На правах рукописи
УДК 519.217

Петров Леонид Александрович

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ НА РАЗБИЕНИЯХ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Специальность 05.13.17 – теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2010 г.

Работа выполнена в Институте Проблем Передачи Информации им. А.А. Харкевича РАН.

Научный руководитель	–	доктор физико-математических наук Г.И. Ольшанский
Официальные оппоненты	–	доктор физико-математических наук Г.А. Кошевой, доктор физико-математических наук С.А. Пирогов
Ведущая организация	–	Санкт–Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится ____________________________ на заседании диссертационного совета Д.002.077.01 при ИППИ РАН по адресу: 127994, г. Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, 19, стр.1, конференц–зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН.

Автореферат разослан ____________________________.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.002.077.01 при ИППИ РАН
доктор физико-математических
наук, доцент

И.И. Цитович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория машинного обучения изучает методы построения и анализа алгоритмов, способных обучаться в процессе своей работы. К области машинного обучения без учителя относятся алгоритмы, в ходе выполнения которых система спонтанно обучается выполнять поставленную задачу без вмешательства со стороны экспериментатора. Общие сведения о задачах машинного обучения см. в [1].

В последние несколько лет в области машинного обучения без учителя активно развиваются методы анализа и классификации по темам большого корпуса текстов на естественном языке, основанные на непараметрических байесовских моделях (см., например, работы[2,3,4], а также обширную библиографию в последней работе). Многие вероятностные модели, рассматриваемые в связи с этими задачами, основаны на распределениях Пуассона–Дирихле. Вероятностные распределения Пуассона–Дирихле зависят от двух параметров $0 \leqslant \alpha < 1$ и $\theta > -\alpha$ и описывают закон распределения последовательности невозрастающих неотрицательных случайных величин с суммой единица. В исследование распределений Пуассона–Дирихле внесли вклад Бертуан, Биллингсли, Блиновский, Вершик, Гончаров, Гримметт, Гриффитс, Дикман, Доннелли, Игнатов, Йор, Карлтон, Керов, Куртц, Кингман, Ллойд, Ольшанский, Питман, Уоттерсон, Цилевич, Шепп, Шмидт, Этье, Ювенс, и другие. Более подробно о распределениях Пуассона–Дирихле см. недавнюю монографию[5]. Однопараметрическое семейство распределений Пуассона–Дирихле (соответствующее случаю $\alpha = 0$) было введено Кингманом (1975) в связи с задачами, возникающими в популяционной генетике. Двухпараметрическое обобщение принадлежит Питману (1992). Вероятностные модели машинного обучения, основанные на распределениях Пуассона–Дирихле, существенно используют специфику второго пара-

[1] Прикладная статистика: классификация и снижение размерности / С. Айвазян, В. Бухштабер, И. Енюков, Л. Мешалкин. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 608 С.

[2] *Johnson, M., Griffiths, T., Goldwater, S.* Adaptor grammars: A framework for specifying compositional nonparametric bayesian models // *Advances in neural information processing systems*. — 2007. — V. 19. — P. 641–649.

[3] *Teh, Y.* A hierarchical Bayesian language model based on Pitman-Yor processes // *Proceedings of the 21st International Conference on Computational Linguistics and the 44th annual meeting of the Association for Computational Linguistics*. — 2006. — P. 985–992.

[4] *Blei, D., Griffiths, T., Jordan, M.* The nested chinese restaurant process and bayesian nonparametric inference of topic hierarchies // *J. ACM*. — 2010. — V. 57, № 2. — P. 1–30.

[5] *Feng, S.* The Poisson-Dirichlet Distribution and Related Topics. — Springer, 2010. — 216 P.

метра α. Это связано с тем, что случайные величины в последовательности, имеющей распределение Пуассона–Дирихле, при $\alpha = 0$ с вероятностью единица убывают показательным образом, а при $\alpha \neq 0$ — степенным образом; как известно, для естественных языков характерно степенное убывание частот (см., например, работу[6]).

В теории машинного обучения начинают исследоваться и динамические модели, см., например, статью[7]. Они связаны с распределениями Дирихле, которые являются конечномерными аналогами распределений Пуассона–Дирихле. Использование распределений Дирихле приводит к ограничениям на число возможных тем в задаче классификации. Поэтому возникает потребность в динамических моделях (связанных с двухпараметрическими распределениями Пуассона–Дирихле), которые могли бы снять это ограничение.

Динамические модели, связанные с однопараметрическим семейством распределений Пуассона–Дирихле, широко изучались в контексте популяционной генетики. Изучение динамических моделей в популяционной генетике началось с дискретных моделей Райта–Фишера (рассматривалась, начиная с 1920-30-х гг.) и Морана (была введена в 1950-е гг.). Эти модели можно трактовать как последовательности марковских цепей на разбиениях (пространство состояний n-й цепи есть множество всех разбиений числа n).

Разбиения — фундаментальный математический объект. Основные сведения о них можно найти в книге Стенли[8]. Разбиения широко применяются в теоретической информатике, например, в различных методах сортировки (в частности, при сортировке слияниями), которым посвящена фундаментальная монография Кнута[9].

Предельное поведение некоторых классов моделей Райта–Фишера и Морана исследовано в работе Этье и Куртца[10], в которой построено семейство бесконечномерных диффузионных процессов, сохраняющих однопараметриче-

[6] *Шрейдер, Ю.* О возможности теоретического вывода статистических закономерностей текста (к обоснованию закона Ципфа) // *Проблемы передачи информации*. — 1967. — Т. 3, № 1. — С. 57–63.

[7] *Wang, C., Blei, D., Heckerman, D.* Continuous time dynamic topic models // Uncertainty in Artificial Intelligence [UAI]. — 2008.

[8] *Стенли, Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. — М.: Мир, 2005. — 767 С.

[9] *Кнут, Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. — СПб.: Вильямс, 2000. — 824 С.

[10] *Ethier, S. N., Kurtz, T. G.* The Infinitely-Many-Neutral-Alleles Diffusion Model // *Advances in Applied Probability*. — 1981. — V. 13, № 3. — P. 429–452.

