $\Psi$  — некоторое множество формул. На множестве  $W$  введём отношение эквивалентности  $\equiv_\Psi$ :

$$x \equiv_\Psi y \iff \forall \psi \in \Psi (M, x \models \psi \iff M, y \models \psi).$$

Класс эквивалентности  $x$  по отношению  $\equiv_\Psi$  будем обозначать  $[x]_\Psi$ , множество всех таких классов эквивалентности в  $W$  обозначим  $W_\Psi$ .

На множестве  $W_\Psi$  введем отношение  $\underline{R}_\Psi$ , положив

$$\underline{R}_\Psi = \{([x]_\Psi, [y]_\Psi) \mid \exists x' \in [x]_\Psi \exists y' \in [y]_\Psi \ x'Ry'\}.$$

Модель

$$M_\Psi = (W_\Psi, \underline{R}_\Psi, \theta_\Psi)$$

называется *минимальной эпифильтрацией модели  $M$  по  $\Psi$* , если оценка  $\theta_\Psi$  удовлетворяет условию

$$\theta_\Psi(p) = \{[x]_\Psi \mid M, x \models p\}.$$

Лемма (о фильтрации, см., например, [2]). Пусть  $M_\Psi$  — эпифильтрация модели  $M$  по множеству формул  $\Psi$ , замкнутому относительно взятия подформул. Тогда для всякой точки  $x$  модели  $M$  и всякой формулы  $\phi \in \Psi$ , имеем

$$M, x \models \phi \iff M_\Psi, [x]_\Psi \models \phi.$$

ТЕОРЕМА 7. Для любого  $m \geq 1$ , логика

$$KB + \diamond^{m+1} p \rightarrow \diamond^m p$$

финитно аппроксимируема.

Доказательство. Положим

$$L = KB + \diamond^{m+1}p \rightarrow \diamond^m p.$$

Пусть формула  $\varphi$   $L$ -совместна. Покажем, что она выполнима в некоторой конечной  $m$ -транзитивной симметричной шкале.

В силу предложения 3, формула  $\varphi$  истинна в некоторой точке  $x$  некоторой модели  $N$  над некоторой симметричной  $m$ -транзитивной шкалой. Пусть  $M = (W, R, \theta)$  — конус в  $N$  с корнем в точке  $x$ . В силу Леммы о порождённой подмодели (см., например, [2]),  $M, x \models \varphi$ .

Заметим, что конус  $M$  является  $m$ -транзитивным и симметричным. Если  $W$  конечно, то доказательство закончено.

Пусть  $W$  — бесконечно. Обозначим через  $\Psi$  множество всех подформул формулы  $\varphi$ . По Лемме о фильтрации, получаем:

$$(W_\Psi, \underline{R}_\Psi, \theta_\Psi), x \models \varphi.$$

Поскольку  $\Psi$  — конечно, то и  $W_\Psi$  — конечно.

Очевидно, что  $\underline{R}_\Psi$  является симметричным отношением. Чтобы закончить доказательство, осталось проверить, что шкала  $(W_\Psi, \underline{R}_\Psi)$  является  $m$ -транзитивной.

Заметим, что в силу симметричности отношения  $R$ , между любыми двумя точками  $u, v$  конуса  $M$  существует путь: действительно, если

$$xRy_1R \dots Ry_lRu \text{ и } xRz_1R \dots Rz_sRv,$$

то

$$uRy_lR \dots Ry_1RxRz_1R \dots Rz_sRv.$$

Более того, можно полагать, что длина этого пути больше  $m$  (например, положив  $z_i = x$  начиная с некоторого  $i$ ). Следовательно, в силу  $m$ -транзитивности  $M$  и предложения 4, между любыми двумя точками в  $M$  найдется путь длины  $m$ .

Из этого следует  $m$ -транзитивность  $(W_\Psi, \underline{R}_\Psi)$  (и даже более сильное условие): если  $[x]_\Psi, [z]_\Psi \in W_\Psi$ , то в  $M$  найдутся точки  $y_1, \dots, y_{m-1}$ , такие, что

$$xRy_1 \dots Ry_{m-1}Rz,$$

и, в силу определения  $\underline{R}_\Psi$ ,

$$[x_1]_\Psi R_\Psi [y_1]_\Psi R_\Psi \dots R_\Psi [y_{m-1}]_\Psi R_\Psi [z]_\Psi.$$

■

Следствие 8. Для любого  $m \geq 1$ , логика  $KB + \diamond^{m+1}p \rightarrow \diamond^m p$  разрешима.

## 5. Заключение

Мы показали, что логики

$$KB + \diamond^{m+1}p \rightarrow \diamond^m p$$

являются финитно аппроксимируемыми и следовательно — разрешимыми. В целом, вопрос о финитной аппроксимируемости логик, задаваемых формулами вида  $\diamond^m p \rightarrow \diamond^n p$ , почти не изучен. Главная проблема, по-видимому, заключается в том, что шкалы со свойствами  $R^m \subseteq R^n$  могут обладать достаточно сложной структурой, а сами эти свойства не сохраняются относительно стандартных фильтрующих преобразований (за исключением случаев  $m = 2, n = 1$  — транзитивность, и  $m = 1, n = 2$  — плотность). В то же время, как мы показали выше, при определённых условиях эпифильтрации (возможно, незначительно модифицированные) эти условия сохраняют. В частности, теорема 7 может быть усилена: конструкция, приведенная в теореме 7 позволяет доказать, что для  $m, k \geq 1$  логики

$$KB + \diamond^{m+k}p \rightarrow \diamond^m p$$

финитно-аппроксимируемы, доказательство этого результата будет опубликовано в дальнейшем.

Тем не менее, имеется целый ряд открытых вопросов относительно рассмотренных логик: какова алгоритмическая сложность логик  $KB + \diamond^{m+1}p \rightarrow \diamond^m p$ ? все ли расширения  $KB$ , задаваемые аксиомами вида  $\diamond^m p \rightarrow \diamond^n p$ , разрешимы? финитно аппроксимируемы? конечно аксиоматизируемы?

Авторы выражают благодарность рецензенту за его замечания и комментарии.

## Список литературы

- [1] В.Б. Шехтман. Неразрешимые исчисления высказываний. Вопросы кибернетики. Неклассические логики и их приложения. М., 1982, с. 74-116.
- [2] A. Chagrov, M. Zakharyashev. Modal logic. Oxford University Press, 1997.
- [3] Z. Kozrzycka. On non-compact logics in NEXT(KTB). Mathematical Logic Quarterly, 54(6): 617-624, 2008.
- [4] J.C.C. McKinsey. A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4, with an application to topology. Journal of Symbolic Logic, 6:117-134, 1941.
- [5] Y. Miyazaki. Kripke incomplete logics containing KTB. Studia Logica, 85(3): 303-317, 2007.
- [6] E.J. Lemmon. Algebraic semantics for modal logic. I. Journal of Symbolic Logic, 31:46-65, 1966.

- 
- [7] E.J. Lemmon. Algebraic semantics for modal logic. II. *Journal of Symbolic Logic*, 31:191-218, 1966.
  - [8] K. Segerberg. Decidability of S4.1. *Theoria*, 34:7-20, 1968.

# Субоптимальные последовательные правила проверки непараметрических гипотез о распределениях с экспоненциально убывающими хвостами

Федор Цитович  
ИППИ РАН  
ftsitovich@gmail.com

## Аннотация

*В работе рассматривается задача построения субоптимальной последовательной процедуры проверки гипотез, когда множество возможных распределений является непараметрическим. Предполагается что хвосты распределений на бесконечности имеют экспоненциальную скорость убывания, однако значение скорости точно неизвестно. Допустимыми считаются процедуры, обеспечивающие заданную верхнюю границу для максимальной вероятности ошибки. Функцией риска процедуры является максимальное среднее значение продолжительности наблюдений для всех распределений из правильной гипотезы.*

## 1. Введение

Работа посвящена продолжению исследований [1] по построению субоптимальной последовательной процедуры проверки гипотез, когда множество возможных распределений является непараметрическим. В указанной работе рассматривалась следующая задача.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  — вероятностное пространство, на котором определен класс  $\mathcal{P} = \{P\}$  вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно меры  $\mu$  и взаимно абсолютно непрерывных. Мера  $P$  порождает распределение случайной величины  $x$ , значения которой и будут результатами наблюдений, со значениями из множества  $X \subset \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}$  — множество действительных чисел, функция распределения которой имеет плотность относительно меры  $\mu$ , которая обозначается через  $f = f(x)$ .

Рассматривалась задача проверки сложных непараметрических гипотез

$$\mathcal{H}_1 : f \in \mathcal{G}_1, \quad \mathcal{H}_2 : f \in \mathcal{G}_2, \quad (1)$$

где  $\mathcal{G}_i := \left\{ g_{i, h_i} : g_{i, h_i}(x) = g_i(x)(1 + h_i(x)) \right\}$ ,

а  $g_i(x)$  — известные функции, являющиеся плотностями распределений и рассматриваемые как функции, задающие соответствующие простые гипотезы  $\mathcal{H}_i^s$ . Функции  $h_i(x)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \quad \sup_{-\infty < x < +\infty} |h_i(x)| \leq \varepsilon < 1, \quad (2)$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g_{i, h_i}(x) d\mu(x) = 1. \quad (3)$$

Множество  $\mathcal{G}_i$  можно трактовать как непараметрическую окрестность  $g_i(x)$ , состоящую из плотностей, относительное отклонение которых от  $g_i(x)$  не превосходит некоторую малую величину  $\varepsilon$ . Рассматриваемые окрестности плотностей  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  могут быть применены, в ситуации, когда в серии наблюдений присутствует малая доля “выбросов”, т.е. наблюдений, вызванных механизмом формирования, отличным от исследуемого  $g_i(x)$  (например, задаваемым плотностью  $g(x)$ ). Предполагается, что отделить такие наблюдения от “правильных” не представляется возможным. Тогда для этой ситуации можно применить окрестности, задаваемые соотношениями (2) и (3) в случае, когда  $h(x) = \delta \left( \frac{g(x)}{g_i(x)} - 1 \right)$ , где  $\delta$  — доля выбросов в выборке. Заметим, что аналогичные процедуры можно строить и для других окрестностей плотностей  $g_i(x)$ , однако оценки для средней продолжительности последовательной процедуры проверки гипотез будут зависеть от вида этих окрестностей.

Сделанные предположения о виде окрестностей являются естественными при ограниченном множестве  $X$ . Однако при неограниченном  $X$  важным становится скорость убывания хвостов распределений. Как правило, в этом случае устанавливаются асимптотические результаты, точность которых не позволяет обеспечить выполнение условия (2). Более того, скорость убывания

хвостов распределений зависит от многих факторов, и обеспечить одинаковую скорость убывания для всех распределений не представляется возможным. Это означает, что требование (2) об относительно малой погрешности в определении плотности распределений будет не выполнено: относительная погрешность может, вообще говоря, стремиться к бесконечности, т.е. функции  $h_i(x)$  становятся неограниченными. В связи с этим возникает необходимость исследовать влияние неопределенности в скорости убывания хвостов допустимых распределений на свойства субоптимальной последовательной процедуры проверки гипотез, предложенной в [1].

Непосредственное использование субоптимальной процедуры из [1] является невозможным, поэтому приводится ее модификация, учитывающая скорость убывания хвостов распределений из множеств  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ . Кроме того, необходимо исследовать влияние скорости убывания хвостов на свойства построенной процедуры, что позволяет получить более полное представление о влиянии “выбросов” наблюдений на точность статистических решений.

Материал излагается следующим образом. В разделе 2 приводится постановка задачи и вводятся необходимые обозначения. В следующем разделе приведено описание субоптимальной процедуры, основанной на стратегии из [2]. Субоптимальность понимается в том смысле, что отличие процедуры от оптимальной обусловлено погрешностью описания статистической модели задачи. Далее устанавливаются свойства предложенной субоптимальной процедуры. В последующем разделе приводятся формулировки утверждений. После чего помещены доказательства и выводы.

## 2. Постановка задачи

В настоящей работе рассматриваются окрестности  $\mathcal{G}_i := \{g_i, h_i(x)\}$ , где функции  $g_i, h_i(x)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$g_i, h_i(x) = g_i(x)(1 + h_i(x)), a_i^- \leq x \leq a_i^+; \quad (4)$$

$$g_i(a_i^-)(1 - \varepsilon) \exp(k_{li}^+(x - a_i^-)) \leq g_i, h(x) \leq g_i(a_i^-)(1 + \varepsilon) \exp(k_{li}^-(x - a_i^-)), x < a_i^-; \quad (5)$$

$$g_i(a_i^+)(1 - \varepsilon) \exp(-k_{ri}^+(x - a_i^+)) \leq g_i, h(x) \leq g_i(a_i^+)(1 + \varepsilon) \exp(-k_{ri}^-(x - a_i^+)), x > a_i^+ \}; \quad (6)$$

$g_i(x)$  — плотности, задающие гипотезы  $\mathcal{H}_i$ ;  $h_i(x)$  таковы, что

$$\sup_{a_i^- \leq x \leq a_i^+} |h_i(x)| \leq \varepsilon < 1 \quad (7)$$

и выполнено условие (3). Множества  $\mathcal{G}_i$  зависят, вообще говоря, от  $\varepsilon$ , но для простоты обозначений эту зависимость будем опускать при обозначении данных множеств.

Условие (4) соответствует аналогичному условию в [1], а (5) и (6) задают скорости убывания хвостов распределений на  $-\infty$  и  $+\infty$  соответственно. Интервалы  $A_i := (a_i^-, a_i^+)$  задают области, в которых сосредоточена большая часть значений наблюдений:

$$\sup_{f \in \mathcal{G}_i} P_f(x < a_i^-) \leq p_i^-, \quad \sup_{f \in \mathcal{G}_i} P_f(x > a_i^+) \leq p_i^+, \quad (8)$$

где  $p_i^-$  и  $p_i^+$  некоторые малые числа. В сделанных выше предположениях справедливы оценки

$$p_i^- \leq \frac{g_i(a_i^-)(1 + \varepsilon)}{k_{li}^-}, \quad p_i^+ \leq \frac{g_i(a_i^+)(1 + \varepsilon)}{k_{ri}^-}. \quad (9)$$

Вне интервалов  $A_i$  границы изменения значений распределения наблюдений определяются их большими отклонениями и могут быть определены на основании предельных теорем о больших отклонениях. В настоящей работе рассматривается наиболее распространенный случай экспоненциально убывающих хвостов распределений. Параметры, задающие скорость убывания хвостов распределений, как правило, точно неизвестны, поскольку зависят от некоторых общих свойств рассматриваемых наблюдений в области больших отклонений, и могут быть определены лишь с некоторой точностью. Этот факт и отражает выбор границ  $k_{ri}^-, k_{ri}^+, k_{li}^-, k_{li}^+$  интервалов изменения скорости убывания хвоста распределения, которые могут существенно различаться.

Как будет видно далее, необходимо различать три варианта взаимного расположения интервалов  $A_i$ : 1. интервалы частично перекрываются (для определенности будем считать, что первый интервал начинается левее второго); 2. один интервал накрывает другой (для определенности будем считать, что  $A_2 \supseteq A_1$ ); 3. интервалы не пересекаются (первый интервал находится левее второго). Заметим, что первый случай соответствует ситуации, когда распределения, задаваемые плотностями  $g_i$ , имеют различные средние  $\mu_i$  (нами рассматривается случай  $\mu_1 < \mu_2$ ); второй случай, когда наблюдения имеют примерно одинаковые средние, но различные дисперсии  $D_i$  в зависимости от того, какая гипотеза справедлива (нами рассматривается случай  $D_1 < D_2$ ). Третий случай соответствует ситуации, когда распределения далеки друг от друга; в этом случае информационное отклонение Кульбака (15)  $I(g_1, g_2) \gg 1$ .

В данной работе, как и в [1], будем рассматривать только последовательные процедуры проверки гипотез  $d = \langle \tau, \delta \rangle$ , состоящие из момента остановки  $\tau$  и решающего правила  $\delta$ : если  $\delta = i$ ,  $i = 1, 2$ , то принимаем гипотезу  $\mathcal{H}_i$ .

Пусть  $x_1, x_2, \dots$  — наблюдения, т.е. независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью  $f(x)$ .

Далее нам потребуется понятие естественной фильтрации  $\{\mathcal{F}_n\}$ , порождаемой наблюдениями, т.е.  $\mathcal{F}_n = \sigma(x_1, \dots, x_n)$ .

**Определение 1.** Процедура  $d = \langle \tau, \delta \rangle$  для задачи проверки гипотез (1) называется допустимой, если выполнены следующие условия:

1.  $\tau$  — марковский момент остановки относительно фильтрации  $\{\mathcal{F}_n\}$ , т.е.  $\forall n \in \mathbf{N} \left\{ \omega : \tau(\omega) \leq n \right\} \in \mathcal{F}_n$  и  $P(\tau < \infty) = 1$ ;

2.  $\delta(\cdot)$  является  $\mathcal{F}_\tau$  измеримым, т.е.  $\delta = \delta(x_1, \dots, x_\tau)$ ;

3. стратегия  $d$  обеспечивает заданный уровень вероятности ошибки принятия неправильного решения, т.е. при всех  $i \neq j$  выполнено

$$\sup_{f \in \mathcal{G}_j} \int_{\delta=i} f(x) d\mu(x) \leq \alpha. \quad (10)$$

Множество допустимых процедур обозначим через  $\mathcal{D}(\alpha)$ .

**Определение 2.** Функцией риска стратегии  $d = \langle \tau, \delta \rangle$  для задачи проверки гипотез (1) назовем максимальную среднюю продолжительность процедуры, т.е.

$$R_{\mathcal{H}_i}(d) = \sup_{f \in \mathcal{G}_i} E_f \tau, \quad (11)$$

где  $E_f l(x)$  — математическое ожидание  $l(x)$ , когда  $x$  имеет плотность  $f$ .

Наличие точной верхней грани в функции риска обусловлено тем обстоятельством, что “размеры” областей  $\mathcal{G}_i$  предполагаются малыми (например  $\varepsilon$  — малое положительное число), время, необходимое для построения состоятельной оценки наблюдаемого распределения  $f(x)$ , слишком велико и поэтому решающее правило должно работать одинаково хорошо для всех возможных распределений. С другой стороны, малость областей  $\mathcal{G}_i$  приводит к тому, что замена  $\sup_{f \in \mathcal{G}_i}$  на точное распределение не приведет к существенному изменению значения функции риска.

Это дает основание ввести понятие субоптимальной процедуры принятия решения, которая учитывает указанное выше обстоятельство.

### 3. Определение эталонного рас-

### пределения

Для построения субоптимальной процедуры, основанной на отношении правдоподобия, необходимо определить правило выбора наиболее подходящего распределения из множества  $\mathcal{G}_i$ . Выбор распределения должен быть ориентирован на минимизацию потерь, связанных с неправильным выбором распределения. Если  $g$  — истинная плотность распределения, а  $\tilde{g}$  — эталонная плотность распределения, то средние потери на каждом наблюдении при использовании отношения правдоподобия, основанного на использовании эталонного распределения вместо правильного, составят величину  $I(g, \tilde{g})$ . Поэтому в качестве  $\tilde{g}$  следует использовать

$$\arg \min_{\tilde{g} \in \mathcal{G}_i} \sup_{g \in \mathcal{G}_i} I(g, \tilde{g}). \quad (12)$$

Решение задачи поиска  $\tilde{g}$  является сложной; в качестве приближенного решения, обеспечивающего требуемую точность для построения субоптимальной процедуры, можно взять

$$\begin{aligned} g_i^* &:= g_i(x)(1+c), a_i^- \leq x \leq a_i^+; \\ &:= g_i(a_i^-)(1+c) \exp(k_{i1}^-(x-a_i^-)), x < a_i^-; \\ &:= g_i(a_i^+)(1+c) \exp(-k_{i1}^-(x-a_i^+)), x > a_i^+; \end{aligned} \quad (13)$$

значение  $c$  определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_i^*(x) d\mu(x) = 1. \quad (14)$$

### 4. Описание субоптимальной процедуры $d_0$

При описании субоптимальной последовательной процедуры  $d_0$  будем следовать [1] с необходимыми изменениями. Для  $f \in \mathcal{G}_i$  обозначим через  $A(f)$  альтернативное множество для плотности  $f$ , т.е.  $A(f) := \mathcal{G}_2$ , если  $f \in \mathcal{G}_1$ , и  $A(f) := \mathcal{G}_1$ , если  $f \in \mathcal{G}_2$ ;

$$\begin{aligned} z_{f,g}(x) &:= \ln \frac{f(x)}{g(x)}, x \in X, \\ I(f,g) &:= E_f z_{f,g}(x); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} l_f(g;n) &:= \sum_{i=1}^n z_{f,g}(x_i); \\ L_i(n) &:= \inf_{g \in A(g_i)} l_{g_i^*}(g;n), i = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть  $\tau_0$  — минимальное значение  $n$ , для которого

$$\max_{i=1,2} L_i(n) \geq -\ln \alpha; \quad (17)$$

принимаемое решение

$$\delta = i, \text{ если } L_i(\tau_0) \geq -\ln \alpha. \quad (18)$$

Отметим, что решение определено корректно, поскольку из определения  $L_i(n)$  следует, что если  $L_1(n) > 0$ , то  $L_2(n) < 0$ , и наоборот.

