ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ
им.А.А.ХАРКЕВИЧА РАН

На правах рукописи

Крыжевич Сергей Геннадьевич

Инвариантные множества и бифуркации динамических систем с ударами

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена в Санкт-Петербургском
государственном университете.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Афендиков Андрей Леонидович;

доктор физико-математических наук,
профессор Белых Владимир Николаевич;

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Бланк Михаил Львович.

Ведущая организация: Математический институт
им. В.А.Стеклова Российской Академии Наук.

Защита состоится 17 января 2012 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 ИППИ РАН
Большой Каретный переулок, 19, стр.1, Москва, ГСП-4, 127994

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН.

Автореферат разослан "   "   2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Соболевский А. Н.

Общая характеристика работы

Актуальность выбора темы диссертации. Инвариантные множества кусочно-гладких динамических систем, устойчивость соответствующих решений (движений) и механизмы возникновения хаотических колебаний в таких системах относятся к разделам теории дифференциальных уравнений, имеющим непосредственное практическое применение. Тем не менее, круг методов, разработанных для исследования таких задач, на настоящий момент, весьма ограничен. Виброударными системами (ВУС) называют механические системы, совершающие колебательные движения, в процессе которых их отдельные звенья, между которыми имеется зазор, испытывают соударения. Такие системы рассматриваются в задачах расчетов часовых механизмов, нелинейных электрических цепей, передаточных механизмов, демпферов ударного действия, машин для погружения и выдергивания строительных конструкций, разрушения и обработки горных пород, разработки полезных ископаемых и мерзлых грунтов, вибромолотов, шейкеров, роторов с зазорами в подшипниках, расчетов слеминга при качке корабля, взаимодействия колес скоростных поездов с рельсами, колебаний в неоднородной среде, вибродиагностики, позволяющей определить степень износа изделия и т.п. Явление удара часто связано с появлением в динамических системах хаотических колебаний с широким частотным спектром.

В инженерных задачах появление хаоса, как правило, считается неприятным явлением, так как приводит к непредсказуемому поведению решений. Однако, возможно создание таких технических устройств, в которых целенаправленное генерирование хаотических колебаний приведет к улучшению их работы.

Несмотря на потребность прикладной механики и техники в развитии методов исследования инвариантных множеств сильно нелинейных динамических систем, устойчивости их решений и механизмов возникновения хаотических колебаний, а также в исследованиях по анализу конкретных виброударных систем, работы в этих направлениях на настоящий момент еще находятся в начальной стадии, в связи с чем тема диссертации представляется актуальной.

Актуальность разработки теоретических подходов. Особенностью большинства математических моделей ВУС является наличие того или иного условия импульсного типа, затрудняющего применение численных методов. Даже для простейших систем, описываемых в промежутках между ударами линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, при построении приближенного решения могут возникнуть проблемы, связанные с тем, что для определения моментов времени, соответствующих ударам, приходится решать трансцендентные уравнения. В ряде виброударных систем возникают эффекты, нехарактерные для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, такие, как например, негладкость или даже разрывность интегральных многообразий, соответствующих точкам покоя. Эти явления не позволяют с формальной точки зрения применить основные результаты теории динамических систем, в частности, обосновать возможность применения численных методов и интерпретировать их результаты. Поэтому представляется целесообразным разработать методы, позволяющие выяснить структуру неблуждающих множеств динамических систем, задаваемых негладкими и разрывными отображениями. Также актуальна проблема построения математических моделей систем с ударами, адекватных экспериментальным данным.

История вопросов, затронутых в диссертации. Систематическое изучение виброударных систем началось еще в работах Ньютона и Гука. Ими были предложены простые и удобные в использовании математические модели удара, основанные на законе сохранения импульса и законе сохранения энергии. Эти модели, несмотря на свою простоту, часто дают достаточно точное описание поведения движений ВУС. Более точными являются модель Герца, а также модель, в которой ударное взаимодействие рассматривается как добавление в правую часть обобщенных функций. В дальнейшем, мы будем называть виброударной системой не только механическую систему с соответствующими свойствами, но и ее математическую модель.

К настоящему времени изучены такие свойства решений систем с ударами, как существование, единственность и непрерывность решений по начальным данным и параметрам. Исследовались бифуркации, характерные для такого рода систем. Особый интерес вызывает проблема наличия хаотических инвариантных множеств у систем с ударами.

Одной из первых теоретических работ по в этой области была статья Холмса (1982), в которой показывалось наличие хаотических инвариантных множеств в системе, описывающей колебания мяча, подскакивающего на гармонически осциллирующей поверхности. Описаны бифуркации, приводящие к возникновению так называемых странных аттракторов. В качестве одной из причин возникновения хаотических колебаний указывалось наличие периодических колебаний, имеющих в некоторый момент времени удар с малым значением компоненты скорости, нормальной по отношению к ограничителю, при условии, что в момент удара сила действует в сторону от ограничителя. Это явление получило название grazing – скольжение (Нордмарк, 1991). Еще одной важной причиной появления странных аттракторов является наличие периодических решений с большим, в пределе бесконечным, числом ударов за период. Это явление получило название стука или бесконечноударного режима (в англоязычной литературе – chatter или rattle).

Важным частным случаем ВУС являются биллиарды, то есть системы соответствующие равномерному и прямолинейному движению в промежутках между ударами. В отличие от ВУС общего вида, для биллиардов существует большое количество результатов, описывающих хаотическую динамику систем. В этой связи следует упомянуть работы Синая, Бунимовича, Долгопята и ряда других авторов, связанные с исследованием метрических свойств биллиардов и так называемых кусочно-растягивающих отображений (эргодичность, существование СБР-меры, оценки энтропии и т.п.)

И все же, несмотря на обилие работ по изучаемой теме, оставались открытыми следующие принципиально важные в теоретическом и прикладном отношении вопросы.

1. Существует ли аналитический критерий наличия у ВУС общего вида хаотических колебаний?

2. Применимы ли классические методы хаотической динамики к исследованию ВУС общего вида?

Цели работы. Целями диссертационной работы являются разработка методов исследования инвариантных множеств и бифуркаций сильно нелинейных динамических систем, их апробация на примере систем с ударами, а также анализ основных свойств инвариантных множеств виброударных систем и механизмов возникновения в таких системах хаотических колебаний. Для достижения данной цели решены следующие задачи.

1. Доказан ряд теорем, предоставляющих достаточные условия наличия хаотического инвариантного множества в виброударных системах общего вида. Изучены несколько неизвестных ранее механизмов появления гомоклинических точек и инвариантных множеств, описываемых "символической динамикой".

2. Изучены основные математические модели виброударных систем и описаны такие их свойства, как диссипативность, конвергентность, наличие предельных циклов и т.п.

3. Проведено описание бифуркаций, характерных для ВУС. Показано, каким образом множества неблуждающих точек диффеоморфизма сдвига на период меняются при этих бифуркациях.

4. Исследована локальная структура устойчивых и неустойчивых многообразий ВУС в окрестности периодических решений, в частности, показано, при каких условиях они не являются гладкими.

5. Описаны две причины неустойчивости решений ВУС – обгон и скольжение, первая из которых связана с наличием большого количества ударов за период, а вторая — с наличием удара с малой скоростью. Приведены оценки показателей Ляпунова периодических решений ВУС.

6. Показано, что гиперболические инвариантные множества виброударных систем, так же, как и гиперболические множества гладких динамических систем, структурно устойчивы.

7. Получены коэффициентные условия хаотического поведения решений кусочно-линейной системы, описываемой двумя уравнениями второго порядка.

8. На примере ВУС описан неизвестный ранее механизм появления хаоса в окрестности негиперболической точки покоя.

Новизна и ценность результатов диссертации. Для ВУС общего вида впервые получены аналитически обоснованные достаточные условия существования хаотического инвариантного множества. Гипотезы, выдвинутые ранее на основе результатов численных и натурных экспериментов были обобщены и получили теоретическое подтверждение. Так, например, впервые теоретически доказано (теоремы 2 и 3), что в окрестности бифуркации скольжения могут возникать "странные аттракторы". В ряде случаев даже удалось получить коэффициентные критерии наличия хаотического инвариантного множества. Так, например, теорема 5 предоставляет условия наличия хаоса в системах с ударами, не требующие априорной информации о наличии периодического решения ВУС с определенными свойствами. Предложены принципиально новые методы оценки показателей Ляпунова двумерных систем. Создан принципиально новый метод исследования динамики в окрестности негиперболической точки покоя; для этого случая предложена принципиально новая модель хаотической динамики. Все основные результаты диссертации снабжены примерами конкретных систем, в которых наблюдаются описываемые явления.

Объем и структура диссертации. Работа содержит 293 страницы машинописного текста и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 412 наименований. Каждая из глав делится на несколько разделов.

В главах 2,3 и 4 изложены наиболее важные с точки зрения автора результаты. Первая глава содержит, в основном, определения и технические результаты, необходимые для дальнейшего изложения материала. Описываются различные математические модели систем с ударом, обсуждается взаимосвязь между ними и их гомологические инварианты. Обсуждаются существование, единственность решений, зависимость решений от начальных данных и параметра, диссипативность, сохранение инвариантных множеств при малых возмущениях параметров системы. Для виброударных систем общего вида показывается, что гиперболические инвариантные множества обладают свойством структурной устойчивости. При помощи этой модели доказано существование и единственность предельных циклов виброударных систем. Этот результат позволяет распространить классические теоремы Драгилева и Левинсона-Смита на случай ВУС.

