24 июля 2018 г.

Ультраплоские экспоненциальные суммы и их приложения к спектральной теории динамических систем

Приходько Александр Александрович
МФТИ, ФИВТ

История исследования экстремальных свойств полиномов восходит к работам Харди и Литлвуда, в которых, в частности, был поставлен вопрос, — существуют ли комплексные полиномы

$$P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0, \qquad |a_j| = 1, \quad a_j \in \mathbb{C},$$

тиакие, что

$$\Big|\, (n+1)^{-1/2} |P(z)| - 1 \,\Big| < \varepsilon$$

для каждой точки z, $|z| = 1$, на единичной окружности? Кахан в 1980 году установил, что такие полиномы действительно существуют, но, в то же время, различные вариации оригинальной гипотезы Литлвуда до сих пор остаются открытыми. Изучение классов ультраплоских полиномов и тригонометрических сумм тесно связано с исследованием спектральных свойств эргодических систем, в том числе, автокорреляций сигналов, генерируемых случайными процессами с дискретным и непрерывным временем.

Важным инструментом построения процессов с нетривиальными спектральными свойствами, на стыке теории динамических систем и анализа, являются произведения Рисса вида $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$, где $f_j(z)$ — последовательность полиномов (тригонометрических сумм). Мы сконцентрируем внимание на классе тригонометрических сумм вида

$$f_\omega(t) = n^{-1/2}\big(e^{i\omega_1 t} + \cdots + e^{i\omega_n t}\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Для любого компактного множества $K \in \mathbb{R}^*$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся экспоненциальная сумма $f_\omega(t)$, являющаяся ε-ультраплоской на множестве K,

$$\Big\|\, |f_\omega(t)| - 1 \,\Big\|_{L^2(K,\mu^*)} < \varepsilon.$$

Ключевые слова: полиномы Литлвуда, ультраплоские полиномы, суммы Гаусса, спектральные инварианты динамических систем, лебеговский спектр, произведения Рисса, метод Ван дер Корпута, солитоны, квантовые группы, q-осциллятор, диофантовы аппроксимации, принцип переноса Хинчина.