Выбранная форма окрестностей  $\mathcal{G}_i$ , как и в случае [1], позволят непосредственно вычислить значение функционала  $L_i(n)$ . Как и в случае [1], на функции  $h(x)$  наложены ограничения, которые позволяют непосредственно вычислить  $L_i(n)$ :

$$L_1(n) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{g_1^*(x_i)}{\sup_{g \in \mathcal{G}_2} g(x_i)}. \quad (19)$$

Положим, для определенности,  $i = 1$ , тогда в первом случае расположения интервалов  $A_i$  получим следующий вид формулы (19):

$$\begin{aligned} L_1(n) = & n \ln \left( \frac{1+c}{1+\varepsilon} \right) + \sum_{i: x_i \leq a_1^-} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^-)}{g_2(a_2^-)} \right) + \right. \\ & + (k_{l1}^- - k_{l2}^-)(x_i - a_1^-) + k_{l2}^-(a_2^- - a_1^-) \Big) + \\ & + \sum_{i: a_1^- < x_i \leq a_2^-} \left( \ln \left( \frac{g_1(x_i)}{g_2(a_2^-)} \right) - k_{l2}^-(x_i - a_2^-) \right) + \\ & + \sum_{i: a_2^- < x_i \leq a_1^+} \ln \left( \frac{g_1(x_i)}{g_2(x_i)} \right) + \sum_{i: a_1^+ < x_i \leq a_2^+} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^+)}{g_2(x_i)} \right) - \right. \\ & \left. - k_{r1}^-(x_i - a_1^+) \right) + \sum_{i: x_i > a_2^+} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^+)}{g_2(a_2^+)} \right) - \right. \\ & \left. - (k_{r1}^- - k_{r2}^-)(x_i - a_1^+) - k_{r2}^-(a_2^+ - a_1^+) \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Во втором случае расположения интервалов  $A_i$  следующее выражение для

$$\begin{aligned} L_1(n) = & n \ln \left( \frac{1+c}{1+\varepsilon} \right) + \sum_{i: x_i \leq a_2^-} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^-)}{g_2(a_2^-)} \right) + \right. \\ & + (k_{l1}^- - k_{l2}^-)(x_i - a_1^-) + k_{l1}^-(a_2^- - a_1^-) \Big) + \\ & + \sum_{i: a_2^- < x_i \leq a_1^-} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^-)}{g_2(x_i)} \right) - k_{l1}^-(x_i - a_1^-) \right) + \\ & + \sum_{i: a_1^- < x_i \leq a_1^+} \ln \left( \frac{g_1(x_i)}{g_2(x_i)} \right) + \sum_{i: a_1^+ < x_i \leq a_2^+} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^+)}{g_2(x_i)} \right) - \right. \\ & \left. - k_{r1}^-(x_i - a_1^+) \right) + \sum_{i: x_i > a_2^+} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^+)}{g_2(a_2^+)} \right) - \right. \\ & \left. - (k_{r1}^- - k_{r2}^-)(x_i - a_1^+) - k_{r2}^-(a_2^+ - a_1^+) \right). \quad (21) \end{aligned}$$

В третьем случае расположения интервалов

$A_i$  получим следующее выражение для

$$\begin{aligned} L_1(n) = & n \ln \left( \frac{1+c}{1+\varepsilon} \right) + \sum_{i: x_i \leq a_1^-} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^-)}{g_2(a_2^-)} \right) + \right. \\ & + (k_{l1}^- - k_{l2}^-)(x_i - a_1^-) + k_{l2}^-(a_2^- - a_1^-) \Big) + \\ & + \sum_{i: a_1^- < x_i \leq a_1^+} \left( \ln \left( \frac{g_1(x_i)}{g_2(a_2^-)} \right) - k_{l2}^-(x_i - a_2^-) \right) + \\ & + \sum_{i: a_1^+ < x_i \leq a_2^-} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^+)}{g_2(a_2^-)} \right) - \right. \\ & \left. - (k_{r1}^- + k_{l2}^-)(x_i - a_1^+) - k_{l2}^-(a_1^+ - a_2^-) \right) + \\ & + \sum_{i: a_2^- < x_i \leq a_2^+} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^+)}{g_2(x_i)} \right) - k_{r1}^-(x_i - a_1^+) \right) + \\ & + \sum_{i: x_i > a_2^+} \left( \ln \left( \frac{g_1(a_1^+)}{g_2(a_2^+)} \right) - \right. \\ & \left. - (k_{r1}^- - k_{r2}^-)(x_i - a_1^+) - k_{r2}^-(a_2^+ - a_1^+) \right). \quad (22) \end{aligned}$$

Таким образом, вид статистики  $L_1(n)$  существенно усложнился по сравнению с соответствующей статистикой для проверки простых гипотез и по сравнению с соответствующей статистикой из [1]. Новая статистика зависит не только от интервалов  $A_i$ , но и от нижних границ скорости убывания хвостов распределений. От верхних границ скорости убывания хвостов статистика не зависит.

## 5. Формулировки утверждений

Для процедуры  $d$  решения задачи (1) справедлива следующая оценка снизу.

**Теорема 1.** Пусть  $d = \langle \tau, \delta \rangle$  — допустимая последовательная процедура для задачи проверки гипотез (1). Тогда

$$R_{\mathcal{H}_1}(d) \geq \frac{C(\alpha)}{\inf_{\substack{p_1(x) \in G_1 \\ p_2(x) \in G_2}} \mathbb{E}_{p_1} \ln \frac{p_1(x)}{p_2(x)}},$$

где  $C(\alpha) = \alpha \ln \frac{\alpha}{1-\alpha} + (1-\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{\alpha} = (1-2\alpha) \ln \frac{1-\alpha}{\alpha}$ .

Поскольку при доказательстве соответствующего утверждения в [1] не использовался вид окрестностей  $\mathcal{G}_i$ , то доказательство совпадает с доказательством в [1].

**Теорема 2.** Справедлива оценка для реше-

ния вариационной задачи

$$\begin{aligned} \inf_{p_2(x) \in G_2} \mathbf{E}_{p_1} \ln \frac{p_1(x)}{p_2(x)} &\geq \\ &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \ln \frac{p_1(x)}{\tilde{g}_2(x)(1+\varepsilon)} \right) p_1(x) d\mu(x) - \\ &- \int_{-\infty}^{a_2^-} k_{l_2}^-(x - a_2^-) p_1(x) d\mu(x) + \\ &+ \int_{a_2^+}^{+\infty} k_{r_2}^-(x - a_2^+) p_1(x) d\mu(x) =: I_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Оценивая решение вариационной задачи в (19) используя вид множеств  $\mathcal{G}_i$  получаем

**Следствие 3.** Пусть  $d = \langle \tau, \delta \rangle$  — допустимая последовательная процедура для задачи проверки гипотез (1) с окрестностями (4)–(6). Тогда

$$R_{\mathcal{H}_1}(d) \geq \frac{C(\alpha)}{\sup_{p_1 \in G_1} I_2}.$$

Описанная в работе процедура является корректно определенной, т.е. принадлежит классу  $\mathcal{D}(\alpha)$ , на основании следующего утверждения.

**Теорема 4.** Процедура  $d_0$  является допустимой процедурой.

Поскольку доказательство аналогичного результата в [1] не использует вид окрестностей  $\mathcal{G}_i$  в определении статистики  $L_i(n)$ , то оно следует из соответствующего результата в [1]. Отметим только, что при доказательстве использован переход к мере, порождаемой плотностью  $g_1^*$ , и использован тот факт, что  $g_1^* \in A(g_2)$ .

Тогда для приращений  $\Delta L_1(i) := L_1(i) - L_1(i-1)$ ,  $L_1(0) := 0$ , получаем из (20)

$$\begin{aligned} I_1 := \mathbf{E}_{p_1} \Delta L_1(i) &= \ln \left( \frac{1+c}{1+\varepsilon} \right) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)} \right) p_1(x) d\mu(x) + \\ &+ \int_{-\infty}^{a_1^-} ((k_{l_1}^- - k_{l_2}^-)(x - a_1^-) + \\ &+ k_{l_2}^-(a_2^- - a_1^-)) p_1(x) d\mu(x) - \\ &- \int_{a_1^-}^{a_2^-} k_{l_2}^-(x - a_2^-) p_1(x) d\mu(x) - \\ &- \int_{a_1^+}^{a_2^+} k_{r_1}^-(x - a_1^+) p_1(x) d\mu(x) - \\ &- \int_{a_2^+}^{+\infty} ((k_{r_1}^- - k_{r_2}^-)(x - a_1^+) + \\ &+ k_{r_2}^-(a_2^+ - a_1^+)) p_1(x) d\mu(x). \end{aligned} \quad (24)$$

В данной формуле мы воспользовались обозначением

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i^* &:= g_i(x), a_i^- \leq x \leq a_i^+; \\ &:= g_i(a_i^-), x < a_i^-; \\ &:= g_i(a_i^+), x > a_i^+. \end{aligned} \quad (25)$$

Для процедуры  $d_0$  справедлива оценка сверху для функции риска.

**Теорема 5.** Существует константа  $K_1$  такая, что

$$\mathbf{E}_{p_1}(\tau_0) \leq \frac{|\ln \alpha| + K_1}{I_1}, \quad (26)$$

поэтому

$$R_{\mathcal{H}_1}(d_0) \leq \frac{|\ln \alpha| + K_1}{\sup_{p_1 \in G_1} I_1}.$$

Обозначим через

$$J_{\mathcal{H}_i}(d) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{R_{\mathcal{H}_i}(d)}{|\ln \alpha|} \quad (27)$$

главный член функции риска при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Предположим, что имеется допустимая процедура  $d^*$  решает задачу (1) для всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , т.е. фактически семейство процедур, работающих для всех достаточно малых окрестностей  $G_i$ .

**Определение 3.** Назовем допустимую процедуру  $d^* \in \mathcal{D}(\alpha)$  решения задачи проверки гипотез (1) субоптимальной, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{\mathcal{H}_i}(d^*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{d \in \mathcal{D}(\alpha)} J_{\mathcal{H}_i}(d). \quad (28)$$

Смысл определения состоит в том, что при сжатии окрестностей заданных распределений  $g_1$  и  $g_2$  до нуля получаем асимптотически оптимальную процедуру при  $\alpha \rightarrow 0$ . В наших обозначениях сжатие окрестностей означает, что  $\varepsilon \rightarrow 0$  и вероятности  $p_i^+, p_i^-, i = 1, 2$ , определяемые формулами (8), также стремятся к нулю.

Из определения  $I_1$  (24) и  $I_2$  (23) следует, что

$$\begin{aligned} I_1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)} \right) p_1(x) d\mu(x) &\rightarrow 0, \\ I_2 - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)} \right) p_1(x) d\mu(x) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

поэтому справедлива

**Теорема 6.** Процедура  $d_0$  является субоптимальной.

## 6. Доказательство теоремы 5

В рассматриваемом сейчас случае вид статистик сложнее, чем в случае работы [1], когда он сводился к задаче проверки соответствующих

простых гипотез  $\mathcal{H}_1^s$  и  $\mathcal{H}_2^s$ ; причем их вид зависит от взаимного расположения интервалов  $A_i$ . Однако последнее обстоятельство влияет только на вид исследуемой статистики, но не на ход доказательства.

Пусть, для определенности,  $f \in \mathcal{G}_1$ . Из правила остановки наблюдений следует, что

$$\tau_0 = \min_{i=1,2} \tau_i, \quad (29)$$

где  $\tau_i$  — первый момент достижения статистикой  $L_i(n)$  уровня  $|\ln \alpha|$ . Поэтому из тождества Вальда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f L_1(\tau_1) &= (\mathbf{E}_f \Delta L_1) \mathbf{E}_f \tau_1 = \\ &= |\ln \alpha| + \mathbf{E}_f \chi_1, \end{aligned}$$

где  $\chi_1$  — величина перескока уровня  $|\ln \alpha|$  процессом  $L_1(n)$ . Поэтому из (20) получаем

$$\mathbf{E}_f \tau_1 = \frac{|\ln \alpha| + \mathbf{E}_f \chi_1}{\mathbf{E}_f \Delta L_1}. \quad (30)$$

Из экспоненциальной скорости убывания хвостов распределений следует, что выполнены условия регулярности из [3] и среднее значение величины перескока ограничено:

$$\mathbf{E}_f \chi_1 \leq K_1, \quad (31)$$

$K_1$  — некоторая постоянная, зависящая только от распределений  $g_1, g_2$ . Поэтому из (30) следует утверждение теоремы.

## 7. Заключение

Отметим, что решающее правило зависит только от верхних границ для скорости убывания хвоста распределения.

Принципиальным отличием полученных результатов от результатов [1] является то, что получающаяся граница для функции риска субоптимальной процедуры в пределе отличается от соответствующей границы для простых гипотез. Это связано с тем, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( \frac{\tilde{g}_1(x)}{\tilde{g}_2(x)} \right) g_1(x) d\mu(x) &\neq \\ &\neq \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left( \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \right) g_1(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

даже при малых  $\varepsilon$ . Это объясняется тем, что оценка для хвоста распределения может существенно отличаться от его значения, что будет приводить к потерям скорости роста отношения правдоподобия для тех наблюдений, которые попадают в интервал  $A_1$ , но не попадают в  $A_2$  при справедливости гипотезы  $\mathcal{H}_1$ . Поэтому может оказаться, что переход к более простой модели распределений может быть оправдан. Например, в третьем случае может оказаться целесообразным переход к рассмотрению дискретных величин, принимающих только два значения: попадание или не попадание в интервал, соответствующий наиболее вероятным значениям  $x$ , если справедлива первая гипотеза. В этом случае все будет определяться тем, насколько точно удастся получить оценки для вероятностей значений этих дискретных случайных величин. Поскольку это более простые характеристики, чем скорость убывания хвостов распределений, то могут их оценки оказаться более точными, чем получаемые по формулам (9), и переход к более простой модели с дискретными распределениями будет оправдан.

## 8. Литература

1. *Цитович Ф.И.* Некоторые субоптимальные последовательные правила проверки гипотез // Сборник трудов 30-й конференции молодых ученых и специалистов ИППИ РАН: Информационные технологии и системы ИТиС'07. М.: ИППИ, 2007. С. 110–115.
2. *Малютов М.Б., Цитович И.И.* Асимптотически последовательная проверка гипотез // Проблемы передачи информации. Т. 36. Вып. 4. 2000. С.98-112.
3. *Цитович И.И.* О величине перескока уровня субмартингалом // Модели и методы исследований в информационных системах. М.: Наука, 1988. С. 91–105.

## О методиках бустинга

Е.В. Бурнаев  
Институт проблем передачи  
информации  
им. А.А. Харкевича РАН  
burnaev@iitp.ru

П.В. Приходько  
Институт проблем передачи  
информации  
им. А.А. Харкевича РАН  
prihodkop@gmail.com

### Аннотация

*В работе предлагается несколько новых методов обучения ансамблей регрессоров, разработанных для увеличения точности итоговой регрессионной модели и уменьшения времени ее обучения. Также приводится экспериментальная проверка их эффективности на нескольких наборах реальных и модельных данных.*

### 1. Введение

Зачастую в задачах регрессии оказывается эффективным использование ансамблей регрессоров вместо одиночных регрессоров. Беггинг (bagging) [2, 3] и бустинг (boosting) [5, 6, 7] являются наиболее распространенными подходами к построению таких ансамблей.

Идея беггинга состоит в том, что регрессоры независимо и параллельно обучаются на различных (возможно частично перекрывающихся) подмножествах обучающего множества. Итоговое предсказание беггинга является некоторым усреднением предсказаний всех регрессоров ансамбля. Таким образом, беггинг дает тем больший выигрыш, чем больший вклад в ошибку дает дисперсия регрессионной модели (Variance в терминах Bias-Variance decomposition). Большая дисперсия регрессионной модели в случае использования искусственных нейронных сетей (ИНС) [9] в качестве регрессоров связана тем, что разбиение обучающего множества на подмножества (одно из которых используется для подстройки значений параметров ИНС, а другое – в критерии останова) происходит случайным образом, а также с влиянием случайной инициализации параметров ИНС. Недостатком беггинга является то, что в его базовом варианте он уменьшает только ошибку, связанную с дисперсией модели. Ошибка,

связанная со смещением (Bias в терминах Bias-Variance decomposition), остается неизменной, поэтому для эффективного использования беггинга регрессоры, составляющие ансамбль, должны быть достаточно сложны для того, чтобы снизить влияние смещения на ошибку аппроксимации.

При решении задач регрессии наиболее распространены два подхода к бустингу. Первый подход состоит в том, что при обучении каждого регрессора ансамбля каждой точке в обучающей выборке присваивается свой вес. Вес характеризует то, насколько хорошо эта точка была приближена предыдущими регрессорами ансамбля [5]. Эксперименты показывают, что при использовании в качестве регрессионной модели нейронной сети этот подход мало отличается от беггинга по результатам работы, поэтому в дальнейшем результаты для этого подхода приводиться не будут. Второй подход заключается в том, что на каждой итерации бустинга приближается какая-то функция от точки обучающей выборки и предсказаний предыдущих регрессоров (например, часто приближается разность значения искомой функции и суммы предсказаний на предыдущих итерациях [6, 7]). Этот подход к бустингу работает наиболее эффективно в случае простых регрессионных моделей и направлен на уменьшение ошибки аппроксимации, связанной со смещением (далее в работе этот подход будет фигурировать как LS Boost [6, 7]).

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится общая постановка задачи аппроксимации многомерной зависимости, в разделе 3 приводится математическое описание классических подходов к построению ансамблей регрессоров, в разделе 4 рассматриваются новые методы построения ансамблей регрессоров, в разделе 5 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Все методы применялись для построения ансамблей ИНС, однако их применение возможно и для улучшения работы других регрессионных моделей.

## 2. Общая постановка задачи

Рассмотрим некоторую многомерную зависимость

$$y = f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in R^M, \quad y \in R^1. \quad (1)$$

Пусть известна некоторая выборка  $\Sigma = \{y_i, \mathbf{X}_i\}_{i=1}^N$  значений зависимости (1). Случайным образом разделим выборку  $\Sigma$  на две части  $\Sigma = \Sigma_{train} \cup \Sigma_{val}$ , где объем подвыборки  $\Sigma_{val}$  составляет некоторую долю (обычно 10-20%) объема выборки  $\Sigma$ . Задача аппроксимации многомерной зависимости (1) заключается в том, чтобы, используя подвыборку  $\Sigma_{train}$ , построить многомерную зависимость  $y = \tilde{f}(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in R^M$ ,  $y \in R^1$ , для которой некоторая функция  $D(f, \tilde{f} | \Sigma_{val}) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заранее заданное число. В качестве функции ошибки часто используют функцию вида  $D(f, \tilde{f} | \Sigma_{val}) = \sum_{\{y, \mathbf{X}\} \in \Sigma_{val}} (y - \tilde{f}(\mathbf{X}))^2$ .

Под построением ансамбля регрессионных моделей для решения задачи регрессии понимается случай, когда  $y = \tilde{f}(\mathbf{X})$  строится как функционал  $\tilde{f}(\mathbf{X}) = F(f_1(\mathbf{X}), \dots, f_N(\mathbf{X}))$ , где  $f_i(\mathbf{X})$ ,  $i = 1..N$  являются регрессионными моделями некоторого класса.

## 3. Классические подходы

В данном разделе приводится подробное описание алгоритмов беггинга и бустинга, упомянутых во введении.

### 3.1. Bagging

В алгоритме беггинга [1] параметры каждой ИНС ансамбля  $f_i(\mathbf{X})$  оцениваются по данным случайного подмножества  $\{y, \mathbf{X}\} \in \Sigma_{estim}$  множества  $\Sigma_{train}$ , при этом оставшиеся данные  $\Sigma_{test} = \Sigma_{train} \setminus \Sigma_{estim}$  используются в критерии останова обучения ИНС.

Итоговое предсказание ансамбля из  $B$  ИНС имеет вид  $F_B(\mathbf{X}) = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B f_i(\mathbf{X})$ .

### 3.1. LS Boost

В алгоритме бустинга LS Boost [6, 7] параметры каждой следующей  $B$ -й ИНС  $f_B(\mathbf{X})$  ансамбля оцениваются по выборке  $\Sigma_{estim, B} = \{y^B, \mathbf{X}\}$ , где  $y^B = y - F_{B-1}(\mathbf{X})$ ,  $\{y, \mathbf{X}\} \in \Sigma_{estim}$ ,  $F_{B-1}(\mathbf{X})$  – предсказание ансамбля на  $B-1$  итерации алгоритма, а разбиение множества  $\Sigma_{train} = \Sigma_{estim} \cup \Sigma_{test}$  проводится случайным образом, причем множество  $\Sigma_{test}$  используется в критерии останова обучения ИНС  $f_B(\mathbf{X})$ .

Предсказание ансамбля на  $B$ -ой итерации имеет вид  $F_B(\mathbf{X}) = F_{B-1}(\mathbf{X}) + f_B(\mathbf{X})$ .

## 4. Предложенные подходы

В данном разделе описываются предлагаемые в работе процедуры построения ансамблей регрессоров.