ские распределения Пуассона–Дирихле. Построенные процессы исследовались и обобщались в работах, принадлежащих Вио, Доннелли, Гриффитс, Куртц, Таваре, Уоттерсон, Флеминг, Шмуланд, Этье, и др.

Для построения бесконечномерных диффузионных процессов Этье и Куртц использовали их аппроксимацию конечномерными диффузиями на симплексах растущей размерности. Данный метод неприменим в случае двухпараметрических распределений Пуассона–Дирихле. Поэтому для построения бесконечномерных диффузий, обобщающих процессы Этье–Куртца[10] на двухпараметрический случай, требуется применение других методов. В диссертации найдена алгебро-комбинаторная интерпретация модели Морана на разбиениях, которая позволяет обобщить эту модель на двухпараметрический случай, а также построить диффузии, сохраняющие двухпараметрические распределения Пуассона–Дирихле.

Алгебро-комбинаторная интерпретация модели Морана включает её (и её двухпараметрическое обобщение) в широкий класс марковских цепей на разбиениях, рассматриваемый Фульманом, Бородиным и Ольшанским (см., например, работу[11]). Возникает вопрос об анализе асимптотического поведения других марковских цепей на разбиениях, входящих в этот класс. В диссертации проводится исследование одного семейства марковских цепей из этого класса на строгих разбиениях (то есть, разбиениях, все части которых различны). О некоторых приложениях строгих разбиений в теоретической информатике (в задачах сортировки) см., например, монографию Кнута[9]. Соответствие Робинсона–Шенстеда–Кнута для обычных разбиений[9] обобщается и на случай строгих разбиений[12]. Это комбинаторное соответствие делает возможным применение различных ансамблей случайных разбиений в задачах, связанных со случайными матрицами, а также в теории массового обслуживания (см., например, работу[13]). Модель марковских цепей на строгих разбиениях возникает в связи с ансамблем случайных строгих разбиений, введенном Бородиным[14]. Этот ансамбль связан с теорией проективных представлений симметрических

[11] *Borodin, A., Olshanski, G.* Infinite-dimensional diffusions as limits of random walks on partitions // *Prob. Theor. Rel. Fields*. — 2009. — V. 144, № 1. — P. 281–318.

[12] *Sagan, B.* Shifted tableaux, Schur Q-functions, and a conjecture of Stanley // *J. Comb. Theo. A*. — 1987. — V. 45. — P. 62–103.

[13] *Baryshnikov, Y.* GUEs and queues // *Probability Theory and Related Fields*. — 2001. — V. 119, № 2. — P. 256–274.

[14] *Бородин, А.* Мультипликативные центральные меры на графе Шура // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 1997. — Т. 240. — С. 44–52.

групп (эта теория развивалась в работах Иванова, Назарова, Сергеева, Стембриджа, Шура, и др.). Стоит отметить, что этот ансамбль приводит к новым моделям точечных процессов, которые отличаются от традиционно рассматриваемых в статистической физике. Изучение предельного поведения указанных марковских цепей на строгих разбиениях позволяет построить новые примеры бесконечномерных диффузионных процессов.

Цель работы. Цель настоящей диссертации состоит в построении (путем предельного перехода от конечных марковских цепей на разбиениях) и исследовании новых примеров бесконечномерных диффузионных процессов, которые могут быть использованы в динамических задачах классификации в теории машинного обучения.

Научная новизна. В диссертации построены новые примеры бесконечномерных диффузионных процессов, среди которых — семейство процессов, сохраняющих двухпараметрические распределения Пуассона–Дирихле. Данные процессы могут использоваться в динамических задачах классификации в тех моделях машинного обучения, где ранее использовались распределения Дирихле. Кроме того, введены и исследованы новые примеры марковских цепей на разбиениях, в пределе приводящие к указанным бесконечномерным диффузионным процессам.

Методы исследования. При исследовании конечных марковских цепей на разбиениях в диссертации широко применяются методы алгебраической комбинаторики, теории симметрических и дважды симметрических функций. При исследовании асимптотического поведения конечных марковских цепей используются разработанные Троттером, Этье и Куртцом методы аппроксимации непрерывных полугрупп в банаховых пространствах дискретными полугруппами. При построении бесконечномерных диффузионных процессов используется также общая теория полугрупп в банаховых пространствах.

Теоретическая и прикладная ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теоретической информатике, теории машинного обучения (в динамических задачах классификации), непараметрической байесовской статистике, популяционной генетике, комбинаторике и теории случайных процессов. Некоторые из полученных в диссертации результатов имеют продолжение в недавних работах Фенга и Сана [15] и Руггиеро и Уолкера [16].

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на семинаре «Комбинаторные и вероятностные аспекты теории представлений» (Независимый Московский Университет, руководитель — д.ф.-м.н., г.н.с. Г.И. Ольшанский), на семинаре Добрушинской математической лаборатории (ИППИ РАН, 2010 г., руководитель — профессор Р.А. Минлос), на семинаре «Теория вероятностей и эргодическая теория» (МГУ, 2007 и 2010 гг., руководители — профессор Б.М. Гуревич, профессор В.И. Оселедец, доцент С.А. Пирогов), на семинаре «Математические модели в биологии» (МГУ, 2007 г., руководитель — профессор В.А. Малышев), на петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам (ПОМИ РАН, 2008 г., руководитель — профессор А.М. Вершик), на семинаре «Асимптотический анализ случайных процессов и полей» (МГУ, 2008 г., руководители — профессор А.В. Булинский и доцент А.П. Шашкин), на международной школе «Large N Limits» (Биш, Франция, 2008 г.), на международной школе Тихоокеанского Института Математических Наук и Университета Британской Колумбии (Ванкувер, Канада, 2009 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях автора в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 93 наименования. В текст включены 5 рисунков. Общий объем работы составляет 103 страницы.

