О функциях меры иррациональности и распределении рациональных чисел.

Никита Шульга

Аннотация

В докладе будет рассказано о некоторых новых результатах теории чисел о Вопрос-функции Минковского $?(x)$ и о продвижениях в задаче осцилляции функций мер иррациональности.

В частности, в задаче о неподвижных точках функции $?(x)$, то есть о решениях уравнения $?(x) = x$, доказано, что все нетривиальные неподвижные точки являются иррациональными. Получены две различные оценки на рост неполных частных в разложении цепных дробей для наибольшей и наименьшей неподвижных точек $?(x)$ на интервале $(0, 1/2)$. Кроме этого, получен результат, позволяющий свести гипотезу о неподвижных точках функции Минковского к вопросу о значениях этой функции в рациональных точках.

Также построено множество чисел M, такое что для каждого элемента $x_0 \in M$ выполнено, что производная любой итерации функции $?(x)$ в этой точке равна 0, то есть для функции

$$f_n(x) := \underbrace{?(?(...?}_{\text{n раз}}(x)))$$

выполнено

$$[f_n(x_0)]' = 0$$

для любого элемента $x_0 \in M$.

В задаче осцилляции функций меры иррациональности, которая для иррационального числа ξ определяется как $\psi_\xi(t) = \min_{1 \leqslant q \leqslant t, q \in \mathbb{Z}} ||q\xi||$, где $||\cdot||$ - расстояние до ближайшего целого, получены следующие результаты. Известно, что для любых двух иррациональных чисел α и β, удовлетворяющих $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, существуют сколь угодно большие значения t, для которых

$$|\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)| \geqslant \left(\sqrt{\tau} - 1\right) \cdot \min(\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t)),$$

где $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и что это равенство оптимальное для определенных пар чисел α и β, эквивалентных τ. Мы приводим естественное продолжение этой задачи. Доказывается, что для любых иррациональных чисел α и β, удовлетворяющих $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, таких что хотя бы одно из них не эквивалентно τ, существуют сколь угодно большие значения t, для которых

$$|\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)| \geqslant (\sqrt{\sqrt{2}+1} - 1) \cdot \min(\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t)).$$

Более того, доказывается оптимальность константы в правой части неравества.

Кроме этого, получен оптимальный результат в задаче о разности обратных функций, а именно доказано неравенство

$$\left|\frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)}\right| \geqslant Ct \quad \text{для бесконечно многих } t \in \mathbb{N}.$$

Константа C является оптимальной и равна $C = K(\sqrt{\tau} + \tau^{-3/2}) = \sqrt{5}(1 - \sqrt{\phi}) = 0.47818^+$, где $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Доклад основан на результатах из одноименной диссертации автора.