### 4.1. Bagging + Boosting = BagBoosting

Предлагаемый метод построения ансамблей регрессоров основан на объединении идей бустинга и беггинга и позволяет учесть основные преимущества этих классических методов. Идея метода состоит в том, чтобы сохранить форму предсказания всего ансамбля в виде усреднения предсказаний всех входящих в него регрессоров (и таким образом уменьшить влияние случайных факторов на итоговое предсказание) и одновременно последовательно обучать регрессоры не на первоначальной функции, а на некоторой разности от нее и предсказаний предыдущих регрессоров. Этот подход с одной стороны должен стабилизировать поведение регрессионной модели (уменьшить влияние дисперсии регрессионной модели на ошибку) даже для случая сложных моделей, а с другой стороны, если модель имеет достаточно простую структуру, должен позволить уменьшить влияние смещения на ошибку аппроксимации.

**Алгоритм:**

1. Положим начальное значение выхода ансамбля равным  $F_0(\mathbf{X}) = 0$ .
2. Для  $B = 1, 2, \dots$ :
  - (а) Определим новую выборку данных, равную  $\Sigma_{train, B} = \{y^B, \mathbf{X}\}$ , где  $y^B = B \cdot y - (B-1) \cdot F_{B-1}(\mathbf{X})$  при  $\{y, \mathbf{X}\} \in \Sigma_{train}$ .

Разобьем случайным образом обучающее множество  $\Sigma_{train,B}$  на множества  $S_{estim,B}$  и  $S_{test,B}$ .

- (б) Обучим по выборке  $\Sigma_{train,B} = \{y^B, \mathbf{X}\}$ ,  $B$ -ю ИНС ансамбля  $f_B(\mathbf{X})$ . Для подстройки параметров будем использовать множество  $S_{estim,B}$ . Остановка алгоритма обучения будет происходить, если за заданное число последовательных итераций алгоритма ошибка на множестве  $S_{test,B}$  не опустилась, ниже ранее достигнутого минимального значения и/или выполнен один из определенных в алгоритме обучения ИНС критерий останова.
- (в) Полагаем значение выхода ансамбля равным
- $$F_B(\mathbf{X}) = ((B-1) \cdot F_{B-1}(\mathbf{X}) + f_B(\mathbf{X})) / B.$$
- (г) Остановка алгоритма построения ансамбля происходит в том случае, если за заданное число последовательных итераций алгоритма значение функции ошибки  $D(f, F_B | \Sigma_{train})$  не опустилось, ниже ранее достигнутого минимального значения.

Эксперименты показывают, что предложенный метод дает меньшие ошибки предсказания, чем схемы беггинга и бустинга, описанные в разделе 3.

#### 4.2. Modified BagBoosting

Возможна также следующая модификация предложенного метода BagBoosting, направленная на увеличение скорости обучения ансамбля.

На практике обучающая выборка может содержать некоторую избыточность. Под избыточностью здесь понимается то, что удаление части точек из обучающей выборки при обучении не повлияет на точность предсказания итоговой регрессионной модели. Этот эффект может быть использован для увеличения скорости обучения регрессионной модели, так как в случае ИНС время обучения приблизительно линейно зависит от количества точек обучающей выборки. В работе предлагается следующая модификация метода BagBoosting пытающаяся извлечь выгоду из описанного выше наблюдения. В предлагаемом методе делается допущение о том, что для аппроксимируемой зависимости существует достаточная для нас точность приближения (что часто выглядит разумным предположением в

практических задачах). Исходя из этого предположения, мы можем, подчитав на текущей итерации ошибки приближения на точках обучающего множества, на следующей итерации приближать новой регрессионной моделью ансамбля только те точки, ошибка приближения которых больше допустимой. Очевидным недостатком такого подхода является то, что таким образом мы одновременно можем ухудшать ошибки предсказания для точек, не попавших в обучающую выборку на текущей итерации. Однако эксперименты показывают, что использование модификации BagBoosting на основе указанного подхода позволяет получить значительный выигрыш во времени при построении ансамбля регрессоров, при этом потери в точности ансамбля либо малы, либо вовсе отсутствуют.

##### Алгоритм:

1. Установим допустимую ошибку приближения точки  $q$  для точек обучающего множества.
2. Положим начальное значение выхода ансамбля равным  $F_0(\mathbf{X}) = 0$ .
3. Пусть  $B = 1$ . Обучим по выборке  $\Sigma_{train} = \{y, \mathbf{X}\}$  ИНС  $f_1(\mathbf{X})$ .
4. Для  $B = 2, 3, \dots$ :
  - (а) Определим новую выборку данных, равную  $\Sigma_{train,B} = \{y^B, \mathbf{X}\}$ , где  $y^B = B \cdot y - (B-1) \cdot F_{B-1}(\mathbf{X})$  при  $\{y, \mathbf{X}\} \in \Sigma_{train}$ .
  - (б) Формируем из точек, для которых выполнено условие  $|y - ((B-1) \cdot F_{B-1}(\mathbf{X}) + f_B(\mathbf{X})) / B| > q$  выборку  $\Sigma_{train_{q,B}} = \{y^B, \mathbf{X}\}$ . Разобьем случайным образом обучающее множество  $\Sigma_{train_{q,B}}$  на множества  $S_{estim,B}$  и  $S_{test,B}$ .
- (в) Обучим по выборке  $\Sigma_{train_{q,B}} = \{y^B, \mathbf{X}\}$ ,  $B$ -ю ИНС ансамбля  $f_B(\mathbf{X})$ . Для подстройки параметров будем использовать множество  $S_{estim,B}$ . Остановка алгоритма обучения будет происходить, если за заданное число последовательных итераций алгоритма ошибка на множестве  $S_{test,B}$  не опустилась, ниже ранее достигнутого минимального значения и/или выполнен один из определенных в алгоритме обучения ИНС критерий останова.

- (г) Полагаем значение выхода ансамбля равным

$$F_B(\mathbf{X}) = ((B-1) \cdot F_{B-1}(\mathbf{X}) + f_B(\mathbf{X})) / B.$$

- (д) Остановка алгоритма построения ансамбля происходит в том случае, если за заданное число последовательных итераций алгоритма значение функции ошибки  $D(f, F_B | \Sigma_{train})$  не опустилось, ниже ранее достигнутого минимального значения.

Применение полученного метода в экспериментах позволяло получать выигрыш в скорости обучения до 50% (часто порядка 20-30%) ценой роста ошибки на несколько процентов или вовсе без потери точности. Часть результатов экспериментов приведена в разделе 5.

### 4.3. Cascade Boosting

Приведем еще один возможный вариант метода построения ансамбля регрессоров. На каждой итерации выход предыдущей ИНС ансамбля подается как дополнительный вход в обучаемую ИНС. Этот вариант ансамбля дает результат в другом классе регрессионных моделей, чем первоначальная модель, что делает возможным приближение более сложных функций. Однако недостатком этого подхода является более существенное влияние эффекта переобучения, чем в других предложенных в работе подходах.

Алгоритм:

1. Для  $B=1$ . Обучим по выборке  $\Sigma_{train} = \{y, \mathbf{X}\}$  ИНС  $f_1(\mathbf{X})$ .
2. Для  $B=2, 3, \dots$ :
  - (а) Определим новую выборку данных, равную  $\Sigma_{train, B} = \{y, \mathbf{X}^B\}$ , где  $\mathbf{X}^B$  является объединением векторов  $\mathbf{X}$  и  $f_{B-1}(\mathbf{X})$  для  $\{y, \mathbf{X}\} \in \Sigma_{train}$ . Разобьем случайным образом обучающее множество  $\Sigma_{train, B}$  на множества  $S_{estim, B}$  и  $S_{test, B}$ .
  - (б) Обучим по выборке  $\Sigma_{train, B} = \{y, \mathbf{X}^B\}$ ,  $B$ -ю ИНС ансамбля  $f_B(\mathbf{X}^B)$ . Для подстройки параметров будем использовать множество  $S_{estim, B}$ . Остановка алгоритма обучения будет происходить, если за заданное число последовательных итераций алгоритма ошибка на множестве  $S_{test, B}$  не опустилась, ниже ранее достигнутого минимального значения и/или

выполнился один из определенных в алгоритме обучения ИНС критерий останова.

- (в) Полагаем значение выхода ансамбля равным  $f_B(\mathbf{X}^B)$ .

- (г) Остановка алгоритма построения ансамбля происходит в том случае, если за заданное число последовательных итераций алгоритма значение функции ошибки  $D(f, f_B | \Sigma_{train})$  не опустилось, ниже ранее достигнутого минимального значения.

## 5. Результаты экспериментов

Для сравнения эффективности предложенных подходов с классическими подходами и одиночной регрессионной моделью был проведен ряд экспериментов на нескольких наборах реальных и искусственных данных.

Все ошибки экспериментов в этом разделе приведены для множества  $\Sigma_{val}$ , отличного от множества  $\Sigma_{train}$  на котором обучались регрессионные модели. Приведенные ошибки вычислялись по формуле:

$$err = \sqrt{\frac{1}{size(\Sigma_{val})} \sum_{\{y, \mathbf{X}\} \in \Sigma_{val}} (y - \tilde{f}(\mathbf{X}))^2}.$$

Для сравнения использовались следующие реальные данные:

- Concrete – данные о пределе прочности цемента в зависимости от ряда параметров [8].
  - Structure, Aero – наборы структурных (значения коэффициентов прочности в зависимости от характеристик элемента) [4] и аэродинамических данных (значения аэродинамических характеристик в зависимости от компоновки самолета) [10].
- Кроме наборов реальных данных в работе приводятся результаты для двух искусственных функций [1]:
- Samgen\_2D\_3 – плоскость разбивается на четыре квадранта, в каждом из которых аппроксимируемая функция равна некоторому полиному второго порядка. В местах стыков квадрантов значения полиномов не равны (аппроксимируемая функция имеет разрывы).
  - Casciola – сильно осциллирующая нелинейная функция.

На рис. 1 приведен характерный вид зависимости точности приближения и времени работы в зависимости от параметра  $q$  в методе Modified BagBoosting (для данных Concrete).

Для каждого  $q$  проводилось усреднение по 10 запускам, чтобы уменьшить влияние

случайной инициализации параметров регрессоров, составляющих ансамбль.

При  $q = 0$  результаты соответствуют результатам метода BagBoosting.

Для удобства восприятия величины ошибок и времени нормированы на соответствующие значения при  $q = 0$ . Отметим, что максимальное значение  $q = 8$  приблизительно соответствует величине  $\frac{\max(\mathbf{Y}) - \min(\mathbf{Y})}{10}$  для рассматриваемых в примере данных, где множество  $\mathbf{Y} = \{y \in \Sigma_{train}\}$ .

Как можно видеть величина ошибки на тестовом множестве растет заметно медленнее, чем происходит спад времени обучения.

Поэтому, установив небольшое значение параметра  $q$ , можно получить заметный выигрыш во времени почти без потери точности. Эксперименты показывают, что разумным выбором часто является значение  $q = \frac{\max(\mathbf{Y}) - \min(\mathbf{Y})}{100}$ . (2)

В примере с Concrete значение  $q$  из (2) позволяет выиграть 20% времени обучения

ценой всего 1-2% точности относительно базового варианта метода (в случае с данными r-sort1 при таком  $q$  выигрыш составляет более 50% при потере 5% точности относительно базовой версии метода BagBoosting).

Полученные ошибки приближения для рассматриваемых методов приведены в таблицах 1 и 2 для различных наборов данных. Ошибки для Modified BagBoosting приведены для значения  $q$  из (2).

Как можно видеть из таблиц все предложенные в работе методы имеют меньшую ошибку и/или меньшее время обучения по сравнению с одиночной ИНС и классическими методами построения ансамблей (в таблицах ошибка и время обучения (в секундах) указаны в колонках **error** и **time** соответственно). Для того чтобы уменьшить влияние случайной инициализации параметров регрессоров, составляющих ансамбль, приведенные в таблицах значения получены усреднением по 50 независимым запускам алгоритмов построения ансамблей.

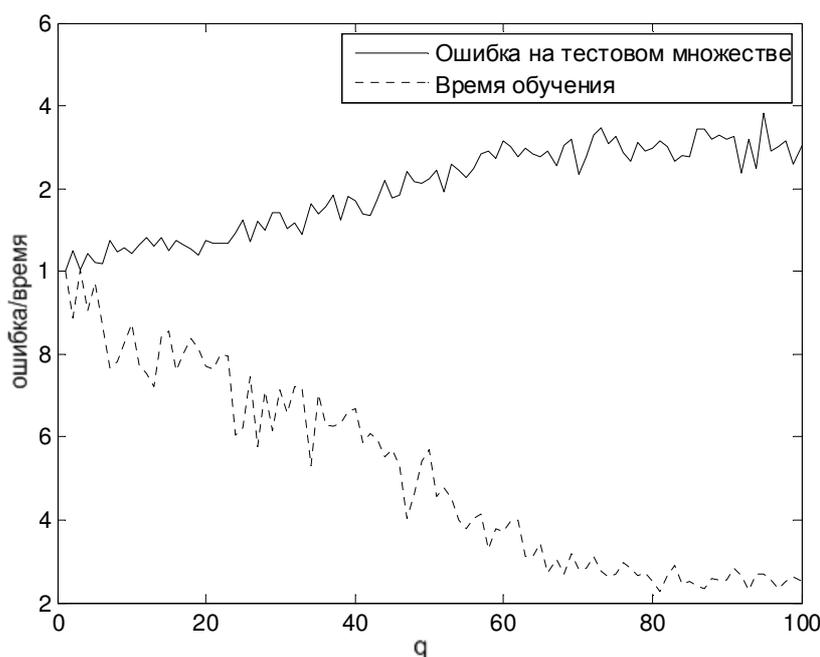


Рисунок 1. График зависимости ошибки на тестовом множестве и времени обучения от  $q$

**Таблица 1. Значения ошибок и времен обучения для реальных данных**

Method	error	time
<b>Concrete</b>		
One ANN	7.4050	0.7800
Bagging	6.1278	7.2739
LS Boost	6.2700	9.0226
BagBoosting	5.8424	7.7021
Modified BagBoosting	5.9786	6.1932
Cascade Boosting	5.5313	9.7351
<b>p-copti</b>		
One ANN	0.1795	13.790
Bagging	0.1338	45.781
LS Boost	0.1638	73.318
BagBoosting	0.1065	76.206
Modified BagBoosting	0.1128	31.198
Cascade Boosting	0.1076	89.864
<b>QAD-PAL</b>		
One ANN	13,4e-05	53
Bagging	8,93e-05	1094
LS Boost	13,4e-05	1413
BagBoosting	7,70e-05	812
Modified BagBoosting	9,8e-05	208
Cascade Boosting	9,17e-05	734

**Таблица 2. Значения ошибок и времен обучения для искусственных данных**

Method	error	time
<b>Samgen_2D_3</b>		
One ANN	0.1086	7.0300
Bagging	0.1050	159.840
LS Boost	0.0847	102.489
BagBoosting	0.0783	43.4934
Modified BagBoosting	0.0803	33.9777
Cascade Boosting	0.0731	49.2835
<b>Casciola</b>		
One ANN	0.2106	1.0622
Bagging	0.1982	60.1939
LS Boost	0.2058	28.6976
BagBoosting	0.1916	33.1153
Modified BagBoosting	0.1883	26.1332
Cascade Boosting	0.1786	42.6263

## 6. Заключение

В работе предложен ряд методов обучения ансамблей ИНС, которые дают большую точность при решении задач регрессии, чем при использовании одиночной ИНС или при использовании классических методик построения ансамблей [2, 3, 5, 6, 7].

## 7. Список литературы

- [1] D. Betebghor, "Comparison of several surrogate models on discontinuous test cases. Applications to the regression of an optimization process", *Technical Report*, AIRBUS FRANCE, 2009.
- [2] L. Breiman, "Bagging predictors", *Machine Learning* 24 (2), 1996, pp. 123–140.
- [3] P. Bruhlmann and B. Yu, "Explaining Bagging", *Technical Report*, Statistics Department, University of California at Berkeley, 2000.
- [4] E.V. Burnaev and S. Grihon, "Construction of the metamodels in support of stiffened panel optimization", *Proceedings of the conference MMR 2009 – Mathematical Methods in Reliability*, 22-29 June, pp. 124-128.
- [5] H. Drucker, "Improving Regressors using Boosting Techniques", *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Machine Learning*, 1997 pp. 107-115.
- [6] J. Friedman, T. Hastie, and R. Tibshirani, "Additive logistic regression: a statistical view of boosting", *The Annals of Statistics* 28, 2001, pp. 337–407.
- [7] J. Friedman, "Greedy function approximation: A gradient boosting machine", *Technical Discussion: Foundations of TreeNet*, 1999.
- [8] UC Irvine Machine Learning Repository // <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Concrete+Compressive+Strength>
- [9] Тархов Д.А. *Нейронные сети. Модели и алгоритмы.* – М.: Радиотехника, 2005.
- [10] Е.В. Бурнаев, "Быстрый расчет аэродинамических характеристик самолета на основе аппроксимации многомерных зависимостей", *Труды III всероссийской молодежной конференции по проблемам управления (ВМКПУ '2008)*, г. Москва, 7-9 апреля, 2008, С. 224-226.

# Минимаксная задача скорейшего обнаружения разладки для броуновского движения с экспоненциальной функцией штрафа

Бурнаев Е.В.

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
burnaev@iitp.ru

## Аннотация

В работе получено решение минимаксной задачи скорейшего обнаружения разладки для броуновского движения с экспоненциальной функцией штрафа.

## 1. Введение. Постановка задачи

Предполагается, что на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  наблюдается случайный процесс  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  со стохастическим дифференциалом

$$dX_t = \mu I(t - \theta) dt + \sigma dB_t, X_0 = 0,$$

где  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  – стандартное броуновское движение,  $I(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$  Момент  $\theta \in [0, \infty]$  интерпретируется как момент появления “разладки” (по терминологии [1, 2, 3, 4]) в ходе наблюдений за процессом  $X$ : при  $t < \theta$  наблюдаемый процесс

$$X_t = \sigma B_t,$$

а при  $t \geq \theta$  процесс

$$X_t = X_\theta + \mu(t - \theta) + \sigma(B_t - B_\theta).$$

Будем через  $\tau = \tau(\omega)$  обозначать момент подачи сигнала о появлении “разладки”, т.е. пусть  $\tau$  есть марковский момент со значениями в  $[0, \infty]$  относительно потока  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ , где

$$\mathfrak{F}_t = \sigma\{\omega : X_s, s \leq t\}, t \geq 0.$$

Пусть  $\mathbf{P}_t$  – распределение вероятностей процесса  $X$  в предположении, что момент разладки  $\theta = t$ . Распределение  $\mathbf{P}_\infty$  отвечает случаю отсутствия разладки ( $\theta = \infty$ ),  $\mathbf{P}_0$  соответствует случаю наличия разладки в момент  $\theta = 0$ . Обозначим

$$\mathfrak{M}_T = \{\tau : \mathbb{E}_\infty \tau = T\}$$

– класс моментов остановки  $\tau$ , для которых среднее время  $\mathbb{E}_\infty \tau$  до подачи (ложной) тревоги равно  $T$ .

В работах [1, 2, 3] рассматривались различные постановки задачи обнаружения и были найдены оптимальный байесовский метод и оптимальный метод в предположении, что разладка появляется “на фоне установившегося стационарного режима наблюдения”.

В настоящей работе доказывается оптимальность модификации непрерывной версии метода кумулятивных сумм (CUSUM), введенного Пэйджем [11] в случае дискретного времени для следующего нелинейного обобщения критерия, предложенного Лорденом [8].

Качество системы наблюдения, идентифицируемой с выбором момента  $\tau \in \mathfrak{M}_T$ , будем оценивать с помощью функции риска

$$D(T, \alpha; \tau) = \sup_{\theta \geq 0} \text{ess sup}_\omega \mathbb{E}_\theta \left( \frac{e^{\alpha[\tau - \theta]^+} - 1}{\alpha} \middle| \mathfrak{F}_\theta \right),$$

где  $\alpha \geq 0$  – заданная константа,  $(x)^+ = \max(x, 0)$ . Момент  $\tau_T^* \in \mathfrak{M}_T$  естественно называть оптимальным (в минимаксном смысле), если

$$\mathbb{D}(T, \alpha) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} D(T, \alpha; \tau) = D(T, \alpha; \tau_T^*).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При  $\alpha = 0$  функция риска принимает вид

$$D(T, 0; \tau) = \sup_{\theta \geq 0} \text{ess sup}_\omega \mathbb{E}_\theta \left( [\tau - \theta]^+ \middle| \mathfrak{F}_\theta \right)$$

и является линейной. Такой тип функции риска подходит для большого числа приложений. Как известно, одним из первых приложений методов скорейшего обнаружения разладки был мониторинг производственного процесса, позволяющий выявлять моменты ухудшения качества обработки изделия. В этом случае стоимость задержки в обнаружении разладки может быть достаточно точно измерена линейной функцией риска, отражающей тот факт,

что стоимость изделий с дефектами пропорциональна их количеству. Однако, в других приложениях линейная функция риска может неадекватно оценивать реальную стоимость задержки в определении разладки. Например, при контроле надежности сложной технической системы (самолета, сети связи и т.п.) эффект от необнаруженных разладок может накапливаться со временем в геометрической прогрессии, именно поэтому имеет смысл также рассматривать и нелинейную функцию риска, накладывающую “экспоненциальный” штраф на задержку в определении разладки.

