На правах рукописи

КУЗНЕЦОВ ЮРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ ГИПОТЕЗ В СХЕМЕ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

05.13.17 – теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2009

Работа выполнена на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Научный руководитель:

чл.-кор. РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор А.Н. Ширяев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Мазалов
доктор физико-математических наук,
ст. науч. сотр. Б.С. Дарховский

Ведущая организация:

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Защита состоится "____" ноября 2009 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д.002.077.01 в Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН по адресу: 101447, Москва, ГСП-4, Б. Каретный пер., 19, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.

Автореферат разослан "____" октября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.ф.-м.н. И.И. Цитович

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы.

С развитием информационных технологий возросла потребность в эффективной обработке и принятии оптимальных решений относительно производственных, финансовых, экономических и т.п. процессов. Процессы могут быть охарактеризованы своими свойствами, имеющими как количественную, так и качественную природу. Одной из важных задач является различение нескольких утверждений (гипотез) относительно качественных характеристик процессов. Примером такого различения гипотез может быть задача радиолокации о наличии или отсутствии цели на одном из нескольких направлений, задача о нахождении оптимального вложения в финансовые инструменты (акции, опционы, фьючерсы и т.п.), выбор наилучшего лекарственного препарата среди нескольких, задача об оптимальном выборе стратегии производства или инвестиционного проекта. Во всех таких задачах необходимо исследовать качественное поведение имеющегося процесса (есть ли цель или нет в задаче радиолокации, стоит или же нет вкладывать средства в данную ценную бумагу, эффективнее или нет данный медицинский аппарат, чем другой и т.д.).

При решении таких задач первоначально строится модель поведения изучаемого процесса с несколькими качественно разными возможностями развития процесса во времени. Далее выносятся предположения (гипотезы) относительно этих характеристик и производятся наблюдения за процессом. В условиях конечности как времени наблюдений, так и ресурсов, необходимых для проведения дополнительных наблюдений, накладываются ограничения на количество возможных наблюдений.

В работе Неймана и Пирсона[1] была решена задача о различении гипотез при фиксированном количестве возможных наблюдений и при заданных ограничениях на ошибки первого и второго типов.

В дальнейшем были проведены исследования задачи о различении гипотез, когда количество наблюдений заранее не фиксировано и могло меняться в зависимости от наблюденных значений процесса. Эта так называемая задача последовательного различения *двух гипотез* была сформулирована Вальдом[2]. Им же была указана процедура, основанная на последовательном критерии отношения вероятностей, которая, как им было показано в совместной работе с Волфовитцем[3], оказалась оптимальной в *условно вариационной задаче*: при заданных ограничениях на вероятности ошибочных решений (вероятности ошибок первого и второго рода) найти процедуру, которая давала бы минимальную длительность наблюдений по обоим гипотезам. Во многих случаях последовательный критерий оказывается более эффективным, чем процедура Неймана-Пирсона с теми же ошибками первого и второго рода. Этой же задаче посвящены работы Блекуэлла и Гиршика [4],Ширяева[5], Лемана[6], Чернова[7].

В непрерывном времени задача о различении гипотез также рассматривалась. Точное решение *байесовской задачи* после-

---

[1] *Neyman J., Pearson E.S.* On the problem of the most efficient test of statistical hypothesis// Phil. Trans. Roy. Soc., A 231. – 1933. – P.289-337.

[2] *Wald A.* Sequential analysis. – N.Y.: Wiley, 1947.

[3] *Wald A.,Wolfowitz J.* , Optimum character of the sequential probability ratio test// Ann. Math. Stat., – 1948. – №19. – P. 326–339.

[4] *Blackwell D.,Girshick M.A.* Theory of Games and Statistical Decisions. – N.Y.: Wiley & Sons., 1954.

[5] *Shiryaev A. N.* Two problems of sequential analysis// Cybernetics. – 1967. – №3. – P.63-69.

[6] *Lehmann E. L.* Testing Statistical Hypotheses. – N.Y.: Wiley, 1959.

[7] *Chernoff H.* Sequential Analysis and Optimal Design. Philiadelphia:SIAM. 1972.

довательного различения двух гипотез о сносе броуновского движения (в дальнейшем изложении – *классической задачи*) было дано Ширяевым[8], из которого следовала и оптимальность вальдовской процедуры в случае броуновского движения.

