На правах рукописи

Юрков Кирилл Валерьевич

ВЕКТОРНОЕ КВАНТОВАНИЕ НА ОСНОВЕ КОДОВ, ИСПРАВЛЯЮЩИХ ОШИБКИ

05.13.17 — Теоретические основы информатики

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Москва — 2008

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения» (ГУАП).

Научный руководитель:	доктор технических наук, доцент Кудряшов Б. Д.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Блиновский Владимир Маркович кандидат технических наук, Ланге Михаил Михайлович
Ведущая организация:	Московский физико-технический институт (государственный университет)

Защита состоится “____”____________ 2008г. в ____ ч. ____ мин. на заседании диссертационного совета Д 002.077.01 при Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН по адресу: 127994, г. Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН.

Автореферат разослан “____”____________ 2008.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 002.077.01
доктор физико-математических наук Цитович И.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

При передаче через канал связи от источника к приемнику информацию не всегда удается передать абсолютно точно. Обычно это связано с ограничением на скорость передачи информации, которая в свою очередь обуславливается пропускной способностью канала. При этом возникает задача передачи информации с некоторой ошибкой. Задачу передачи данных с наименьшей ошибкой при заданной скорости, или с наименьшей скоростью при заданной ошибке называют задачей квантования.

Наряду с проблемой передачи информации с наименьшей ошибкой при заданной скорости, серьезное ограничение на решение данной задачи накладывает требование о приемлемой сложности данного решения. При этом подразумевается не только сложность нахождения хороших квантователей для заданного класса источников, но и сложность непосредственно квантования.

Теоретическая постановка задачи квантования была сформулирована независимо А.Н. Колмогоровым и К. Шенноном. В их работах было введено понятие функции ε-энтропии у Колмогорова и функции скорость-искажение у Шеннона, как нижней границы скорости квантования при заданной ошибке. При этом было дано доказательство достижимости данной функции для широкого класса источников. Однако, доказательство было не конструктивным, в том смысле, что оно не давало ответа на вопрос о том, как именно строить оптимальные квантователи. Поиски решения для задачи квантования породили теорию, которая в русскоязычной литературе называется теорией кодирования с заданным критерием качества. Основоположниками теории сжатия с заданным критерием качества являются А.Н. Колмогоров, К. Шеннон, М.С. Пинскер, Р.Л. Добрушин, В.Н. Кошелев и др.

На начальном этапе развития теории кодирования с заданным критерием качества наибольшие усилия были направлены на построение оценок функции ε-энтропии для разных классов источников. Эти усилия увенчались успехом при достаточно общих предположениях. Данные предположения, фактически, являются предположениями о малости ошибок квантования, при которых полученные оценки верны. Результаты, полученные при этом предположении, называются результатами теории квантования с малыми ошибками или теории квантования с высокой скоростью. Так же П. Задором было показано, что свойства квантователя в предположениях теории квантования с малыми ошибками зависят лишь от величины второго нормализованного момента многогранника Вороного.

Наиболее простым по сложности решением задачи квантования является скалярное квантование, подразумевающее независимую обработку каждого символа источника. В работе В.Н Кошелева было показано, что в предположениях теории квантования с малыми ошибками, при среднеквадратичной мере искажения, оптимальный скалярный квантователь асимптотически проигрывает оптимальному векторному квантователю 0.25 бита на отсчет.

При увеличении размерности квантователя возникает вопрос о сложности квантования. Для произвольного квантователя размерности n сложность квантования очень велика и совпадает со сложностью перебора по кодовым словам, которая растет экспоненциально с увеличением размерности квантователя. Наиболее часто используемым неструктурированным квантователем является квантователь, построенный по алгоритму Линде-Бузо-Грея. Однако, характеристики данного квантователя далеки от теоретического предела ε-энтропии.

Первые шаги в сторону уменьшения сложности векторного квантования основаны на использовании структурированных книг, а именно, числовых решеток. Значительный вклад в теорию числовых решеток был сделан Дж. Конвеем и Н. Слоэном. В работах В.Ф. Бабкина, М.М. Ланге и Ю.М. Штарькова, а также в работах П. Задора было показано существование оптимальных квантователей в классе числовых решеток.

Числовые решетки, порожденные линейными блоковыми кодами, являются подклассом числовых решеток. При использовании этого подкласса можно значительно уменьшить сложность квантования, используя достижения области теории кодирования в каналах связи. Открытыми задачами являются задачи построения границ для квантователей в классе решеток, порожденных линейными кодами, поиск конструкций кодов, порождающих числовые решетки с хорошими характеристиками для квантования, разработка алгоритмов квантования, характеристики которых достигают теоретические границы для различных моделей источников.

Исследованию квантователей в классе решеток, порожденных линейными кодами, посвящена данная работа.

Целью настоящего исследования является:1) поиск классов квантователей, среди которых можно найти конструкции близкие к оптимальным; 2) поиск в заданном классе оптимальных конструкций квантователей; 3) разработка алгоритмов квантования для различных классов источников.

В соответствии с поставленной целью были определены следующие задачи и вопросы.

1) Теоретический анализ класса квантователей в множестве решеток, порожденных q-ичными линейными блоковыми кодами.

2) Поиск сверточных кодов, порождающих числовые решетки с наилучшим значением второго нормализованного момента.

3) Разработка алгоритмов квантования для класса источников, на выходе

которых символы распределены по обобщенному гауссовскому закону.

4) Разработка алгоритмов квантования для класса источников Гаусса-Маркова.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы теории информации, дискретной математики, алгебры, теории вероятностей, комбинаторики.