[15] *Feng, S., Sun, W.* Some diffusion processes associated with two parameter Poisson–Dirichlet distribution and Dirichlet process // *Probability Theory and Related Fields*. — 2009.

[16] *Ruggiero, M., Walker, S.* Countable representation for infinite dimensional diffusions derived from the two-parameter Poisson-Dirichlet process // *Electronic Communications in Probability*. — 2009. — V. 14. — P. 501–517.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** кратко излагается история вопроса, общая постановка решаемой задачи, описывается ее актуальность в контексте задач классификации в теории машинного обучения.

Первая глава посвящена построению и исследованию семейства диффузионных процессов на бесконечномерном симплексе

$$\overline{\Sigma} := \left\{(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots) \in [0,1]^\infty : \mathrm{x}_1 \geqslant \mathrm{x}_2 \geqslant \dots \geqslant 0,\ \textstyle\sum_{i=1}^\infty \mathrm{x}_i \leqslant 1\right\},$$

сохраняющих двухпараметрические распределения Пуассона–Дирихле. Под диффузионным процессом на $\overline{\Sigma}$ понимается строго марковский процесс с непрерывными траекториями.

В **первом параграфе** приводятся необходимые сведения о разбиениях и распределениях Пуассона–Дирихле. Приводится определение модели Морана на разбиениях и дается ее алгебро-комбинаторная интерпретация, а также вводится двухпараметрический аналог модели Морана.

Под разбиением понимается невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\ell)$, в которой лишь конечное число ненулевых компонент (это число обозначается $\ell(\rho)$). Число $|\rho| := \sum_{i=1}^{\ell} \rho_i$ называется весом разбиения. Разбиения обозначаются буквами $\rho, \sigma, \tau, \dots$. Пусть $\mathbb{K}_n$ — множество разбиений веса $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} := \{0, 1, 2, \dots\}$ (множество $\mathbb{K}_0$ состоит из пустого разбиения $\varnothing$), и $\mathbb{K} := \bigsqcup_{n=0}^\infty \mathbb{K}_n$ — множество всех разбиений.

Разбиения изображаются диаграммами Юнга (см., например, гл. I книги Макдональда[17]), мы отождествляем эти два объекта и обозначаем их одинаково. Если диаграмма ρ получена из диаграммы σ путем добавления одной клетки, то это обозначается $\sigma \nearrow \rho$ (или, эквивалентно, $\rho \searrow \sigma$). Это возможно только если $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\ell)$ и $\sigma = (\rho_1, \dots, \rho_i - 1, \dots, \rho_\ell)$ для некоторого i. Если $\rho_i = m$, то σ обозначается через $\rho^{[m]}$. Для всех $m \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ если в диаграмме ρ есть строка длины m, то диаграмма $\rho^{[m]}$ определяется единственным образом, а если в ρ нет такой строки, считаем, что $\rho^{[m]}$ не определено. Через $[\rho{:}\,k]$ ($k \in \mathbb{N}$) обозначим число компонент в разбиении ρ, равных k. Это неотрицательное целое число.

Определение 1.1.1. Пусть ρ, σ — разбиения и $\sigma \nearrow \rho$. Переходной функцией вниз называется величина $p^\downarrow(\rho, \sigma) := \frac{\rho_i \cdot [\rho : \rho_i]}{|\rho|}$, где $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_\ell)$ и $\sigma = (\rho_1, \dots, \rho_i - 1, \dots, \rho_\ell)$. Если неверно, что $\sigma \nearrow \rho$, положим $p^\downarrow(\rho, \sigma) := 0$.

---

[17] *Макдональд, И.* Симметрические функции и многочлены Холла. /— Москва, Мир, 1984. — 221 С.

Для всех разбиений $\rho \in \mathbb{K}_n$ (где $n \in \mathbb{N}$) выполнено $\sum_{\sigma\in\mathbb{K}_{n-1}} p^{\downarrow}(\rho,\sigma) = 1$. Поэтому ограничение $p^{\downarrow}$ на $\mathbb{K}_n \times \mathbb{K}_{n-1}$ (обозначаемое через $p^{\downarrow}_{n,n-1}$) является марковским переходным ядром.

Определение 1.1.3. Семейство $\{M_n\}$, где M_n — вероятностная мера на $\mathbb{K}_n$, называется структурой разбиений, если оно согласовано с переходной функцией вниз: $\sum_{\tau\in\mathbb{K}_{n+1}} M_{n+1}(\tau)p^{\downarrow}(\tau,\rho) = M_n(\rho)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\rho \in \mathbb{K}_n$, где $M_n(\tau)$ обозначает меру одноточечного множества $\{\tau\}$.

Рассмотрим вложения $\imath_n: \mathbb{K}_n \to \overline{\Sigma}$, при которых разбиение $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_\ell)$ переходит в точку симплекса $\left(\frac{\rho_1}{n}, \ldots, \frac{\rho_\ell}{n}, 0, 0, \ldots\right)$.

Теорема 1.1.4. (Кингман) *Структуры разбиений $\{M_n\}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с вероятностными мерами P на $\overline{\Sigma}$. Мера P получается как слабый предел мер $\imath_n(M_n)$ при $n \to \infty$, и обратно, меры $\{M_n\}$ можно восстановить по P с помощью определенной процедуры случайной выборки.*

Определение 1.1.5. Пусть $0 \leqslant \alpha < 1$ и $\theta > -\alpha$. Рассмотрим следующее семейство вероятностных мер $M_n^{\alpha,\theta}$ на $\mathbb{K}_n$:

$$M_n^{\alpha,\theta}(\rho) := \frac{n!}{(\theta)_n} \cdot \frac{\theta(\theta+\alpha)\ldots(\theta+(\ell-1)\alpha)}{\prod_{k=1}^{\infty}[\rho{:}\,k]! \cdot \prod_{i=1}^{\ell}\rho_i!} \cdot \prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=2}^{\rho_i}(j-1-\alpha).$$

Здесь ℓ — число ненулевых компонент в ρ, а $(\theta)_n := \theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)$ — символ Похгаммера. Это действительно семейство вероятностных мер. Кроме того, меры $\{M_n^{\alpha,\theta}\}$ образуют структуру разбиений. Она была введена Ювенсом при $\alpha = 0$ и обобщена Питманом на случай $\alpha > 0$.