Естественным обобщением классической является задача (первоначально возникшая из задачи радиолокации для обнаружения цели по нескольким направлениям) различения гипотез, когда наблюдаемых процессов может быть несколько (*многомерная задача*). При этом предполагается, что наблюдение в каждый момент времени можно проводить только за одним процессом (по одному *направлению*).

В литературе уже рассматривалась эта задача для дискретного времени и были получены некоторые результаты относительно функции риска и оптимальной стратегии. Задача была впервые сформулирована и изучалась А.Н. Ширяевым [9], Кайроли и Далангом[10].

Однако задачи, встречающиеся в реальности, включают в себя время как непрерывную величину. До сих пор корректной постановки и решения задачи в непрерывном времени произведено не было.

Цель работы.

Постановка и решение в непрерывном времени задачи о различении гипотез в схеме с возможностью переключения между наблюдаемыми процессами.

[8] *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. – 2-е изд., перераб.– М.:Наука,1976.

[9] *Ширяев А.Н.* К теории решающих функций и управлению процессом наблюдения по неполным данным// Trans. Third Prague Conference on Inform. Theory, Statistical Decision Functions and Stochastic Processes, Prague. – 1964. – P.657-681.

[10] *Cairoli R., Dalang Robert C.* Sequential Stochastic Optimization. – N.Y.: Wiley, 1996.

Задачи работы.

1. Нахождение алгоритма подсчета функции риска в дискретном времени на конечном промежутке времени.

2. Изучение свойств функции риска и областей продолжения наблюдений и остановки. Обобщение результатов, полученных для классической задачи.

3. Постановка задачи для непрерывного времени. Определение понятия стратегии и функции риска.

4. Нахождение функции риска и оптимального момента остановки и границ областей продолжения наблюдений в непрерывном случае.

5. Изучение сходимости стратегий управления в задаче с дискретным временем к стратегиям управления в непрерывной задаче и исследование свойств связанных с такой задачей сингулярных стохастических дифференциальных уравнений.

Методы исследования.

Изучение функций риска и границ областей продолжения наблюдения в дискретном случае производится с помощью методов дискретного стохастического анализа и теории мартингалов, аппарата эксцессивных функций, рекуррентных уравнений типа уравнения Беллмана. В непрерывном времени получение функций риска и границ областей продолжения наблюдений является так называемой задачей Стефана с подвижными границами. Используются методы теории оптимальной остановки случайного процесса, стохастический анализ случайных процессов.

Научная новизна.

В работе впервые найдены оптимальные правила остановки для задачи о различении гипотез в схеме с альтернативными наблюдениями в непрерывной схеме и получены результаты относительно дискретной постановки, обобщающие результаты в классической задаче.

Теоретическая и практическая значимость.

Работа относится к области стохастического анализа случайных процессов и носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в тех областях, где возникают вопросы исследования моделей и алгоритмов извлечения данных (в частности, вопросы о статистическом последовательном различении гипотез).

Научные результаты, выносимые на защиту.

Основные результаты диссертации состоят в следующем :

1.В случае дискретного времени доказано, что функция риска является эксцессивной минорантой функции риска при мгновенной остановке. Получена качественная характеристика структуры областей остановки. Показано, что функция риска в задаче с конечным числом наблюдений есть степень оператора перехода за один шаг.

2. В непрерывной постановке найдены функция риска и оптимальная стратегия наблюдения за процессами.

3. Доказана равномерная сходимость по вероятности управлений в задачах с дискретным временем к процессу управления в задаче с непрерывным временем.

4. Показана равномерная сходимость в среднеквадратическом процессов управления в задачах последовательного различения гипотез с альтернативными наблюдениями в дискретном времени (дискретных схемах) к процессу, являющемуся решением стохастического дифференциального уравнения с сингулярными коэффициентами.

Апробация работы.

Результаты докладывались на Ломоносовских чтениях механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова (МГУ, 2006,2009 г.г.), семинаре "Optimal stopping and stochastic control" (ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск, 22-26 августа 2005 г.), на научно-исследовательском семинаре "Стохастический анализ и теория мартингалов" в МГУ им. М.В.Ломоносова и в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН под руководством Ширяева А.Н. в 2005, 2007 гг..

Публикации.

По теме диссертации опубликованы 4 работы. Из них 2 статьи напечатаны в ведущих рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК. Их список приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 100 страниц. Список литературы содержит 55 источников, количество рисунков в работе – 7.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность задачи различения гипотез в схеме с альтернативными наблюдениями, ее связь с задачами теории основ информатики, проведен обзор известных результатов, связанных с темой диссертации, сформулирована цель и методы исследования, а также приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена постановке и исследованию задачи о различении гипотез с альтернативными наблюдениями в дискретном времени.