## 2. Основной результат

**ТЕОРЕМА.** При каждом  $T > 0$  в классе  $\mathfrak{M}_T$  существует оптимальный момент  $\tau_T^*$  такой, что

$$\tau_T^* = \inf\{t \geq 0 : \gamma_t \geq B_T^*\},$$

где процесс  $\gamma = (\gamma_t)_{t \geq 0}$  имеет вид

$$\gamma_t = \max_{\theta \leq t} \frac{d(P_\theta | \mathfrak{F}_t)}{d(P_\infty | \mathfrak{F})} \frac{e^{\alpha t}}{e^{\alpha \theta}}$$

и является модифицированным “CUSUM”-процессом;  $\frac{d(P_\theta | \mathfrak{F}_t)}{d(P_\infty | \mathfrak{F})}$  – производная Радона-Никодима сужения  $P_\theta | \mathfrak{F}_t$  меры  $P_\theta$  относительно сужения  $P_\infty | \mathfrak{F}$  меры  $P_\infty$  на  $\mathfrak{F}$ .

При этом

$$\gamma_t = \max_{\theta \leq t} \frac{L_t e^{\alpha t}}{L_\theta e^{\alpha \theta}},$$

где

$$L_t = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} X_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t\right);$$

порог  $B_T^*$  определяется (в предположении  $\frac{\mu^2}{2\sigma^2} = 1$ , что не ограничивает общности) как корень уравнения

$$T = \frac{\log B}{\alpha - 1} + \frac{B^{1-\alpha} - 1}{(\alpha - 1)^2};$$

минимаксный риск

$$D(T, \alpha; \tau_T^*) = \mathbb{E}_0 \tau_T^* = \frac{(\alpha - 1)(B_T^*)^\alpha}{\alpha(\alpha(B_T^*)^\alpha - 1)} - \frac{1}{\alpha}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В случае дискретного времени вопрос об асимптотической оптимальности метода CUSUM для линейного критерия  $D(T, 0; \tau)$  рассматривался в работах Лордена [8], позже в работах Мустакидеса [9] и Ритова [14] была доказана “точная” оптимальность метода CUSUM. Случай нелинейной функции риска был впервые рассмотрен в работе [12].

В случае непрерывного времени для модели с броуновским движением оптимальность метода CUSUM была доказана Ширияевым [5] и Байбелем [7], в дальнейшем Мустакидес [10] обобщил эти результаты на случай модели с процессом Ито. В [6] была решена задача о разладке для пуассоновского процесса с нелинейной функцией риска.

## 3. Основные этапы доказательства

Как и в [5, 9] одним из ключевых моментов в доказательстве является получение оценки снизу для величин  $D(T, \alpha; \tau)$ .

Доказательство теоремы опирается на следующие результаты.

**ЛЕММА 1.** Процесс  $\gamma = (\gamma_t)$  является решением неоднородного стохастического дифференциального уравнения

$$d\gamma_t = \alpha \gamma_t dt + \frac{\mu}{\sigma^2} \gamma_t dX_t + dH_t, \quad \gamma_0 = 1, \quad (1)$$

где

$$H_t = - \int_0^t I(\gamma_s = 1) \frac{dM_s}{M_s}$$

с  $M_s = \min_{\theta \leq s} L_\theta$ .

Решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$\gamma_t = L_t e^{\alpha t} \left\{ 1 + \int_0^t \frac{dH_s}{L_s e^{\alpha s}} \right\}. \quad (2)$$

Представление (2) играет существенную роль при доказательстве следующего утверждения.

**ЛЕММА 2.** Для любого конечного момента остановки  $\tau$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} D(T, \alpha; \tau) &= \sup_{\theta \geq 0} \text{ess sup}_\omega \mathbb{E}_\theta \left( \frac{e^{\alpha[\tau - \theta]^+} - 1}{\alpha} \middle| \mathfrak{F}_\theta \right) \\ &\geq \frac{\mathbb{E}_\infty \int_0^\tau \gamma_\theta d\theta}{\mathbb{E}_\infty \gamma_\tau - \alpha \int_0^\tau \gamma_\theta d\theta}. \end{aligned}$$

**ЛЕММА 3.** В классе  $\mathfrak{M}_T$  момент  $\tau_T^*$  обладает одновременно следующими двумя свойствами оптимальности:

$$\begin{aligned} \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbb{E}_\infty \int_0^\tau \gamma_t dt &= \mathbb{E}_\infty \int_0^{\tau_T^*} \gamma_t dt, \\ \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbb{E}_\infty \gamma_\tau &= \mathbb{E}_\infty \gamma_{\tau_T^*}. \end{aligned}$$

**ЛЕММА 4.** Для момента  $\tau_T^*$  выполняется, что

$$\begin{aligned} D(T, \alpha; \tau_T^*) &= \mathbb{E}_0 \left( \frac{e^{\alpha \tau_T^*} - 1}{\alpha} \right), \\ \mathbb{E}_\infty \int_0^{\tau_T^*} \gamma_t dt &= \frac{B_T^* - 1}{\alpha} + \frac{1 - (B_T^*)^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_0 \left( \frac{e^{\alpha \tau_T^*} - 1}{\alpha} \right) = \frac{(\alpha - 1)(B_T^*)^\alpha}{\alpha \left( \alpha (B_T^*)^{\alpha-1} - 1 \right)} - \frac{1}{\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из лемм 2 и 4 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left( \frac{e^{\alpha \tau_T^*} - 1}{\alpha} \right) &= D(T, \alpha; \tau_T^*) \geq \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} D(T, \alpha; \tau) \\ &\geq \frac{\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbb{E}_\infty \int_0^\tau \gamma_\theta d\theta}{\sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbb{E}_\infty \gamma_\tau - \alpha \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \int_0^\tau \gamma_\theta d\theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу леммы 4 левая часть и правая часть в (3) оказываются равными, что и доказывает утверждение теоремы.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 09-07-00180-а, 09-01-12173-офи\_м, 08-01-00740-а, 08-01-91205-ЯФ\_а.

## Список литературы

- [1] А.Н. Ширяев, “Обнаружение спонтанно возникающих эффектов”, *ДАН СССР*, 1961, Т. 138, Вып. 4, С. 794-801.
- [2] А.Н. Ширяев, “Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима”, *ДАН СССР*, 1961, Т. 138, Вып. 5, С. 1039-1042.
- [3] А.Н. Ширяев, “Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1963, Т. VIII, Вып. 1, С. 26-51.
- [4] Ширяев, А.Н., *Статистический последовательный анализ*, Наука, М., 1976.
- [5] А.Н. Ширяев, “Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени”, *УМН*, 1996, Т. 51, Вып. 4, С. 173-174.
- [6] E. Bayraktar, and S. Dayanik, “Poisson Disorder Problem with Exponential Penalty for Delay”, *Mathematics of operations research*, 2006, V. 31, pp. 217-233.
- [7] M. Beibel, “A note on Ritov’s approach to the minimax property of the cusum procedure”, *Ann. Statist.*, 1996, V. 24, pp. 1804-1812.
- [8] G. Lorden, “Procedures for a Reaching to a Change in Distribution”, *Ann. Math. Statist.*, 1971, V. 42, pp. 1897-1908.
- [9] G.V. Moustakides, “Optimal Stopping Times for Detecting Changes in Distribution”, *Ann. Statist.*, 1986, V. 14, pp. 1379-1387.
- [10] G.V. Moustakides, “Optimality of the CUSUM procedure in continuous time”, *Ann. Statist.*, 2004, V. 32, pp. 302-315.
- [11] E.S. Page, “Continuous inspection schemes”, *Biometrika*, 1954, V. 41, pp. 100-115.
- [12] H.V. Poor, “Quickest detection with exponential penalty for delay”, *Ann. Statist.*, 1998, V. 26, pp. 2179-2205.

[13] G. Peshkir, and A.N. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problem*, Birkhauser, 2006.

[14] Y. Ritov, “Decision Theoretic Optimality of the CUSUM Procedure”, *Ann. Statist.*, 1990, V. 18, pp. 1464-1469.

## Адаптивная регуляризация в задаче аппроксимации многомерных зависимостей

Беляев Михаил  
Институт Проблем Передачи  
Информации им. А.А.Харкевича РАН  
belyaevmichel@gmail.com

Бурнаев Евгений  
Институт Проблем Передачи  
Информации им. А.А.Харкевича РАН  
burnaev@iitp.ru

### Аннотация

В работе исследуется аппроксимация многомерных зависимостей с помощью разложения по базису параметрических функций. Параметры подбираются с помощью одного из методов градиентного спуска, а коэффициенты разложения по базису вычисляются с помощью метода наименьших квадратов. При решении задачи линейной регрессии матрица регрессоров может быть плохо обусловлена, что приводит к резкому увеличению коэффициентов разложения. Как следствие, возникает эффект переобучения, т.е. обобщающая способность аппроксиматора ухудшается. Данная проблема решается введением регуляризации (гребневая регрессия), однако при итеративном подборе параметров параметра регуляризации классический подход выбора параметра регуляризации не всегда срабатывает и может приводить к досрочному выходу из обучения. В работе предложен адаптивный алгоритм подбора параметра регуляризации, который лишен указанного недостатка. Результаты работы предлагаемого метода иллюстрируются как на искусственных, так и на реальных данных.

### 1. Введение

Задача аппроксимации заключается в моделировании неизвестной зависимости по конечному набору точек (по обучающей выборке). Качество полученной модели характеризуется функцией ошибки, например суммой квадратов абсолютных ошибок. Однако даже при малых значениях функции ошибки на обучающей выборке модель может иметь плохую обобщающую способность и предсказания для новых точек будут сильно отличаться от истинных значений. Такое поведение

обусловлено эффектом переобучения (выбором избыточно сложной модели). Для устранения этого эффекта вводится регуляризация, то есть штраф на сложность модели.

В [1] исследуется моделирование динамической системы с помощью нейронной сети и показывается, что введение регуляризации улучшает результаты моделирования. Параметр регуляризации предлагается устанавливать вручную. Такой подход не применим в задаче аппроксимации многомерной зависимости, поскольку значение параметра для различных выборок данных существенно отличаются.

В [2] рассматривается сглаживание для задачи сплайновой регрессии, для нахождения оптимального параметра используется разложение в ряд Тейлора асимптотического приближения функции ошибки. Регуляризация в задаче линейной регрессии для выборок малого объема изучается в [3].

Работы [4,5] предлагают многоэтапное обучение нейронной сети. Первый этап заключается в стандартном обучении сети до момента остановки. Затем вычисляется оптимальное значение параметра, и сеть снова обучается. Недостатком такого подхода является некорректная оценка параметра при плохой обобщающей способности первой сети.

Исследования по адаптивному подбору параметра регуляризации для алгоритма обучения Левенберга-Марквардта, приведенные в работе [6], представляют интерес, но требуют значительного повышения вычислительной сложности процесса обучения.

В данной работе предлагается алгоритм адаптивного подбора параметра регуляризации, улучшающий обобщающую способность модели и не требующий трудоемких вычислений. В разделах 2-4 описывается методология аппроксимации многомерной зависимости, в 5-6 описывается способ введения регуляризации.

Результаты работы предлагаемого метода приведены в разделе 7.

## 2. Постановка задачи аппроксимации многомерной зависимости

Задача аппроксимации многомерной зависимости

$$y = f(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in R^n, y \in R^1 \quad (1)$$

состоит в построении по обучающей выборке данных  $\Sigma_{train} = \{y_i, \mathbf{X}_i\}_{i=1}^N$  такой функции  $\hat{f}$ , которая удовлетворяет условию  $D(f, \hat{f}) \leq \varepsilon$ , где  $D$  – функция ошибки на тестовом множестве  $\Sigma_{test}$ , а  $\varepsilon$  – заданная малая величина.

## 3. Методология построения аппроксимации

Для построения аппроксимации обучающая выборка данных  $\Sigma_{train}$ , делится на две части  $\Sigma_{train} = \Sigma_{estim} \cup \Sigma_{valid}$ . По подвыборке  $\Sigma_{estim}$  оценивается функция  $\hat{f}$ , а на второй части данных  $\Sigma_{valid}$  подсчитывается значение функции ошибки, увеличение значений которой используется как сигнал для завершения обучения. Такой подход используется для того, чтобы уменьшить эффект переобучения и улучшить обобщающую способность полученной аппроксимации.

В данной работе рассматривается разложение искомой функции по адаптивному базису параметрических функций:  $\{\varphi_j(\mathbf{X})\}_{j=1}^p$ ,

$$\varphi_j(\mathbf{X}) = \sigma\left(\sum_{k=1}^n W_{j,k} \cdot X_k + W_{j,0}\right) = \sigma(\mathbf{X} \cdot \mathbf{W}_j)$$

Набор векторов  $\{\mathbf{W}_j\}_{j=1}^p$  – это направления, на которые проектируется вектор  $\mathbf{X}$ . Нелинейная функция  $\sigma$  должна быть монотонна, непрерывно дифференцируема и иметь конечные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = A, \quad |A| < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} = B, \quad |B| < \infty.$$

Например, в качестве такой функции может быть использована параметрическая функция распределения, либо функция гиперболического тангенса

$$\sigma(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}. \quad \text{Аппроксимация}$$

искомой функция представляется в виде

$$\hat{f}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^p V_j * \varphi_j(\mathbf{X}), \quad \text{где } \varphi_0(\mathbf{X}) \equiv 1, \quad \text{а}$$

параметр  $p$  определяет сложность модели, задавая количество базисных функций. Параметры базисных функций  $\mathbf{W}^j$  и коэффициенты разложения  $V_j$  подбираются итеративно, уменьшая значение функции ошибки. В качестве последней используется сумма квадратов отклонений от истинных значений

$$E = \sum (y_i - \hat{f}(\mathbf{X}_i))^2, \quad \{\mathbf{X}_i, y_i\} \in \Sigma_{estim} \quad (2)$$

## 4. Подбор параметров базисных функций

Значения параметров базисных функций на каждой итерации изменяются с помощью одного из методов градиентного спуска, например [7]. Метод использует градиент функции ошибки (2) на оценочном множестве  $\Sigma_{estim}$  по параметрам базисных функций  $\mathbf{W}^j$ :

$$\Delta_{j,k}^t = \frac{\partial E}{\partial W_{j,k}^t}, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{0, n}.$$

## 5. Подбор коэффициентов при базисных функциях

В силу нелинейной зависимости аппроксимации функции от параметров базисных функций точное вычисление оптимальных параметров (минимизирующих функцию ошибки на оценочном множестве) не представляется возможным. В тоже время, зависимость от коэффициентов при базисных функциях линейна

$$\hat{f}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^p V_j \cdot \varphi_j(\mathbf{X}). \quad \text{Этот факт позволяет при}$$

известных параметрах базисных функций вычислять оптимальные коэффициенты разложения, используя метод наименьших квадратов. Оценка оптимальных коэффициентов разложения имеет вид

$$\hat{V}_j = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \quad (3)$$

где  $\Phi$  – матрица значений базисных функций в точках выборки,  $\Phi_{j,i} = \varphi_j(\mathbf{X}^i)$ .

Применение формул линейной регрессии предполагают, что столбцы матрицы регрессоров  $\Phi$  линейно независимы и ее ранг равен  $p$ , что необходимо для существования обратной

матрицы  $(\Phi^T \Phi)^{-1}$ . Однако для хорошей обобщающей способности аппроксиматора существенно выполнение более сильного условия: матрица  $\Phi^T \Phi$  должна быть хорошо обусловлена. Невыполнение этого условия может привести к значительному эффекту переобучения, в результате чего аппроксимация становится несостоятельной.

Для устранения этого нежелательного эффекта используется ридж-регрессия (ridge-регрессия, гребневая регрессия) [8], в которой используются измененные формулы (3) для подсчета коэффициентов регрессии

$\tilde{V}_j = (\Phi^T \Phi + \lambda \mathbf{I})^{-1} \Phi^T \mathbf{Y}$ , где  $\lambda > 0$ , а  $\mathbf{I}$  - единичная матрица. Добавление к матрице

$(\Phi^T \Phi)^{-1}$  положительно определенной матрицы  $\lambda \mathbf{I}$  делает оценки более устойчивыми. Полученный набор коэффициентов минимизирует измененную функцию ошибки со штрафом на большие значения коэффициентов

$$\tilde{E} = \sum (y - \hat{f}(\mathbf{X}))^2 + \lambda \sum_{j=0}^p V_j^2,$$

$$\{y^i, \mathbf{X}^i\} \in \Sigma_{estim}$$

При корректном подборе параметра регуляризации  $\lambda$  можно добиться значительного улучшения обобщающей способности полученной аппроксимации.

В [9,10] предлагаются теоретические оценки параметра регуляризации, которые позволяют минимизировать ожидание ошибки на новых данных. Однако такой подход не срабатывает при итеративном обучении, поскольку матрица регрессоров меняется на каждой итерации. В связи с этим оптимальный прогноз на текущей итерации может привести к досрочному выходу из обучения и, как следствие, к плохой оценке параметров базисных функций.

Кроме того, в [9] предлагается еще ряд эмпирических оценок параметра. В силу разных причин, они также приводят либо к досрочному выходу из обучения, либо не улучшают обобщающую способность по сравнению с обычным МНК.

В следующем разделе предлагается адаптивный метод подбора значения параметра регуляризации  $\lambda$ .

## 6. Алгоритм адаптивного подбора параметра регуляризации

По аналогии с изменением параметров базисных функций, предлагается обновлять

значение  $\lambda$  на каждой итерации, выбирая направление изменения исходя из текущей обусловленности матрицы  $\Phi^T \Phi + \lambda \mathbf{I}$ . Величина изменения параметра адаптивно подбирается, в зависимости от обусловленности матрицы на текущей и предыдущей итерациях обучения. При необходимости последовательного изменения  $\lambda$  в одном направлении шаг увеличивается, в противном случае уменьшается. Для удобства изложения алгоритма будем пользоваться обозначением следующим обозначением параметра регуляризации:  $\lambda = 10^\alpha$ . Тогда формула для подсчета коэффициентов при базисных функциях будет иметь вид  $\tilde{V}_j = (\Phi^T \Phi + 10^\alpha \mathbf{I})^{-1} \Phi^T \mathbf{Y}$ .

Алгоритм использует число обусловленности матрицы, равное отношению максимального собственного числа матрицы к минимальному.

Для матрицы  $\Phi^T \Phi + 10^\alpha \mathbf{I}$  это число равно

$$R = \frac{\max(q_j) + 10^\alpha}{\min(q_j) + 10^\alpha}, \quad j = \overline{1, p}, \quad \text{где } \{q_j\}_{j=1}^p -$$

собственные числа матрицы  $\Phi^T \Phi$ .

Для вычисления нового значения параметра регуляризации сравнивается величина  $R$  с параметром алгоритма  $R_0$ , который задает пороговый уровень обусловленности. Для этого вводится понятие псевдоградиента  $\Delta_\alpha$ :

$$\Delta_\alpha = 1, \text{ если } R < R_0 \quad (4)$$

(приемлемый уровень обусловленности, уменьшаем значение  $\alpha$ );

$$\Delta_\alpha = -1, \text{ если } R > R_0 \quad (5)$$

(плохая обусловленность, увеличиваем  $\alpha$ )

$$\Delta_\alpha = 0, \text{ если } R = R_0 \quad (6)$$

(пороговый уровень обусловленности, не изменяем значение  $\alpha$ ).

Сформулируем алгоритм подбора:

1. Инициализация.

Инициализируем значение  $\alpha$  таким образом, чтобы текущий уровень обусловленности матрицы был равен пороговому уровню обусловленности  $R = R_0$ :

$$\alpha^0 = \log_{10} \left( \frac{\max(q_j) - \min(q_j) \cdot R_0}{R_0 - 1} \right)$$

Задаем начальное значение шага:  $\delta_\alpha^0 = \delta_0$ , псевдоградиента на предыдущей итерации  $\Delta_\alpha^0 = 0$  (здесь и далее верхний индекс – это номер итерации обучения)

2. Итеративное обучение ( $t = 1, 2, \dots$ )

Шаг 1. Обновляем значения параметров базисных функций  $W_{j,k}^t$ .

Шаг 2. Подсчитываем новую матрицу регрессоров  $\Phi^t$ .

Шаг 3. Подсчитываем значение коэффициентов  $\tilde{V}_j^t$ , используя полученное на предыдущей итерации значение  $\alpha^{t-1}$ :

$$\tilde{V}_j^t = (\Phi^{tT} * \Phi^t + 10^{\alpha^{t-1}} * \mathbf{I})^{-1} * \Phi^{tT} * \mathbf{Y}$$

Шаг 4. Если ошибка (2) на проверочном множестве  $\Sigma_{valid}$  выросла по сравнению с минимальной достигнутой на предыдущих итерациях обучения, то определяем, почему это произошло. Причины может быть две: к увеличению ошибки могло привести некорректное изменение параметров базисных функций  $W_{j,k}^t$  или же слишком большое значение параметра регуляризации (при его чрезмерном увеличении ошибка на проверочном множестве начинает расти). В первом случае устанавливаем  $\Delta_\alpha^t = 1$  (уменьшаем значение  $\alpha$ ). Если же причина в слишком большом значении  $\alpha$ , то итеративно уменьшая значение  $\alpha$  на величину  $\delta_0$  (параметр алгоритма), находим такое значение, для которого ошибка на проверочном множестве меньше минимальной ошибки и устанавливаем  $\Delta_\alpha^t = 0$ .

