РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ им. А.А.Харкевича

50 лет

1961
29 декабря
2011

Аналитическая теория дифференциальных уравнений и её применения

И.В. Вьюгин, Р.Р. Гонцов
ИППИ РАН

История вопроса

Аналитическая теория дифференциальных уравнений возникла в середине 19-го века (Коши, Риман, Фукс и др.).

Б. Риманом были поставлены основные вопросы теории линейных дифференциальных уравнений. Наиболее важными являются обратные задачи: задачи построения дифференциальных уравнений, обладающих заданными свойствами.

Линейные дифференциальные уравнения

Рассмотрим линейную систему

$$y' = B(z)y, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{C}$, $y(z)$ – вектор-функция в $\mathbb{C}^n$, а $B(z)$ – матричнозначная $n \times n$-функция.

Особые точки: $z = a$ – особая точка системы (1), если

$$B(z) = \frac{B_{-r}}{(z-a)^r} + \ldots + B_0 + B_1(z-a) + \ldots.$$

При $r = 1$ особая точка $z = a$ называется фуксовой.

Монодромия

$Y(z)$ – фундаментальная матрица, $\tilde{Y}(z)$ – ее аналитическое продолжение вдоль петли $\gamma \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$,

$$\tilde{Y}(z) = Y(z)G_\gamma, \qquad G_\gamma \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Продолжение определяет отображение $[\gamma] \mapsto G_\gamma$, которое называется представлением монодромии

$$\chi : \pi_1\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}\right) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

21-я проблема Гильберта

Можно ли по заданному представлению χ и набору особых точек $a_1, \dots, a_m$ построить фуксову систему

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{z - a_i} \right) y,$$

имеющую данные особые точки и монодромию?

Контрпример к 21-ой проблеме Гильберта (А.А. Болибрух, 1989)

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Другие результаты

Теорема (А.А. Болибрух, В.П. Костов)

Любое неприводимое представление может быть реализовано как монодромия фуксовой системы.

Теорема (Р.Р. Гонцов, И.В. Вьюгин)

По произвольному представлению χ можно построить регулярную систему, имеющую не более одной нефуксовой особой точки, причем порядок полюса матрицы коэффициентов в этой точке не превосходит числа $(n-1)(m-1)+1$, где n – размерность, m – число особых точек.

Основные приложения. Изомонодромные деформации.

Рассмотрим многомерную пфаффову систему

$$d\,y(z,a) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(a)}{z-a_i} d(z-a_i) \right) y, \qquad a = (a_1, \ldots, a_m).$$

Ограничение $\{a = \mathrm{const}\}$ задает фуксову систему

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(a)}{z-a_i} \right) y.$$

Условие интегрируемости по Фробениусу пфаффовой системы эквивалентно уравнению

$$dB_i(a) = -\sum_{j=1, j\neq i}^{m} \frac{[B_i, B_j]}{a_i - a_j} d(a_i - a_j), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Это уравнение называется уравнением Шлезингера, оно является условием того, что монодромии всех ограничений

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y, \qquad a = \mathrm{const},$$

совпадают.

- Многие нелинейные уравнения сводятся к условиям интегрируемости (изомонодромности) семейств линейных систем.

- Уравнение Пенлеве VI и системы Гарнье вкладываются в 2×2-уравнение Шлезингера.

- Для уравнения Шлезингера найдены порядки подвижных полюсов и локальный вид решений в окрестности неподвижных особенностей $a_i = a_j$.

Связь с алгеброй и теорией чисел.

Дифференциальная теория Галуа изучает вопросы разрешимости дифференциальных уравнений в явном виде.

Группа Галуа фуксовой системы = замыкание группы монодромии системы.

Разрешимость группы Галуа означает разрешимость системы в квадратурах.

Теорема (Р.Р. Гонцов, И.В. Вьюгин)

Пусть собственные β_i^j значения матриц B_i фуксовой системы

$$y' = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i}{z-a_i}\right) y \qquad (2)$$

удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\beta_i^j > -\frac{1}{m(n-1)}$, $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, а также для каждой пары $\beta_i^j \neq \beta_i^k$ собственных значений выполнено одно из двух условий:

1) $\mathrm{Re}\beta_i^j - \mathrm{Re}\beta_i^k \notin \mathbb{Q}$;

2) $\mathrm{Im}\beta_i^j \neq \mathrm{Im}\beta_i^k$.

Тогда разрешимость системы (2) в квадратурах эквивалентна треугольности (в некотором базисе) всех матриц B_i.

Пересечение сдвигов мультипликативных подгрупп в $\mathbb{Z}_p^*$.

R – подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{Z}_p^*$ поля $\mathbb{Z}_p$.

Теорема (И.Д. Шкредов, И.В. Выогин)

Для любой подгруппы $R \subset \mathbb{Z}_p^*$ такой, что $|R| < p^{1-\alpha_n}$ выполнено

$$|R \cap (R+q_1) \cap \ldots \cap (R+q_n)| < |R|^{\frac{1}{2}+\beta_n},$$

где $\alpha_n, \beta_n \to 0$, $n \to \infty$.

Задача из теории кодирования

Имеются: p – большое простое число;
поле вычетов $\mathbb{Z}_p$;
число t – делитель $p-1$;
и Оракул, выдающий по x число $(x+s)^t$ в поле $\mathbb{Z}_p$.

Задача: Установить неизвестное число s, минимизируя число вопросов к Оракулу и число арифметических операций.

Теорема (Ж. Бургейн, С.В. Конягин, И.Е Шпарлинский)

Пусть для некоторого простого $q \in \mathbb{Z}_p$ *известен один невычет порядка q. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует алгоритм, находящий s, у которого число обращений к Оракулу не превосходит* $O_\varepsilon\left(\frac{\log p}{\log(p/t)}\right)$*, а сложность (количество элементарных операций) не более*

$$t^{1+\varepsilon}(\log p)^{O(1)}.$$