Задача, рассматриваемая в дискретном времени, выглядит следующим образом. Предполагается, что наблюдения возможны в моменты времени, кратные некоторому параметру Δ. В самом начале наблюдений разыгрывается значение некоторой случайной величины θ, принимающей одно из трех возможных значений $\theta = 0, 1, 2$. Ее значение неизвестно. Пусть имеются два направления – *первое* и *второе*. По первому направлению можно наблюдать случайные величины $X_1, X_2, X_3, \ldots$, а по второму направлению – случайные величины $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ Распределение этих случайных величин зависит от θ. В каждый момент времени можно наблюдать одно из этих двух направлений. За каждое наблюдение берется плата $c > 0$. В некоторый момент времени τ (момент остановки относительно фильтрации, порожденной наблюдаемыми процессами) необходимо остановить наблюдения и сделать вывод d относительно неизвестного параметра θ ($d = 0$, если сделан вывод, что $\theta = 0$ и $d = 1$, если сделан вывод о том, что $\theta = 1, 2$). Задача заключается в нахождении функции риска

$$r = \inf_{(\tau,d)} \mathrm{E}\left(\alpha \mathrm{I}(\theta = 0, d = 1) + \beta \mathrm{I}(\theta = 1, 2, d = 0) + c\tau\right),$$

где $\mathrm{I}(\bullet)$ – индикатор, α, β – плата за ошибки первого и второго рода соответственно.

Стратегия наблюдений состоит из правила переключения между направлениями, момента остановки и окончательного решения относительно значения неизвестного параметра θ. Предполагается известным априорное распределение параметра θ, т.е. считаются заданными вероятности

$$\pi_i = \mathrm{P}\left(\theta = i\right), i = 0, 1, 2.$$

Удобно ввести $\pi_i(t) = \mathrm{P}\left(\theta = i|\, \mathcal{F}_t\right)$ – апостериорные вероятности гипотез $\theta = i$ для $i = 0, 1, 2$ в момент времени t, где $\mathcal{F}_t$ – это σ-алгебра, порожденная наблюдениями за процессами до момента времени t. Кайроли и Даланг[11] показали, что в за-

[11] *Cairoli R., Dalang Robert C.* Sequential Stochastic Optimization. – N.Y.: Wiley, 1996.

даче с дискретным временем оптимальное решение зависит от наблюдений только через апостериорные вероятности гипотез $\pi_i(t)$, $i = 0, 1, 2$.

Также ими было показано, что в дискретной схеме пространство возможных значений апостериорных вероятностей гипотез разбивается на две области: *остановки* (D) и *продолжения наблюдений* (C). Это означает, что если значение $(\pi_1(t), \pi_2(t))$ находится в области D, то в этот момент необходимо остановиться и принять решение о значении случайной величины θ. Если же $(\pi_1(t), \pi_2(t))$ находится в области C, то необходимо продолжить наблюдения. В последнем случае нужно определить, какое направление из двух следует наблюдать. Был указан способ, позволяющий оптимально выбрать направление, но он предполагает известным точное значение функции риска.

В ***третьем*** разделе доказано

Утверждение 5*. *В одношаговой модели оптимальный выбор направления для наблюдения устроен следующим образом: если* $\pi_1 > \pi_2$ $(\pi_1 < \pi_2)$, *то необходимо наблюдать первое(вторoе) направление.*

Для конечного временного интервала, когда возможно максимум n наблюдений, доказан аналог соответствующего утверждения для одномерной схемы:

Теорема 2. *Функция риска в случае конечного дискретного временного горизонта* $[0, \mathrm{T}]$ *есть T-ая степень оператора перехода Q, примененного к функции риска от мгновенной остановки*

$$\rho(\pi_1, \pi_2) = \left(Q^T g\right)(\pi_1, \pi_2),$$

*нумерация утверждений и теорем такая же, как и в диссертации *где*

$$(Qf)(x,y) = \inf\Big(f(x,y), E^X_{(x,y)} f(A_{(1,0)}) + c, E^Y_{(x,y)} f(A_{(0,1)}) + c\Big)$$