Шаг 5. Если ошибка на проверочном множестве  $\Sigma_{valid}$  уменьшилась, то устанавливаем значение псевдоградиента согласно формулам (4-6).

Шаг 6. Изменяем значение шага  $\delta_\alpha^t$  используя значение псевдоградиента на текущей  $\Delta_\alpha^t$  и предыдущей  $\Delta_\alpha^{t-1}$  итерации.

6.1. Если значение псевдоградиента изменилось, т.е.  $\Delta_\alpha^t * \Delta_\alpha^{t-1} < 0$ , то уменьшаем шаг по параметру  $\alpha$ :  $\delta_\alpha^t = \delta_\alpha^{t-1} * \eta^-$ , где  $0 < \eta^- < 1$  - параметр алгоритма.

6.2. Иначе, если значение псевдоградиента не изменилось  $\Delta_\alpha^t * \Delta_\alpha^{t-1} > 0$ , то увеличиваем шаг  $\delta_\alpha^t = \delta_\alpha^{t-1} * \eta^+$ , где  $\eta^+ > 1, \eta^+ * \eta^- < 1$  - параметр алгоритма.

6.3. Если же одно из значений псевдоградиента равно нулю, т.е.  $\Delta_\alpha^t * \Delta_\alpha^{t-1} = 0$ , значение шага не меняется  $\delta_\alpha^t = \delta_\alpha^{t-1}$ .

Шаг 7. Обновляем значение  $\alpha$ :  $\alpha^t = \alpha^{t-1} - \Delta_\alpha^t * \delta_\alpha^t$ .

Таким образом, предлагаемый алгоритм может адаптивно изменять параметр регуляризации, увеличивая его, если в матрице значений базисных функций  $\Phi$  наблюдается мультиколлинеарность, и уменьшая в противном случае.

## 7. Численные эксперименты

Проиллюстрируем эффективность предлагаемого алгоритма регуляризации с помощью сравнения результатов работы исследуемой методологии построения аппроксимации многомерной зависимости с использованием регуляризации и без нее.

Исследование проведем на двух выборках данных. Первая выборка – значения одномерной функции  $y = \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ ,  $x \in (0, 1)$ . Объем обучающей выборки  $\Sigma_{train}$  равнялся 500 точкам, объем тестовой выборки  $\Sigma_{test}$  - 100000 точек.

Вторая выборка – представляет собой аэродинамические данные, характеризующие прочность структурной единицы фюзеляжа как функцию от геометрических размеров и действующих сил:  $X \in R^8, y \in R^1$  [11]. Объем обучающей выборки составляет 3500 точек, объем тестовой выборки равен 40000 точек.

Для каждой из выборок было построено по 100 моделей аппроксимации зависимости. При построении каждой из моделей двумя способами использовались одинаковые начальные условия. Затем для каждой из аппроксимаций были подсчитаны среднеквадратичные ошибки на обучающем и тестовом множествах. После этого для 100 ошибок были подсчитаны среднее, среднеквадратичное отклонение и 95% квантиль.

Значения этих ошибок приведены в таблицах 1 и 2 для выборки искусственных и аэродинамических данных соответственно.

sin	$\Sigma_{train}$		$\Sigma_{test}$	
	m±σ	Q95	m±σ	q95
$\lambda \equiv 0$	0.50±0.01	0.5 2	0.55±0.01	0.56
$\lambda \neq 0$	0.46±0.01	0.4 9	0.48±0.01	0.52

Таблица 1. Ошибки для искусственных данных.

aero	$\Sigma_{train}$		$\Sigma_{test}$	
	M $\pm\sigma$	q95	M $\pm\sigma$	q95
$\lambda \equiv 0$	0.54 $\pm$ 0.01	0.7 1	1.94 $\pm$ 3.37	7.29
$\lambda \neq 0$	0.51 $\pm$ 0.01	0.6 1	0.63 $\pm$ 1.70	1.16

Таблица 2. Ошибки для реальных данных.

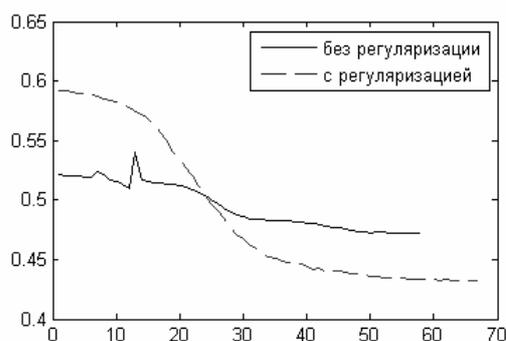


Рисунок 1. Зависимость ошибки от итерации для искусственных данных.

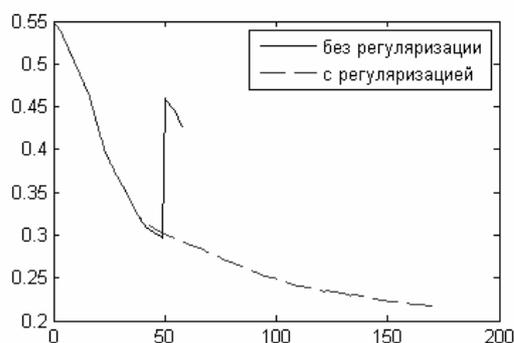


Рисунок 2. Зависимость ошибки от итерации для реальных данных.

Значительно большие ошибки на тестовом множестве для аэродинамических данных связаны с тем, что для составления тестовой выборки использовались данные, лежащие в более широком диапазоне значений, чем в обучающей выборке.

На рисунках 1 и 2 представлены типичная зависимость функции ошибки на проверочном множестве от номера итерации. Они наглядно демонстрируют принцип работы алгоритма регуляризации: увеличение ошибки при существенном значении параметра регуляризации компенсируется большим количеством итераций.

Полученные результаты подтверждают эффективность предлагаемого алгоритма адаптивной регуляризации на различных выборках данных

## 9. Список литературы

- [1] J. Sjöberg, L. Ljung, "Overtraining, regularization and searching for a minimum, with application to neural networks", *International Journal of Control*, vol. 62, №6, Taylor & Francis, London, 1995, pp. 1391-1407.
- [2] M.P. Wand, "On the optimal amount of smoothing in penalized spline regression", *Biometrika*, 86,4, Biometrika Trust, Great Britain, 1999, pp. 936-940.
- [3] H. Zou, T. Hastie, "Regularization and variable selection via the elastic net", *J.R.Statist.Soc.B*, vol. 67 (part 2), 2005, pp. 301-320.
- [4] J. Larsen, L.K. Hansen, C. Svager, M.Ohlsson, "Design and Regularization of Neural Networks: the optimal use of a validation set", *Proceedings of the IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing*, vol. 4, Piscataway, New Jersey, 1996, pp. 62-71.
- [5] J. Larsen, C. Svager, L.N. Andersen, L.K. Hansen, "Adaptive Regularization in Neural Network Modeling", *Neural Networks: Tricks of the Trade*, vol. 1524, Springer-Verlag, London, 1995, pp. 113-132.
- [6] D. Chen, M.T. Hagan, "Optimal use of regularization and cross-validation in neural network modeling", *Neural Networks*, vol. 2, Washington, DC, USA, 1999, pp. 1275-1280.
- [7] M. Riedmiller, H. Braun, "A direct adaptive method for faster backpropagation learning: The RPROP algorithm", *In Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks*, IEEE Press, 1993, pp. 586-591
- [8] Hoerl A.E., "Application of ridge analysis to regression problems", *Chemical Engineering Progress*, 1962, vol. 58, №1
- [9] Е.З. Демиденко, *Линейная и нелинейная регрессии*, Финансы и статистика, Москва, 1981.
- [10] С.А. Айвазян, И.С.Енюков, Л.Д.Мешалкин, *Исследование зависимостей*, Финансы и статистика, Москва, 1985.
- [11] E.V. Burnaev and S. Grihon, "Construction of the metamodels in support of stiffened panel optimization", *Proceedings of the conference MMR 2009 – Mathematical Methods in Reliability*, 2009, pp. 124-128.

## Динамическое управление доступом и скоростью обслуживания при активных пользователях

А. Б. Миллер

Институт Проблем Передачи Информации им. А. А. Харкевича, Москва  
amiller@iitp.ru

### Аннотация

В данной работе предложена динамическая модель управления доступом к ресурсам и скоростью обслуживания при активных пользователях. Решена задача оптимального управления с учетом стоимости обслуживания и потерь, связанных с отбрасыванием заявок при перегрузке системы обслуживания.

### 1. Введение

Динамическое управление доступом предполагает, что вероятность отклонения заявок не является фиксированной величиной, а зависит от состояния роутера (т.е. от длины очереди) и величин потоков входящих заявок. Один из подходов к решению проблемы управления доступом реализован в протоколе RED [10], в котором вероятность доступа зависит от средней длины очереди, оцениваемой по прошлым измерениям.

Данная работа обобщает результаты [6] на случай, когда изменение активности пользователей может носить сезонный характер, и в этой связи имеет смысл заранее изменять увеличивать или уменьшать скорость обслуживания с учетом затрат на обслуживание и потерь, связанных с отклонением заявок.

### 2. Модель системы массового обслуживания

Рассмотрим систему массового обслуживания, управляемую посредством ограничения входящего потока. Модель основана на результатах работ [4], [5]. Предполагаем, что поток заявок представляется собой считающий процесс со случайной величиной интенсивности  $\lambda(t) \geq 0$ , которая зависит от временных предпочтений

пользователей и текущего состояния очереди. Число заявок в системе ограничено некоторой константой  $M < \infty$ , а интенсивность обслуживания есть управляемая величина  $\mu \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ , где  $\underline{\mu} > 0$ . Управление  $u(t) \in [0, 1]$  есть вероятность принять заявку в момент времени  $t \in [0, T]$ . Таким образом, часть приходящих заявок может быть отклонена, и критерий эффективности функционирования учитывает число отклоненных заявок, среднее время нахождения в очереди для принятых заявок и стоимость обслуживания.

Пусть состояние  $M(t)$  - это число заявок в системе. Общее число состояний есть  $M + 1$ , а соответствующее пространство состояний  $S$  состоит из единичных векторов  $\{e_0, \dots, e_M\}$  вида  $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  с единицей на  $i$ - месте, в пространстве размерности  $M + 1$ .

Представление множества состояний в виде совокупности векторов  $\{e_0, \dots, e_M\}$  позволяет свести описание поведения системы к описанию в числовых терминах и с помощью стохастических дифференциальных уравнений вместо зависящих от управления переходных вероятностей [4],[5].

Модель управления может быть описана в терминах управляемой Марковской цепи с  $M + 1$  состоянием и матрицей интенсивностей переходов  $A(t, u, \mu)$ , имеющей размерность  $(M + 1) \times (M + 1)$  и представимой в виде

$$A(t, u, \mu) = \begin{pmatrix} -\lambda(t)u & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(t)u & -\mu - \lambda(t)u & \mu & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda(t)u & -\mu - \lambda(t)u & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda(t)u & -\mu \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где управление  $(u, \mu) \in [0, 1] \times [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ .

### 3. Формирование входного потока при динамическом управлении доступом и активных пользователей

Особенностью рассматриваемой модели является предположение о формировании входного потока совокупностью активных пользователей, выбирающих интенсивность генерации заявок таким образом, чтобы максимизировать собственную функцию полезности [3]. Будем использовать динамическую модель предоставления ресурсов к обслуживанию, в которой поток на входе роутера будет зависеть от текущего значения вероятности доступа  $P(t, M(t-))$ , полагая, что роутер использует управление Марковского типа и имеет информацию о функциях полезности пользователей. Для простоты будем полагать, что  $N$  пользователей используют функции полезности

$$f_i(v, t) = -\frac{a_i(t)}{v} - \lambda_0 v - vP(t, M(t-)), \quad i = 1, \dots, N$$

и в каждый момент времени имеют информацию о текущем значении  $P(t, M(t-))$ , устанавливаемом роутером. Тогда максимизируя свою функцию полезности,  $i$ -й пользователь устанавливает оптимальное значение интенсивности потока, равное

$$\begin{aligned} u_i^{opt}(t, P(t, M(t-))) &= \operatorname{argmax}_{0 < v < \infty} f_i(v, t) = \\ &= \sqrt{\frac{a_i(t)}{\lambda_0 + P(t, M(t-))}}. \end{aligned}$$

При этом общее значение интенсивности управляемого входного потока, как функция от вероятности доступа, и соответственно, состояния очереди, равно

$$\begin{aligned} \lambda(t, P) &= U(t, P) = \sum_{i=1}^N u_i^{opt}(t, P) = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{a_i(t)}}{\sqrt{\lambda_0 + P}} = \frac{C(t)}{\sqrt{\lambda_0 + P}}, \end{aligned}$$

где

$$C(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{a_i(t)},$$

величина, которая характеризует всю совокупность пользователей.

Зависимость  $C = C(t)$  позволяет учесть временную (суточную или сезонную) зависимость потребности в ресурсах.

Подставляя выражение для интенсивности входного потока в выражение для матрицы интенсивностей переходов  $A(t, u, \mu)$  (1) с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \lambda(t, P) &= \frac{C(t)}{\sqrt{\lambda_0 + P}}, \quad u = 1 - P, \\ \lambda(t)u &= \frac{C(t)(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}}, \end{aligned} \quad (2)$$

получаем следующее выражение для матрицы интенсивностей переходов  $A(t, P, \mu)$  при управлении доступом в случае активных пользователей

$$A(t, P, \mu) = \begin{pmatrix} -\frac{C(t)(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} & \mu & \dots & 0 & 0 \\ \frac{C(t)(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} & -\mu - \frac{C(t)(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C(t)(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\mu - \frac{C(t)(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} & \mu \\ 0 & 0 & \dots & \frac{C(t)(1-P)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} & -\mu \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где управление  $(P, \mu) \in [0, 1] \times [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ .

### 4. Критерии качества

Мы рассматриваем следующий критерий качества

$$\begin{aligned} J[P(\cdot), \mu(\cdot)] &= \\ &= \mathbf{E} \left\{ \phi_0(X_T) + \int_0^T f_0(s, P(s), \mu(s), X_s) ds \right\} \rightarrow \min_{P(\cdot), \mu(\cdot)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\phi_0(X) = \langle \phi_0, X \rangle, \quad f_0(s, u, \mu, X) = \langle f_0(s, P, \mu), X \rangle,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  знак скалярного произведения и

$$\phi_0 \in R^n,$$

$$f_0^*(s, P, \mu) = (f_0(s, P, \mu, e_1), \dots, f_0(s, P, \mu, e_n))$$

и каждая  $f_0(s, \cdot, \cdot, e_i)$  - функция стоимости, когда марковская цепь находится в состоянии  $e_i$  в момент времени  $s \in [0, T]$ .

*Предположение 1.* Каждая из функций  $f_0(s, \cdot, \cdot, e_i)$  непрерывна на  $[0, T] \times [0, 1] \times [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$  и ограничена снизу.

Важность терминального состояния определяется параметрами  $\phi_0 \in R^n$ , действительно

$$E(\phi_0(X_T)) = E\langle \phi_0, X_T \rangle = \sum_{i=0}^M \phi_0^i P(X_T = e_i).$$

Поэтому выбор большего значения величины  $\phi_0^i$  будет способствовать уменьшению

соответствующей вероятности, что позволяет формировать заданное терминальное распределение. Например, если мы стремимся к рассасыванию очереди, то следует выбирать коэффициенты  $\phi_0^i$  при вероятностях состояний близких к  $M$  достаточно большими, а коэффициенты при остальных вероятностях значительно меньше, или вообще нулевыми.

## 5. Динамическое программирование и оптимальное управление

Общий подход к решению задачи оптимального управления с помощью метода динамического программирования изложен в [9], [4]. Для общей модели, описываемой матрицей интенсивностей переходов  $A(t, u, \mu) \in R^n$ , где управление  $(u, \mu) \in U$ , определим функцию цены

$$V(t, X) = \inf_{u(\cdot), \mu(\cdot)} J[u(\cdot), \mu(\cdot) | X_t = X], \quad (5)$$

где

$$J[u(\cdot), \mu(\cdot) | X_t = X] = \mathbf{E} \left\{ \phi_0(X_T) + \int_t^T f_0(s, u(s), \mu(s), X_s) ds \mid X_t = X \right\}. \quad (6)$$

Согласно нашему предположению инфимум в (5) существует, и функция  $V(t, X)$  удовлетворяет следующему представлению

$$V(t, X) = \langle \phi(t), X \rangle,$$

где  $\phi(t) = (\phi^1(t), \dots, \phi^n(t))^* \in R^n$  некоторая непрерывная векторная функция и  $*$  - символ транспонирования.

Рассмотрим следующее уравнение (уравнение динамического программирования) относительно вектор-функции  $\phi(t)$

$$\langle \phi'(t), X \rangle + \min_{(u, \mu) \in U} [\langle \phi(t), A(t, u, \mu) X \rangle + \langle f_0(t, u, \mu), X \rangle] = 0, \quad (7)$$

с граничным условием

$$\phi(T) = \phi_0.$$

Так как функция

$$H(\phi, t, u, \mu, X) = \langle \phi, A(t, u, \mu) X \rangle + \langle f_0(t, u, \mu), X \rangle, \quad (8)$$

непрерывна относительно  $(t, u, \mu)$  и аффинна по  $\phi$ , то для любых  $(t, X) \in [0, T] \times S$  функция

$$\mathcal{H}(\phi, t, X) = \min_{(u, \mu) \in U} H(\phi, t, u, \mu, X)$$

Липшицева по  $\phi$ . Следующий результат следует прямо из описанных выше соображений.

*Утверждение 1.* Пусть предположение 1 выполняется. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение на  $[0, T]$ .

*Замечание.* Уравнение (7) может быть записано в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\phi^i(t)}{dt} = -\mathcal{H}(\phi(t), t, e_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

которые могут быть получены посредством подстановки  $X = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Следующий результат дает характеристику оптимального управления [4], [5].

*Теорема.* Пусть  $\phi(t)$  - решение системы (9), и существует  $(u_0(t, X), \mu_0(t, X)) \in U$  такое, что для каждой пары  $(t, X) \in [0, T] \times S$  величина с правой стороны уравнения (7) и функция  $H(\phi(t), t, u, \mu, X)$  достигают минимума в точке  $(u_0(t, X), \mu_0(t, X))$ .

Тогда существует  $(\hat{u}(t, X_0^t), \hat{\mu}(t, X_0^t))$  в классе  $\mathcal{F}_t^X$  предсказуемых управлений, являющееся оптимальным управлением и  $V(t, X) = J[\hat{u}(\cdot), \hat{\mu}(\cdot) | X_t = X]$ .

Это оптимальное управление равно

$$(\hat{u}(t, X_0^t), \hat{\mu}(t, X_0^t)) = (u_0(t, X_t), \mu_0(t, X_t)) = \underset{(u, \mu) \in U}{\operatorname{argmin}} H(\phi(t), t, u, \mu, X_t).$$

## 6. Решение задачи оптимального управления доступом и скоростью обслуживания

Общая модель управления доступом при активных пользователях описана выше в разделе 3. Рассмотрим некоторые типичные критерии качества.

Как было упомянуто выше критерий качества должен учитывать среднее время в очереди, которое может быть оценено следующим образом

$$J_1 = \mathbf{E} \left\{ \int_0^T \frac{M(s)}{\mu(s)} ds \right\} = \mathbf{E} \left\{ \int_0^T \frac{\langle \mathbf{1}, X_s \rangle}{\mu(s)} ds \right\},$$

где

$$\mathbf{1}^* = (0, 1, 2, \dots, M) \in R^{M+1},$$

а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  - скалярное произведение. Этот критерий имеет следующий смысл. Если интенсивность обслуживания постоянна и равна  $\mu$ , то при экспоненциально распределенном времени обслуживания [7] стр. 247-248, среднее время

обслуживания равно  $1/\mu$ , поэтому, если заявка поступает на вход, когда в очереди находится  $M(t)$  заявок, она будет обслужена в среднем через время  $M(t)/\mu$ . При переменном  $\mu(t)$  этот критерий качественно характеризует среднее время пребывания в очереди.