В главах 2 и 3 приводятся новые методы обнаружения хаотических инвариантных множеств и новые способы оценки показателей Ляпунова сильно нелинейных систем. В главе 2 изучается так называемый механизм скольжения. Предполагается, что при значениях параметра, близких к бифуркационному, имеется периодическое решение, имеющее удар, которому отвечает малая нормальная компонента скорости. При выполнении условий общего вида один из показателей Ляпунова является бесконечно большим положительным, а второй бесконечно большим отрицательным. Для систем с одной степенью свободы это гарантирует гиперболичность появляющегося инвариантного множества, которое при выполнение ряда условий общего вида является хаотическим. Показывается, что отображение сдвига на период, отвечающее рассматриваемой ВУС, имеет трансверсальную гомоклиническую точку. Исследовано два возможных случая: в первом из них периодическое решение имеет в некоторый момент времени удар с малой скоростью, а во втором подходит достаточно близко к ограничителю. В ряде случаев, например, для системы, рассмотренной в разделе 2.3, "излом" инвариантных поверхностей, приводящий к появлению хаоса, может возникать и тогда, когда периодическое движение не характеризуется наличием какого-либо малого параметра, такого, как скорость удара или расстояние до ограничителя в некоторый момент времени.

В главе 3 изучаются различные механизмы появления хаотических инвариантных множеств в различных виброударных системах. В разделе 3.2 рассматривается механическая система с одной степенью свободы, описываемая в промежутках между ударами уравнением Льенара. Предполагается, что правая часть периодична и имеет ровно два корня на периоде. Значение периода T рассматривается, как большой параметр системы. Предлагаются достаточные условия наличия у рассматриваемой виброударной системы при больших значениях T хаотического инвариантного множества. Описано явление нарастающей асинхронности ударов близких решений (обгон), являющееся причиной появления у этой динамической системы неустойчивости. Приведены оценки показателей Ляпунова. Исследуемая система не интегрируется даже в промежутках между ударами; никаких априорных предположений о наличии периодического решения не делается. Причина возникновения неустойчивости в рассматриваемой системе — явление обгона, то есть нарастающей асинхронности моментов ударов близких решений.

Обгон связан с появлением у некоторого периодического решения рассматриваемой системы большого количества ударов с малой скоростью за период. Это может быть вызвано как увеличением периода правой части, так и уменьшением коэффициента восстановления r, характеризующего потерю энергии при ударе. Показано, что при выполнении некоторых условий общего вида в полуокрестности значения параметра, отвечающего бифуркации стука, рассматриваемая система имеет хаотические инвариантные множества.

В случае, когда число степеней свободы рассматриваемой механической системы больше единицы, точка покоя отображения за период, соответствующая рассматриваемому периодическому решению, может оказаться негиперболической. Несмотря на наличие двух бесконечно больших показателей Ляпунова, сказать что-либо про остальные показатели за исключением того, что они ограничены первыми двумя, не удается. Таким образом, приходится, как это сделано в разделе 4.1, работать с множествами, про гиперболичность которых ничего сказать нельзя. Этот случай может быть исследован при помощи методов теории частично гиперболических инвариантных множеств. Приводится оригинальный алгоритм построения множества так называемых допустимых дисков. На множестве этих дисков вводится динамическая система, определяемая при помощи исходной. Показывается, что предлагаемая система имеет инвариантное множество, обладающее рядом свойств хаотического инвариантного множества, которые сохраняются при малых возмущениях параметров исходной виброударной системы.

Применяемый метод может быть использован для исследования свойств негиперболических положений равновесия диффеоморфизмов общего вида, не связанных, вообще говоря, с ВУС. В частности, как показано в разделах 4.2 и 4.3, возможно получить обобщение классической теоремы Смейла-Биркгофа о наличии хаотического инвариантного множества в окрестности трансверсальной гомоклинической точки, соответствующей гиперболическому положению равновесия, как на случай негиперболического положения равновесия, так и на случай нетрансверсальной гомоклинической точки.

Методы исследования. В диссертации использованы методы топологии, а также качественной теорий дифференциальных уравнений и динамических систем. Помимо этого, в рамках диссертации предлагаются новые, не имеющие аналогов, методы, позволяющие исследовать структуру множеств установившихся колебаний сильно нелинейных динамических систем. Приводится метод, позволяющий оценивать показатели Ляпунова, соответствующие решениям ВУС (теоремы 2 и 5, нумерация соответствует нумерации утверждений в тексте автореферата). Другой метод, приводимый в настоящей работе (теоремы 2 и 3), позволяет найти точки изгиба перроновых поверхностей, соответствующие не только виброударным, но и вообще кусочно гладким динамическим системам. Наличие таких изгибов при выполнении определенных условий, приводимых в настоящей работе, может привести к появлению гомоклинической точки, что проверяется с использованием методов хаотической динамики. Изучение явления обгона (теорема 5) дает новую возможность обнаружения так называемой "подковы Смейла", для чего также разработаны специальные методы. При доказательстве теорем 7 и 8, помимо прочего, разработаны методы, позволяющие строить отображения так называемых допустимых дисков, имеющие хаотические инвариантные множества. Это позволяет описывать хаос в окрестности негиперболических точек покоя динамических систем.

С целью иллюстрации полученных результатов, в главы 2 и 3 диссертации включены с соответствующими ссылками результаты численных и натурных экспериментов, выполненных другими авторами.

На защиту выносятся следующие результаты.
1. Предложено несколько принципиально новых методов выявления хаоса в кусочно-гладких системах. Продемонстрировано, каким образом наличие импульсного условия может привести к появлению негладкости устойчивых и неустойчивых многообразий, соответствующих периодическим решений. Показано, при каких условиях такой "излом" влечет наличие трансверсальных гомоклинических точек (теоремы 2–7).
2. В связи с этим исследована бифуркация скольжения, характерная для систем с ударами и возникающая при изменении числа ударов периодического решения. Приведено и аналитически проверено несколько достаточных условий общего вида, при выполнении которых в параметрической окрестности этой бифуркации

возникают хаотические колебания (теоремы 2 и 3).
3. Проведено детальное аналитическое описание бифуркации стука, а именно показано, каким образом наличие периодического решения с достаточно большим количеством ударов на периоде может приводить к возникновению хаоса. В этом случае также исследована структура устойчивого и неустойчивого многообразия и теоретически обосновано наличие трансверсальной гомоклинической точки. Продемонстрированы причины появления стука, такие, как уменьшение коэффициента восстановления удара и увеличение периода системы (теоремы 4 и 5).
4. Для одного важного с прикладной точки зрения случая виброударной системы с одной степенью свободы получены коэффициентные условия наличия хаотического режима, не требующие априорной информации о наличии у рассматриваемой системы периодического решения с определенными свойствами. А именно, для системы, описываемой в промежутках между ударами уравнением Льенара с правой частью большого периода, сформулированы достаточные условия наличия хаотического инвариантного множества. Показано, что, как и в случае стука, возникающего при уменьшении коэффициента восстановления, основной причиной возникновения хаоса служит неустойчивость, порождаемая появлением большого количества ударов с малой скоростью (теоремы 4 и 5).
5. Установлена одна из основных причин наличия хаоса в виброударных системах — нарастающая асинхронность ударов. Приведен ряд результатов, показывающих, как такой тип неустойчивости может приводить к появлению "подков Смейла". В частности, для кусочно-линейных систем приведены коэффициентные условия существования хаотического инвариантного множества (теорема 5).
6. Во всех рассматриваемых задачах предлагаются новые методы оценки показателей Ляпунова, соответствующих решениям виброударных систем. Ценность этих методов состоит в том, что они работают для наиболее проблемных с прикладной точки зрения случаев, таких, как, например, наличие удара с малой скоростью или большое число ударов за период (теоремы 2,5,7).
7. Для виброударных систем приведены теоремы о существовании, единственности решений, зависимости решений от начальных данных и параметров, диссипативности, сохранении инвариантных множеств при малых возмущениях параметров системы. Для сис-

тем с ударами общего вида показано, что гиперболические инвариантные множества структурно устойчивы (теорема 1).
8. Для систем с несколькими степенями свободы, в тех случаях, когда не удается установить гиперболичность инвариантных множеств, строятся множества так называемых допустимых дисков, каждый из которых близок к центральному неустойчивому многообразию точки покоя, соответствующей периодическому решению ВУС. На множестве допустимых дисков строится отображение, представляющее собой комбинацию применения к допустимому диску итерации отображения сдвига на период и продолжения полученного диска. Подобного рода построения также не имеют аналогов в предшествующих работах. Поскольку эти методы годятся для изучения динамики в окрестности негиперболической точки покоя, они могут иметь применения, далеко выходящие за рамки теории ВУС (теорема 7).

Методы, используемые при решении этих проблем, позволили получить следующие результаты, не являющиеся основными в этой работе, но представляющие большой интерес с точки зрения теории динамических систем.
1. Получен критерий наличия бесконечного множества периодических точек диффеоморфизма в окрестности негиперболического положения равновесия. Приведены условия, при выполнении которых факт наличия такого множества является грубым по отношению к малым возмущениям диффеоморфизма.
2. Получены принципиально новые достаточные условия наличия бесконечного числа периодических точек в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки диффеоморфизма.

Апробация работы. Основные результаты были изложены и обсуждены на следующих конференциях и семинарах.
1. XIX Международная конференция "Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы конечных и граничных элементов." Санкт-Петербург, 30 мая – 2 июня 2001 г.
2. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная И. Г. Петровскому. Москва, 16 – 22 мая 2004 г.
3. Международная конференция "Четвертые Окуневские чтения". Санкт-Петербург, 22 –25 июня 2004 г.