и

$$A_{(v_1,v_2)} = (\pi_1(v_1,v_2), \pi_2(v_1,v_2)),$$
$$\pi_i(v_1,v_2) = \mathrm{P}\left(\theta = i | \mathcal{F}_{v_1,v_2}\right), i = 1, 2.$$

В ***четвертом*** разделе для бесконечного временного интервала получена характеризация риска, как максимальной c-эксцессивной миноранты (где c-эксцессивная функция– это такая функция $f(\pi_1,\pi_2)$, что $f(\pi_1,\pi_2) \geq Qf(\pi_1,\pi_2)$):

Теорема 3. *Пусть $v(x,y)$ максимальная c-эксцессивная миноранта $g(x,y)$, и $\rho(x,y)$ функция риска. Тогда $v(x,y) = \rho(x,y)$, где $(x,y) = (\pi_1,\pi_2)$ известные априорные вероятности.*

Вторая глава посвящена различным постановкам задачи в непрерывном времени и подготовке технического аппарата для решения задачи в непрерывном времени.

В непрерывном времени задача первоначально возникла в радиолокации, как проблема обнаружения цели.

Как и ранее, имеется прибор (*локатор*), который может наблюдать в одном из двух направлений (*север,юг*). Допускается переключение с одного *направления* на другое. Требуется различить две гипотезы: H_0– интересующая нас *цель* присутствует на одном из этих направлений, H_1– цели нет. Одна из возможных постановок задачи состоит в том, чтобы при заданных ограничениях на вероятности ложных тревог минимизировать среднее время до принятия решений (*цель есть/цели нет* или *цель есть на том или другом направлении/цели нет*).

Настоящая диссертация посвящена решению формулируемых далее задач последовательного различения гипотез в предположении, что отсутствие цели моделируется броуновским движением (*белым* шумом в различной интерпретации), её же наличие – броуновским движением со сносом.

При формулировке соответствующей задачи для случая непрерывного времени возникают некоторые проблемы при определении стратегии. Поскольку наблюдения производятся в непрерывном времени, необходимо определить понятие переключения. Самое простое определение *стратегии переключения* заключается в задании некоторой последовательности моментов остановки $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ Предполагается, что на каждом интервале $[\tau_k, \tau_{k+1})$ наблюдается какое-то направление — первое или второе. В момент τ_k происходит переключение с наблюдаемого в данный момент направления на другое. Задача заключается в определении оптимального правила переключений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, момента остановки τ и решающего правила d, минимизирующих функцию риска

$$R = \inf_{(\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots, d)} \mathrm{E}\left(\alpha \mathrm{I}(\theta = 0, d = 1) + \beta \mathrm{I}(\theta = 1, 2, d = 0) + c\tau\right).$$

Это так называемая *импульсная* постановка (*импульсы* – это моменты переключения). Недостатком импульсной постановки является то, что в классе импульсных стратегий может не существовать оптимального правила, хотя можно найти импульсное управление, имеющее риск, как угодно близкий к функции риска R.

Для преодоления этого недостатка можно рассмотреть более общую постановку. В этой более общей постановке расширяется множество возможных управлений. Стратегия определяется уже не моментами переключения, а двумя функциями времени – случайными величинами $T_1(t)$ и $T_2(t)$. Смысл этих значений следующий: $T_i(t)$ – общее время наблюдения i-го направления в течение промежутка времени $[0, t]$. При этом должно быть выполнено условие $T_1(t) + T_2(t) = t$. Кроме того, эти случайные величины $T_1(t)$, $T_2(t)$ должны быть *неупреждающими*, т.е. являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми. Заметим, что это действительно есть расширение множества импульсных управлений, поскольку любое импульсное управление может быть реализовано как некоторое управление $(T_1(t), T_2(t))$, при этом $T_1(t), T_2(t)$ будут неубывающими функциями со скачками в моменты времени τ_k.

В общей постановке расширяется и понятие правила выбора направлений для наблюдения : становится возможным одновременное наблюдение обоих направлений. Формально это означает, что точки роста функций $T_1(t)$ и $T_2(t)$ могут совпадать. При этом суммарное время наблюдения за процессами остается равным t $(T_1(t) + T_2(t) = t)$. Помимо задания $T_1(t)$ и $T_2(t)$ необходимо задать моменты остановки τ и решающее правило d. В общей постановке найти оптимальную стратегию достаточно сложно, поэтому мы ограничимся только *стандартным* правилом выбора направления. *Стандартное управление* $\left(\tilde{T}_1(t), \tilde{T}_2(t)\right)$ определяется таким образом, что выполнено следующее условие: если $\pi_1(t) > \pi_2(t)$, то наблюдается первое направление, если $\pi_1(t) < \pi_2(t)$, то наблюдается второе направление. Существование такого управления (в частности, выбор управления в случае $\pi_1(t) = \pi_2(t)$) рассмотрено в **разделе 2 главы 3**. В дискретном случае определение стандартного управления такое же, но необходимо рассматривать лишь дискретные моменты времени. Оправданность рассмотрения такого типа управлений для дискретной одношаговой модели показана в **разделе 3 главы 1**.