Определение 1.1.6. Вероятностные меры на $\overline{\Sigma}$, соответствующие (в смысле теоремы 1) структурам разбиений $\{M_n^{\alpha,\theta}\}$, называются распределениями Пуассона–Дирихле и обозначаются $\mathsf{PD}(\alpha,\theta)$.

Перейдем к описанию модели Морана и ее алгебро-комбинаторной интерпретации. Пусть $\{M_n\}$ — структура разбиений, такая, что $M_n(\rho) > 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\rho \in \mathbb{K}_n$.

Определение 1.1.7. Переходной функцией вверх для $\rho, \tau \in \mathbb{K}$, таких, что $\rho \nearrow \tau$, называется величина $p^{\uparrow}(\rho,\tau) := \frac{M_{n+1}(\tau)}{M_n(\rho)}p^{\downarrow}(\tau,\rho)$, где $n = |\rho|$ и $p^{\downarrow}$ — переходная функция вниз. Если неверно, что $\rho \nearrow \tau$, положим $p^{\uparrow}(\rho,\tau) := 0$.

Переходная функция вверх уже зависит от выбора структуры разбиений. Ограничение $p^{\uparrow}$ на $\mathbb{K}_n \times \mathbb{K}_{n+1}$ (обозначаемое через $p^{\uparrow}_{n,n+1}$) является марковским переходным ядром. Семейство мер $\{M_n\}$ согласовано с $p^{\uparrow}$, то есть, $\sum_{\rho\in\mathbb{K}_n} M_n(\rho)p^{\uparrow}(\rho,\tau) = M_{n+1}(\tau)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\tau \in \mathbb{K}_{n+1}$.

Определение 1.1.8. Пусть переходная функция вверх $p^{\uparrow}$ построена по структуре разбиений $\{M_n^{0,\theta}\}$ (здесь $\alpha = 0$). Рассмотрим последовательность марковских цепей на $\mathbb{K}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) с переходными операторами $\mathrm{Moran}_n := p^{\uparrow}_{n-1,n} \circ p^{\downarrow}_{n,n-1}$, или, подробнее, $\mathrm{Moran}_n(\rho, \widetilde{\rho}) = \sum_{\sigma \in \mathbb{K}_{n-1}} p^{\downarrow}(\rho, \sigma) p^{\uparrow}(\sigma, \widetilde{\rho})$. Данная последовательность марковских цепей называется однопараметрической моделью Морана.

Модель Морана используется для моделирования динамики популяции с постоянным числом особей под воздействием процессов воспроизводства и мутации (интенсивность мутации регулируется параметром $\theta > 0$), при этом разбиение ρ описывает распределение типов особей в популяции (ρ_1 — число особей самого частого типа, и т.д.). Предельное поведение модели Морана описано в [10].

Из данного определения модели Морана видна ее алгебро-комбинаторная интерпретация. В общем двухпараметрическом случае удобнее использовать несколько другие марковские цепи. При $\alpha = 0$ их предельное поведение совпадает с поведением модели Морана. Приведем общее определение из работы [11].

Определение 1.1.10. Пусть $\{M_n\}$ — структура разбиений, такая, что $M_n(\rho) > 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\rho \in \mathbb{K}_n$. Марковская цепь на $\mathbb{K}_n$ с переходным оператором $p^{\downarrow}_{n+1,n} \circ p^{\uparrow}_{n,n+1}$ называется марковской цепью вверх/вниз.

Мера M_n является инвариантной для марковской цепи вверх/вниз на $\mathbb{K}_n$, и цепь обратима относительно этой меры. Пусть T_n обозначает переходный оператор n-й марковской цепи вверх/вниз, построенной по структуре разбиений Ювенса–Питмана $\{M_n^{\alpha,\theta}\}$. Ставится вопрос об изучении предельного поведения марковских цепей T_n при $n \to \infty$.

Во **втором параграфе** вычисляется действие операторов T_n на симметрические функции от компонент разбиений.

Определение 1.2.1. Пусть $y_1, y_2, \ldots$ — формальные переменные. Алгебра симметрических функций Λ состоит из всех формальных степенных рядов от $y_1, y_2, \ldots$, которые симметричны по $y_1, y_2, \ldots$ и имеют ограниченную степень (то есть, степени всех мономов в формальном степенном ряде равномерно ограничены). Максимальная степень монома называется степенью симметрической функции.

Алгебра Λ свободно порождена (как коммутативная алгебра с единицей) суммами Ньютона $p_k := \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k$, $k \in \mathbb{N}$. Мономиальные функции определяются как $\mathbf{m}_\rho := \sum_{i_1,\ldots,i_\ell} y_{i_1}^{\rho_1}\ldots y_{i_\ell}^{\rho_\ell}$, где $\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_\ell) \in \mathbb{K}$ и сумма ведется по всем наборам попарно различных индексов $i_1,\ldots,i_\ell \geqslant 1$. Факториальные аналоги функций $\mathbf{m}_\rho$ (обозначаемые $\mathbf{m}^*_\rho$) получаются из обычных функций заменой каждой степени y_i^k на факториальную степень $y_i^{\downarrow k} = y_i(y_i-1)\ldots(y_i-k+1)$. Каждая из систем функций $\{\mathbf{m}_\rho\}$ и $\{\mathbf{m}^*_\rho\}$ (где ρ пробегает все разбиения) является линейным базисом алгебры Λ.