Научная новизна результатов заключается в том, что в ней впервые в классе числовых решеток, порожденных линейными блоковыми кодами, показано существование квантователей близких к оптимальным, при малых значениях основания кода q. Построены коды, которые при заданных ограничениях на сложность, порождают числовые решетки с лучшими характеристиками для квантования в рассматриваемом классе.

Теоретическая и практическая ценность работы состоит в следующем.

- Исследована зависимость характеристик квантователя от характеристик линейного кода, порождающего решетку.
- Разработан метод поиска кодов, порождающих числовые решетки, обладающие наилучшими характеристиками для квантования.
- Предложен новый подход к задаче оптимизации квантования за счет введения многомерной нулевой зоны.
- В работе построены коды, достигающие рекордных характеристик квантования для широкого класса источников.

Положения, выносимые на защиту.

1. Граница кодирования для числовых решеток, порожденных q-ичными линейными блоковыми кодами.
2. Сверточные коды, порождающие числовые решетки с рекордными значениями второго нормализованного момента многогранника Вороного.
3. Обобщение способа расширения нулевой зоны на случай многомерных решеток.
4. Алгоритм квантования источников Гаусса-Маркова на основе ортогонального преобразования с перекрытиями.

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались на российских и международных конференциях:1) IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT2007). 24th - 29th June 2007, Nice, France. 2) Tenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Zvenigorod, Russia, 3-9 September, 2006. 3) Цифровая обработка сигналов и ее применение, Москва, Россия. 29-31 марта, 2006. 4) VIII, IX, X ежегодные научные сессии аспирантов ГУАП, Санкт-Петербург, 2005-2007.

Основные результаты диссертации обсуждались и были одобрены:

- на научных семинарах по теории кодирования Института Проблем Передачи Информации РАН, 2006г., 2008г.;
- на научных семинарах кафедры Информационных систем Санкт-Петербургского Государственного Университета Аэрокосмического Приборостроения, 2004-2008гг.;

Результаты работы были использованы в НИР

- НИР №465-2 "Низкоскоростное кодирование аудиосигналов", Санкт-Петербургский Государственный Университет Аэрокосмического Приборостроения, 2006-2007гг.
- НИР №77815 "Кодирование аудиосигналов с малой сложностью", Санкт-Петербургский Государственный Университет Информационных Технологий, Механики и Оптики, 2007-2008гг.

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 7 работ, из них 1 статья в журнале из списка ВАК, 3 статьи в сборниках трудов рецензируемых научных конференций, 3 доклада в трудах научных конференций ГУАП.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы из 58 наименований. Объем диссертации составляет 136 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулирована цель и определены задачи исследования, дано краткое изложение полученных результатов и содержание диссертации.

В первой главе дана постановка задачи квантования. Приведены известные способы построения квантователей для разных размерностей. Введено понятие числовой решетки. Приведены данные сравнения известных типов квантователей с функцией ε-энтропии для различных источников.

Будем полагать, что задано множество $X \subset \mathbb{R}$ — множество сообщений источника. *Числовой решеткой* с порождающей матрицей V называется множество вида

$$\Lambda(V) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n | \exists \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}^n : \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{z}V\}. \tag{1}$$

В работе рассматривается специальный класс числовых решеток. Будем полагать, что задан q-ичный линейный блоковый (n, k)-код C над полем $\mathbb{F}_q$ со скоростью $r = k/n$. Будем рассматривать только такие коды, для которых размер алфавита q является простым числом. *Числовой решеткой, порожденной кодом* C называется множество вида

$$\Lambda(C) = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}^n | \exists \boldsymbol{c} \in C : \boldsymbol{\lambda} \equiv \boldsymbol{c} (\mathrm{mod} \quad q)\}. \tag{2}$$

Точки числовой решетки выбираются в качестве *аппроксимирующих значений* для квантователя. Функцию отображения квантователя обозначим через Q. Будем рассматривать в качестве функции расстояния среднеквадратическую ошибку. С каждой точкой числовой решетки связано множество вида

$$\mathcal{R}_i \triangleq \mathcal{R}(\boldsymbol{\lambda}_i) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n | ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\lambda}_i||^2 \leq ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\lambda}_j||^2, \forall \boldsymbol{\lambda}_j \in \Lambda(C), \boldsymbol{\lambda}_i \neq \boldsymbol{\lambda}_j\},$$

которое называется многогранником Вороного точки решетки $\boldsymbol{\lambda}_i$. Все многогранники Вороного точек числовой решетки *конгруэнтны* друг другу. Обозначим через $\mathcal{R} \triangleq \mathcal{R}_0$ многогранник Вороного, содержащий $\mathbf{0}$, а объем многогранника Вороного через $\mathcal{V}(\mathcal{R})$.

Пусть задана n-мерная функция плотности распределения вероятностей $f(\boldsymbol{x})$ на X^n, тогда ошибку n-мерного квантования можно вычислить как

$$D_Q = M[||\boldsymbol{x} - Q(\boldsymbol{x})||^2] = \frac{1}{n} \sum_i \int_{\mathcal{R}_i} ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}_i||^2 f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Вероятности точек решетки можно вычислить как $p_i = \int_{\mathcal{R}_i} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$. Используя методы энтропийного кодирования, скорость квантования можно сделать сколь угодно близкой к энтропии

$$H_Q = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Нижней границей для скорости квантования является информационно-теоретическая характеристика источника, которая называется функцией ε-энтропии

$$H(D) = \inf_n \min_{\varphi : D_\varphi \leq D} I(X^n; Y^n), \tag{3}$$

где $I(X^n; Y^n)$ — средняя взаимная информация между X^n и Y^n, а минимум в правой части выражения берется по всем условным распределениям $\varphi(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$, для которых величина ошибки D_φ не превосходит D.