Таким образом, задача состоит в выборе оптимального момента остановки τ и окончательного решения d, минимизирующих функцию риска

$$\rho(\pi_1, \pi_2) = \inf_{(\tau, d)} \mathrm{E}\left(\alpha \mathrm{I}(\theta = 0, d = 1) + \beta \mathrm{I}(\theta = 1, 2, d = 0) + c\tau\right).$$

В такой постановке задача сводится к определению τ (окончательное решение однозначно определяется после остановки). В дальнейшем для простоты изложения будем считать $\alpha = \beta = 1$.

Третья глава посвящена нахождению оптимальной стратегии и границ областей продолжения наблюдений в задаче с непрерывным временем. Пусть

$$\varphi_1(t) = \pi_1(t)/\pi_0(t), \ \varphi_2(t) = \pi_2(t)/\pi_0(t),$$

где $\pi_i(t) = \mathrm{P}\left(\theta = i | \mathcal{F}_t\right), i = 0, 1, 2$. Доказана

Теорема 4.

1. В классе марковских стандартных стратегий оптимальное правило остановки определяется как момент первого попадания вектора $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ в некоторую область остановки наблюдений ($A \cup D$ на рис. 1). Область продолжения наблюдений разбивается на область возможных переключений между направлениями ($C_1 \cup C_2$) и область, где возможно наблюдение лишь одного направления ($B_1 \cup B_2$).

2. Границы γ_1 и γ_2, разделяющие область остановки и область продолжения наблюдений, задаются с помощью кривых $\gamma_1 = \gamma_1(\varphi_1)$ и $\gamma_2 = \gamma_2(\varphi_1)$, которые могут быть для каждого $b = 1 + \varphi_1$ найдены как решения следующей системы уравнений (в области наблюдения B_1)

$$\begin{cases} c\left(\gamma_2 - \gamma_1\right)\left(\frac{b^2}{\gamma_1\gamma_2} - 1\right) = b - 1, \\ c\left(\gamma_2 - \gamma_1\right)\left(\frac{b^2}{\gamma_1\gamma_2} + 1\right) + 2cb\ln\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 1. \end{cases}$$

Функция риска в этой области равна

$$\rho\left(\varphi_1, \varphi_2\right) = 2c\left(\ln \varphi_2\right) \frac{b-\varphi_2}{b+\varphi_2} + \frac{c_1}{b+\varphi_2} + c_2,$$

где

$$c_1 = \tfrac{(b+\gamma_1)(b+\gamma_2)-(\gamma_1+\gamma_2)-2c(\ln\gamma_1)(b-\gamma_1)(b+\gamma_2)+2c(\ln\gamma_2)(b-\gamma_2)(b+\gamma_1)}{\gamma_2-\gamma_1},$$
$$c_2 = \tfrac{(b+\gamma_1-2)-2c(\ln\gamma_1)(b-\gamma_1)+2c(\ln\gamma_2)(b-\gamma_2)}{\gamma_2-\gamma_1}.$$

3. Граница $\tilde{\gamma}_2$, разделяющая область остановки и область продолжения наблюдений, задается в области C_1 с помощью кривой $\tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_2\left(\varphi_1\right)$, которая может быть найдена как решение следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\tilde{\gamma}_2'}{\tilde{\gamma}_2^2} = \frac{\left(1/\varphi_1 - 2\ln\varphi_1\right) - \left(1/\tilde{\gamma}_2 - 2\ln\tilde{\gamma}_2\right)}{\left(\varphi_1 - \tilde{\gamma}_2\right)\left(1+\varphi_1+\tilde{\gamma}_2\right)}$$