Отождествим (абстрактную) алгебру симметрических функций Λ с алгеброй симметрических функций на разбиениях, полагая $p_k(\sigma) := \sum_{i=1}^{\ell(\sigma)} \sigma_i^k$, $k \in \mathbb{N}$. Алгебра симметрических функций на множестве $\mathbb{K}$ разделяет точки. Пусть $f \in \Lambda$. Через f_n обозначим ограничение функции f на подмножество $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}$. Так как $\mathbb{K}_n$ конечно, то пространство всех функций на $\mathbb{K}_n$ (обозначаемое $\mathrm{Fun}(\mathbb{K}_n)$) исчерпывается функциями вида f_n, где $f \in \Lambda$. Переходный оператор T_n действует в пространстве $\mathrm{Fun}(\mathbb{K}_n)$ и однозначно определяется своим действием на симметрические функции $(\mathbf{m}^*_\rho)_n$. Это действие дается следующей теоремой.

Теорема 1.2.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для всех разбиений ρ имеем*

$$\begin{aligned}(n+\theta)(n+1)(T_n-\mathbf{1})(\mathbf{m}^*_\rho)_n &= -|\rho|(|\rho|-1+\theta)(\mathbf{m}^*_\rho)_n+\\ +(n+1-|\rho|)\Big[\sum_{i=2}^{\infty}[\rho{:}\,i]\,i(i-1+\alpha)&(\mathbf{m}^*_{\rho[i]})_n+[\rho{:}\,1]\,(\theta+\alpha(\ell(\rho)-1))\,(\mathbf{m}^*_{\rho[1]})_n\Big].\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{1}$ обозначает тождественный оператор.

Отметим, что если в разбиении ρ нет части, равной m (здесь $m \in \mathbb{N}$), то $[\rho{:}\,m] = 0$, и слагаемого с $\rho^{[m]}$ не возникает. В частности, выше сумма по i фактически конечна.

В **третьем параграфе** для всех значений параметров $0 \leqslant \alpha < 1$ и $\theta > -\alpha$ устанавливается сходимость марковских цепей T_n к диффузионному процессу $X_{\alpha,\theta}(t)$ на $\overline{\Sigma}$, который сохраняет меру Пуассона–Дирихле $\mathsf{PD}(\alpha,\theta)$. Исследуются некоторые важные свойства полученных процессов.

Бесконечномерный симплекс $\overline{\Sigma}$ — компактное пространство в топологии покоординатной сходимости. Через $C(\overline{\Sigma})$ обозначим банахову алгебру всех непрерывных функций на $\overline{\Sigma}$ с поточечными операциями и супремум-нормой. Рассмотрим плотную подалгебру $\mathcal{F} \subset C(\overline{\Sigma})$, порожденную (как коммутативная алгебра с единицей) алгебраически независимыми функциями $\mathsf{q}_k(\mathsf{x}) := \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathsf{x} \in \overline{\Sigma}$. Отметим, что функция $\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i$ не является непрерывной на $\overline{\Sigma}$. Ясно, что $\mathcal{F} \cong \Lambda/(p_1-1)\Lambda$, где $(p_1-1)\Lambda$ — идеал в алгебре Λ, порожденный p_1-1. Пусть $\pi_n{:}\,C(\overline{\Sigma}) \to \mathrm{Fun}(\mathbb{K}_n)$ — соответствующие вложениям $\imath_n{:}\,\mathbb{K}_n \to \overline{\Sigma}$ проекции пространств функций, то есть, $(\pi_n g)(\sigma) \coloneqq g(\iota_n(\sigma))$, $\sigma \in \mathbb{K}_n$, $g \in C(\overline{\Sigma})$.

Теорема 1.3.4. *Существует оператор* $A\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, *такой, что при* $n \to \infty$ *операторы* $n^2(T_n - \mathbf{1})$ *сходятся к* A *в алгебре* $\mathcal{F}$. *Более формально,*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\sigma\in\mathbb{K}_n} \left| \left(n^2(T_n - \mathbf{1})\pi_n g\right)(\sigma) - \left(\pi_n A g\right)(\sigma) \right| = 0 \qquad \text{для всех } g \in \mathcal{F}.$$

Оператор A *может быть записан как формальный дифференциальный оператор в коммутативной алгебре полиномов от* $\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \ldots$:

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & \sum_{i,j=1}^{\infty} (i+1)(j+1)(\mathsf{q}_{i+j} - \mathsf{q}_i\mathsf{q}_j) \frac{\partial^2}{\partial \mathsf{q}_i \partial \mathsf{q}_j} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[-(i+1)(i+\theta)\mathsf{q}_i + (i+1)(i-\alpha)\mathsf{q}_{i-1} \right] \frac{\partial}{\partial \mathsf{q}_i}, \qquad \mathsf{q}_0 \coloneqq 1, \end{aligned}$$

а также как дифференциальный оператор в естественных координатах:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i \frac{\partial^2}{\partial \mathsf{x}_i^2} - \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathsf{x}_i \mathsf{x}_j \frac{\partial^2}{\partial \mathsf{x}_i \partial \mathsf{x}_j} - \sum_{i=1}^{\infty} (\theta \mathsf{x}_i + \alpha) \frac{\partial}{\partial \mathsf{x}_i}.$$

Оператор A, записанный в естественных координатах, может применяться только к функциям $g \in \mathcal{F}$. Чтобы применить его к такой функции, следует сначала вычислить $Ag(\mathsf{x})$ для тех x, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{x}_i = 1$ (такие x составляют плотное подмножество в $\overline{\Sigma}$) путем применения правой части к функции $g(\mathsf{x})$ напрямую, а затем продолжить полученную функцию на весь симплекс $\overline{\Sigma}$ по непрерывности.

Теорема 1.3.9. (1) *Оператор* A *замыкаем в* $C(\overline{\Sigma})$, *и его замыкание порождает сильно непрерывную полугруппу сжимающих операторов* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *в* $C(\overline{\Sigma})$, *которая сохраняет положительность и единицу. Дискретные полугруппы* $\left\{\mathbf{1}, T_n, T_n^2, \ldots\right\}$ *сходятся к непрерывной* $\{T(t)\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\sigma\in\mathbb{K}_n} \left| \left(T_n^{[n^2 t]} \pi_n g\right)(\sigma) - \left(\pi_n T(t) g\right)(\sigma) \right| = 0 \qquad \textit{для всех } g \in C(\overline{\Sigma}),$$

причем эта сходимость равномерна на конечных интервалах по t.