4. Четвертая международная конференция "Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения". Москва, 14–21 августа 2005 г.
5. Международная конференция "Еругинские чтения XII", Минск. 16 – 19 мая 2007 г.
6. Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная И.Г.Петровскому. Москва, 21 – 26 мая 2007 г.
7. Международный Конгресс "Нелинейный Динамический Анализ 2007", посвященный 150-летию со дня рождения академика А. М. Ляпунова. С.-Петербург, 4-10 июня 2007 г.
8. International Conference (ICFMA-2008). The University of Burdwan, Burdwan, west Bengal, India. 16 – 19 января 2008 г.
9. Fifth European Congress of Mathematics, Amsterdam, 14 – 18 июля 2008 г.
10. Пятая международная конференция "Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения". Москва, 17–24 августа 2008 г.
11. X Белорусская математическая конференция. Минск, 3 – 7 ноября 2008 г.
12. International Congress of Mathematical Physics 2009. Prague, August, 2 – 8, 2009.
13. International Conference of Physics and Control (PhysCon09). Catania, Italy, September, 1 – 4, 2009.
14. Research Workshop on Bifurcations in Oscillators with Elastic and Impact Constrains. 4, November — 6, November, 2009, Imperial College of London, UK.
15. International Congress of Mathematicians (ICM2010). Hyderabad, India, August, 19 – 27, 2010.
16. Еругинские чтения 2011, Новополоцк, 12–14 мая 2011г.
17. The 6-th SEAMS-GMU 2011 International Conference on Mathematics and Its Applications, Yogyakarta, Indonesia, July, 12–15, 2011.
18. The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow, Russia, August, 14–21, 2011.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1 – 15], приведенных в конце автореферата.

Краткое содержание работы

Постановка задачи.

В настоящей работе мы будем считать, что динамика рассматриваемой системы в промежутках между ударами описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_k = f_k(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \mu), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим также эквивалентную систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_k = y_k; \qquad \dot{y}_k = f_k(t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \mu), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $t \in \mathbb{R}$ – независимая переменная, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ – фазовые переменные, а $\mu \in J = [\mu_-, \mu_+] \ni 0$ – параметр. Предполагаем, что непрерывная функция $f : \mathbb{R}^{2n+1} \times J \to \mathbb{R}^n$, компонентами которой являются функции f_k, периодична по t с периодом T, C^1 – гладкая по своим аргументам кроме, возможно, первого. Множество таких правых частей обозначим символом $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_f(J, n, T)$.

Условимся обозначать символом $\operatorname{col}(a_1, \ldots, a_m)$ вектор-столбец, состоящий из элементов $a_1, \ldots, a_m$. Положим

$$\begin{gathered}
x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{col}(x_1, \bar{x});\\
\dot{x} = y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n) = \operatorname{col}(y_1, \bar{y});\\
f = \operatorname{col}(f_1, \ldots, f_n) = \operatorname{col}(f_1, \bar{f});\\
z_k = \operatorname{col}(x_k, y_k), \quad k = 1, \ldots, n;\\
z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_n) = \operatorname{col}(z_1, \bar{z}).
\end{gathered}$$

Обозначим символом $|\cdot|$ евклидову норму.

Основным условием удара, рассматриваемым в настоящей работе, является следующее. Фиксируем некоторую C^1 – гладкую функцию $r : J \to (0, 1]$.

Условие 1. Если в некоторый момент времени t_0 выполнено условие $x_1(t_0) = 0$, то $x(t_0 + 0) = x(t_0 - 0)$,

$$y_1(t_0 + 0) = -r(\mu) y_1(t_0 - 0), \qquad \bar{y}(t_0 + 0) = \bar{y}(t_0 - 0).$$

Если же $z_1(t_0) = 0$ и число t_1 таково, что на отрезке $[t_0, t_1]$ имеет место неравенство $f_1^0(t, \mu) \leqslant 0$, то $z_1(t) = 0$ на всем отрезке $[t_0, t_1]$. Что касается компоненты $\bar{z}(t)$ решения $z(t)$, она удовлетворяет на этом отрезке системе

$$\dot{x}_k = y_k; \qquad \dot{y}_k = f_k(t, 0, \bar{z}, \mu), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Виброударную систему, заданную уравнениями (1) и импульсным условием 1 будем обозначать символом (A).

Топологическое пространство виброударных систем.

Фиксируем размерность n, длину периода T и отрезок J, на котором меняется параметр μ. Виброударная система, заданная уравнениями (1) и условиями удара 1, однозначно определяется своей правой частью f и коэффициентом восстановления r.

Введем топологию на множестве $\mathcal{X} = \mathcal{X}(J, n, T)$ виброударных систем, отождествляемом с $\mathcal{X}_f \times C^1(J \to (0, 1])$. Это будет минимальная топология, в которой для любой пары $(f_0, r_0) \in \mathcal{X}$ и любого $R > 0$ множество

$$\Big\{(f, r) \in \mathcal{X} : \sup_{(t,z,\mu) \in M} \big(|f(t, z, \mu) - f_0(t, z, \mu)| + \\ + \left|\frac{\partial f}{\partial z}(t, z, \mu) - \frac{\partial f_0}{\partial z}(t, z, \mu)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial \mu}(t, z, \mu) - \frac{\partial f_0}{\partial \mu}(t, z, \mu)\right| + \\ + |r(\mu) - r_0(\mu)| + |r'(\mu) - r_0'(\mu)|\big) < R\Big\}$$

открыто.

Определение решения виброударной системы (A).

Приведем два определения, для решений, имеющих конечное число ударов на отрезке и для решений с произвольным числом ударов. Разумеется, первое из них, гораздо более простое, является частным случаем второго. Заметим, что во всех основных результатах диссертации решения рассматриваются на ограниченных отрезках, где они имеют конечное число ударов, либо на луче или прямой, однако при этом моменты ударов не имеют конечных точек сгущения.

Определение 1. Функция

$$z(t) = \operatorname{col}(x_1(t), y_1(t), \ldots, x_n(t), y_n(t))$$

называется решением виброударной системы (A) *с конечным числом ударов на отрезке* (a, b), если существует конечное число моментов времени (ударов) $t_1, \ldots, t_N \in (a, b)$ (положим для удобства $t_0 = a$, $t_{N+1} = b$), таких, что выполнены следующие условия.

1. Все компоненты функции $z(t)$, кроме $y_1(t)$, непрерывны на отрезке (a, b), функция $y_1(t)$ не имеет точек разрыва; кроме, возможно, $(t_1, \ldots, t_N)$.

2. Функция $x_1(t)$ неотрицательна на (a, b) и обращается в нуль в точках $t_1, \ldots, t_N$ и только в них.

3. Для любого $k = 1, \ldots, N$
$$y_1(t_k + 0) = -r(\mu)\, y_1(t_k - 0). \tag{2}$$

4. На каждом из отрезков (t_k, t_{k+1}) функция $z(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений (1).

Для полноты картины, приведем определение решения виброударной системы с произвольным числом ударов.

Определение 2. Функция
$$z(t) = \mathrm{col}(x_1(t), y_1(t), \ldots, x_n(t), y_n(t))$$
называется решением виброударной системы (A) на отрезке (a, b), если существует дизъюнктное разбиение $(a, b) = I_+ \bigcup I_0 \bigcup I_-$. Множество $I_+ = \{t \in (a, b) : x_1(t) > 0\}$, соответствующее безударным движениям, открыто, а множество
$$I_- = \{t \in (a, b) : z_1(t) = 0, f_1(0, 0, x_2(t), y_2(t), \ldots, x_n(t), y_n(t), \mu)\},$$
соответствующее скольжениям вдоль ограничителя, замкнуто.

1. Все компоненты функции $z(t)$, кроме $y_1(t)$, непрерывны на отрезке (a, b), функция $y_1(t)$ не имеет точек разрыва, кроме, возможно, точек множества I_0.

2. Функция $x_1(t)$ положительна в точках множества I_+ и обращается в нуль в точках множества $I_0 \bigcup I_-$.

3. На каждом из подотрезков множества I_+ функция $z(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений (1).

4. Множество I_0 не более, чем счетно, и все его точки сгущения, если таковые есть, принадлежат множеству I_-.

5. Для любого $t_0 \in I_0$ выполнено условие (2).

6. На любом подотрезке множества I_- компонента $\bar{z}(t)$ является решением системы

$$\dot{x}_k = y_k; \qquad \dot{y}_k = f_k(t, 0, \bar{z}, \mu), \quad k = 2, \ldots, n.$$

В общем виде, для таких решений единственности нет, что иллюстрируется простым примером уравнения $\ddot{x} = -1$ с ограничителем при $x = 0$ и коэффициентов $r < 1$. Решение $x = 0$ не будет единственным "назад", так как любое решение обнуляется за конечное время.

Существование, единственность и зависимость решений от начальных данных и параметров.

Так как в моменты ударов одна из компонент решения меняется скачком, классическая теорема об интегральной непрерывности в данном случае неприменима. Тем не менее, справедливы следующие утверждения (здесь и далее после номера теоремы или леммы в скобках приводится номер соответствующего утверждения в тексте диссертации).

Лемма 1 (лемма 1.2.1). Пусть при некотором μ_0 система (A) имеет решение $z(t)$ с начальными данными $z(t_0) = z_0$, определенное на отрезке $[t_-, t_+] \ni t_0$. Предположим, что первая компонента $x_1(t)$ решения $z(t)$ на отрезке $[t_-, t_+]$ имеет ровно N корней

$$t_- < \tau_1^0 < \ldots < \tau_N^0 < t_+,$$

причем значения второй компоненты y_1 в этих точках удовлетворяет неравенствам $y_1(\tau_j^0 - 0) \neq 0$, $(j = 1, \ldots, N)$. Тогда найдется такое $\delta_0 > 0$, что если $|\mu_1 - \mu_0| < \delta_0$, $|z^1 - z_0| < \delta_0$, $|t_1 - t_0| < \delta_0$, то решение $z(t, t_1, z^1, \mu_1)$ системы (A), соответствующее значению μ_1 параметра μ и начальным данным $z(t_1) = z^1$, имеет на том же промежутке ровно N корней $\tau_j(t_1, z^1, \mu_1)$ $(j = 1, \ldots, N)$. При этом как моменты ударов $\tau_j(t_1, z^1, \mu_1)$, так и соответствующие значения скоростей

$$y_j = y(\tau_j(t_1, z^1, \mu_1) + 0, t_1, z^1, \mu_1)$$

C^1 - гладко зависят от своих аргументов.