с начальным условием $\tilde{\gamma}_2\left(\varphi^*\right) = \gamma_2\left(\varphi^*\right)$, где φ^* таково, что $\gamma_1\left(\varphi^*\right) = \varphi^*$. Функция риска в этой области равна

$$\rho\left(\varphi_1, \varphi_2\right) = 2c\left(\ln \varphi_2\right) \frac{1+\varphi_1-\varphi_2}{1+\varphi_1+\varphi_2} + \frac{c_1}{1+\varphi_1+\varphi_2} + c_2,$$

где

$$c_1 = 2c\left(\tfrac{(1+\varphi_1)^2}{\gamma_2} - \gamma_2 - 2(1+\varphi_1)\ln\gamma_2\right),$$
$$c_2 = \tfrac{1}{1+\varphi_1+\gamma_2}\left(1 - c_1 - 2c(1+\varphi_1-\gamma_2)\ln\gamma_2\right).$$

При доказательстве этой теоремы первоначально формулировалась так называемая *задача Стефана с подвижными границами* для функции риска. Делалось предположение о том, что функция риска удовлетворяет некоторой системе уравнений, а потом доказывалось, что найденное решение системы действительно является функцией риска. Система дифференциальных уравнений задачи Стефана для исследуемой проблемы в области B_1 выглядит следующим образом:

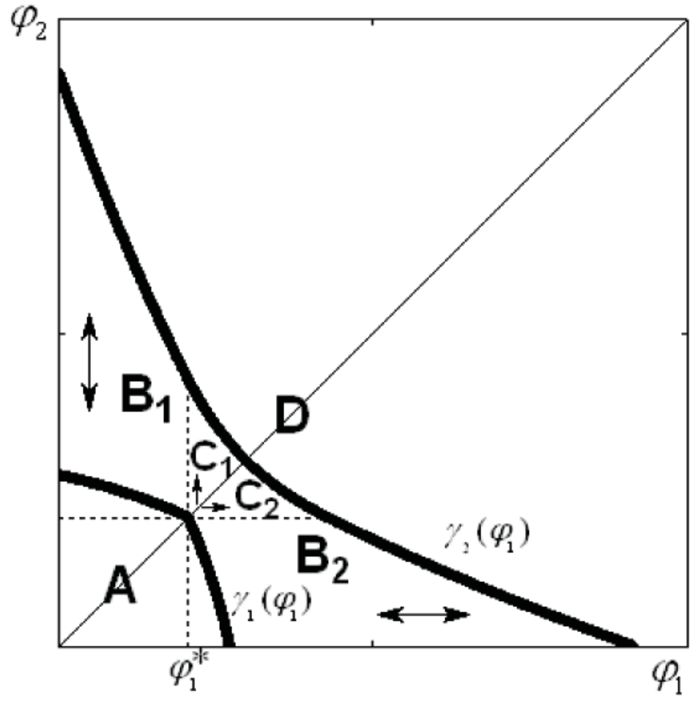

Рис. 1. Области продолжения наблюдения и остановки

$$\begin{cases} \rho'_{\varphi_2}(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_2^2/\left(1+\varphi_1+\varphi_2\right)+(1/2)\rho''_{\varphi_2\varphi_2}(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_2^2=-c, \\ \rho\left(\varphi_1,\gamma_1\left(\varphi_1\right)\right)=\rho_0\left(\varphi_1,\gamma_1\left(\varphi_1\right)\right), \\ \rho\left(\varphi_1,\gamma_2\left(\varphi_1\right)\right)=\rho_0\left(\varphi_1,\gamma_2\left(\varphi_1\right)\right), \\ \rho'_{\varphi_2}\left(\varphi_1,\gamma_1\left(\varphi_1\right)\right)=\left(\rho_0\right)'_{\varphi_2}\left(\varphi_1,\gamma_1\left(\varphi_1\right)\right), \\ \rho'_{\varphi_2}\left(\varphi_1,\gamma_2\left(\varphi_1\right)\right)=\left(\rho_0\right)'_{\varphi_2}\left(\varphi_1,\gamma_2\left(\varphi_1\right)\right), \end{cases}$$

где

$$\rho_0\left(\varphi_1,\varphi_2\right)=\min\left(\pi_0,1-\pi_0\right)=$$
$$=\min\left(\left(\varphi_1+\varphi_2\right)/\left(1+\varphi_1+\varphi_2\right),1/\left(1+\varphi_1+\varphi_2\right)\right).$$

Здесь первое дифференциальное уравнение следует из общей теории оптимальной остановки марковских процессов, остальные уравнения в системе – это условия гладкости функции риска на границах областей продолжения наблюдения (условия гладкого склеивания).