(2) *Для всех значений параметров полугруппа* $\{T(t)\}$ *является полугруппой строго марковского процесса* $X_{\alpha,\theta}(t)$ *на* $\overline{\Sigma}$, *который может начинаться с любой точки и любого вероятностного распределения.*

(3) *Процесс* $X_{\alpha,\theta}(t)$ *на симплексе сохраняет распределение Пуассона–Дирихле* $\mathsf{PD}(\alpha,\theta)$. *Это единственная инвариантная мера процесса, он обратим и эргодичен относительно нее.*

(4) *Будем считать, что $X_{\alpha,\theta}(t)$ и все марковские цепи вверх/вниз T_n начинаются с инвариантного распределения. Тогда при $n \to \infty$ все конечномерные распределения цепей T_n сходятся к конечномерным распределениям процесса $X_{\alpha,\theta}(t)$, если сделать масштабное преобразование времени, при котором один шаг n-й марковской цепи соответствует малому интервалу времени порядка $1/n^2$.*

(5) *Траектории процесса $X_{\alpha,\theta}(t)$ непрерывны с вероятностью единица.*

(6) *Спектр генератора процесса $X_{\alpha,\theta}(t)$ в $L^2\big(\overline{\Sigma}, \mathsf{PD}(\alpha,\theta)\big)$ имеет следующий вид*: $\{0\} \cup \{-m(m-1+\theta) \colon m = 2, 3, \dots\}$. *Собственное значение 0 простое, а кратность m-го равна числу разбиений веса m без единичных частей, то есть, числу решений уравнения $2r_2 + 3r_3 + \dots = m$ в неотрицательных целых числах.*

Вторая глава посвящена исследованию марковских цепей вверх/вниз на строгих разбиениях, возникающих из ансамбля случайных строгих разбиений, введенного Бородиным[14].

В **первом параграфе** устанавливаются новые комбинаторные свойства строгих разбиений, приводится определение семейства мер Бородина на строгих разбиениях и определяются соответствующие цепи вверх/вниз.

Под строгим понимается разбиение, все части которого различны. Строгое разбиение можно изобразить сдвинутой диаграммой Юнга, которая получается из обычной диаграммы Юнга этого разбиения сдвигом каждой i-й строки на $(i-1)$ клеток вправо, см. §7 главы III в книге Макдональда[17]. Строгие разбиения отождествляются со сдвинутыми диаграммами Юнга и обозначаются одинаково буквами $\lambda, \mu, \nu, \dots$. Через $\mathbb{S}_n \subseteq \mathbb{K}_n$ обозначим множество строгих разбиений веса $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, а через $\mathbb{S} := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}_n$ — множество всех строгих разбиений. Если сдвинутая диаграмма λ получена из сдвинутой диаграммы μ путем добавления одной клетки, то это обозначается $\mu \nearrow \lambda$ (или, эквивалентно, $\lambda \searrow \mu$). Пусть эта клетка добавляется к строке в μ, которая (до добавления) имеет длину $x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ (случай $x = 0$ соответствует добавлению к μ новой строки). Тогда λ обозначается через $\mu + (x)$. Эквивалентно, μ обозначается через $\lambda - [x]$.

Пусть λ — сдвинутая диаграмма Юнга. Через $X(\lambda)$ обозначим множество тех $x \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, для которых существует диаграмма $\lambda + (x)$. Аналогично через $Y(\lambda)$ обозначим множество тех $y \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, для которых существует диаграмма $\lambda - [y]$. Если диаграммы $\lambda + (x)$ и $\lambda - [y]$ существуют, то они определяются единственным образом. Считаем, что элементы множеств $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ перечислены в возрастающем порядке.

Определение 2.1.1. Числа $[X(\lambda); Y(\lambda)]$ называются координатами Керова сдвинутой диаграммы λ (или, что то же самое, строгого разбиения λ).

Координаты Керова сдвинутых диаграмм Юнга аналогичны перемежающимся координатам обычных диаграмм Юнга, введенным Керовым[18]

Предложение 2.1.2. (свойства координат Керова сдвинутых диаграмм) **(1)** *Координаты Керова $[X(\lambda); Y(\lambda)]$ однозначно определяют сдвинутую диаграмму Юнга λ.*

(2) *Если λ содержит строку длины 1, то для некоторого $d \geqslant 1$ выполнено $X(\lambda) = \{x_1, \dots, x_d\}$, $Y(\lambda) = \{0, y_2, \dots, y_d\}$ и $0 = y_1 < x_1 < \dots < y_d < x_d$. Если λ не содержит строки длины 1, то для некоторого $d \geqslant 0$ выполнено $X(\lambda) = \{0, x_1, \dots, x_d\}$, $Y(\lambda) = \{y_1, \dots, y_d\}$ и $0 = x_0 < y_1 < x_1 < \dots < y_d < x_d$.*

(3) *Для всех λ выполнено $\sum_{x \in X(\lambda)} x(x+1) - \sum_{y \in Y(\lambda)} y(y+1) = 2|\lambda|$.*

Положим $X'(\lambda) := X(\lambda) \setminus \{0\}$. Легко видеть, что в $X'(\lambda)$ и в $Y(\lambda)$ всегда одинаковое число элементов.

Перейдем к определению переходной функции вниз для строгих разбиений. Пусть $\lambda \in \mathbb{S}$, $|\lambda| \geqslant 1$, и v — комплексная переменная. Рассмотрим следующую функцию и ее разложение в сумму простейших дробей:

$$R^{\Downarrow}(v; \lambda) := \frac{\prod_{x \in X'(\lambda)}(v - x(x+1))}{\prod_{y \in Y(\lambda)}(v - y(y+1))} = 1 - \sum_{y \in Y(\lambda)} \frac{\eta_y^{\Downarrow}(\lambda)}{v - y(y+1)}.$$

Определение 2.1.3. Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{S}$ и $\mu \nearrow\!\!\nearrow \lambda$. Это значит, что $\mu = \lambda - [y]$ для некоторого $y \in Y(\lambda)$. Число $\frac{\eta_y^{\Downarrow}(\lambda)}{2|\lambda|}$ называется переходной функцией вниз и обозначается через $p^{\Downarrow}(\lambda, \mu)$.