Фиксировав решение $z(t)$, введем обозначение

$$U_{\delta_0} = \{(t_1, z^1, \mu_1) : |\mu_1 - \mu_0| < \delta_0, |z^1 - z_0| < \delta_0, |t_1 - t_0| < \delta_0\}.$$

Очевидным следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Лемма 2 (лемма 1.2.2). Пусть выполнены условия леммы 1 и δ_0 – величина, существующая в силу этой леммы. Предположим, что оно столь мало, что числа $\tau_j^{\pm}$, определенные по формулам

$$\begin{aligned} \tau_j^+ &= \max\{\tau_j(t_1, z^1, \mu_1) : (t_1, z^1, \mu_1) \in U_{\delta_0}\}, \\ \tau_j^- &= \min\{\tau_j(t_1, z^1, \mu_1) : (t_1, z^1, \mu_1) \in U_{\delta_0}\}, \end{aligned}$$

удовлетворяют неравенству

$$t_- < \tau_1^- \leqslant \tau_1^+ < \tau_2^- \leqslant \tau_2^+ < \ldots < \tau_N^- \leqslant \tau_N^+ < t_+.$$

Тогда на любом из отрезков $[t_1, \tau_1^-)$, (τ_1^+, τ_2^-), $\ldots$, (τ_{N+1}^+, τ_N^-), $(\tau_N^+, t_+]$ решение $z(t, t_1, z^1, \mu_1)$ есть C^1 – гладкая функция своих аргументов, где t пробегает соответствующий отрезок, а $(t_1, z^1, \mu_1) \in U_{\delta_0}$.

Структурная устойчивость.

Рассматривается система (A), заданная уравнениями (1) и условиями 1.

Введем в рассмотрение функцию $\chi_-(s)$, такую, что $\chi_-(s) = 0$ если $s \geqslant 0$; $\chi_-(s) = 1$, если $s < 0$. Для фиксированного значения $r \in (0, 1]$ положим $\alpha = -\ln r/\pi$. Функцию $f(t, x, y)$ доопределим на множестве $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \Lambda$ так, чтобы полученная функция оставалась кусочно-гладкой. Пусть $\mu > 0$ – большой параметр, положим $\eta(x) = 1$ при

$$h(\mu, x, y) = -2\alpha\mu\chi_-(x_1)y_1 - (1 + \alpha^2)\mu^2\chi_-(x_1)x_1.$$

Рассмотрим отображение $g(t,x,y)$, компонентами которого являются функции g_k, периодичное с периодом T по первому аргументу, непрерывное и C^1 – гладкое по второму и третьему аргументам и малое по норме в C^0 вместе со своими первыми производными по x и по y. Введем в рассмотрение системы

$$\dot{x}_k = y_k, \qquad \dot{y}_k = f_k(t,x,y) + g_k(t,x,y), \qquad k = 1,\dots,n; \tag{3}$$

$$\dot{x}_k = y_k, \quad \dot{y}_k = f_k(t,x,y) + g_k(t,x,y) + \delta_k^1 h(\mu,x,y), \quad k = 1,\dots,n. \tag{4}$$

Здесь δ_k^1 — символ Кронекера.

Будем обозначать виброударные системы, описываемые системой (1) и указанными выше условиями удара, тем же символом (A), а системы, заданные соотношениями (3), символом (D). Положим $z = (x,y)$ и рассмотрим $z_r(t,t_0,z_0)$ – решение задачи Коши для системы (D) с начальными данными $z(t_0) = z_0$. Рассмотрим $z_{g,\mu,r}(t,t_0,z_0)$ и $z_{g,r}(t,t_0,z_0)$ – решения соответствующих задач для систем (4) и (D) на тех участках времени, где они определены однозначно. Рассмотрим отображения сдвига, заданные формулами: $S_r(z_0) = z(T,0,z_0)$,

$$S_{g,r}(z_0) = z_{g,r}(T,0,z_0), \quad S_{g,\mu,r}(z_0) = z_{g,\mu,r}(T,0,z_0).$$

Теорема 1 (теорема 1.4.1). Пусть $r_0 \in (0,1]$ и отображение $S = S_{r_0}$ имеет гиперболическое инвариантное множество $K \subset (0,+\infty) \times \mathbb{R}$, такое, что $z_{N,r_0}(t,0,z_0) \neq 0$ для любого $z_0 \in K$, $t \in [0,T]$. Пусть U – окрестность множества K, замыкание которой $\overline{U}$ и его образ $S(\overline{U})$ не пересекаются с осью Oy. Справедливы следующие утверждения.

1) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если

$$r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta) \bigcap (0,1],$$

$$\max_{(t,z)\in W} |g(t,z)| < \delta, \quad \max_{(t,z)\in W} \left|\frac{\partial g}{\partial z}(t,z)\right| < \delta,$$

то отображение $S_{g,r}$ определено в некоторой окрестности U_0 компакта K в Λ и найдется такой гомеоморфизм $h_{g,r} : K \to K_{g,r} \subset U_0$, что $\max_{x\in K} |h_{g,r}(x) - x| < \varepsilon$, а $K_{g,r}$ является гиперболическим инвариантным множеством гомеоморфизма $S_{g,r}$, причем $h_{g,r}(S(x)) = S_{g,r}(h_{g,r}(x))$ для любого $x \in K$.

2) Пусть $r_0 \in (0,1]$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\mu_0 > 0$, $\delta > 0$, что если $\mu > \mu_0$, то найдется такой гомеоморфизм $\eta_{g,\mu,r_0} : K \to K_{g,\mu,r_0} \subset \mathbb{R}^2$, что $\max\limits_{x\in K} |\eta_{g,\mu,r_0}(x) - x| < \varepsilon$, а K_{g,μ,r_0} – гиперболическое инвариантное множество гомеоморфизма S_{g,μ,r_0}, причем $\eta_{g,\mu,r_0}(S(x)) = S_{g,\mu,r_0}(\eta_{g,\mu,r_0}(x))$ для любого $x \in K$.

Бифуркация скольжения.

В главе 2.1 изучается бифуркация, связанная с изменением числа ударов периодического решения.

Условие 2. Существует непрерывно зависящее от $\mu \in J$ семейство T – периодических решений

$$\varphi(t,\mu) = \mathrm{col}(\varphi_1^x(t,\mu), \varphi_1^y(t,\mu), \ldots, \varphi_n^x(t,\mu), \varphi_n^y(t,\mu))$$

системы (A), обладающее следующими свойствами (рис. 1).

1. При $\mu \geqslant 0$ компонента $\varphi_1^x(t,\mu)$ имеет на $[0,T)$ ровно $N+1$ корень $\tau_0(\mu), \ldots, \tau_N(\mu)$.

2. Скорости ударов $Y_k(\mu) = \varphi_1^y(\tau_k(\mu)+0,\mu))$ таковы, что для любых $\mu \in J$, $k = 1, \ldots, N$

$$Y_0(\mu) > 0 \quad \text{при} \quad \mu > 0, \qquad Y_0(0) = 0,$$
$$f_1^0(\tau_0(0), \bar\varphi(\tau_0(0)), 0) = \phi_0 > 0, \qquad Y_k(\mu) > 0.$$

Здесь $\bar\varphi(t,\mu) = \mathrm{col}(\varphi_2^x(t,\mu), \varphi_2^y(t,\mu), \ldots, \varphi_n^x(t,\mu), \varphi_n^y(t,\mu))$.

3. Моменты времени $\tau_k(\mu)$ и скорости удара $Y_k(\mu)$ непрерывно зависят от параметра μ на области определения.

Не умаляя общности, можно считать, что $\tau_0(\mu) \equiv 0$. Фиксировав малое $\theta > 0$, рассмотрим отображение сдвига для системы (A), заданное формулой $S(z^0) = S_{\mu,\theta}(z^0) = z(T - \theta + 0, -\theta, z^0, \mu)$. Положим $z_{\mu,\theta} = \varphi(-\theta, \mu)$. Рассмотрим матрицу

$$A = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\partial z}{\partial z^0}(T - \theta + 0, \theta, z^0, 0)\bigg|_{z^0 = z_{0,\theta}}.$$

Пусть $\Delta_0 = \det A$. Обозначим элементы матрицы A символами a_{ij}, а элементы матрицы A^{-1} символами α_{ij}, столбцы матриц A и A^2 символами A_j и A_j^2 соответственно, строки матрицы A^{-1} символами $\mathcal{A}_j$. Если $n > 1$ и $a_{12} \neq 0$ рассмотрим матрицу $\bar A = (\bar a_{ij})$ размера $2n-2 \times 2n-2$, определенную по формулам

$$\bar a_{ij} = -a_{1\,j+2} a_{i+2\,2}/a_{12} + a_{i+2\,j+2}, \qquad i,j = 1, \ldots, 2n-2.$$

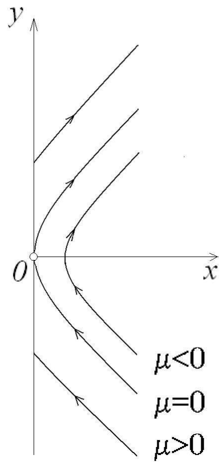

Рис. 1.

Аналогично, при $n > 1$ и $\alpha_{12} \neq 0$, определим матрицу $\overline{\mathcal{A}} = (\bar{\alpha}_{ij})$

$$\bar{\alpha}_{ij} = -\alpha_{1\,j+2}\alpha_{i+2\,2}/\alpha_{12} + \alpha_{i+2\,j+2}, \qquad i, j = 1, \ldots, 2n-2.$$

Пусть выполнено по крайней мере одно из следующих условий.

Условие 3.

1. Либо $n = 1$, либо у матрицы $\bar{A}$ нет собственных чисел на единичной окружности в $\mathbb{C}$.
2. $a_{12} > 0, \quad \alpha_{12} \neq 0, \quad \sum_{j=1}^{2n} a_{1k} a_{k2} < -a_{12}.$ (5)

Условие 4.