Решения $\gamma_1(\varphi_1)$ и $\gamma_2(\varphi_1)$ этой системы могут быть получены следующим образом. Для каждого фиксированного $k = 1+\varphi_1$ относительно некоторых неизвестных A^* и B^* решается система

$$\begin{cases} C\left(\psi\left(B^*\right) - \psi\left(A^*\right)\right) = 2, \\ C\left(\Psi\left(B^*\right) - \Psi\left(A^*\right)\right) - C\left(B^* - A^*\right)\psi\left(A^*\right) = 2 - 2B^* - k, \end{cases}$$

при этом $C = 2kc$, $\Psi\left(\pi\right) = \left(1 - 2\pi\right)\ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right), \psi\left(\pi\right) = \Psi'\left(\pi\right)$ и по полученным A^* и B^* находятся границы

$$\gamma_1\left(\varphi_1\right) = \frac{A^*}{1-A^*}\left(1+\varphi_1\right), \gamma_2\left(\varphi_1\right) = \frac{B^*}{1-B^*}\left(1+\varphi_1\right).$$

Заметим, что полученная система с A^* и B^* аналогична системе в классической (одномерной) задаче различения гипотез[12] и полностью совпадает с ней при $k = 1$ $(\varphi_1 = 0)$. Этот факт является следствием того, что в области, где возможно наблюдение одного направления, задача становится одномерной, а значит, для границ получаются те же уравнения, что и в классической задаче. В **разделе 1 главы 3** рассматривается одномерная *вспомогательная* задача и показывается, что выше определенные как решения системы, точки A^* и B^* являются границами для области продолжения наблюдений в этой вспомогательной задаче.

При доказательстве теоремы 4, в области возможных переключений между направлениями также формулировалась задача Стефана с подвижными границами для функции риска, имеющая следующий вид:

[12] *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. – 2-е изд., перераб.– М.:Наука,1976. С.227-234.

$$\begin{cases} \rho'_{\varphi_2}(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_2^2/\left(1+\varphi_1+\varphi_2\right)+(1/2)\rho''_{\varphi_2\varphi_2}(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_2^2=-c, \\ \rho'_{\varphi_1}\left(\varphi_1,\varphi_1\right)=\rho'_{\varphi_2}\left(\varphi_1,\varphi_1\right), \\ \rho\left(\varphi_1,\gamma_2\left(\varphi_1\right)\right)=\rho_0\left(\varphi_1,\gamma_2\left(\varphi_1\right)\right), \\ \rho'_{\varphi_2}\left(\varphi_1,\gamma_2\left(\varphi_1\right)\right)=\left(\rho_0\right)'_{\varphi_2}\left(\varphi_1,\gamma_2\left(\varphi_1\right)\right), \end{cases}$$

где

$$\rho_0\left(\varphi_1,\varphi_2\right)=\min\left(\pi_0,1-\pi_0\right)=$$
$$=\min\left(\left(\varphi_1+\varphi_2\right)/\left(1+\varphi_1+\varphi_2\right),1/\left(1+\varphi_1+\varphi_2\right)\right).$$

Решая эту систему, получаем для границы $\tilde{\gamma}_2=\tilde{\gamma}_2\left(\varphi_1\right)$ (области C_1) дифференциальное уравнение, выписанное выше в утверждении теоремы.

Четвертая глава посвящена исследованию сходимости процессов управления в задаче в дискретном времени к процессу управления в непрерывном времени и рассмотрению приложений полученных результатов к теории стохастических дифференциальных уравнений.

В ***первом*** разделе рассматривается вопрос сходимости дискретных стандартных схем наблюдения $\left(\mathrm{X}^n_{\mathrm{T}_1^n(t)},\mathrm{Y}^n_{\mathrm{T}_2^n(t)}\right)$ к непрерывной стандартной схеме наблюдения $\left(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_1(t)},\mathrm{Y}_{\mathrm{T}_2(t)}\right)$ (дискретную или непрерывную схему назовем *стандартной*, если соответствующее управление является *стандартным*), где

$$\begin{cases} X^n_{T_1^n(t)}=\mathrm{I}_{\theta=1}T_1^n(t)+W^1_{T_1^n(t)}, \\ Y^n_{T_2^n(t)}=\mathrm{I}_{\theta=2}T_2^n(t)+W^2_{T_2^n(t)} \end{cases}$$