Ограничение $p^{\Downarrow}$ на $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n-1}$ является марковским переходным ядром и обозначается $p^{\Downarrow}_{n,n-1}$. Переходная функция вниз $p^{\Downarrow}$ возникла при анализе ветвления проективных представлений симметрических групп. Первоначально (например, в [14]) она определялась без использования перемежающихся координат сдвинутых диаграмм.

Определение 2.1.5. Семейство вероятностных мер $\{M_n \text{ на } \mathbb{S}_n\}$ называется когерентным, если оно согласовано с переходной функцией вниз, то есть, $\sum_{\nu \in \mathbb{S}_{n+1}} M_{n+1}(\nu) p^{\Downarrow}(\nu, \lambda) = M_n(\lambda)$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\lambda \in \mathbb{S}_n$.

Для когерентных семейств $\{M_n \text{ на } \mathbb{S}_n\}$ существует предельная теорема, аналогичная теореме Кингмана для структур разбиений. Эта теорема, установ-

[18] *Керов, С.* Анизотропные диаграммы Юнга и симметрические функции Джека // *Функц. анализ и его прил.* — 2000. — Т. 34, № 1. — С. 51–64.

ленная Назаровым, дает взаимно-однозначное соответствие между когерентными семействами $\{M_n\}$ и вероятностными мерами P на $\overline{\Sigma}$. При этом P получается как слабый предел мер $\jmath_n(M_n)$ на $\overline{\Sigma}$ (при $n \to \infty$), где вложения $\jmath_n : \mathbb{S}_n \to \overline{\Sigma}$ определяются как $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \mapsto \jmath_n(\lambda) := \left(\frac{\lambda_1}{n}, \ldots, \frac{\lambda_\ell}{n}, 0, 0, \ldots\right) \in \overline{\Sigma}$.

Определение 2.1.6.[14] Пусть $a > 0$ — параметр. Рассмотрим следующее семейство вероятностных мер на $\mathbb{S}_n$:

$$M_n^a(\lambda) := \frac{2^{-\ell(\lambda)} n!}{(a/2)_n (\lambda_1! \ldots \lambda_{\ell(\lambda)}!)^2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \ell(\lambda)} \left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}\right)^2 \cdot \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \big(j(j-1) + a\big).$$

В работе[14] было показано, что $\{M_n^a\}$ — когерентное семейство вероятностных мер на строгих разбиениях. Пусть $P^{(a)}$ — вероятностные меры на $\overline{\Sigma}$, соответствующие (в смысле предельной теоремы Назарова) когерентному семейству $\{M_n^a\}$.

Переходная функция вверх для когерентного семейства мер на строгих разбиениях определяется так же, как и для структур разбиений. Переходные функции вверх для мер Планшереля и для мер $\{M_n^a\}$ выражаются через перемежающиеся координаты сдвинутых диаграмм Юнга. Пусть $\lambda \in \mathbb{S}$, v — комплексная переменная. Рассмотрим следующую функцию и ее разложение в сумму простейших дробей:

$$R^{\Uparrow}(v;\lambda) := \frac{1}{v \cdot R^{\Downarrow}(v;\lambda)} = \frac{\prod_{y \in Y(\lambda)} (v - y(y+1))}{v \cdot \prod_{x \in X'(\lambda)} (v - x(x+1))} = \sum_{x \in X(\lambda)} \frac{\eta_x^{\Uparrow}(\lambda)}{v - x(x+1)}.$$

Предложение 2.1.7. *Для любой сдвинутой диаграммы λ и всех $x \in X(\lambda)$ выполнено $p_a^{\Uparrow}(\lambda, \lambda + (x)) = \frac{x(x+1)+a}{2|\lambda|+a} \eta_x^{\Uparrow}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{S}$ и $x \in X(\lambda)$, где $p_a^{\Uparrow}$ — переходные функции вверх для $\{M_n^a\}$, $a > 0$.*

Через W_n, $n \in \mathbb{N}$, обозначим переходный оператор марковской цепи вверх/вниз на $\mathbb{S}_n$, построенной по семейству $\{M_n^a\}$. Ставится вопрос об исследовании предельного поведения марковских цепей W_n при $n \to +\infty$.

Во **втором параграфе** проводится основное техническое вычисление действия переходных операторов W_n в алгебре дважды симметрических функций. При этом широко используются установленные в первом параграфе комбинаторные свойства строгих разбиений.

Определение 2.2.1. Алгеброй дважды симметрических функций называется подалгебра $\Gamma = \mathbb{R}[p_1, p_3, \ldots] \subset \Lambda$, порожденная суммами Ньютона с нечетными номерами. В алгебре Γ можно ввести фильтрацию, полагая $\deg p_{2k+1} = 2k+1$,

$k \in \mathbb{N}$. Говорят, что оператор $R: \Gamma \to \Gamma$ имеет степень $\leqslant r$, где $r \in \mathbb{Z}$, если для всех $f \in \Gamma$ выполнено $\deg(Rf) \leqslant \deg f + r$.

Алгебру Γ можно рассматривать как алгебру функций на строгих разбиениях, полагая $p_{2k+1}(\lambda) := \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i^{2k+1}$, $\lambda \in \mathbb{S}$, $k \in \mathbb{N}$. Для $f \in \Gamma$ обозначим через f_n сужение f на подмножество $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}$. Алгебра Γ разделяет точки множества $\mathbb{S}$, поэтому конечномерное пространство $\operatorname{Fun}(\mathbb{S}_n)$ всех функций на $\mathbb{S}_n$ исчерпывается функциями вида f_n, где $f \in \Gamma$.