1. Либо $n = 1$, либо у матрицы $\bar{\mathcal{A}}$ нет собственных чисел на единичной окружности в $\mathbb{C}$.
2. $\alpha_{12} > 0, \quad a_{12} \neq 0, \quad \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{1k} \alpha_{k2} < -\alpha_{12}.$ (6)

Теорема 2 (теорема 2.1.1). Пусть выполнено условие 2 и одно из условий 3 или 4. Тогда существуют такие значения $\mu_0 > 0$ и $\theta > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu_0)$ существуют такое натуральное число m и такое компактное множество $K_{\mu,\theta}$, инвариантное по отношению к $S^m_{\mu,\theta}$, что выполнены следующие условия.

1) Найдется такая окрестность $U_{\mu,\theta}$ множества $K_{\mu,\theta}$, что сужение $S^m_{\mu,\theta}|_{U_{\mu,\theta}}$ является диффеоморфизмом. Инвариантное множество $K_{\mu,\theta}$ гиперболично.

2) Множество $K_{\mu,\theta}$ диффеоморфизма $S^m_{\mu,\theta}|_{U_{\mu,\theta}}$ хаотично в смысле Дивени, то есть бесконечно, гиперболично топологически транзитивно (содержит плотную орбиту) и периодические точки плотны в нем.

В диссертации приводятся примеры виброударных систем, удовлетворяющих условиям теоремы 2 и показывается, что внутренность множества таких систем в топологии множества $\mathcal{X}$ непуста. То же самое справедливо и для приводимых ниже теорем 3 и 7.

Ключевым утверждением в доказательстве теоремы 2 является следующая лемма.

Лемма 3 (лемма 2.1.4). Положения равновесия $z_{\mu,\theta}$ отображения $S_{\mu,\theta}$ являются гиперболическими точками покоя седлового типа. Соответствующие перроновы многообразия W^s и W^u трансверсально пересекаются в некоторой точке $p \neq z_{\mu,\theta}$ (рис. 2).

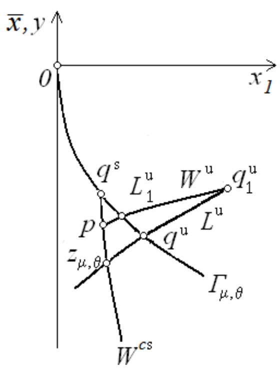

Рис. 2.

Далее будем рассматривать семейство периодических решений, изображенное на рисунке 1 и соответствующее $\mu < 0$. Эти периодические движения будут проходить рядом с ограничителем, но не касаться его.

Условие 5. Существует семейство T – периодических решений

$$\varphi(t,\mu) = \mathrm{col}(\varphi_1^x(t,\mu), \varphi_1^y(t,\mu), \ldots, \varphi_n^x(t,\mu), \varphi_n^y(t,\mu)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mu \in J$$

системы (A) со следующими свойствами.

1. Для любой пары $(t_0, \mu_0) \in [0,T) \times J$, такой, что $\varphi_1^x(t_0,\mu_0) \neq 0$ функция $\varphi(t,\mu)$ непрерывна в окрестности точки (t_0,μ_0).

2. Для любого $\mu \in J$ компонента $\varphi_1^x(t,\mu)$ имеет N корней

$$\tau_1(\mu) < \ldots < \tau_N(\mu)$$

на периоде $[0, T)$. Значения $\tau_j(\mu)$, равно как и скорости

$$-\varphi_1^y(\tau_j(\mu) - 0, \mu)), \qquad j = 1, \ldots, N$$

непрерывно зависят от параметра μ.
3. При $\mu > 0$ других корней компонента $\varphi_1^x(t, \mu)$ не имеет. При $\mu = 0$ функция $\varphi_1^x(t, 0)$ имеет ровно один дополнительный корень $t = 0$.
4. Нормальные компоненты скорости $Y_k(\mu) = -\varphi_1^y(\tau_k(\mu) - 0, \mu))$ таковы, что для любых $\mu \in J$, $k = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} &\varphi_1^y(0,0) = 0, \qquad f_1(0,0,0,\bar\varphi(0,0),0) = \phi_0 > 0, \qquad Y_k(\mu) > 0, \\ &\min_{\mu\in J} \tau_1(\mu) > 0, \qquad \max_{\mu \in J} \tau_N(\mu) < T. \end{aligned}$$

Здесь $\bar\varphi(t, \mu) = \mathrm{col}(\varphi_2^x(t, \mu), \varphi_2^y(t, \mu), \ldots, \varphi_n^x(t, \mu), \varphi_n^y(t, \mu))$.

Рассмотрим матрицу $A = \lim_{\mu,\theta\to 0+} DS_{\mu,\theta}(z_{\mu,\theta})$. Обозначим элементы матрицы A символами a_{ij}, а ее столбцы символами A_j.

Условие 6. Матрица A является гиперболической седловой, то есть у нее нет собственных чисел на единичной окружности в $\mathbb{C}$, причем по крайней мере одно собственное число по модулю больше 1, а другое – меньше.

Пусть M^s – пространство, натянутое на собственные и дополнительные векторы матрицы A, по модулю меньшие единицы, а M^u – пространство, определенное аналогичным образом для собственных и дополнительных векторов, соответствующих собственным числам, модули которых больше 1. Пусть $k = \dim M^s$, тогда $\dim M^u = 2n - k$, $1 < k < 2n$.

Условие 7. Оба пространства M^s и M^u не содержатся целиком в гиперплоскости π_1, заданной условием $x_1 = 0$.

В этом случае пересечения указанных пространств с плоскостью π_1 трансверсальны. Обозначим $\pi_1^{s,u} = \pi_1 \bigcap M^{s,u}$. Выберем в пространствах M^s и M^u базисы $e_1^s, e_2^s, \ldots, e_k^s$ и $e_1^u, e_2^u, \ldots, e_{2n-k}^u$ таким образом, что $e_1^s \perp \pi_1^s$, $e_1^u \perp \pi_1^u$; $e_j^s \in \pi_1^s$, $e_j^u \in \pi_1^u$ при $j > 1$. Обозначим элементы векторов e_j^σ символами e_{ij}^σ, $\sigma \in \{s, u\}$; $i, j = 1, \ldots, 2n$. Отметим, что оба элемента e_{11}^σ ненулевые; не умаляя общности, считаем их положительными. Положим

$$R^s = e_{21}^s / e_{11}^s, \quad R^u = e_{21}^u / e_{11}^u, \quad R^a = a_{22}/a_{12}, \quad R^\alpha = \alpha_{22}/\alpha_{12}.$$

Условие 8. Либо $a_{12} > 0$, $(R^u - R^s)/(R^a - R^s) > 0$, либо $\alpha_{12} > 0$, $(R^s - R^u)/(R^\alpha - R^u) > 0$.

Теорема 3 (теорема 2.2.1). Пусть выполнены условия 5 – 8. Тогда существуют такие значения $\mu_0 > 0$ и $\theta > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu_0)$ отображение $S_{\mu,\theta}$ имеет хаотичное по Дивени инвариантное множество.

На рисунке 3 показано, каким образом в рассматриваемой системе возникает гомоклиническая точка.

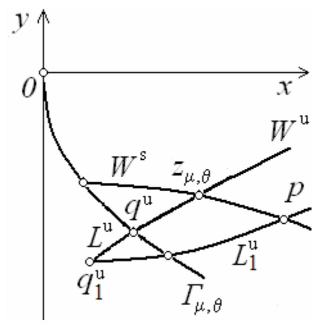

Рис. 3.

Бифуркация стука.

Рассматривается виброударная система, описываемая в промежутках между ударами следующими уравнениями с параметром

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = F(t, x, y, \mu), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Считаем, что правая часть $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ограничена C^3 гладка по своим аргументам на множестве $\mathbb{R} \times \Lambda \times I$, где $\Lambda = \{(x, y) : x \geqslant 0\}$, $I = [0, \mu^*]$, $\mu^* > 0$. Предполагаем, что найдется такое $T = T(\mu) > 0$, непрерывно зависящее от μ, что $F(t + T, x, y, \mu) \equiv F(t, x, y, \mu)$. Положим $f(t, \mu) = F(t, 0, 0, \mu)$. Считаем, что число корней функции $f(\cdot, \mu)$ на периоде $[0, T(\mu))$ не зависит от μ, не равно нулю и все эти корни простые.

Система (7) определена для $x \geqslant 0$, предположим, что имеет место условие удара 1.

Пусть имеется семейство T – периодических решений системы (A) $\varphi(t, \mu) = \mathrm{col}(\varphi_x(t, \mu), \varphi_y(t, \mu))$, непрерывно зависящее от своих аргументов в окрестности любой точки (t_0, μ_0), такой, что

$\varphi_x(t_0,\mu_0) \neq 0$. Будем предполагать, что найдутся такие $\mu_-, \mu_+ \in I$, $\mu_- < \mu_+$ что

$$\forall\, \mu \in [\mu_-, \mu_+] \quad \exists\, t^0 : \varphi_x(t^0,\mu) = 0, \quad \varphi_y(t^0,\mu) \neq 0.$$

Обозначим через $z(t, t_0, z_0, \mu)$ решение задачи Коши для системы (A) с начальными данными $z(t_0 + 0) = z_0$ (при условии, что такое решение однозначно определено в момент t). Для фиксированного решения $z(t) = \mathrm{col}(x(t), y(t))$ рассматриваемой системы будем называть моментом удара любой корень функции $x(t)$.