Другой критерий, который следует принимать во внимание при оптимизации, есть среднее число принятых заявок, которое может быть подсчитано при помощи следующей формулы [5]

$$J_2 = \mathbf{E}\{N_T^{a,c}\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^T u(\tau)\langle \mathbf{1}, X_\tau \rangle \lambda(\tau) d\tau\right\},$$

где

$$\mathbf{1}^* = (1, 1, \dots, 1, 0) \in R^{M+1}.$$

Этот критерий обслуживающая система стремится максимизировать. Подставляя в эту формулу выражения (2), получаем

$$J_2 = \mathbf{E}\left\{\int_0^T \frac{C(1-P(\tau))}{\sqrt{\lambda_0 + P(\tau)}} \langle \mathbf{1}, X_\tau \rangle d\tau\right\} \rightarrow \max,$$

или если рассматривать задачу минимизации то

$$J_2 = \mathbf{E}\left\{\int_0^T \frac{C(P(\tau)-1)}{\sqrt{\lambda_0 + P(\tau)}} \langle \mathbf{1}, X_\tau \rangle d\tau\right\} \rightarrow \min.$$

И, наконец, стоимость обслуживания, которая предполагается линейно зависящей от скорости обслуживания,

$$J_3 = \int_0^T \mu(\tau) \langle \mathbf{1}, X_\tau \rangle d\tau,$$

где

$$\mathbf{1}^* = (0, 1, \dots, 1) \in R^{N+1}.$$

Мы будем рассматривать взвешенную сумму критериев

$$J = k_1 J_1 + k_2 J_2 + k_3 J_3 \rightarrow \min, \quad k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0,$$

так как если хотя бы один из коэффициентов равен 0, то решение задачи тривиально. Выбор соотношения между  $k_1, k_2, k_3$  позволяет решать задачи оптимального управления с ограничениями, то есть, когда одни из критериев минимизируется при ограничении, наложенном сверху на другие критерии, или даже в случае, когда таких критериев много. Общий подход к решению задач оптимизации Марковских цепей при ограничениях изложен в работе [12]

Функция полезности равна

$$f_0(t, u, \mu, X) = k_1 \frac{\langle \mathbf{1}, X \rangle}{\mu} + k_2 \frac{C(t)(P-1)}{\sqrt{\lambda_0 + P}} \langle \mathbf{1}, X \rangle + k_3 \mu \langle \mathbf{1}, X \rangle.$$

Т.к.  $1-P=u$ , то функцию полезности можно представить в следующем виде

$$f_0(t, u, \mu, X) = k_1 \frac{\langle \mathbf{1}, X \rangle}{\mu} + k_3 \mu \langle \mathbf{1}, X \rangle - k_2 \frac{c(t)u}{\sqrt{\lambda_0 + 1 - u}} \langle \mathbf{1}, X \rangle.$$

Отсюда видно, что первые два слагаемых зависят только от  $\mu$ , а третье слагаемое зависит от  $u$ , поэтому

$$\mathcal{H}(\phi, t, X) = \min_{\mu} H_0(\phi, t, \mu, X) + \min_u H_1(\phi, t, u, X),$$

где

$$H_0(\phi, t, \mu, X) = \mu \langle \phi, A^- e_i \rangle + k_1 \frac{\mathbf{1}_i}{\mu} + k_3 \mu \mathbf{1}_i,$$

$$H_1(\phi, t, u, X) = \mathcal{H}^0(\phi, t, i) \frac{u}{\sqrt{\lambda_0 + 1 - u}} \mathbf{1}_i$$

Оптимальное управление  $\mu(t, e_i)$  выглядит следующим образом

$$\mu(t, e_i) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{b}}, & \text{если } \sqrt{\frac{a}{b}} \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}], b > 0 \\ \underline{\mu}, & \text{если } \sqrt{\frac{a}{b}} < \underline{\mu}, b > 0 \\ \bar{\mu}, & \text{если } \sqrt{\frac{a}{b}} > \bar{\mu}, b > 0 \\ \bar{\mu}, & \text{если } b \leq 0 \end{cases},$$

где  $a(t, e_i) = k_1 \mathbf{1}_i \geq 0$ ,  $b(t, e_i) = \langle \phi(t), A^- e_i \rangle + k_3 \mathbf{1}_i$

Для нахождения оптимального управления  $u(t)$  выпишем выражение для  $H_1(\phi, t, u, e_i)$  (8).

$$H_1(\phi, t, u, e_i) = \mathcal{H}^0(\phi, t, i) \frac{u}{\sqrt{\lambda_0 + 1 - u}} \mathbf{1}_i$$

Нам нужно найти функцию

$$\mathcal{H}(\phi, t, e_i) = \min_{0 \leq u \leq 1} H_1(\phi, t, u, e_i)$$

Значение  $u(\phi, t, e_i)$ , при котором достигается минимум, и есть оптимальное управление доступом с обратной связью.

Обозначим

$$A = \mathcal{H}^0(\phi, t, i) = -\phi^i C(t) + \phi^{i+1} C(t) - k_2 C(t)$$

$$x \in [0, 1].$$

Тогда минимизируемая функция принимает следующий вид

$$f(x) = \frac{Ax}{\sqrt{1-x+\lambda_0}},$$

а ее производная равна

$$f'(x) = \frac{A(1-x/2+\lambda_0)}{(1-x+\lambda_0)^{3/2}}.$$

Заметим, что на отрезке  $[0, 1]$  производная не меняет знак, так как выражение

$$1-x/2+\lambda_0 > 0,$$

поэтому минимум достигается только в крайних точках отрезка  $[0, 1]$ . Таким образом

$$x_{min} = \begin{cases} 1, & \text{если } A \leq 0, \\ 0, & \text{если } A > 0. \end{cases}$$

Оптимальное управление равно

$$u_{opt}(\phi, e_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{H}^0(\phi, t, i) \leq 0, \\ 0, & \text{если } \mathcal{H}^0(\phi, t, i) > 0. \end{cases}$$

## 7. Результаты численного моделирования

Для нахождения оптимального управления  $u(t)$  разработана программа моделирования на Maple 12. Для проведения моделирования задаются следующие параметры и терминальные условия:

- $\underline{\mu}, \bar{\mu}$  - нижний и верхний пороги скорости обслуживания
- $c = c(t)$  - переменное значение величины  $\sum_{i=1}^N \sqrt{a_i(t)}$  учитывает изменение предпочтений пользователей в зависимости от времени
- $k_1, k_2, k_3$  - коэффициенты весов интегральных критериев  $J_1, J_2, J_3$
- $M = 5$   
В нашем случае
- $\underline{\mu} = 3, \bar{\mu} = 6$
- $c = 2 + 1.5 \cos(2(2-t))$
- $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1.5$

Средняя вероятность отклонения заявок в зависимости от состояния буфера имеет следующий вид Рис. 1

Далее на рисунках Рис. 2,3,4 показаны зависимости входного потока заявок, интенсивности обслуживания и вероятности отклонения заявок на интервале времени  $[0, 10]$  для состояний системы с 1-4 заявками в буфере

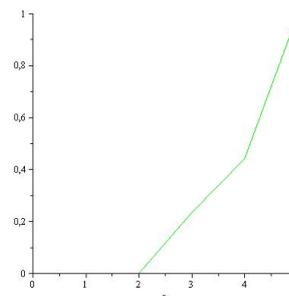


Рис. 1. Средняя вероятность отклонения заявок для пяти состояний системы, где  $x$  - номер состояния

## 8. Выводы и заключение

1. В работе исследована стохастическая модель управления потоками в Интернет, основанная на использовании теории управляемых Марковских цепей. Она учитывает активное поведение пользователей и позволяет получить оптимальное управление доступом и скоростью обслуживания, с учетом естественных критериев, характеризующих функционирование роутера - провайдера.
2. Модель основана на методах теории активных систем и учитывает функции полезности пользователей и различные критерии качества, характеризующие функционирование системы пользователи - роутер при нестационарных внешних условиях.
3. Данная модель может служить основой для анализа более сложных систем, связанных не только с управлением потоками данных, но и с функционированием иерархических систем, возникающих в ситуации клиенты - система обслуживания (склады, снабжение ограниченными ресурсами).

## Список литературы

- [1] Васенин В. А., Симонова Г.А. Математические модели управления трафиком в Интернете. Новые подходы, основанные на ТСП/AQM механизмах. Автоматика и телемеханика, п 8, 2005, стр. 94-107.
- [2] Вегешна Ш. Качество обслуживания в сетях IP // Cisco Press, 2003, Глава 6. РНВ-политика: предотвращение перегрузки и политика отбрасывания пакетов

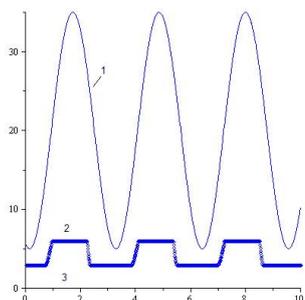


Рис. 2. Состояние с одной заявкой в буфере, (1) - входной поток, (2) - интенсивность обслуживания, (3) - вероятность отклонения заявок

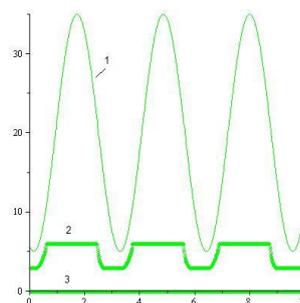


Рис. 3. Состояние с двумя заявками в буфере, (1) - входной поток, (2) - интенсивность обслуживания, (3) - вероятность отклонения заявок

- [3] Бурков В. *Основы математической теории активных систем*. М.: Наука, 1977.
- [4] R.J. Elliott, L. Aggoun and J.B. Moore. *Hidden Markov Models. Estimation and Control*. Springer Verlag, New York, 1995.
- [5] B. Miller, Optimization of queuing systems via stochastic control. *Automatica*, 2009, in press.
- [6] Миллер А. Б., Динамическое управление доступом при активных пользователях, *Информационные процессы*, т. 9, п 1, 2009.
- [7] Миллер Б.М., Панков А.Р. *Теория случайных процессов*. Наука, Физматлит, 2007.
- [8] P. Bremaud. Optimal thinning of a point processes. *SIAM J. Control and Optimization*, v. 17, n 2, 1979, pp. 222–230.
- [9] M.H.A. Davis. *Markov Models and Optimization*. London: Chapman & Hall, 1993.
- [10] Low S.H., Paganini F., Doyle J.C. Internet Congestion Control // *IEEE Control Systems Magazine*, February 2002, p.28-43
- [11] S. Floyd and V. Jacobson, Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance, *IEEE/ACM TRANSACTIONS ON NETWORKING*, vol. 1, no. 4, pp. 393-413, Aug. 1993.
- [12] B. Miller, G. Miller, and K. Siemenikhin, Control of Markov chains with constraints, Труды VIII Международной конференции “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’09, Москва, 26-30 января 2009 г., стр. 737-760.

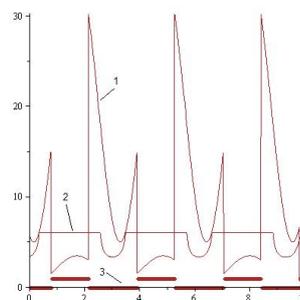


Рис. 4. Состояние с тремя заявками в буфере, (1) - входной поток, (2) - интенсивность обслуживания, (3) - вероятность отклонения заявок

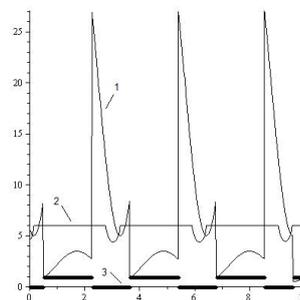


Рис. 5. Состояние с четырьмя заявками в буфере, (1) - входной поток, (2) - интенсивность обслуживания, (3) - вероятность отклонения заявок

# Приводимые семейства Шлезингера и решения систем Гарнье

Р. Р. Гонцов  
ИППИ РАН  
rgontsov@inbox.ru

## Аннотация

Изучаются подвижные особенности отдельных решений системы Гарнье, соответствующих семействам Шлезингера с приводимой монодромией.

## 1. Введение

Напомним сначала, что шестое уравнение Пенлеве  $P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , зависящее от четырех постоянных  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$ , – наиболее общее ОДУ второго порядка вида

$$u'' = R(t, u, u')$$

(где  $R$  – рациональная функция с полюсами  $0, 1, \infty$  по переменной  $t$ ) относительно комплексной функции  $u(t)$ , удовлетворяющее свойству Пенлеве: его подвижными особенностями (которые зависят от начальных данных) могут быть только полюсы.

Другими словами, всякое локальное решение уравнения, определенное в окрестности точки  $t_0 \neq 0, 1, \infty$ , может быть продолжено до мероморфной функции на универсальном накрытии пространства  $\mathbf{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ .

Уравнение  $P_{VI}$  связано с линейным ОДУ второго порядка

$$y'' + b_1(z)y' + b_2(z)y = 0 \quad (1)$$

с четырьмя (фуксовыми) особыми точками  $t, 0, 1, \infty$  следующим образом: если немного изменить положение особой точки  $z = t$  так, чтобы монодромия уравнения сохранялась, то положение необходимо возникающей при этом *дополнительной*<sup>1</sup> (пятой) особенности  $w(t)$  будет меняться, удовлетворяя уравнению  $P_{VI}$  (что впервые было обнаружено Р. Фуксом [1]).

Имеется следующее утверждение о подвижных полюсах уравнения  $P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ . В

<sup>1</sup>Так называют особые точки, в которых коэффициенты уравнения имеют полюсы, но решения являются однозначными мероморфными функциями.

случае  $\alpha \neq 0$  они могут быть только простыми, а в случае  $\alpha = 0$  – не более второго порядка (см., например, [2], Гл. VI, §6).

Обобщая подход Р. Фукса на случай уравнения (1) с  $n + 3$  особыми точками  $a_1, \dots, a_n, 0, 1, \infty$ , Р. Гарнье [3] получил систему  $\mathcal{G}_n(\theta)$ , зависящую от  $n + 3$  комплексных параметров  $\theta_1, \dots, \theta_{n+2}, \theta_\infty$ . Это – вполне интегрируемая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Впоследствии она была записана К. Окамото [4] в эквивалентной гамильтоновой форме

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{\partial H_j}{\partial v_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial a_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial u_i}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

с гамильтонианами  $H_j = H_j(a, u, v, \theta)$ , рационально зависящими от  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n+2}, \theta_\infty)$ . Здесь  $u_1(a), \dots, u_n(a)$  – дополнительные особенности семейства уравнений вида (1), зависящего от положения особых точек  $a_1, \dots, a_n$  так, что уравнения этого семейства имеют одинаковую монодромию.

В случае  $n = 1$  система Гарнье  $\mathcal{G}_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_\infty)$  представляет собой эквивалентную (гамильтонову) форму уравнения  $P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , где

$$\alpha = \frac{1}{2}\theta_\infty^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}\theta_3^2, \quad \delta = \frac{1}{2}(1 - \theta_1^2).$$

При  $n > 1$  система Гарнье, вообще говоря, не удовлетворяет свойству Пенлеве. Однако, согласно теореме Гарнье, элементарные симметрические многочлены  $\sigma_i(u_1(a), \dots, u_n(a))$  от локальных решений системы Гарнье продолжаются до мероморфных функций  $F_i(a)$  на универсальном накрытии  $Z$  пространства  $(\mathbf{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ . Предлагаемое нами дополнение к этой теореме состоит в оценке порядков неприводимых компонент полярных множеств функций  $F_i$  (теорема 3, предложение 2).

## 2. Изомонодромные деформации Шлезингера и системы Гарнье

Рассмотрим двумерное *изомонодромное семейство Шлезингера*<sup>2</sup>

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^{n+2} \frac{B_i(a)}{z-a_i} \right) y, \quad B_i(a^0) = B_i^0 \in sl(2, \mathbf{C}), \quad (3)$$

фуксовых систем с особыми точками  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = 0, a_{n+2} = 1, a_{n+3} = \infty$ , голоморфно зависящее от параметра  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D(a^0)$ , где  $D(a^0)$  – диск малого радиуса с центром в точке  $a^0$  пространства  $(\mathbf{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ . Так называется семейство, матрицы-вычеты  $B_i(a)$  которого удовлетворяют *уравнению Шлезингера* [5]

$$dB_i(a) = - \sum_{j=1, j \neq i}^{n+2} \frac{[B_i(a), B_j(a)]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \quad i = 1, \dots, n+2.$$

Это уравнение имеет единственное решение  $\{B_1(a), \dots, B_{n+2}(a)\}$  в диске  $D(a^0)$ , удовлетворяющее начальным условиям. Согласно теореме Мальгранжа [6], матричные функции

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} b_i^{11}(a) & b_i^{12}(a) \\ b_i^{21}(a) & b_i^{22}(a) \end{pmatrix}$$

могут быть продолжены на универсальное накрытие  $Z$  пространства  $(\mathbf{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$  как мероморфные функции (голоморфные вне аналитического подмножества  $\Theta$  коразмерности один).

Для полярного множества  $\Theta \subset Z$  матричных функций  $B_i(a)$  и точки  $a^* \in \Theta$  обозначим через  $\Sigma_{a^*}(B_i)$  сумму порядков всех неприводимых компонент множества  $\Theta \cap D(a^*)$ . Имеет место следующая теорема Болибруха [7] (см. также [8]) о подвижных особенностях уравнения Шлезингера.

**Теорема 1.** *Если монодромия двумерного изомонодромного семейства Шлезингера (3) неприводима, то  $\Sigma_{a^*}(B_i) \geq -n-1$  ( $i = 1, \dots, n+2$ ) для произвольной точки  $a^*$  полярного множества  $\Theta$ .*

Обозначим через  $\pm\beta_i$  собственные значения матриц  $B_i(a)$  соответственно. Напомним, что изомонодромная деформация сохраняет эти собственные значения (см. [9], лекция 15). Из уравнения Шлезингера следует, что вычет в бесконечности является постоянной матрицей. Предположим, что эта матрица диагонализирована, т. е.  $\sum_{i=1}^{n+2} B_i(a) = -B_\infty = \text{diag}(-\beta_\infty, \beta_\infty)$ .

<sup>2</sup>Изомонодромность означает, что все системы данного семейства имеют одинаковую монодромию.

Поскольку верхний правый элемент  $-\sum_{i=1}^{n+2} b_i^{12}(a)$  матрицы  $B_\infty$  равен нулю, функция

$$P_n(z, a) = (z - a_1) \dots (z - a_{n+2}) \sum_{i=1}^{n+2} \frac{b_i^{12}(a)}{z - a_i} \quad (4)$$

при каждом фиксированном  $a$  является многочленом степени  $n$  по  $z$ . Обозначим через  $u_1(a), \dots, u_n(a)$  корни этого многочлена и определим функции  $v_1(a), \dots, v_n(a)$ :

$$v_j(a) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{b_i^{11}(a) + \beta_i}{u_j(a) - a_i}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда имеет место следующее утверждение (см. доказательство предложения 3.1 из [4]).

**Теорема 2.** *Пара  $(u(a), v(a)) = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$  удовлетворяет системе Гарнье (2) с параметрами  $2\beta_1, \dots, 2\beta_{n+2}, 2\beta_\infty - 1$ .*

Существует и обратный переход – от решения системы Гарнье к двумерному изомонодромному семейству Шлезингера (3) (см. [4], предл. 3.2). Таким образом, теорема Гарнье о продолжении элементарных симметрических многочленов  $F_i(a) = \sigma_i(u_1(a), \dots, u_n(a))$  от решения системы  $\mathcal{G}_n(\theta)$  на пространство  $Z$  как мероморфных функций, является следствием теоремы Мальгранжа ( $F_i$  выражаются рационально через коэффициенты многочлена  $P_n(z, a)$ , а те, в свою очередь, – через элементы  $b_i^{12}(a)$  матриц  $B_i(a)$ ). Следствием же теоремы 1 является следующее утверждение (см. [10]).

**Теорема 3.** *Пусть  $(u(a), v(a))$  – решение системы Гарнье (2), которому соответствует семейство Шлезингера с неприводимой монодромией. Обозначим через  $\Delta_i$  полярное множество функции  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда*

а) *если  $\theta_\infty = 0$  и  $u_i(a) \neq u_j(a)$  при  $i \neq j$ , то  $\Sigma_{a^*}(F_i) \geq -n-1$  для всех  $a^* \in \Delta_i$ ;*

б) *если  $\theta_\infty \neq 0$ , то  $\Sigma_{a^*}(F_i) \geq -n$  для всех  $a^* \in \Delta_i$ , за исключением, быть может, некоторого подмножества  $\Delta^0 \subset \Delta_i$  положительной коразмерности.*

*Линейной монодромией* решения системы Гарнье назовем монодромию соответствующего этому решению семейства Шлезингера (3). М. Мацко [11] показала, что решения систем Гарнье, линейная монодромия которых *приводима*, являются классическими функциями (по каждой переменной, в смысле [12]) и могут быть выражены через решения гипергеометрических уравнений Лауричеллы. Более подробному обсуждению этого случая посвящены следующие два параграфа.

### 3. Системы Гарнье и гипергеометрические уравнения Лауричеллы

Рассмотрим гипергеометрическое уравнение Лауричеллы  $E_D(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma)$ , зависящее от  $n+2$  комплексных параметров  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma$ .

Это система линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для комплексной функции  $u(a_1, \dots, a_n)$ , определенная на пространстве  $B = (\mathbf{C} \setminus \{0, 1\})^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ . Ее явный вид указан в [13] (стр. 247-249), нам же понадобится тот факт, что вектор-функция  $y(a) = (u, a_1 \frac{\partial u}{\partial a_1}, \dots, a_n \frac{\partial u}{\partial a_n})^\top$  переменной  $a = (a_1, \dots, a_n) \in B$  удовлетворяет вполне интегрируемой линейной пфаффовоу системе

$$dy = \omega y, \quad y(a) \in \mathbf{C}^{n+1}, \quad (5)$$

где  $\omega$  – некоторая матричная дифференциальная 1-форма, голоморфная на  $B$  ([13], доказательство предл. 9.1.4, стр. 249). Следовательно, множество решений гипергеометрического уравнения Лауричеллы около каждой точки  $a \in B$  образует  $(n+1)$ -мерное векторное пространство, и решения продолжаются голоморфно на универсальное накрытие  $Z$  пространства  $B$ .