В качестве модели источника, для которого будут приведены результаты квантования, выбран класс обобщенных гауссовских распределений. Данный класс параметрических распределений задается функцией плотности вероятностей вида

$$f(x) = \frac{\alpha \gamma(\alpha, \sigma)}{2\Gamma(1/\alpha)} exp\left\{-(\gamma(\alpha, \sigma)|x - m|)^\alpha\right\}, \tag{4}$$

где m — математическое ожидание, σ^2 — дисперсия, $\alpha > 0$ — параметр распределения, определяющий экспоненциальную скорость убывания,

$$\gamma(\alpha,\sigma) = \sigma^{-1}\left[\frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)}\right],$$

а $\Gamma(z)$ обозначает *гамма* функцию, определяемую равенством

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Класс обобщенных гауссовских распределений включает в себя гауссовское распределение, при значении параметра $\alpha = 2$, и распределение Лапласа, при значении параметра $\alpha = 1$.

Во втором разделе предложен метод вычисления второго нормализованного момента многогранника Вороного через ошибку квантования. Получена граница существования для квантователей в классе числовых решеток, порожденных линейными блоковыми кодами.

Для построения границы используется стандартное предположение теории квантования с высоким разрешением. Оно заключается в том, что ошибки квантования полагаются достаточно малыми для того, чтобы считать функцию плотности распределения вероятностей $f(\boldsymbol{x})$ константой в каждом многограннике Вороного. При данном предположении верна следующая граница для скорости квантования, полученная независимо П. Задором и В.Н. Кошелевым:

$$H(D) \le H_Q \le H(D) + \frac{1}{2}\log(2\pi e G_n), \tag{5}$$

где величина G_n называется вторым нормализованным моментом (ВНМ) многогранника Вороного и определяется выражением

$$G_n(\mathcal{R}) = \frac{1}{n}\frac{\displaystyle\int_{\mathcal{R}} ||\boldsymbol{x}||^2 d\boldsymbol{x}}{\left(\displaystyle\int_{\mathcal{R}} d\boldsymbol{x}\right)^{1+2/n}}.$$

Итак, наилучшим решетчатым квантователем будет квантователь, обладающий наименьшим значением второго нормализованного момента. Величина G_n инвариантна относительно линейных растяжений-сжатий многогранника Вороного и зависит лишь от его формы. Максимального значения второй нормализованный момент достигает при размерности $n = 1$ и оно равно $G_1 = 1/12$. Наименьшим вторым нормализованным моментом обладает n-мерная сфера при $n \to \infty$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(\text{сфера}) = \dfrac{1}{2\pi e}$.

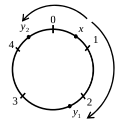

Рис. 1. Пример вычисления циклического расстояния между точками x, y_1 и x, y_2.

Утверждение 1. *Для ошибки квантования в условиях теории квантования с высоким разрешением верно следующее неравенство*

$$D \leq G_n(\mathcal{R})\mathcal{V}(\mathcal{R})^{2/n},$$

при этом равенство имеет место, если существует множество $\Omega = \bigcup_i \mathcal{R}_i$, *такое что* $f(\boldsymbol{x}) \neq 0$, *если* $\boldsymbol{x} \in \Omega$, *и* $f(\boldsymbol{x}) = 0$, *если* $\boldsymbol{x} \notin \Omega$.

Предлагаемый в работе метод оценки второго нормализованного момента основан на вычислении оценки ошибки квантования и пересчете его в значения ВНМ. Воспользоваться для этого утверждением 1 напрямую не представляется возможным, так как необходимо вычислять ошибку квантования в некотором объединении многогранников Вороного. В работе показано, что при изменении функции расстояния можно свести задачу к вычислениям в гиперкубе $[0, q]^n$. Верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \triangleq \bigcup\limits_{\boldsymbol{c} \in C} \mathcal{R}(\boldsymbol{c})$. *Верно следующее*

- *Существует взаимно однозначное отображение* $\psi : \Omega \to [0, q]^n$.
- *Существует функция* $\rho(\cdot, \cdot)$, *такая что* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{c}), \boldsymbol{c} \in C$ *выполнено*

$$||x - c||^2 = \rho(\psi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{c})).$$

Функция $\rho(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2, является функцией циклического расстояния

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = \sum_{i=1}^{n} \min\{(c_i - x_i)^2, (|c_i - x_i| - q)^2\}. \tag{6}$$

Пример вычисления циклических расстояний $\rho(x, y_1)$ и $\rho(x, y_2)$ для $q = 5$ приведен на рисунке 1.

Следствие 3. *Из теоремы 2 следует*

- $\mathcal{V}(\mathcal{R}) = q^{n(1-r)}$.
- *Если существует множество* $\Omega = \bigcup_i \mathcal{R}_i$, *такое что* $f(\boldsymbol{x}) \neq 0$, *если* $\boldsymbol{x} \in \Omega$, *и* $f(\boldsymbol{x}) = 0$, *если* $\boldsymbol{x} \notin \Omega$, *то* $D = G_n q^{2(1-r)}$.

На основе сформулированных результатов предлагается следующий метод оценки ВНМ через ошибку квантования.

- Случайная величина выбирается равномерно распределенной в гиперкубе $[0, q]^n$.
- В качестве множества аппроксимирующих значений выбираются только кодовые слова кода C.
- Квантование производится по минимуму циклического расстояния ρ.
- Оценка ошибки квантования пересчитывается в оценку второго нормализованного момента согласно формуле

$$D = G_n q^{2(1-r)}. \tag{7}$$

На основе метода случайного кодирования для оценки ошибки квантования, был получен следующий результат.