Обозначим через $\mathcal{R} \subset [\mu_-, \mu_+]$ множество значений μ, при которых решение $\varphi(t,\mu)$ не обращается в нуль при $t \in [0, T]$. Это множество открыто в топологии отрезка $[\mu_-, \mu_+]$. Предположим, что найдутся такие μ_0, $\sigma > 0$, что выполнено следующее условие:

$$\mu_0 \notin \mathcal{R}, \qquad (\mu_0, \mu_0 + \sigma) \in \mathcal{R}. \tag{8}$$

Не умаляя общности, считаем $\mu_0 = 0$. Обозначим $r_0 = r(0)$. При каждом $\mu \in \mathcal{R}$ количество ударов решения $\varphi(t,\mu)$ конечно и найдется такое $\theta_0 > 0$, что для каждого $\theta \in (0, \theta_0)$ отображение сдвига $S_{\theta,\mu}(z_0) = z(-\theta, T - \theta, z_0, \mu)$ непрерывно дифференцируемо по переменной z_0 в окрестности точки $z_{\mu,\theta} = \varphi(-\theta, \mu)$. Пусть

$$\varphi(t, 0) \neq 0 \qquad \forall t \in (0, T_1]. \tag{9}$$

Отсюда следует, что решение $\varphi(t, 0)$ обращается в ноль при $t = 0$. Предполагаем, что

$$\liminf_{\mu,\theta \to 0} |a_{12}(\theta, \mu, z_{\mu,\theta})| > 0. \tag{10}$$

Здесь $a_{12}(\theta, \mu, z_{\mu,\theta})$ – правый верхний элемент матрицы

$$\left. \frac{\partial z(\theta, T - \theta, z_0, \mu)}{\partial z_0} \right|_{z_0 = z_{\mu,\theta}}.$$

Теорема 4 (теорема 3.1.2). Пусть у системы (7) существует семейство T – периодических решений $\varphi(t,\mu)$ $(t \in \mathbb{R},\ \mu \in (0,\sigma))$ и выполнены условия (8) – (10). Тогда найдутся такие последовательности $\mu_k^{\pm} \to 0$ $(0 < \mu_k^- < \mu_k^+$ для любого $k \in \mathbb{N})$ и такое $\theta_0 > 0$, что для любых $\theta \in [0, \theta_0)$, $\mu \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mu_k^-, \mu_k^+)$ отображение $S_{\mu,\theta}$ имеет гиперболическое хаотическое по Дивени инвариантное множество K.

Система, описываемая в промежутках между ударами уравнением Льенара с правой частью большого периода.

Рассматривается виброударная система, описываемая в промежутках между ударами уравнением

$$\ddot{x} + p(x)\dot{x} + q(x) = f(t). \tag{11}$$

Предполагается, что функции p и q имеют порядок гладкости C^3 и

$$p(x) \geqslant p_0 > 0, \qquad \omega^2(x) = q'(x) - p^2(x)/4 > 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Считаем, что удар является абсолютно упругим, то есть $r = 1$.

Теорема 5 (теорема 3.2.1). Пусть коэффициенты уравнения (11) удовлетворяют условиям (12), а правая часть $f(t)$ имеет вид $f(t) = \overline{f}(tT_0/T)$, где $\overline{f}$ является C^3 — функцией периода T_0, имеющей два простых корня на периоде: $t = 0$ и $t = \tau_1$. Тогда существует такое $\bar{T} > 0$, что если $T > \bar{T}$, то отображение S сдвига на период имеет хаотическое по Дивени инвариантное множество K.

Асинхронность, как причина сложной динамики в системах с "мягким" ударом.

Рассмотрим кусочно-линейную систему, описываемую уравнениями вида

$$\left[\begin{array}{ll} \ddot{x} + p_+\dot{x} + q_+x = f_+(t) = a_+\sin(\omega(t-\theta_+)) + b_+ & \text{при } x \geqslant 0; \\ \ddot{x} + p_-\dot{x} + q_-x = f_-(t) = a_-\sin(\omega(t-\theta_-)) + b_- & \text{при } x < 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

Любое решение системы (13) существует и единственно на любом отрезке $[t_1, t_2]$, на котором оно не обращается в нуль вместе с производными. Пусть $p_\pm < 0$, $p_\pm^2 < 4q_\pm$. Положим $T = 2\pi/\omega$.

Условие 9. Периодические решения обоих уравнений (13) не лежат целиком в областях $x \geqslant 0$ или $x \leqslant 0$.

Условие 10. Существует периодическое решение $\psi(t)$ рассматриваемой системы, имеющее ровно два простых нуля на периоде.

Оно находится из краевых условий вида

$$\begin{gathered}\psi_+(T_0) = \psi_+(T_1) = \psi_-(T_1) = \psi_-(T_0+T) = 0;\\ \dot{\psi}_+(T_0) = \dot{\psi}_-(T_0+T); \qquad \dot{\psi}_+(T_1) = \dot{\psi}_-(T_1);\\ T_1 < t_2 < t_1 + T; \qquad \psi^+(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2],\\ \psi^-(t) \leqslant 0 \quad \forall t \in [t_2, t_1+T].\end{gathered}$$

Не умаляя общности, $T_0 = 0$. В некоторой окрестности U_0 значения

$$(0, Y_0) \in X = S^1 \times \mathbb{R}^+$$

определена C^1 – гладкая функция $F_0 : U_0 \to X$, ставящая в соответствие моменту времени t_0 перехода из отрицательной области значений x в положительную и скорости y_0 фазу следующего по времени перехода $t_1 \mod T$ (из положительной области значений в отрицательную) и скорость y_1 соответствующих решению $x(t)$ с начальными данными $(t_0, 0, y_0)$. При этом $F_0(0, Y_0) = (T_1, Y_1)$. Аналогично, найдется окрестность U_1 точки (T_1, Y_1) и отображение $F_1 : U_1 \to X$, ставящее в соответствие данным (t_1, y_1) данные, соответствующие следующему по времени переходу (на этот раз, из отрицательной области в положительную), причем $F_1(T_1, Y_1) = (0, Y_0)$. Положим $F = F_1 \circ F_0$. Тогда точка $(0, Y_0)$ является неподвижной по отношению к отображению F. Будем предполагать, что

$$\operatorname{Tr} DF(0, Y_0) > 1 + \Delta_0, \tag{14}$$

что гарантирует тот факт, что точка покоя $O_1 = (0, Y_0)$ отображения F является седлом. Обозначим символами W^s_{loc} и W^u_{loc} локальные устойчивое и неустойчивое многообразия точки O_1, а символами W^s и W^u – их инвариантные замыкания. Пусть ϕ – полярный угол на плоскости Oty. Мы введем в рассмотрение числа $\alpha^{s,u}_- < \alpha^{s,u}_+$ и конусы $K^s = \{(t, y) : \phi \mod \pi \in (\alpha^s_-, \alpha^s_+)\}$; $K^u = \{(t, y) : \phi \mod \pi \in (\alpha^s_-, \alpha^s_+)\}$. Обозначим граничные прямые этих конусов символами L^s и L^u.

Условие 11.

1. $K^s \bigcap K^u = \emptyset$.
2. Пусть M^s и M^u – касательные к многообразиям W^s и W^u в точке $(0, Y_0)$. Тогда $M^s \subset K^s$, $M^u \subset K^u$.
3. Пусть P – стандартное накрытие плоскостью $\mathbb{R}^2_{t,y}$ цилиндра

$$\mathcal{C} = S^1_t \times \mathbb{R}.$$

Тогда множество $P^{-1}(P(K^s)\bigcap P(K^u))$ содержит четырехугольник Q, ограниченный прямыми из множеств $P^{-1}(P(L_{\pm}^{s,u}))$ и целиком лежащий в множестве, заданном условием $y>0$.
4. Возьмем тот из прообразов Q^s множества $P(Q)$, который целиком лежит в конусе K^s, а также прообраз Q^u, целиком лежащий в множестве K^u. Предполагаем, что их можно выбрать целиком лежащими в области $y>0$. Обозначим символами C^s и C^u треугольники, являющиеся замыканиями выпуклых оболочек множеств $Q^s\bigcup\{(0,Y_0)\}$ и $Q^u\bigcup\{(0,Y_0)\}$ (рис. 4).
5. Пусть $z^u\in C^u\setminus\{(0,Y_0)\}$, $z^s\in C^s\setminus\{(0,Y_0)\}$. Тогда для любого $v^s\in K^s$, $v^u\in K^u$ выполнены условия

$$F(z^u)\neq 0,\quad F(z^s)\neq 0,\qquad \det DF(z^u)\neq 0,\quad \det DF(z^s)\neq 0,$$
$$DF(z^u)v^u\in K^u,\quad DF^{-1}(z^s)v^s\in K^s.$$

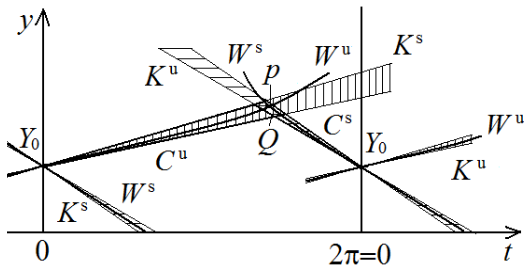

Рис. 4.

Условие 12. Для любых $(x_0,y_0)\in C^s\bigcup C^u$ и $t\in[0,T]$ выполнено неравенство $z(t,0,x_0,y_0)\neq 0$.

Теорема 6 (теорема 3.4.1). При сделанных предположениях, а именно при выполнении неравенства (14) и условий 10–12, дискретная динамическая система, заданная отображением F, имеет гиперболическое хаотическое по Дивени инвариантное множество, поведение решений на котором описывается символической динамикой.

Негиперболические инвариантные множества.

Рассмотрим ВУС, определяемую уравнениями (1) и условиями удара 1. Будем считать, что эта система удовлетворяет условию 2 и при этом выполнено одно из соотношений (5) или (6) (для определенности считаем, что выполнено (5)).