Как отмечалось, при  $n > 1$  система Гарнье (2), вообще говоря, не удовлетворяет свойству Пенлеве (координаты  $u_1, \dots, u_n$  ее решения определяются как корни многочлена степени  $n$ ), однако может быть преобразована при помощи некоторого (симплектического) преобразования  $(a, u, v, H) \mapsto (s, q, p, \tilde{H})$ ,  $\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - \tilde{H}_i ds_i) = \sum_{i=1}^n (v_i du_i - H_i da_i)$ , в гамильтонову систему  $\mathcal{H}_n(\theta)$

$$\frac{\partial q_j}{\partial s_i} = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial s_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющую свойству Пенлеве (см. [13], Гл. III, §7). Напомним это преобразование, определив функции

$$M_i(a, u) = -\frac{(a_i - u_1) \dots (a_i - u_n)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} (a_i - a_j)},$$

$$M^{k,i}(a, u) = \frac{u_k(u_k - 1)(u_k - a_1) \dots (u_k - a_n)}{(u_k - a_i) \prod_{j=1, j \neq k}^n (u_k - u_j)},$$

$$i, k = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Тогда преобразование  $(a, u, v) \mapsto (s, q, p)$  задается формулами

$$s_i = \frac{a_i}{a_i - 1}, \quad q_i = -a_i M_i,$$

$$p_i = (1 - a_i) \sum_{k=1}^n \frac{M^{k,i} v_k}{u_k(u_k - 1)},$$

$$i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

причем

$$v_i = \sum_{k=1}^n \frac{q_k p_k}{u_i - a_k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

в то время как новые гамильтонианы

$$\tilde{H}_i = -(1 - a_i)^2 \left( H_i + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial q_j}{\partial a_i} \right) =$$

$$= \frac{1}{s_i(s_i - 1)} \left( \sum_{j,k=1}^n E_{jk}^i(s, q) p_j p_k - \sum_{j=1}^n F_j^i(s, q) p_j + \kappa q_i \right)$$

являются многочленами по переменным  $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . Здесь  $E_{jk}^i(s, q)$ ,  $F_j^i(s, q)$  – полиномы третьей и второй степеней по  $q$  соответственно, и  $\kappa = \frac{1}{4} ((\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1)^2 - \theta_\infty^2)$ .

Если  $\kappa = 0$  (т. е.,  $\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1 = \pm \theta_\infty$ ), то система  $\mathcal{H}_n(\theta)$  имеет решения вида  $(q, 0)$ , где  $q$  – решение системы

$$s_i(s_i - 1) \frac{\partial q_j}{\partial s_i} = -F_j^i(s, q), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Поскольку правая часть последней системы состоит из многочленов второй степени по  $q$ , ее можно рассматривать как обобщение классического уравнения Риккати на случай многих переменных. Аналогично классическому случаю, система (9) может быть линеаризована подходящей заменой неизвестной. А именно, согласно [13] (теор. 9.2.1, стр. 252), решение  $(q_1, \dots, q_n)$  системы (9) представляется в виде

$$q_i(s) = \frac{s_i(s_i - 1)}{\sum_{j=1}^{n+2} \theta_j - 1} \left( \frac{\theta_i}{s_i - 1} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial s_i} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $f(s)$  – произвольное решение гипергеометрического уравнения Лауричеллы  $E_D(1 - \theta_{n+2}, \theta_1, \dots, \theta_n, \sum_{j=1}^{n+1} \theta_j)$ . Заметим, что  $\sum_{j=1}^{n+2} \theta_j - 1 \neq 0$ , если  $\theta_\infty \neq 0$ .

Функция  $f$  неприводима в своих нулях<sup>3</sup>, поэтому всякое решение  $(q_1, \dots, q_n)$  системы (9), так же как и линейная комбинация  $Q$  координат  $q_i$  (с голоморфными коэффициентами), мероморфно на  $Z$ , при этом полярное множество функции  $Q$  является аналитическим подмножеством порядка  $-1$  (поскольку функция  $fQ$  голоморфна на  $Z$ ).

Теперь рассмотрим решение  $(u, 0)$  системы Гарнье (2), соответствующее решению  $(q, 0)$  системы  $\mathcal{H}_n(\theta)$ , с  $\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1 = \pm \theta_\infty$  (заметим, что  $v = 0 \iff p = 0$ , ввиду (7) и (8)). Элементарные симметрические многочлены  $F_i(a) = \sigma_i(u_1(a), \dots, u_n(a))$  суть линейные комбинации (с

<sup>3</sup>Если  $f(s^*) = 0$  и  $\frac{\partial f}{\partial s_1}(s^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial s_n}(s^*) = 0$ , то  $f \equiv 0$  вследствие единственности решения системы (5).

голоморфными коэффициентами) функций  $q_i$ . Действительно, пусть

$$Q_i(a) := \prod_{j=1, j \neq i}^{n+2} (a_i - a_j), \quad i = 1, \dots, n+2.$$

Тогда, как следует из формул (6) и (7),

$$a_i^n - F_1(a)a_i^{n-1} + \dots + (-1)^n F_n(a) = \frac{Q_i(a)}{a_i} q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, вектор  $(-F_1, \dots, (-1)^n F_n)$  является решением системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов, определитель которой – определитель Вандермонда.

Все вышеизложенные рассуждения приводят к следующему утверждению.

**Предложение 1.** Пусть  $(u(a), 0)$  – решение системы Гарнье (2), где  $\sum_{i=1}^{n+2} \theta_i - 1 = \pm \theta_\infty \neq 0$ . Тогда полярные множества функций  $F_i$  суть аналитические подмногообразия порядка  $-1$ .

Данное предложение поможет нам в исследовании отдельных решений систем Гарнье, линейная монодромия которых приводима.

#### 4. Решения систем Гарнье, имеющие приводимую линейную монодромию

Рассмотрим решение  $(u(a), v(a))$  системы  $\mathcal{G}_n(\theta)$ , которому соответствует изомодромное семейство Шлезингера (3) с приводимой монодромией. Собственные значения матриц-вычетов  $B_i(a)$  данного семейства суть  $\pm \theta_i/2$  соответственно,  $i = 1, \dots, n+2$ , и  $B_\infty = -\sum_{i=1}^{n+2} B_i(a) = \frac{1}{2} \text{diag}(\theta_\infty + 1, -\theta_\infty - 1)$  – вычет в бесконечности. Из приводимости монодромии следует, что произведение собственных значений  $e^{\pi i \varepsilon_1 \theta_1}, \dots, e^{\pi i \varepsilon_{n+2} \theta_{n+2}}, e^{\pi i \varepsilon_\infty (\theta_\infty + 1)}$  матриц монодромии  $G_1, \dots, G_{n+2}, G_\infty$  соответственно равно единице (при некотором выборе чисел  $\varepsilon_k \in \{1, -1\}$ ), т. е.

$$\varepsilon_1 \theta_1 + \dots + \varepsilon_{n+2} \theta_{n+2} + \varepsilon_\infty (\theta_\infty + 1) \in 2\mathbf{Z}. \quad (10)$$

**Лемма 2.** Если сумма (10) равна нулю, то все матрицы  $B_i(a)$  верхнетреугольны.

**Доказательство.** Условие леммы означает, что при  $a = a^0$  (как и при любом  $a \in D(a^0)$ ) соответствующая фуксова система (3) задает связность в голоморфно тривиальном векторном расслоении  $E_0$  ранга 2 над  $\overline{\mathbf{C}}$ , имеющем линейное подрасслоение  $E'_0$  нулевой степени (которое, следовательно, также голоморфно тривиально), стабилизирующееся связностью.

Рассмотрим фундаментальную матрицу  $Y(z)$  системы, по столбцам которой записаны координаты горизонтальных сечений  $h_1, h_2$  связности таких, что  $h_1$  – сечение подрасслоения  $E'_0$ . (Координаты, о которых идет речь, соответствуют базису  $(s_1, s_2)$  глобальных голоморфных сечений расслоения  $E_0$ ; в этом базисе матричная дифференциальная 1-форма связности совпадает с 1-формой коэффициентов системы.) Тогда координаты этих же сечений в базисе  $(s'_1, s'_2) = (s_1, s_2)C^{-1}$  таком, что  $s'_1$  – сечение подрасслоения  $E'_0$ , образуют фундаментальную матрицу  $Y'(z) = CY(z)$  верхнетреугольного вида. Следовательно, все матрицы-вычеты  $B'_i = CB_i C^{-1}$  соответствующей фуксовой системы верхнетреугольны.

Покажем теперь, что из верхнетреугольности всех матриц  $\tilde{B}_i(a) = B_i(a)C^{-1}$  при  $a = a^0$  следует их верхнетреугольность при любом значении параметра  $a$ .

Набор  $\{\tilde{B}_1(a), \dots, \tilde{B}_{n+2}(a)\}$  также является решением уравнения Шлезингера, и все матрицы  $\tilde{B}_i(a^0)$  верхнетреугольны, т. е. нижние левые элементы  $\tilde{b}_i^{21}(a)$  всех матриц  $\tilde{B}_i(a)$  обращаются в нуль при  $a = a^0$ . В силу уравнения Шлезингера имеем

$$d\tilde{b}_i^{21} = 2 \sum_{j=1, j \neq i}^{n+2} \frac{\tilde{b}_i^{11} \tilde{b}_j^{21} - \tilde{b}_j^{11} \tilde{b}_i^{21}}{a_i - a_j} d(a_i - a_j)$$

(напомним, что следы всех матриц  $\tilde{B}_i(a)$  нулевые), следовательно, частные производные функций  $\tilde{b}_i^{21}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{b}_i^{21}}{\partial a_i} &= \alpha_i \tilde{b}_i^{21} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n+2} \alpha_{ij} \tilde{b}_j^{21}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial \tilde{b}_i^{21}}{\partial a_j} &= -\alpha_{ij} \tilde{b}_j^{21} + \beta_{ij} \tilde{b}_i^{21}, \quad i = 1, \dots, n+2, \\ & \quad j = 1, \dots, n, j \neq i, \end{aligned}$$

где  $\alpha_i, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$  – голоморфные в  $D(a^0)$  функции. Таким образом, частные производные любого порядка  $m$  каждой функции  $\tilde{b}_i^{21}$  выражаются линейно (с голоморфными коэффициентами) через производные младших порядков функций  $\tilde{b}_1^{21}, \dots, \tilde{b}_{n+2}^{21}$ . А поскольку  $\tilde{b}_1^{21}(a^0) = \dots = \tilde{b}_{n+2}^{21}(a^0) = 0$ , то и частные производные любого порядка всех функций  $\tilde{b}_i^{21}$  обращаются в нуль при  $a = a^0$ . Следовательно, эти функции тождественно равны нулю.

Итак, существует матрица  $C = (c_{ij}) \in \text{GL}(2, \mathbf{C})$  такая, что

$$C \begin{pmatrix} b_i^{11}(a) & b_i^{12}(a) \\ b_i^{21}(a) & b_i^{22}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i & \tilde{b}_i^{12}(a) \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_i \theta_i \end{pmatrix} C, \quad i = 1, \dots, n+2, \quad (11)$$

$$C \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\theta_\infty + 1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\theta_\infty + 1) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon_\infty(\theta_\infty + 1) & * \\ 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_\infty(\theta_\infty + 1) \end{pmatrix} C. \quad (12)$$

Если  $\varepsilon_\infty = 1$ , то из соотношения (12) следует (сравнение левых нижних элементов), что  $c_{21} = 0$ , т. е. матрица  $C$  верхнетреугольна. Следовательно, верхнетреугольны и все матрицы  $B_i(a) = C^{-1}\tilde{B}_i(a)C$ .

Если  $\varepsilon_\infty = -1$ , то из соотношения (12) следует (сравнение правых нижних элементов), что  $c_{22} = 0$ . Но тогда, в силу (11) (сравнение правых нижних элементов), все  $b_i^{12}(a)$  равны нулю, т. е. все матрицы  $B_i(a)$  нижнетреугольны. Это противоречит тому, что исходное семейство (3) построено по решению системы Гарнье и функция  $(z - a_1) \dots (z - a_{n+2}) \sum_{i=1}^{n+2} \frac{b_i^{12}(a)}{z - a_i}$  является многочленом степени  $n$  по  $z$  (см. (4)).

Следствием предложения 1 и леммы 2 является следующее утверждение.

**Предложение 2.** Если  $(u(a), v(a))$  – решение системы Гарнье (2), линейная монодромия которого приводима, и сумма  $\varepsilon_1\theta_1 + \dots + \varepsilon_{n+2}\theta_{n+2} + (\theta_\infty + 1)$  равна нулю (при некотором выборе чисел  $\varepsilon_k \in \{1, -1\}$ ),  $\theta_\infty \neq 0$ , то полярные множества функций  $F_i = \sigma_i(u_1, \dots, u_n)$  суть аналитические подмногообразия порядка  $-1$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 2 матрицы-вычеты  $B_i(a)$  изомодромного семейства Шлезингера (3), соответствующего решению  $(u(a), v(a))$ , имеют вид

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\varepsilon_i\theta_i & b_i^{12}(a) \\ 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_i\theta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n+2, \\ B_\infty = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\theta_\infty + 1) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\theta_\infty + 1) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу теоремы 2, пара  $(u(a), 0)$  является решением системы Гарнье  $\mathcal{G}_n(\tilde{\theta})$  с параметрами

$$(\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_{n+2}, \tilde{\theta}_\infty) = (-\varepsilon_1\theta_1, \dots, -\varepsilon_{n+2}\theta_{n+2}, \theta_\infty),$$

удовлетворяющими соотношению из предложения 1:

$$\sum_{i=1}^{n+2} \tilde{\theta}_i - 1 = -\sum_{i=1}^{n+2} \varepsilon_i\theta_i - 1 = (\theta_\infty + 1) - 1 = \tilde{\theta}_\infty.$$

Таким образом, к функциям  $F_i = \sigma_i(u_1, \dots, u_n)$  применимо предложение 1.

## Список литературы

- [1] R. Fuchs, Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1905, **141**, 555–558.
- [2] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич, Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское, 1990.
- [3] R. Garnier, Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 1912, **29**, 1–126.
- [4] K. Okamoto, Isomonodromic deformation and Painlevé equations and the Garnier system, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, Math.*, 1986, **33**, 575–618.
- [5] L. Schlesinger, Über Lösungen gewisser Differentialgleichungen als Funktionen der singulären Punkte, *J. Reine Angew. Math.*, 1905, **129**, 287–294.
- [6] B. Malgrange, Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières, *Progr. Math.*, 1983, **37**, 401–426.
- [7] А. А. Болибрух, Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений. В кн.: Математические события XX века. М.: Фазис, 2003, 53–79.
- [8] R. R. Gontsov, I. V. Vyugin, Apparent singularities of Fuchsian equations, and the Painlevé VI equation and Garnier systems, *arXiv:0905.1436[math.CA]*, 2009.
- [9] А. А. Болибрух, Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009.
- [10] R. R. Gontsov, On movable singularities of Garnier systems, *arXiv:0905.1436[math.CA]*, 2009.
- [11] M. Mazzocco, The geometry of the classical solutions of the Garnier systems, *I.R.M.N.*, 2002, **12**, 613–646.
- [12] H. Umemura, Birational automorphism groups and differential equations, *Nagoya Math. J.*, 1990, **119**, 1–80.
- [13] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, From Gauss to Painlevé. *Aspects Math.*, **E 16**, Braunschweig: Vieweg, 1991.

## Изомонодромные слияния фуксовых особенностей и особенности уравнения Шлезингера\*

И. В. Вьюгин

Институт проблем передачи информации РАН

vuyugin@gmail.com

### Аннотация

*Исследуются изомонодромные слияния особенностей фуксовых систем. Показано, что в результате слияния почти всегда получаются фуксовые особые точки. В остальных случаях существует оценка порядка полюса коэффициентов в регулярной особой точке. С помощью техники слияний показано, что решения уравнений Шлезингера и Пенлеве в представляются в окрестности особой точки в виде сходящихся степенных рядов с нецелыми степенями и степенно-логарифмических рядов.*

### 1. Введение

Рассмотрим фуксову систему следующего вида

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B_i^0}{z - a_i^0} \right) y, \quad B_i^0 \in \text{Mat}_{p \times p}(\mathbb{C}), \quad y(z) \in \mathbb{C}^p. \quad (1)$$

Семейство таких систем

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y \quad (2)$$

с матрицами коэффициентов  $B_i(a)$ , непрерывно зависящими от параметра  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , и имеющее одно и то же представление монодромии  $\mathcal{M}$ , называется **изомонодромным** или **изомонодромной деформацией** (определения см. в [2, 3]). Основной из таких деформаций является деформация Шлезингера, задаваемая системой уравнений

$$dB_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00342-а, программы "Ведущие научные школы", грант НШ-3038.2008.1 и гранта поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук МК-3178.2009.1.

называемой **уравнением Шлезингера**. Известными функциями в этом уравнении являются коэффициенты  $B_i(a)$ , семейства систем (2), а начальными условиями — коэффициенты  $B_i^0 = B_i(a^0)$  исходной системы (1).

Нас будет интересовать поведение коэффициентов  $B_i(a)$ ,  $i = 1, \dots, n$  семейства (2) или, что то же самое, решений уравнения (3) при изомонодромном слиянии особых точек. **Изомонодромным слиянием** особых точек назовем изомонодромное семейство систем

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B_i(a(t))}{z - a_i(t)} \right) y,$$

зависящее от параметра  $t \in \mathbb{C}$ , при стремлении которого к нулю некоторые из особых  $a_i(t)$  точек сливаются в одну. Вопросы об изучении слияний фуксовых особых точек ставились В. И. Арнольдом в [1] (см. задачи 1984-7 и 1987-12). Эти вопросы исследовались А. А. Болибрухом в работах [3, 4] и А. А. Глущюком в работе [6]. А. А. Болибрухом в [3] было показано, что при изомонодромном слиянии фуксовых особых точек рождается регулярная точка. Здесь мы дадим более детальное описание изомонодромных слияний фуксовых особенностей, в частности покажем, что эта точка почти всегда является фуксовой, а иначе можно указать оценку порядка ее полюса (ранга Пуанкаре).

Главной темой работы является применение техники изомонодромных слияний к исследованию решений уравнения Шлезингера и шестого уравнения Пенлеве в окрестности неподвижной особой точки. Будет получен вид степенных разложений решений этих уравнений, включающих нецелые степени, и степенно-логарифмических разложений (с целыми степенями), сходящихся в окрестности неподвижной особенности.

### 1.1. Пфафова форма изомодромной деформации

Уравнение Шлезингера (3) является условием изомодромности семейства (1), зависящего от параметра  $a$  (положения особых точек) и начальных данных  $B_i(a^0) = B_i^0$ . Известно, что решения уравнения Шлезингера являются мероморфными функциями  $n$ -мерного параметра  $a$  на пространстве  $a \in \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i,j} \{a_i = a_j\}$ .

Другим способом задания изомодромных деформаций является задание с помощью пфафовой системы

$$dy = \omega y, \quad \omega = \sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i} d(z - a_i) \quad (4)$$

на пространстве  $\{(z, a)\} = \overline{\mathbb{C}} \times D(a^0) \setminus \bigcup_{i=1}^n \{z = a_i\}$ , где  $D(a^0)$  — некоторая окрестность точки  $a^0$ . Эта форма при фиксированном  $a$  дает фуксову систему вида (1). Форма (4) соответствует шлезингеровской деформации. Условие изомодромности интерпретируется в этом случае как условие интегрируемости системы (4) по Фробениусу

$$d\omega = \omega \wedge \omega.$$

### 2. Каноническое семейство, проблема Римана–Гильберта и связности в расслоениях

Главным образом нас будет интересовать предельное поведение решений  $B_i(a)$  уравнения Шлезингера (3) при стремлении одной точки к другой, но мы будем рассматривать несколько более общую ситуацию, так как это практически не усложняет доказательств. Будем рассматривать задачу изомодромного слияния нескольких особых точек. Рассмотрим изомодромное семейство систем (2), где некоторые поднаборы особых точек стремятся к своему пределу (каждый поднабор к своей предельной точке).

#### 2.1. Каноническое нормализованное семейство.

Рассмотрим семейство фуксовых систем следующего вида

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{z - ta_i^0} \right) y, \quad B_i \equiv \text{const}, \quad (5)$$

зависящее от комплексного параметра  $t$ . Легко видеть, что это семейство является изомодромным, так как системы из него переходят друг в друга линейной заменой времени  $z$ .

Однако, нетрудно убедиться, что, в случае, когда  $B_\infty = \sum_{i=1}^k B_i \neq 0$ , это семейство не является шлезингеровским. Оно определяется пфафовой системой

$$dy = \omega_{pr} y, \quad \omega_{pr} = \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{z - a_i^0 t} d(z - a_i^0 t) - \frac{B_\infty}{t} dt,$$

где форма  $\omega_{pr}$  отличается от шлезингеровской формы (4) наличием последнего члена. Чтобы получить из деформации (5) шлезингеровскую нужно применить калибровочное преобразование  $\tilde{y} = t^{B_\infty} y$ . Полученное семейство задается формой

$$\omega_{norm} = \sum_{i=1}^k \frac{B'_i(t)}{z - a_i^0 t} d(z - a_i^0 t), \quad B'_i = t^{B_\infty} B_i t^{-B_\infty},$$

т.е. данное семейство уже шлезингеровское. Будем предполагать, что матрица  $B_\infty$  находится в жордановой нормальной форме. Этого всегда можно добиться постоянным калибровочным преобразованием. Такое семейство назовем **каноническим нормализованным семейством**. Системы нового семейства

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^k \frac{B'_i(t)}{z - ta_i^0} \right) y \quad (6)$$

сопряжены к старым. Отметим, что имеются две возможности: основная предполагает, что матрица  $B_\infty$  — диагональная, и особый случай, когда матрица  $B_\infty$  имеет нетривиальные жордановы клетки.