Теорема 4. *Для заданного простого q, $\varepsilon > 0$ существует последовательность кодов $C_1, C_2, C_3 \ldots$, где C_i — q-ичный код длины i со скоростью r_0, и число N, такие что, для всех $n \geq N$ верно*

$$|G_n(q) - d_0 q^{2(r_0-1)}| < \varepsilon, \tag{8}$$

где $G_n(q)$ — второй нормализованный момент числовой решетки, порожденной кодом C_n, величина d_0 является решением уравнения

$$d = 2\int_0^{1/2} \frac{\frac{\partial}{\partial s} g(s,x)}{g(s,x)} dx \Bigg|_{s=-\frac{1}{2d}}, \tag{9}$$

r_0 определяется как

$$r_0 = \frac{1}{\ln q}\Big(-\frac{1}{2} - 2\int_0^{1/2} \ln g(s,x) dx \Bigg|_{s=-\frac{1}{2d_0}}\Big), \tag{10}$$

где

$$g(s,x) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} e^{s\rho(x,k)}, \qquad \rho(x,y) = \min\{(x-y)^2, (|x-y|-q)^2\}.$$

Отметим, что теорема 4 дает прямую зависимость между достижимыми значениями ВНМ числовой решетки и основанием q порождающего кода. Значения достижимых ВНМ для разных q приведены в таблице 1. Также

Таблица 1. Нормализованный второй момент для различных значений q.

q	$G_\infty(q)$	Эн. выигрыш, дБ	Опт. скорость кода
1	0.083333(1/12)	0	1
2	0.059831	1.4389	0.41
3	0.058683	1.5231	0.46
5	0.058551	1.5328	0.49
$\lim\limits_{n\to\infty} G_n = \frac{1}{2\pi e} \approx 0.05855$		1.5329	

в таблице приведены значения оптимальной скорости r_0 порождающего кода и энергетического выигрыша, вычисляемого по формуле

$$E = -10\log_{10}\frac{G_n}{G_1} = -10\log_{10} 12G_n.$$

Физическим смыслом энергетического выигрыша является величина выигрыша построенного квантователя по отношению к равномерному скалярному квантователю, выраженная в децибелах. Из приведенных в таблице данных следует, что уже при $q = 3$ существуют линейные блоковые коды, порождающие числовые решетки, ВНМ которых близок к оптимальному значению.

Следствие 5. *Для рассматриваемого класса квантователей верны следующие асимптотические значения.*

$$\begin{aligned} \lim_{q\to\infty} G_\infty(q) &= \frac{1}{2\pi e}, \\ \lim_{q\to\infty} r_0(q) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В третьей главе в качестве кодов, порождающих числовые решетки, рассматриваются сверточные коды. Предложен метод перебора сверточных кодов. Найдены коды, порождающие числовые решетки с наилучшими значениями ВНМ многогранников Вороного.

Рассматриваются сверточные коды со скоростью 1/2. Будем полагать, что генераторы кода $(\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1)$ заданы в полиномиальной форме

$$g_i(Z) = g_0^i + g_1^i Z + \ldots + g_m^i Z^m, \quad i = 0, 1.$$

Любая полубесконечная информационная последовательность в полиномиальной форме

$$u(Z) = u_0 + u_1 Z + u_2 Z^2 + \ldots \tag{11}$$

связана с некоторой полубесконечной кодовой последовательностью в полиномиальной форме

$$\boldsymbol{v}(Z) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1 Z + \boldsymbol{v}_2 Z^2 + \ldots, \quad \boldsymbol{v}_i = (v_i^1, v_i^2) \tag{12}$$

уравнением вида

$$\boldsymbol{v}(Z) = u(Z)G(Z),$$

где $G(Z) = [g_1(Z)g_2(Z)]$ — полиномиальная матрица генераторов.

Введем понятие *усеченного сверточного кода.* Формально усечение определим следующим образом. Для любого полинома $a(Z) = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_i Z^i + \ldots$ обозначим через $\lceil a(Z) \rceil^n = a_0 + a_1 Z + \ldots + a_n Z^n$ полином, полученный из $a(Z)$ отбрасыванием всех членов, степень которых больше n. Кодовыми последовательностями усеченного сверточного кода будем называть все последовательности вида $\lceil \boldsymbol{v}(Z) \rceil^{n/2}$, где $\boldsymbol{v}(Z)$ — кодовое слово исходного сверточного кода. В дальнейшем, говоря о сверточном коде, мы будем подразумевать множество указанных усеченных последовательностей.

Для поиска кодов с наименьшими значениями ВНМ будем использовать метод перебора генераторов. Для уменьшения перебора мы, без потери оптимальности, ограничимся перебором таких пар генераторов $(g_0(Z), g_1(Z))$, для которых выполнены следующие условия:

- $g_{00} = g_{10} = 1$.
- $\deg(g_0(D)) \geq \deg(g_1(D))$.
- Если $\deg(g_0(D)) = \deg(g_1(D))$, то мы рассматриваем только такие пары генераторов, для которых $|g_0(D)| \geq |g_1(D)|$, где

$$|a(D)| = \sum_{i=0}^{\deg(a(D))} a_i q^i.$$

- НОД $(g_0(D), g_0(D)) = 1$.