Тогда одно из собственных чисел матрицы $D=DS_{\mu,\theta}(z_{\mu,\theta})$ (обозначим его через λ_+) является бесконечно большим, а другое — λ_-

есть бесконечно малая величина при $\mu \to 0$. Собственные числа $\lambda_\pm$ имеют кратность 1. Все остальные собственные числа λ_i матрицы D удовлетворяют соотношениям $\lambda_i/\lambda_+ \to 0$, $\lambda_-/\lambda_i \to 0$ при $\mu \to 0$ для любого $i = 1, \ldots, 2n-2$.

Обозначим символом E^u пространство, натянутое на собственный вектор, соответствующий λ_+, через E^s — аналогичное пространство для λ_-, а через E^c — линейную оболочку собственных и дополнительных векторов, соответствующих остальным собственным числам матрицы D. Эти пространства E^s, E^u и E^c условимся называть устойчивым, неустойчивым и центральным. Из принципа сведения вытекает существование в окрестности точки $z_{\mu,\theta}$ устойчивого, неустойчивого, устойчивого центрального и неустойчивого центрального многообразий. Мы будем обозначать их символами W^s, W^u, W^{sc} и W^{uc} соответственно.

Лемма 4 (лемма 4.1.1). При выполнении условия 2 и неравенств (5) многообразия W^u и W^{sc} трансверсально пересекаются в точке $q \neq z_{\mu,\theta}$.

Рассмотрим в окрестности U точки $z_{\mu,\theta}$, содержащей точку q, координаты $\zeta = \mathrm{col}(\zeta^s, \zeta^u, \zeta^c) = \mathrm{col}(\zeta^s, \zeta^u, \zeta^c_1, \ldots, \zeta^c_{2n-2})$, такие, что точка $z_{\mu,\theta}$ соответствует значению $\zeta = 0$, точка q соответствует координатам $(\zeta^s_q, 0, \zeta^c_q)$, $\zeta^s_q > 0$. Компоненты связности пересечений многообразий W^s, W^u, W^{sc} и W^{uc} с окрестностью U, содержащие точку $z_{\mu,\theta}$, задаются условиями $\zeta^u = \zeta^c = 0$, $\zeta^s = \zeta^c = 0$, $\zeta^u = 0$ и $\zeta^s = 0$ соответственно. Компонента пересечения многообразия W^u с окрестностью U, содержащая точку q, задается условиями $\zeta^s = \zeta^s_q$, $\zeta^c = \zeta^c_q$.

Положим $F_{\mu,\theta} = h \circ S_{\mu,\theta} \circ h^{-1}$, где h – диффеоморфизм перехода от координат z к координатам ζ. Выберем положительные числа ε^u, ε^s и ε^c и окрестности $U_0, U_1 \subset U$:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \{\zeta = (\zeta^s, \zeta^u, \zeta^c) : |\zeta^s| \leqslant \varepsilon^s, |\zeta^u| \leqslant \varepsilon^u, |\zeta^c| \leqslant \varepsilon^c\},\\
U_1 &= \{\zeta = (\zeta^s, \zeta^u, \zeta^c) : |\zeta^s - \zeta^s_q| \leqslant \varepsilon^s, |\zeta^u| \leqslant \varepsilon^u, |\zeta^c| \leqslant \varepsilon^c\}
\end{aligned}$$

таким образом, чтобы выполнялись следующие условия (рис. 5).
1. $U_0 \bigcap U_1 = \emptyset$, то есть $\varepsilon^s < \zeta^s_q/2$, $\varepsilon^c > 2|\zeta^c_q|$.
2. Пусть Π_1 – проекция на первую координатную ось, соответствующую W^s. Для любых точек $\zeta_1 = (\zeta^s_1, \zeta^u, \zeta^c)$ и $\zeta_2 = (\zeta^s_2, \zeta^u, \zeta^c)$ имеет место соотношение $|\Pi_1(F_{\mu,\theta}(\zeta_1)) - \Pi_1(F_{\mu,\theta}(\zeta_2))| \leqslant |\zeta^s_1 - \zeta^s_2|/2$.

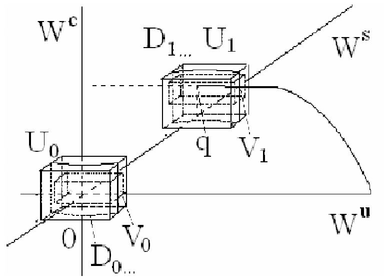

Рис. 5.

Определим *допустимый диск* в области U_i $(i = 0, 1)$ как множество, целиком содержащееся в области U_i и представляющее собой график C^1 – гладкой функции $\zeta^s = \eta(\zeta^u, \zeta^c)$, определенной при $|\zeta^u| \leqslant \varepsilon^u$, $|\zeta^c| \leqslant \varepsilon^c$, такой, что

$$\max |D\eta(\zeta^u, \zeta^c)| \leqslant 1.$$

На множестве $\mathcal{D}_U$ допустимых дисков рассмотрим метрику, порожденную C^1 – метрикой в пространстве функций, графиками которых эти диски являются.

Выберем $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon^c]$ так, чтобы образ любого допустимого диска B в какой-либо из областей U_i при отображении $F^{m_1}_{\mu,\theta}$ содержал допустимый диск, определенный в более узкой области

$$\widetilde{V}_0 = \{\zeta : |\zeta^s| \leqslant \varepsilon^s, |\zeta^u| \leqslant \varepsilon^u, |\zeta^c| \leqslant \varepsilon_1\}.$$

Выберем значение ε_2 таким образом, чтобы образ любого диска, допустимого в множестве $\widetilde{V}_0$ при отображении $F^{m_2}_{\mu,\theta}$, содержит диск, допустимый во множестве

$$\{\zeta : |\zeta^s - \zeta^s_q| \leqslant \varepsilon^s, |\zeta^u| \leqslant \varepsilon^u, |\zeta^c - \zeta^c_q| \leqslant \varepsilon_2\},$$

а также диск, допустимый во множестве

$$\{\zeta : |\zeta^s| \leqslant \varepsilon^s, |\zeta^u| \leqslant \varepsilon^u, |\zeta^c| \leqslant \varepsilon_2\}.$$

Положим $\delta^c = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $M = m_1 + m_2$. Тогда из сказанного выше следует, что образ любого допустимого диска из множества $U_0 \bigcup U_1$ при отображении $F^M_{\mu,\theta}$ содержит как диск, допустимый в множестве $V_0 = \{\zeta : |\zeta^s| \leqslant \varepsilon^s, |\zeta^u| \leqslant \varepsilon^u, |\zeta^c| \leqslant \delta^c\}$, так и диск, допустимый в множестве $V_1 = \{\zeta : |\zeta^s - \zeta^s_q| \leqslant \varepsilon^s, |\zeta^u| \leqslant \varepsilon^u, |\zeta^c - \zeta^c_q| \leqslant \delta^c\}$.

Рассмотрим некоторое вложение J пространства $\mathcal{D}_V$ дисков, допустимых на одном из множеств V_i, в пространство $\mathcal{D}_U$, удовлетворяющее условию Липшица: существует константа $L > 0$, такая, что $\operatorname{dist}(J(D_1), J(D_2)) \leqslant L \operatorname{dist}(D_1, D_2)$ для любых $D_{1,2} \in \mathcal{D}_V$.

В диссертации предлагался следующий способ построения вложения J: точки границы диска $D \in \mathcal{D}_V$ соединялись с границей соответствующей области U_i прямыми вида

$$\{\zeta = \operatorname{col}(\zeta^s, \zeta^u, \zeta^c) : \zeta^s = c_1, \zeta^u = c_2, \zeta^c = \tau c_3, \quad \tau \in \mathbb{R}\},$$

и к полученному диску применялась процедура сглаживания.

Применяя к некоторому допустимому диску D, лежащему в любом из множеств U_i, отображение $F^M_{\mu,\theta}$, получим два диска D^V_0 и D^V_1, являющихся допустимыми во множествах V_0 и V_1, причем, не умаляя общности, можем считать, что для полученных дисков условие (13) примет вид $\max|D\eta(\zeta^u, \zeta^c)| \leqslant 1/2$. Положим $G_i(D) = J(D^V_i)$, $i = 0, 1$. Рассмотрим множество Σ, состоящее из односторонних последовательностей из нулей и единиц вида $a = \{a_k \in \{0,1\} : k \in \mathbb{N}\}$. Определим метрику по формуле $d(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k - b_k|/2^k$.

Теорема 7 (теорема 4.1.2). Пусть виброударная система (A), заданная системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с условиями удара 1 удовлетворяет всем условиям теоремы 2 за возможным исключением условия 3. Тогда для любого фиксированного вложения J, удовлетворяющего условию Липшица с константой, равной 1, существует непрерывное вложение H множества Σ, состоящего из односторонних последовательностей из нулей и единиц в топологическое пространство допустимых дисков, такое, что $\sigma_i \circ H = H \circ G_i$, $i \in \{0, 1\}$, где σ_i – добавление к элементу $a \in \Sigma$ нуля или единицы слева.

Множество допустимых дисков, существующее в силу теоремы 7, сохраняется при малых возмущениях коэффициентов системы (1). Найдется такое $\delta > 0$, что для любого диффеоморфизма $\widetilde{F}$, такого, что $|\widetilde{F}(x) - F_{\mu,\theta}(x)| \leqslant \delta$, $|D\widetilde{F}(x) - DF_{\mu,\theta}(x)| \leqslant \delta$ для любого $x \in U_0 \bigcup U_1$, найдется множество $\widetilde{K}$, состоящее из допустимых дисков и обладающее теми же свойствами, что и множество K для отображения $F_{\mu,\theta}$.

Негиперболические точки покоя диффеоморфизмов общего вида.

Методы, использованные при доказательстве теоремы 7, могут быть применены для изучения свойств динамических систем, гораздо более общего вида, чем ВУС.

Говорим, что точка покоя 0 отображения F *сильно условно неустойчива*, если одно из многообразий W^{cu}_{loc} удовлетворяет следующим условиям.