Рассмотрим двумерную систему. В первом случае  $B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , и матрицы коэффициентов семейства (6) будут  $B'_i = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i t^{\lambda_1 - \lambda_2} \\ b_{21}^i t^{\lambda_2 - \lambda_1} & b_{22}^i \end{pmatrix}$ .

Во втором случае, когда  $B_\infty = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  — жорданова клетка, получим

$$B'_i = \begin{pmatrix} b_{11}^i + b_{21}^i \ln t & b_{12}^i + (b_{22}^i - b_{11}^i) \ln t - b_{21}^i \ln^2 t \\ b_{21}^i & b_{22}^i - b_{21}^i \ln t \end{pmatrix}.$$

Нас будет интересовать предельное поведение формы  $\omega_{norm}$  при  $t \rightarrow 0$ . Нашей целью будет добиться того, чтобы предельное поведение  $\omega_{norm}|_{t=0}$  было регулярным, то есть, чтобы предел был также невырожденной фуксовой системой. Для этого нам необходимо будет наложить на семейство (5) еще одно дополнительное условие.

Это условие

$$\forall i, j \quad |\text{Re} \rho_\infty^i - \text{Re} \rho_\infty^j| < 1 \quad (7)$$

на собственные значения  $\rho_\infty^1, \dots, \rho_\infty^p$  матрицы  $B_\infty$ .

Теперь рассмотрим предел семейства (6) при  $t \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{B'_i(t)}{z-a_i} &= t^{B_\infty} \left( \sum_{i=1}^k \frac{B_i}{z-a_i^0 t} \right) t^{-B_\infty} = \\ &= t^{B_\infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^k B_i}{z} + O(t) \right) t^{-B_\infty} = \frac{B_\infty}{z} + o(1). \end{aligned}$$

Поэтому при наложенном условии (7) нормализованное слияние семейства (5) дает фуксову систему

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_\infty}{z} y. \quad (8)$$

Мы будем рассматривать такие слияния с центрами в точках  $b_s$ . Возьмем семейство вида

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^k \frac{s B'_i}{z-b_s - t a_i^0} \right) y. \quad (9)$$

Такие семейства будем использовать как локальные формы связности. Решив соответствующую проблему Римана–Гильберта можно построить систему (9), локально эквивалентную данной системе (1).

## 2.2. Некоторые сведения о проблеме Римана–Гильберта

В предыдущем разделе было рассмотрено каноническое нормализованное семейство (6). В дальнейшем нам потребуется строить такие семейства систем, имеющих заданные свойства решений в особых точках. Нам будет необходимо построить систему

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^k \frac{B'_i}{z-a_i^0} \right) y, \quad (10)$$

которая является начальным условием семейства (6), т.е. систему (6) при  $t = 1$ . Более конкретно нас будут интересовать следующие вопросы:

• *Можно ли построить систему (10), которая в некоторых окрестностях особых точек  $a_1^0, \dots, a_k^0$  голоморфно эквивалентна заданной исходной системе вида (1), а в точке  $z = \infty$  удовлетворяет условию (7)? Можно ли продолжить ее до семейства (6)?*

• *Если это не возможно, то какую дополнительную особую точку  $z = a_0$  необходимо ввести, чтобы построить систему?*

Назовем этот вопрос **уточненной проблемой Римана–Гильберта**, так как, в отличии

от классической проблемы, здесь, кроме монодромии, фиксируются еще и локальные голоморфные классы системы (10) (в [2] этот вопрос назван “обобщенной проблемой Римана–Гильберта”, однако, мы используем другое название, так как то обычно обозначает иррегулярный вариант проблемы). Приведем некоторые известные факты об этой задаче.

Класс локальной классификации системы мероморфного в окрестности фуксовой особой точки калибровочного преобразования определяется ее матрицей монодромии. Чтобы фиксировать класс голоморфной эквивалентности необходимо также фиксировать и целые части асимптотик решений.

### Известные результаты.

1. Уточненная проблема Римана–Гильберта положительно разрешима для почти любого набора матриц монодромии.

2. Уточненная проблема Римана–Гильберта всегда разрешима в слабом смысле, т.е. можно построить систему с заданными условиями и одной дополнительной “ложной” особой точкой. В этой точке вычет диагонализуемый и целочисленный.

3. Существуют оценки  $N_v$  целочисленных элементов вычета системы из предыдущего пункта.

а) Если представление монодромии неприводимо, то  $N_v = (p-1)(n-2)$ , где  $p$  — размерность,  $n$  — количество особых точек.

б) Если представление монодромии приводимо, то  $N_v = (p-1)nM$ , где  $M$  — число, ограничивающее сверху модули вещественных частей асимптотик, по которым требуется построить систему.

Об этом можно прочитать в [2, 7].

## 2.3. Слияние особых точек

Рассмотрим слияние особых точек системы

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad B(z) = \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z-a_i}, \quad (11)$$

имеющей матрицы-образующие монодромии  $G_1, \dots, G_n$  в точках  $a_1, \dots, a_n$ , соответственно. Набор особых точек  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  разбивается на непересекающиеся поднаборы  $A_s = \{^s a_1, \dots, ^s a_{n_s}\}$  (возможно, состоящие из одного элемента), составляющие в объединении весь набор особых точек

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m$$

такие, что все точки набора  $A_s$  стремятся к точке  $b_s$  при  $s = 1, \dots, m$ . Стремление внут-

ри каждого набора предполагается пропорциональным, зависящим от одного параметра.

$${}^s a_1 = b_s + t \cdot {}^s a_1^0, \dots, \quad {}^s a_k = b_s + t \cdot {}^s a_{n_s}^0; \quad t \rightarrow 0.$$

В пределе получаются точки  $b_1, \dots, b_m$ . Назовем такое слияние **пропорциональным**. Семейство таких систем имеет вид

$$\frac{dy}{dz} = \sum_{s=1}^m \left( \frac{{}^s B_1}{z - b_s - t({}^s a_1 - b_s)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{{}^s B_{n_s}}{z - b_s - t({}^s a_{n_s} - b_s)} \right) y, \quad (12)$$

где коэффициенты  ${}^s B_i$  — функции от  $t$ .

#### 2.4. Слияние особых точек как связность в расслоении

Напомним, что основная задача заключается в описании зависимости матриц вычетов изомодромного семейства систем (12) при изменении  $t$  в окрестности нуля. Система (12) (при фиксированном  $t$ ) определяет логарифмическую связность  $\nabla_t^0$  в тривиальном расслоении  $F_t^0$ . Получаем семейство  $(F_t^0, \nabla_t^0)$  тривиальных расслоений со связностями. Построим другое семейство расслоений со связностями  $(F_t, \nabla_t)$ . Для этого рассмотрим набор канонических изомодромных семейств (9). Для каждого набора особых точек  $A_s$  построим свое семейство, зависящее от параметра  $t$ , одного для всех семейств.

Для наборов  $A_s = \{{}^s a_1\}$ , состоящих из одной точки, будем рассматривать семейство, состоящее из одной системы

$$\frac{dy}{dz} = \frac{{}^s B_1}{z - {}^s a_1} y,$$

постоянное по  $t$ . В случае нетривиальных  $A_s = \{{}^s a_1, \dots, {}^s a_{n_s}\}$  строим семейство (9)

$$\frac{dy}{dz} = \left( \sum_{j=1}^{n_s} \frac{{}^s B'_j}{z - b_s - t \cdot {}^s a_j} \right) y, \quad {}^s B_\infty = \sum_{j=1}^{n_s} {}^s B'_j. \quad (13)$$

Эти системы имеют те же матрицы монодромии  ${}^s G_1, \dots, {}^s G_{n_s}$  в точках  ${}^s a_1, \dots, {}^s a_{n_s}$ , что у исходной системы (11), а в точке  $z = \infty$  матрица монодромии будет

$${}^s G_\infty = ({}^s G_1 \cdot \dots \cdot {}^s G_{n_s})^{-1}.$$

Матрица  ${}^s B_\infty$  выбирается такой, чтобы вещественные части ее собственных значений удовлетворяли условию (7). Выбрать системы (13) таким образом можно не всегда, для этого необходимо иметь положительное решение соответствующей обратной задачи (см. раздел 2.2). В

случае, если этого сделать невозможно, нужно ввести дополнительную ложную особенность  ${}^s a_0$ . Допустим, что это удается сделать.

Окружим каждую из точек  $b_1, \dots, b_m$  окрестностью. В окрестности  $U_s$  определим систему (13), голоморфно эквивалентную в окрестности  $U_s$  системе (12) при каждом  $t$  таком, что  $|t| \in (0, 1]$ , так же сделаем для всех  $s = 1, \dots, m$ . Снова отметим, что, если не удается построить такую систему, то можно ввести ложную особенность  ${}^s a_0$ , и система (13) будет мероморфно эквивалентной системе (12). Обозначим через  $\omega'_s$  формы коэффициентов соответствующих систем (13), а через  $\omega$  форму коэффициентов исходной системы. Тогда набор форм  $\omega, \omega'_1, \dots, \omega'_m$ , определенных на окрестностях

$$U = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{s=1}^m \hat{U}_s, \quad U_1, \dots, U_m, \quad (14)$$

где  $\hat{U}_s$  — это некоторое сужение окрестности  $U_s$ , образует связность в голоморфном расслоении. Коцикл этого расслоения определяется с помощью выбора фундаментальных матриц  $Y_s(z)$  систем  $dy = \omega_s y$  и матрицы  $Y(z)$ , они выбираются одинаково нормированными. Получим семейство  $(F_t, \nabla_t)$  расслоений со связностью. Заметим, что это семейство расслоений со связностью является голоморфно эквивалентным исходному семейству  $(F_t^0, \nabla_t^0)$ , если дополнительных точек  ${}^s a_0$  вводить не потребовалось. Если дополнительные особенности вводились, то расслоение  $F_t$  будет по прежнему голоморфно эквивалентным  $F_t^0$ , но связность  $\nabla_t$  станет мероморфно эквивалентной  $\nabla_t^0$ .

Теперь можно начать с предельного (при  $t \rightarrow 0$ ) положения. Рассмотрим голоморфное расслоение  $F_0$  с логарифмической связностью  $\nabla_0$ , определенное следующими данными. Возьмем набор окрестностей (14), в  $U$  рассмотрим форму связности  $\omega$  (форма коэффициентов исходной системы), а в окрестностях  $U_s$  рассмотрим формы связности

$$\omega_s^0 = \frac{{}^s B_\infty}{z - b_s} dz$$

предельных систем (8). Зафиксируем фундаментальные матрицы решений локальных систем в окрестностях (14). В  $U$  зададим фундаментальную матрицу  $Y(z)$ , а в окрестностях  $U_s$  — матрицы

$$Y_s(z) = (z - b_s) {}^s B_\infty.$$

В случае общего положения расслоение  $F_0$  — тривиальное. В остальных случаях нужно ввести дополнительную особенность  $z = a_0$  в самом начале доказательства. Расслоения семейства  $F_t$  при  $t$  из некоторой окрестности нуля тривиальные, так как множество тривиальных расслоений открыто.

Отметим, что вместо семейства систем (12), о поведении коэффициентов которого мало известно, мы получили семейство тривиальных расслоений со связностями, которые голоморфно эквивалентны системе (12). Расслоение  $F_t$  и связность  $\nabla_t$ , при этом, построены явно с помощью локальных систем, зависимость которых от  $t$  известна. В случаях, имеющих нулевую меру, потребовалось введение дополнительных особенностей. Этим построением мы воспользуемся в следующей части работы для получения результатов.

## 2.5. Теорема Биркгофа–Гротендика

Существует теорема, классифицирующая голоморфные расслоения над сферой (см. [2]).

**Теорема 1.** (Биркгоф, Гротендик) Любое голоморфное расслоение  $F$  на сфере Римана эквивалентно одному из следующих расслоений

$$F^K = (U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, g_{0\infty} = z^K),$$

$$K = \text{diag}(k_1, \dots, k_p), \quad k_i \in \mathbb{Z},$$

еще пусть  $k_i \geq k_{i+1}$ .

## 3. Результаты

### 3.1. Результаты о предельной системе (при $t \rightarrow 0$ )

Результат этого параграфа — некоторое усиление результатов работы [3].

**Теорема 2.** 1. В результате пропорционального изомодромного слияния фуксовых особых точек рождается регулярная особенность.

2. Результатом такого слияния почти всегда является фуксова особенность.

3. В тех случаях, когда получаемая особенность лишь регулярна, ее ранг Пуанкаре не превышает некоторой константы  $N$ .

*Доказательство.* Опираясь на конструкции, описанные в предыдущих разделах, можно рассмотреть предел соответствующих связностей  $\nabla_t$  в тривиальных расслоениях  $F_t$ . В пределе при  $t \rightarrow 0$  получаем пару  $(F, \nabla)$ . Если предельное расслоение  $(F, \nabla)$  тривиально, то из открытости множества тривиальных расслоений

следует, что при достаточно малых  $t$  расслоения  $F_t$  тоже тривиальны. Нетрудно убедиться, что при изменении коцикла тривиального голоморфного расслоения координатное описание изменяется голоморфно по  $t$ , а в случае нетривиального предельного расслоения  $F$  — мероморфно. Теперь видно, что итоговая система связана с формами связности голоморфным калибровочным преобразованием в случае тривиального  $F$  и мероморфным — в случае нетривиального.

Таким образом получаем, что из того, что почти все голоморфные расслоения тривиальны, выводим пункт 2, так как итоговая система получается из логарифмической связности голоморфным калибровочным преобразованием. Если оно нетривиально, то итоговая связность связана мероморфным преобразованием, и полюс, который может появиться у матрицы коэффициентов, равен разности крайних элементов типа расщепления расслоения  $F$  плюс один.  $\square$

### 3.2. Степенные разложения решений уравнения Шлезингера

**Теорема 3.** Решения уравнения Шлезингера  $b_{ij}(a)$  рассматриваются как функции от положения одной особой точки,  $a_k = t$ , когда  $t$  лежит в некоторой окрестности  $a_1$ . Возможны два случая,

1) когда матрица  $(G_k G_l)^{-1}$  не имеет жордановых клеток, разлагаются в окрестности точки  $t = a_1$  в ряд

$$b_{ij}(t) = P(t, t^{\varphi_{12}}, t^{\varphi_{13}}, \dots, t^{\varphi_{p,p-1}}) =$$

$$= P_0(t) + t^{\varphi_{12}} P_1(t) + \dots + t^{\varphi_{p,p-1}} P_{p(p-1)}(t)$$

с конечной главной частью по целым степеням функций  $t, t^{\varphi_{12}}, t^{\varphi_{13}}, \dots, t^{\varphi_{p,p-1}}$  с  $\varphi_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_{rs}$ , где  $\lambda_{rs}$  — разность  $r$ -го и  $s$ -го собственных значений матрицы  $(G_k G_l)^{-1}$ ;

2) когда матрица  $(G_k G_l)^{-1}$  содержит жордановы клетки, решение представляется рядом

$$b_{ij}(t) = P(t, t^{\varphi_{12}}, t^{\varphi_{13}}, \dots, t^{\varphi_{p,p-1}}, \ln t),$$

где максимальная степень логарифма равна размеру самой большой жордановой клетки.

**План доказательства.** Рассмотрим расслоение со связностью, построенное в предыдущем параграфе. Пары  $(F_t, \nabla_t)$  и  $(F_t^0, \nabla_t^0)$  эквивалентны как расслоения со связностью. Тогда слияние особых точек системы вида (12) локально (в каждой из окрестностей  $U_1, \dots, U_m$ ), т. е. калибровочно эквивалентно своему каноническому нормализованному слиянию (6), а в

окрестности  $U$  — эквивалентно исходной системе (11). Его можно представить как

$$U_s: \frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_s(t, z) t^{B_\infty} B_i t^{-B_\infty} \Gamma_s^{-1}(t, z)}{z - b_s - t a_i^0} + \frac{d\Gamma_s}{dz} \Gamma_s^{-1} \right) y,$$

$$B_i \equiv \text{const}, \quad B_\infty = \sum_{i=1}^k B_i.$$

$$\Gamma_s(t, z) = {}^s\Gamma_0(t) + {}^s\Gamma_1(t)(z - b_s - t a_i) + \dots \quad (15)$$

$$U: \quad \frac{dy}{dz} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(t, z) B_i \Gamma^{-1}(t, z)}{z - a_i^0} + \frac{d\Gamma}{dz} \Gamma^{-1} \right) y$$

При этом  $\Gamma(t, z)$  — мероморфная в окрестности  $D_0$  точки  $(t, z) = (0, 0)$  функция двух переменных. В случае общего положения (для почти любого набора матриц монодромии)  $\Gamma(t, z)$  — голоморфна в  $D_0$ .

Из вида разложения (15) в ряд по  $z$  матрицы  $\Gamma(t, z)$  в окрестности точки  $z = b_s + a_i$  следует, что если  $\Gamma(t, z)$  голоморфна по  $z$ , то вычет деформируемой системы будет сопряжен к вычету локальной формы на матрицу  $\Gamma_0(t)$ . Отсюда следует вид разложения вычета в ряд по  $t$ . В случае, когда  $\Gamma(t, z)$  мероморфна по  $z$ , нужно действовать также, но вычет деформируемой системы будет иметь более сложный вид, из-за чего в разложении для  $b_{ij}(t)$  появятся полюса по  $t$ .  $\square$

### 3.3. Применение к шестому уравнению Пенлеве

Известное уравнение Пенлеве 6

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-t} \right) \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 - \\ &\quad - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{w-t} \right) \frac{dw}{dt} + \\ &\quad + \frac{w(w-1)(w-t)}{t^2(t-1)^2} \left( \alpha + \beta \frac{t}{w^2} + \gamma \frac{t-1}{(w-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(w-t)^2} \right) \end{aligned}$$

реализуется как простейший нетривиальный пример уравнения Шлезингера. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dz} = \left( \frac{B_0}{z} + \frac{B_t}{z-t} + \frac{B_1}{z-1} \right) y,$$

размера  $2 \times 2$  с матрицами коэффициентов, имеющими нулевые следы

$$\text{tr}B_0 = \text{tr}B_t = \text{tr}B_1 = 0.$$

Это значит, что собственные значения матриц  $B_0, B_t, B_1, B_\infty = -(B_0 + B_t + B_1)$  — суть числа

$(\lambda_0, -\lambda_0), (\lambda_t, -\lambda_t), (\lambda_1, -\lambda_1), (\lambda_\infty, -\lambda_\infty)$ , а матрицы монодромии принадлежат  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Также предположим, что  $B_\infty = \text{diag}(\lambda_\infty, -\lambda_\infty)$ .

Рассмотрим шлезингеровскую изомодромную деформацию данной системы, зависящую от параметра  $t$ . Тогда, как известно было еще Шлезингеру, выражение

$$w(t) = \frac{t b_{12}^0}{(t+1)b_{12}^0 + t b_{12}^1 + b_{12}^t} \quad (16)$$

является решением шестого уравнения Пенлеве со следующими константами:

$$\alpha = \frac{(2\lambda_\infty - 1)^2}{2}, \quad \beta = -2\lambda_0^2, \quad \gamma = 2\lambda_1^2, \quad \delta = \frac{1}{2} - 2\lambda_t^2.$$

**Теорема 4.** *Все решения уравнения Пенлеве 6 в некоторых окрестностях особых точек  $t = 0, 1, \infty$  разлагаются в сходящиеся степенные и степенно-логарифмические ряды. В случае общего положения (если  $G_1 G_\infty$  — диагонализируема)*

$$w(t) = P(t, t^\lambda, t^{-\lambda}),$$

где  $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta, t_0, w(t_0), w'(t_0))$  — может быть вычислена приближенно. В случае, когда  $G_1 G_\infty$  — жорданова клетка

$$w(t) = P(t, \ln t).$$

**Доказательство.** Эта теорема выводится из теоремы 3 и формулы (16).  $\square$

### Список литературы

- [1] Задачи Арнольда *ФАЗИС. 2000.*
- [2] Болибрух А. А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений *М.: МЦНМО. 2009.*
- [3] Болибрух А. А. Об изомодромных слияниях фуксовых особенностей // *Тр. МИАН. 1998. Т. 221. С. 127-142.*
- [4] Болибрух А. А. Регулярные особые точки как изомодромные слияния фуксовых // *УМН. 2002. Т. 56. В. 4. С. 135-136.*
- [5] Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений *М.: Гостехтеоретиздат. 1957.*
- [6] Glutsyuk A. A. On the monodromy group of confluent linear equations // *arXiv:math/0304243.*
- [7] Вьюгин И. В., Гонцов Р. Р. О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии // *Матем. сб. 2006. Т. 197. В. 12. С. 43-64.*