Для каждой пары генераторов производится оценка ошибки квантования случайной величины равномерно распределенной в гиперкубе $[0, q]^n$. При этом в качестве функции расстояния выбирается функция циклического расстояния $\rho(\cdot, \cdot)$ из (6). Для поиска ближайшего кодового слова в гиперкубе используется алгоритм Витерби. Ошибка квантования пересчитывается в величину ВНМ согласно (7).

В таблицах 2, 3 и 4 приведены генераторы оптимальных кодов для $q = 2$, $q = 3$ и $q = 5$. Полученные коды порождают числовые решетки, являющиеся наилучшими по критерию ВНМ из известных на сегодняшний момент. Для сравнения приведем значение второго нормализованного момента решетки Лича Λ_{24}, порожденной $(24, 12)$-кодом Голея. Для данной решетки значение ВНМ равно 0.0658, что соответствует энергетическому выигрышу в 1.0259 дБ. Заметим, что уже при количестве состояний равном 8 найден двоичный сверточный код, энергетический выигрыш для которого составляет 1.0657 дБ.

В четвертой главе на основе найденных кодовых конструкций предложен алгоритм квантования в числовых решетках. Дано обобщение

Таблица 2. Оптимальные двоичные сверточные коды со скоростью 1/2 и их вторые нормализованные моменты. Генераторы представлены в восьмеричном виде.

Кол-во состояний.	Генератор кода	G_n	Эн. выигрыш, дБ
2	[3;1]	0.0733	0.5571
4	[7;5]	0.0665	0.9800
8	[17;13]	0.0652	1.0657
16	[31;23]	0.0643	1.1261
32	[61;57]	0.0634	1.1873
64	[165;127]	0.0628	1.2286
128	[357;251]	0.0623	1.2633
256	[625;467]	0.0620	1.2843
512	[1207;1171]	0.0618	1.2983
∞	—	0.0598	1.4389

Таблица 3. Оптимальные троичные сверточные коды со скоростью 1/2 и их вторые нормализованные моменты.

Кол-во состояний.	Генератор кода	G_n	Эн. выигрыш, дБ
3	[12;11]	0.0720	0.6349
9	[121;111]	0.0663	0.9931
27	[1211;1112]	0.0641	1.1396
81	[11222;10121]	0.0626	1.2424
243	[110221;101211]	0.0617	1.3053
729	[1000112;112122]	0.0614	1.3265
∞	—	0.0586	1.5231

Таблица 4. Оптимальные пятеричные сверточные коды со скоростью 1/2 и их вторые нормализованные моменты.

Кол-во состояний.	Генератор кода	G_n	Эн. выигрыш, дБ
5	[14;13]	0.0716	0.6591
25	[131;102]	0.0642	1.1328
125	[1323;1031]	0.0622	1.2703
625	[10314;10133]	0.0613	1.3336
∞	—	0.0585	1.5229

понятия нулевой зоны квантования на многомерный случай. Приведены результаты квантования для обобщенных гауссовских величин.

Числовую решетку, порожденную линейным блоковым кодом можно представить в виде

$$\Lambda(C) = \bigcup_{m=1}^{q^k} \{q\mathbb{Z}^n + \boldsymbol{c}_m\},$$

где $\boldsymbol{c}_m$ — кодовые слова кода C, а $\mathbb{Z}^n$ — n-мерная целочисленная решетка. Другими словами, числовая решетка $\Lambda(C)$ состоит из объединения q^k смежных классов, лидерами которых являются кодовые слова из C.

Любой точке решетки λ можно сопоставить пару $(m, \boldsymbol{b})$, где m — номер кодового слова, а $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ определяет точку из множества $q\mathbb{Z}^n$. Точка решетки $\boldsymbol{\lambda}$ может быть получена из пары $(m, \boldsymbol{b})$ по формуле

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c}_m + q\boldsymbol{b}.$$

Поиск ближайшей точки в решетке к заданной точке пространства $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ сводится, к поиску вектора индексов $\boldsymbol{b}$ и номера кодового слова $m \in \{0, \dots, q^k - 1\}$, которые минимизируют величину ошибки $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = n^{-1}||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}||^2 = n^{-1}||\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{c}_m + q\boldsymbol{b})||^2$. Основной член в данной задаче минимизации можно представить в виде

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}\|^2 \;=\; \min_m \sum_{t=1}^{n} \mu(x_t, c_{mt}) = \min_m \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_m),$$

где $\mu(\cdot, \cdot)$ — аддитивная функция расстояния вида

$$\begin{aligned} \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) &= \sum_{t=1}^{n} \mu(x_t, c_t), \\ \mu(x, c) &= \min_b (x - c - qb)^2 = (x - c - qb_0)^2 . \end{aligned} \tag{13}$$

Индекс b_0 в выражении (13) может быть получен при помощи операции скалярного квантования с шагом q, примененной к $x - c$.

На рисунке 2 приведен алгоритм поиска ближайшей точки в числовой решетке, порожденной линейным блоковым кодом. Первый шаг алгоритма, связанный с вычислением метрик и индексов, имеет линейную по длине n входного вектора сложность. Таким образом, сложность приведенного алгоритма определяет используемый алгоритм декодирования линейных кодов. В данной работе в качестве такого алгоритма выбран алгоритм Витерби. Для сверточных кодов сложность алгоритма Витерби определяется количеством состояний решетки сверточного кода.