1) Существует окрестность U_0 начала координат и непрерывное отображение $V : U_0 \to [0, +\infty)$ такие, что $V(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in W^s_{loc}$ и $V(F(x)) \geqslant V(x)$ для всех $x \in U_0 \bigcap F^{-1}(U_0)$;

2) неподвижная точка 0 сужения $F^{-1}|_{W^{cu}_{loc}}$ асимптотически устойчива.

В дальнейшем мы будем обозначать символом W^{cu}_{loc} именно это специально выбранное многообразие (как следует из результатов Хирша, Пью и Шуба, оно единственно).

Будем говорить, что точка покоя 0 отображения F *сильно условно устойчива*, если она является сильно условно неустойчивой по отношению к диффеоморфизму F^{-1}. В этом случае

$$W^{cs} = W^{cs}(F) = W^{cu}(F^{-1}), \qquad W^u = W^u(F) = W^s(F^{-1}).$$

В дальнейшем, мы предположим, что выполнено одно из следующих симметричных условий.

Условие 13. Точка покоя 0 диффеоморфизма F сильно условно устойчива. Существуют диски $w^{cs} \subset W^{cs}$ и $w^u \subset W^u$, трансверсально пересекающиеся в некоторой точке $p \neq 0$.

Условие 14 (рис. 6). Точка покоя 0 диффеоморфизма F сильно условно неустойчива. Существуют диски $w^s \subset W^s$ и $w^{cu} \subset W^{cu}$, трансверсально пересекающиеся в некоторой точке $p \neq 0$.

Теорема 8 (теорема 4.3.1). Пусть $F \in X$, и выполнено одно из условий 13 или 14. Тогда для любой окрестности U начала координат найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого $G \in X$, удовлетворяющего условию

$$d_1(F, G) < \delta$$

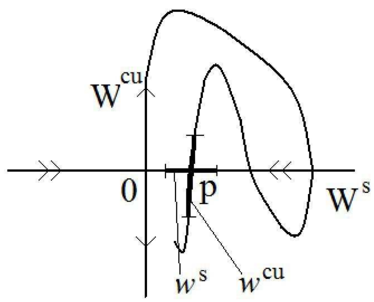

Рис. 6.

существует бесконечное множество $P_G \subset U$ со следующими свойствами.

1) Любая точка $q \in P_G$ является периодической по отношению к G;

2) для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется точка $q \in P_G$ такая, что минимальный период q больше m;

3) card $\overline{P_G} = \aleph$.

Замечание. Множества P_G, соответствующие различным отображениям G, могут быть негомеоморфными. Более того, некоторые из них могут быть счетными, а некоторые – иметь мощность континуум.

Оказывается, что к теореме 8 сводятся некоторые случаи нетрансверсального пересечения инвариантных многообразий гиперболической точки покоя.

Будем говорить, что два C^1 – гладких подмногообразия W^1 и W^2 евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ пересекаются *квазитрансверсально* в точке p если $\dim W^1 + \dim W^2 = n$ и существует окрестность U точки p и C^1 гладкая система координат $\xi = \mathrm{col}(\eta, \zeta)$ в U со следующими свойствами. Обозначим через w^1 и w^2 компоненты связности пересечений $W^s \bigcap U$ и $W^u \bigcap U$, содержащие точку p. Тогда

1. $\dim \zeta = \dim W^2$,

2. многообразия $\{(0, \zeta)\}$ и W^1 трансверсально пересекаются в точке p,

3. отображение $\xi : U \to \xi(U)$ – локальный диффеоморфизм,

4. $\zeta(x) = 0$ для любого $x \in w^1$,

5. существует $\delta > 0$ такое, что множество w^2 является графиком функции $\eta = g(\zeta)$, $|\zeta| < \delta$, причем отображение g гладко при всех $\zeta : 0 < |\zeta| < \delta$.

Будем говорить, что два подмножества W^s и W^u евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ пересекаются квазитрансверсально в точке p, если существует окрестность U точки p, такая, что компоненты связности w^s и w^u пересечений $W^s \bigcap U$ и $W^u \bigcap U$, содержащие точку p суть C^1 гладкие многообразия, пересекающиеся в этой точке квазитрансверсально (рис. 7).

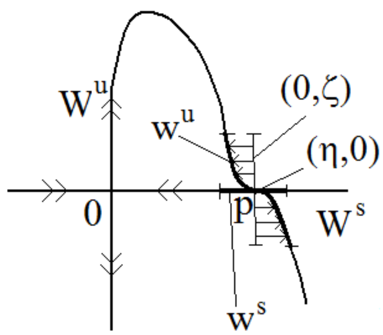

Рис. 7.

Например, квазитрансверсально кубическое касание гладких кривых в $\mathbb{R}^2$.

Следствие (теорема 4.4.1). Пусть $F \in X$ таково, что $x = 0$ – гиперболическая точка покоя. Пусть F может быть C^1 линеаризовано в некоторой окрестности $\mathcal{V}$ точки 0. Пусть соответствующие устойчивое и неустойчивое многообразия (W^s и W^u) пересекаются квазитрансверсально в точке $p \neq 0$. Тогда для любой окрестности $\mathcal{V}$ начала координат существует бесконечное подмножество $\Pi \in V$ со следующими свойствами:

1) каждая точка $q \in \Pi$ является периодической для диффеоморфизма F;

2) для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $q \in \Pi$, минимальный период которой больше m;

3) card $\overline{\Pi} = \aleph$.

В основе доказательства этого следствия лежит идея замены координат, делающей квазитрансверсальное пересечение инвариантных многообразий трансверсальным. При этом хотя точка покоя перестает быть гиперболической, для нее по-прежнему выполняются условия теоремы 8.

Заключение.

В диссертационной работе изучаются хаотические режимы виброударных систем и описываются бифуркации, приводящие к их появлению. Для исследования используются различные модели удара, применяются различные, в том числе и принципиально новые методы теории удара, качественной теории динамических систем и хаотической динамики. Приводятся принципиально новые критерии наличия странных аттракторов. Получены общие результаты о наличии бесконечного числа периодических траекторий в окрестности негиперболической точки покоя и гиперболической точки покоя с нетрансверсальным гомоклиническим пересечением инвариантных многообразий.

Итак, основные результаты диссертации сводятся к следующим.

1. Предложена новая математическая модель виброударных систем.

2. Для этой и ряда других, в том числе классических, математических моделей виброударных систем получены результаты о существовании, единственности и зависимости решений системы от начальных данных и параметра.

3. Предложен метод отыскания гомоклинических пересечений кусочно гладких инвариантных многообразий точек покоя виброударных систем.

4. Приведены достаточные условия наличия в окрестности так называемой бифуркации скольжения (grazing).

5. Получены достаточные условия возникновения хаотических режимов при уменьшении коэффициента восстановления, характеризующего удар.

6. Для систем с одной степенью свободы показано, что наличие большого числа ударов на периоде может приводить к возникновению хаоса даже в случае упругого удара.

7. Предложены новые методы оценки показателей Ляпунова, соответствующих решениям виброударных систем.

8. Приведен ряд новых методов, использующих техники топологической и гладкой динамики и позволяющие исследовать окрестности негиперболических точек покоя динамических систем.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Крыжевич С. Г., Плисс В. А.* О структурной устойчивости неавтономных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1325–1333.
2. *Крыжевич С. Г., Плисс В. А.* Хаотические режимы колебаний виброударной системы // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69, Вып 1. С. 15–29.
3. *Крыжевич С. Г., Плисс В. А.* Пример хаоса в системе с ударами // Международная конференция "Четвертые Окуневские чтения", 22-25 июня 2004 г., Санкт-Петербург, Россия. Материалы докладов. Том III. Симпозиум "Пуанкаре и проблемы нелинейной механики". СПб, 2005. С. 65–75.
4. *Крыжевич С. Г.* Установившиеся колебания в простейших механических системах с условиями удара // Вестник молодых ученых. Серия "Прикладная математика и механика" № 3, 2005. С. 64–76.
5. *Kryzhevich S. G. Volpert V. A.* On different types of solvability conditions for differential operators // Electronic Journal of Differential Equations Vol. 2006(2006), No. 100, pp. 1–24.
6. *Крыжевич С. Г.* Свойства решений уравнений типа Дуффинга с условиями удара // Электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления" № 2, 2006. С. 1–25.
7. *Крыжевич С. Г.* Хаотические инвариантные множества виброударных систем с одной степенью свободы // Доклады АН РФ, 2006, т.410, № 3, С. 311–312.
8. *Крыжевич С. Г.* Структурная устойчивость инвариантных множеств виброударных систем // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Сер.1, Вып.1, 2007 г., С. 55–61.
9. *Крыжевич С. Г.* Метод симметризации и предельные циклы виброударных систем // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Сер.1, Вып.2, 2007 г., С. 27–31.
10. *Крыжевич С. Г.* Бифуркация касания и хаотические колебания виброударных систем с одной степенью свободы // Прикладная математика и механика Т.72, Вып.4, 2008, С. 539–556.
11. *Крыжевич С. Г., Сколяров А. Ю.* Методы аппроксимации неустойчивых многообразий точек покоя автономных систем // Труды Санкт-Петербургского математического общества Т. 14, 2008, С. 41–58.

12. *Крыжевич С. Г.* Хаотические режимы систем, описываемых уравнениями Льенара с большим периодом правой части и условиями удара // Прикл. математика и механика. Т.74, №5, 2010. С.751–773.
13. *Крыжевич С.Г.* Коэффициентные условия хаоса в кусочно-линейных системах // Электронный журнал "Дифференциальные уравнения и процессы управления №4, 2010.
14. *Крыжевич С. Г.* Хаос в виброударных системах с одной степенью свободы в окрестности возникновения стука – I // Дифференц. уравнения. Т.46, №10, 2010. С. 1403–1408.
15. *Крыжевич С. Г.* Хаос в виброударных системах с одной степенью свободы в окрестности возникновения стука – II // Дифференц. уравнения. Т.47, №1, 2011. С. 29–37.