Теорема 2.2.29. *Существует единственный оператор $\widetilde{B}: \Gamma \to \Gamma$, такой, что $(n+a/2)(n+1)\big(W_n - \mathbf{1}\big)f_n = (\widetilde{B}f)_n$ для всех $f \in \Gamma$. Степень оператора $\widetilde{B}$ равна нулю, и он имеет вид*

$$\begin{aligned}\widetilde{B} = &\sum_{i,j=2}^{\infty} (2i-1)(2j-1)(p_1 p_{2i+2j-3} - p_{2i-1}p_{2j-1}) \frac{\partial^2}{\partial p_{2i-1} \partial p_{2j-1}} \\ &+2 \sum_{i,j=1}^{\infty} (2i+2j-1) p_1 p_{2i-1} p_{2j-1} \frac{\partial}{\partial p_{2i+2j-1}} \\ &- \sum_{i=2}^{\infty} (2i-1) \left(2i - 2 + \frac{a}{2}\right) p_{2i-1} \frac{\partial}{\partial p_{2i-1}} + \text{операторы степени} \leqslant -1.\end{aligned}$$

В **третьем параграфе** для всех $a > 0$ устанавливается сходимость марковских цепей вверх/вниз W_n к бесконечномерному диффузионному процессу $X_a(t)$ на $\overline{\Sigma}$, а также исследуются некоторые свойства этого процесса. Исследование сходимости цепей W_n и полученных диффузионных процессов во многом аналогично случаю, рассмотренному в главе 1.

Пусть алгебра $\mathcal{G} \subset C(\overline{\Sigma})$ порождена функциями $\mathsf{q}_k(\mathsf{x})$ с четными номерами. Отображение $\Lambda \to \mathcal{F} \cong \Lambda/(p_1 - 1)\Lambda$ в ограничении на $\Gamma \subset \Lambda$ дает $\Gamma \to \mathcal{G} \cong \Gamma/(p_1 - 1)\Gamma$.

Теорема 2.3.3. *Существует оператор $B: \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, такой, что при $n \to \infty$ операторы $n^2(W_n - \mathbf{1})$ сходятся к B в алгебре $\mathcal{G}$* (*определение сходимости такое же, как в теореме* 3). *Он может быть записан как оператор в алгебре полиномов от $\mathsf{q}_2, \mathsf{q}_4, \dots$:*

$$\begin{aligned}B = &\sum_{i,j=1}^{\infty} (2i+1)(2j+1) \left(\mathsf{q}_{2i+2j} - \mathsf{q}_{2i}\mathsf{q}_{2j}\right) \frac{\partial^2}{\partial \mathsf{q}_{2i} \partial \mathsf{q}_{2j}} \\ &+2 \sum_{i,j=0}^{\infty} (2i+2j+3)\, \mathsf{q}_{2i}\mathsf{q}_{2j} \frac{\partial}{\partial \mathsf{q}_{2i+2j+2}} - \sum_{i=1}^{\infty} (2i+1) \left(2i + \frac{a}{2}\right) \mathsf{q}_{2i} \frac{\partial}{\partial \mathsf{q}_{2i}}.\end{aligned}$$

Теорема 2.3.5. (1) *Оператор B замыкаем в $C(\overline{\Sigma})$, и его замыкание порождает сильно непрерывную полугруппу сжимающих операторов $\{W(t)\}_{t \geqslant 0}$*

в $C(\overline{\Sigma})$, которая сохраняет положительность и единицу. Дискретные полугруппы $\left\{\mathbf{1}, W_n, W_n^2, \dots\right\}$ сходятся к непрерывной $\{W(t)\}$, причем эта сходимость равномерна на конечных интервалах по t.

(2) *Для всех значений параметра $a > 0$ полугруппа $\{W(t)\}$ является полугруппой строго марковского процесса $X_a(t)$ на $\overline{\Sigma}$, который может начинаться с любой точки и любого вероятностного распределения.*

(3) *Процесс $X_a(t)$ на симплексе сохраняет вероятностную меру $P^{(a)}$. Это единственная инвариантная мера процесса, он обратим и эргодичен относительно нее.*

(4) *Марковские цепи вверх/вниз на $\mathbb{S}_n$, построенные по $\{M_n^a\}$, сходятся к $X_a(t)$ аналогично п.*(4) *теоремы* 4.

(5) *Траектории процесса $X_a(t)$ непрерывны с вероятностью единица.*

(6) *Спектр генератора процесса $X_a(t)$ в $L^2\big(\overline{\Sigma}, P^{(a)}\big)$ имеет следующий вид*: $\{0\} \cup \{-m(m-1+a/2) \colon m = 2, 3, \dots\}$. *Собственное значение* 0 *простое, а кратность m-го равна числу разбиений m на нечетные слагаемые, большие единицы.*

В **заключении** кратко формулируются основные результаты, полученные в диссертации. Результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Дана алгебро-комбинаторная интерпретация однопараметрической классической модели Морана и построено ее обобщение на двухпараметрический случай.

2. Доказана сходимость последовательности марковских цепей на разбиениях (двухпараметрического аналога модели Морана) к бесконечномерным диффузионным процессам, которые сохраняют двухпараметрические распределения Пуассона–Дирихле.

3. Введены перемежающиеся координаты строгих разбиений и исследованы их важные комбинаторные и алгебро-комбинаторные свойства.

4. Установлена сходимость марковских цепей на строгих разбиениях (связанных с ансамблем Бородина случайных строгих разбиений[14]) к бесконечномерным диффузионным процессам.

5. Исследованы такие свойства построенных семейств бесконечномерных диффузионных процессов, как явный вид предгенератора процесса, структура его спектра, и др.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Л.А. Петров, Двухпараметрическое семейство бесконечномерных диффузий на симплексе Кингмана, Функциональный анализ и его приложения, 2009, 43(4), 45–66.

[2] Л.А. Петров, Предельное поведение некоторых случайных блужданий на строгих разбиениях, Успехи математических наук, 2009, 64(6), 177–178.

[3] Л.А. Петров, Случайные блуждания на строгих разбиениях, Записки научных семинаров ПОМИ, 2009, 373, 226–272.