Для передачи пары $(m, \boldsymbol{b})$ декодеру используется алгоритм арифметического кодирования. Пусть $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ — информационная

Input: Последовательность источника $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Output: Номер m кодового слова $\boldsymbol{c}_m \in C$, последовательность индексов $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

`Вычисление метрик и индексов:`
for $t = 1$ **to** n **do**
  for $c = 0$ **to** $q-1$ **do**
    $b_t(c) = \left\langle \frac{x_t - c}{q} \right\rangle$
    $\mu_t(c) = (x_t - c - qb_t(c))^2$
  end
end

`Поиск кодового слова:`
Найти кодовое слово $\boldsymbol{c}_m = (c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mn})$, минимизирующее расстояние $\mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c_m}) = \sum_{t=1}^{n} \mu_t(c_{mt})$, используя любой алгоритм декодирования линейных кодов.

`Результат:`
Результатом алгоритма является номер m и вектор индексов $\boldsymbol{b} = (b_1(c_1), b_2(c_2), \ldots, b_n(c_n))$.

Рис. 2. Алгоритм поиска ближайшей точки в решетке.

последовательность, соответствующая кодовому слову $\boldsymbol{c}_m$. Кодирование пары $(\boldsymbol{c}_m, \boldsymbol{b})$ эквивалентно кодированию пары $(m, \boldsymbol{b})$ или пары $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})$.

Разобьем кодовое слово с номером m и вектор индексов $\boldsymbol{b}$ на пары, соответствующие информационным символам

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k), \boldsymbol{c}_t = (c_t^1, c_t^2), \quad \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k), \boldsymbol{b}_t = (b_t^1, c_t^2).$$

Для кодирования пары $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})$ введем условные распределения

$$\left\{\vartheta(u_t|\boldsymbol{\sigma}_t), \quad \boldsymbol{\sigma}_t \in \mathbb{GF}_q^m, t = 1, \ldots k\right\},$$
$$\left\{\varphi(\boldsymbol{b}_t|\boldsymbol{c}_t) = \varphi(b_t^1|c_t^1)\varphi(b_t^2|c_t^2), \quad \boldsymbol{b}_t = (b_t^1, b_t^2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \boldsymbol{c}_t = (c_t^1, c_t^2) \in \mathbb{GF}_q^2\right\},$$

где $\boldsymbol{\sigma}_t$ — состояние кодера сверточного кода в момент времени t. Считаем, что данные условные распределения известны кодеру и декодеру. Распределение вероятностей на парах $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b})$ имеет вид

$$p(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}) = \prod_{t=1}^{k} \vartheta(u_t|\boldsymbol{\sigma}_t)\varphi(b_t^1|c_t^1)\varphi(b_t^2|c_t^2).$$

Введем понятие *нулевой зоны* для векторного квантования. Зафиксируем параметр алгоритма Δ и заменим входную случайную величину x на другую случайную величину по следующему правилу

$$\xi = \begin{cases} x+\Delta, & x < -\Delta, \\ 0, & -\Delta \le x \le \Delta, \\ x-\Delta, & x > \Delta. \end{cases}$$

К новой случайной величине применим алгоритмы поиска ближайшей точки в числовой решетке и алгоритм кодирования пары $(m, \boldsymbol{b})$. Параметр Δ различен для различных распределений. В приведенных далее результатах данный параметр выбирался из множества $\Delta \in \{2^{-s}\}, s = 0, 1, 2, 3$.

Определим правило восстановления декодером аппроксимирующего вектора $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ по принятой паре $(m, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n))$. Зафиксируем известный декодеру параметр L, и будем считать известными декодеру центрирующие значения, вычисленные с учетом наличия расширенной нулевой зоны как

$$\beta_{cb} = \begin{cases} 0, & b = 0, \quad c = 0, \\ \dfrac{\sum_{i \in J_{cb}} x_i}{|J_{cb}|} + \Delta, & b \in \{1, ...L\}, \quad c \in \{0, \ldots, q-1\} \text{ или} \\ & b = 0, \quad c \in \{1, \ldots, q-1\}, \\ \dfrac{\sum_{i \in J_{cb}} x_i}{|J_{cb}|} - \Delta, & b \in \{-L, ..., -1\}, \quad c \in \{0, \ldots, q-1\}, \end{cases}$$

где множества J_{cb} определены как $J_{cb} = \{t | c_t = c, b_t = b\}$.

После получения пары $(m, \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n))$ декодер находит соответствующее кодовое слово $\boldsymbol{c}_m = (c_{m1} ..., c_{mn})$ и определяет восстановленное значение $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ как

$$y_t = \begin{cases} \beta_{c_{mt} b_t}, & b_t \in \{-L, ..., -1, 1, ...L\}, \\ c_{mt} + q b_t - \Delta, & b_t < -L, \\ c_{mt} + q b_t + \Delta, & b_t > L. \end{cases}$$

В таблице 5 приведены данные квантования источника, имеющего гауссовское распределение вероятности. Оптимальный параметр нулевой зоны Δ для гауссовского распределения равен 0. Здесь и далее величина ошибки приведена в децибелах как $-10 \log_{10} D$. В скобках приведены данные из работы [1][1]. Так же в таблице приведены данные для оптимального скалярного квантователя из [2][2]. Полученный по сравнению с [1] выигрыш составляет до 0.8 дБ.

В таблицах 6 и 7 приведены данные квантования распределения Лапласа и обобщенного гауссовского распределения с параметром $\alpha = 0.5$.

[1] [1] Yang, L. and Fischer, T. R. A new trellis source code for memoryless sources. IEEE Trans. on Inf. Theory, 44(7):3056–3063, November 1998.

[2] [2] Farvardin, N. and Modestino, J. W. Optimum quantizer performance for a class of non-Gaussian memoryless sources. IEEE Trans. on Inf. Theory, IT-30(3):485–497, May 1984.

Таблица 5. Гауссовское распределение. В скобках приведены данные из [1].