– процессы наблюдения в дискретной схеме и

$$\begin{cases} X_{T_1(t)}=\mathrm{I}_{\theta=1}T_1(t)+W^1_{T_1(t)}, \\ Y_{T_2(t)}=\mathrm{I}_{\theta=2}T_2(t)+W^2_{T_2(t)} \end{cases}$$

– процессы наблюдения в непрерывной схеме, при этом выбирается стандартное управление (существование такого управления для непрерывной схемы доказано в **разделе 2 главы 3**). Предполагается, что наблюдения возможны в моменты времени, кратные некоторому параметру $\Delta = \frac{1}{n},\ n = 1, 2, ...$

Теорема 5. *Процессы наблюдения в дискретной схеме* $\left(X^n_{T^n_1(t)}, Y^n_{T^n_2(t)}\right)$ *сходятся по распределению к процессу наблюдения в непрерывной схеме* $\left(X_{T_1(t)}, Y_{T_2(t)}\right)$*:*

$$\left(X^n_{T^n_1(t)}, Y^n_{T^n_2(t)}\right) \xrightarrow{\mathrm{P}-law} \left(X_{T_1(t)}, Y_{T_2(t)}\right), t \in [0, T], n \to \infty,$$

где управления $(T^n_1(t), T^n_2(t))$ *и* $(T_1(t), T_2(t))$ *предполагаются стандартными.*

Кроме того показано, что

$$\begin{cases} X_{T_1(t)} = \dfrac{1}{2}\left(B_t + \displaystyle\int\limits_0^t \operatorname{sgn} B_s dB_s\right), \\ Y_{T_2(t)} = \dfrac{1}{2}\left(-B_t + \displaystyle\int\limits_0^t \operatorname{sgn} B_s dB_s\right), \end{cases}$$

где B_t – процесс броуновского движения относительно некоторой меры $\tilde{\mathrm{P}}$:

$$d\tilde{\mathrm{P}} = \exp\left(-1_{\theta=1} W^1_T - \tfrac{1}{2} 1_{\theta=1} T\right) \exp\left(-1_{\theta=2} W^2_T - \tfrac{1}{2} 1_{\theta=2} T\right) d\mathrm{P}.$$

Одним из применений факта сходимости дискретных стандартных управлений к стандартному непрерывному управлению является результат, касающийся так называемого процесса диффузионного типа *bang-bang*. Рассматриваются процессы, похожие на процессы наблюдения в дискретной схеме в исследуемой задаче

$$\begin{cases} X^n_{T^n_1(t)} = T^n_1(t) + W^1_{T^n_1(t)}, \\ Y^n_{T^n_2(t)} = T^n_2(t) + W^2_{T^n_2(t)}, \end{cases}$$

где процесс управления $(T^n_1(t), T^n_2(t))$ – стандартный.

В ***третьем*** разделе показано, что разность этих процессов $S^\Delta_t = X^n_{T^n_1(t)} - Y^n_{T^n_2(t)}$, где $\Delta = 1/n$, сходится к некоторому процессу S_t. Более точно, доказана

Теорема 6. *Процессы S^Δ_t в дискретной схеме равномерно в среднеквадратическом сходятся к процессу S_t:*

$$\mathrm{E}\left(\sup_{0\le t\le \mathrm{T}} \left(S^\Delta_t - S_t\right)^2\right) \to 0, n \to \infty,$$

где процесс S_t является решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$dS_t = -\frac{1}{2}\mathrm{sgn} S_t dt + dB_t,$$

где B_t– некоторое броуновское движение.

В **Заключении** сформулированы основные научные результаты, выносимые на защиту.

Работа выполнена под руководством чл.-кор. РАН профессора А.Н.Ширяева, которому автор выражает искреннюю благодарность.

Публикации автора по теме диссертации

1. Кузнецов Ю.А. Различение гипотез в дискретной схеме с альтернативными направлениями//Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т.13. – Вып.5. – С.821–828.

2. Кузнецов Ю.А. Различение гипотез в непрерывной схеме с альтернативными направлениями//УМН. – 2008. – Т.63. – Вып.2(380). – С.173-174.

3. Кузнецов Ю.А. Различение гипотез в схемах с альтернативными направлениями и процесс типа “bang-bang”//Труды VI международных Колмогоровских чтений. – Ярославль.: ЯГПУ, 2008. – С.119-126.

4. Кузнецов Ю.А. Оптимальное правило остановки в задаче различения гипотез в схеме с возможными переключениями //Информационные процессы. – 2009. – Т.9. – №3. – С.183-198.