Скорость	Количество состояний						$H(D)$	[2]
	2	4	8	32	64	512		
0.5	2.29	2.50	2.55	2.64	2.69	2.76	3.01	2.10
1	5.06	5.50 (5.33)	5.61	5.71 (5.64)	5.74	5.85	6.02	4.64
2	11.08	11.50 (11.15)	11.63	11.72 (11.37)	11.77	11.84	12.04	10.55
3	17.11	17.55 (16.71)	17.64	17.74 (16.96)	17.80	17.87	18.06	16.56

Приведены значения для случаев отсутствия нулевой зоны ($\Delta = 0$) и оптимального значения нулевой зоны из множества $\{2^{-s}\}, s = 0, 1, 2, 3$. Полученный по сравнению с [1] выигрыш достигает 1.3 дБ.

В пятой главе рассматривается квантование источников Гаусса-Маркова (ГМ). Исследованы теоретические характеристики квантователей на основе ортогональных преобразований для различных типов ГМ источников. Предложен алгоритм квантования источников ГМ на основе ортогонального преобразования с перекрытиями.

Источник Гаусса-Маркова задается авторегрессионным процессом, элементы которого определяются равенством

$$x_i = -\sum_{j=1}^{p} a_j x_{i-j} + z_i, \quad i = p+1, p+2, \ldots,$$

где $a_j, \quad j = 1, \ldots, p$ — фиксированные коэффициенты, а $z_i, \quad i = p+1, p+2, \ldots$ — независимые случайные величины, распределенные по гауссовскому закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_z. В работе нас будут интересовать источники ГМ со следующими коэффициентами

Теоретическим ответом на вопрос о квантовании источников ГМ является метод, основанный на преобразовании Карунена-Лоэва (КЛ) и последующем квантовании вектора независимых гауссовских величин с различными дисперсиями. Данный подход является неудовлетворительным, так как сложность преобразования КЛ равна n^2.

В работе рассмотрены две альтернативы преобразованию КЛ. Это дискретное косинусное преобразование и ортогональное преобразование с перекрытиями (ОПП). При помощи моделирования показано, что ортогональное преобразование с перекрытиями длины 16 имеет теоретические характеристики для рассматриваемых источников близкие к величине ε-энтропии.

Таблица 6. Распределение Лапласа. Данные приведены для случая $\Delta = 0$ и оптимального значения Δ из множества $\{2^{-s}\}, s = 0, 1, 2, 3$. В скобках приведены данные из [1].

Скорость	Δ	Количество состояний					$H(D)$	[2]
		2	4	8	32	512		
0.5	0 0.25	2.92 3.06	3.03 3.15	3.06 3.17	3.11 3.20	3.21	3.54	3.11
1	0 0.25	5.69 5.87	6.05 6.14 (5.93)	6.14 6.20	6.23 6.33 (6.07)	6.33	6.62	5.76
2	0 0.125	11.68 11.74	12.15 12.15 (11.49)	12.22 12.24	12.32 (11.72)	12.44	12.66	11.31
3	0	17.74	18.15 (17.00)	18.23	18.33 (17.15)	18.44	18.68	17.20

Таблица 7. Обобщенное гауссовское распределение с параметром $\alpha = 0.5$. Данные приведены для случая $\Delta = 0$ и оптимального значения Δ из множества $\{2^{-s}\}, s = 0, 1, 2, 3$. В скобках приведены данные из [1].

Скорость	Δ	Количество состояний					$H(D)$	[2]
		2	4	8	16	32		
0.5	0 0.5	4.74 5.19	4.81 5.22	4.83 5.23	4.83 5.23	4.84 5.24	5.62	5.37
1	0 0.5	8.00 8.53	8.13 8.53 (8.11)	8.18 8.62	8.22 8.64	8.22 8.64 (8.29)	9.21	8.61
2	0 0.25	14.31 14.56	14.71 14.90 (14.13)	14.80 15.03	14.90 15.10	14.94 15.14 (14.47)	15.60	14.58
3	0 0.25	20.54 20.62	20.96 21.06 (19.61)	21.04 21.14	21.10 21.20	21.16 21.26 (19.92)	21.70	20.49

$AP(1)$	$a_1 = 0.9$
$AP(2)$	$a_1 = 1.515, a_2 = -0.752$
$AP(3)$	$a_1 = 1.75, a_2 = -1.22, a_3 = 0.301$

ОПП является линейным преобразованием. На каждом шаге на преобразование поступает блок данных длины L, на выходе преобразования оказывается блок длины N. В работе рассматривается случай, когда $L = 2N$. Формально коэффициенты матрицы ОПП имеют вид

$$a_{k,n} = \sqrt{\frac{2}{N}} h(n) \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{N+1}{2}\right)\right],$$

где $0 \leq k \leq N-1, 0 \leq n \leq L-1$, $h(n)$ — весовая функция или функция окна. В работе в качестве весовой функции используется синусоидальное окно

$$h(k) = \sin\left[\frac{\pi}{2N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right], k = 0, \ldots, 2N-1.$$

Для построения квантователя источника Гаусса-Маркова введем дополнительный параметр алгоритма, $0 \leq k \leq N$. Векторы длины N, $\boldsymbol{x}_j = x_{(j-1)N}, x_{(j-1)N+1}, \ldots x_{jN}, j = 1, \ldots, n/N$, полученные, после ортогонального преобразования с перекрытиями, будем обрабатывать следующим образом. Подблоки $x_{(j-1)N}, x_{(j-1)N+1}, \ldots x_{(j-1)N+k}$ обработаем при помощи решетчатого квантователя, построенного ранее, а подблоки $x_{(j-1)N+k+1}, \ldots x_{jN}$ будем полагать проквантованными в ноль. При этом никакой информации о принудительно проквантованных в ноль элементах не передается декодеру, т.к. считается, что параметр k известен заранее.

В таблицах 8, 9 и 10 приведены результаты квантования источников АР(1), АР(2) и АР(3). Приведены данные из работы [3][3] для источников АР(1) и АР(2). Для источника АР(3) приведены данные из [4][4] Полученный выигрыш по сравнению с известными методами достигает 2 дБ.

<u>В заключении</u> сформулированы основные результаты диссертационной работы.

[3] [3] Lee, Cheng-Chien and Laroia, R. Trellis-based scalar vector quantization of sources with memory. IEEE Trans. on Inf. Theory, 46(1):153–170, January 2000.

[4] [4] Marcellin, M. and Fischer, M. Trellis coded quantization of memoryless and Gauss-Markov sources. IEEE Trans. Commun., COM-38(1):82–93, January 1990.

Таблица 8. Квантование источника АР(1) на основе ортогонального преобразования с перекрытиями.

Скорость	Количество состояний						$H(D)$	[3]
	2	4	8	16	32	512		
1	12.37	12.53	12.6	12.62	12.64	12.69	13.23	12.14
2	17.93	18.37	18.46	18.52	18.56	18.67	19.25	18.31
3	24.13	24.53	24.62	24.69	24.73	24.85	25.27	24.38

Таблица 9. Квантование источника АР(2) на основе ортогонального преобразования с перекрытиями.

Скорость	Количество состояний						$H(D)$	[3]
	2	4	8	16	32	512		
1	13.42	13.71	13.78	13.83	13.86	14.01	14.96	12.95
2	20.32	20.63	20.70	20.73	20.77	20.9	21.64	20.47
3	26.37	26.77	26.84	26.91	26.95	27.07	27.66	26.62

Таблица 10. Квантование источника АР(3) на основе ортогонального преобразования с перекрытиями. В скобках приведены данные из [4].

Скорость	Количество состояний						$H(D)$
	2	4	8	16	32	512	
1	13.57 —	13.78 [11.03]	13.82 [11.65]	13.85 [12.24]	13.88 [12.64]	13.94 —	14.59
2	21.15 —	21.38 [19.03]	21.45 [19.74]	21.50 [20.23]	21.53 [20.54]	21.62 —	22.16
3	26.81 —	27.2 [25.42]	27.35 [26.04]	27.41 [26.38]	27.45 [26.58]	27.57 —	28.18

Основные результаты работы.

1. Разработан метод оценки второго нормализованного момента для числовых решеток, порожденных линейными блоковыми q-ичными кодами.

2. На основе предложенного метода построена граница для второго нормализованного момента числовых решеток, явно зависящая от величины q. При помощи полученной границы показано, что уже при $q = 3$ существуют линейные блоковые коды, порождающие числовые решетки, второй нормализованный момент которых близок к границе сферической упаковки. Показано, что полученная граница при q стремящемся к бесконечности совпадает с границей сферической упаковки.

3. Предложен метод поиска сверточных кодов, порождающих числовые решетки с наименьшим значением второго нормализованного момента. На основе данного метода найдены сверточные коды, порождающие числовые решетки с лучшими значениями второго нормализованного момента.

4. Разработан алгоритм квантования для источников с гауссовским распределением вероятности. Предложен метод расширения многомерной нулевой зоны для источников, имеющих обобщенное гауссовское распределение вероятности.

5. При помощи метода численного моделирования показано, что предложенный алгоритм квантования гауссовских величин выигрывает по сравнению с известными методами до 0.8 дБ.

6. При помощи метода численного моделирования показано, что для источников имеющих обобщенное гауссовское распределение с параметром формы меньше 1.0, предложенный алгоритм квнтования выигрывает по сравнению с известными методами до 1.3 дБ.

7. На основе ортогонального преобразования с перекрытиями разработан алгоритм квантования источников Гаусса-Маркова. На основании метода численного моделирования показано, что полученные результаты превосходят известные на величину до 2 дБ.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. **Кудряшов Б.Д., Юрков К.В.** Границы случайного кодирования для второго момента многомерных числовых решеток // Пробл. передачи информ. 2007. т. 43. № 1. С. 67–79.

2. **Kudryashov B.D., Yurkov K.V.** Random coding bounds for the second moments of lattices // Proc. of the Tenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory(ACCT'2006). M.: IITP RAS. 2006. Pp. 170–173.

3. **Yurkov K.V., Kudryashov B.D.** Random quantization bounds for lattices over q-ary linear code // Proc. of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'2007). 2007. Pp. 236–240.

4. **Юрков К.В., Кудряшов Б.Д.** Эффективность векторного квантования на основе числовых решеток в системах сжатия видео информации // Сборник трудов 8-й международной конференции "Цифровая обработка сигналов и ее применение". М. 2006. С. 417–419.

5. **Юрков К.В.** Векторное квантование случайных последовательностей, распределенных по обобщенному гауссовскому закону // Научная сессия ГУАП. Ч II. Технические науки. С-П.: ГУАП. 2006. С. 359–362.

6. **Юрков К.В., Кудряшов Б.Д.** Вторые моменты решеток на основе сверточных кодов // Научная сессия ГУАП. Ч I. Технические науки. С-П.: ГУАП. 2007. С. 141–144.

7. **Юрков К.В.** Квантователи малых размерностей // Восьмая научная сессия аспирантов ГУАП. Ч I. Технические науки. С-П.: ГУАП. 2005. С. 394–397.