Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук

На правах рукописи

Глуцюк Алексей Антонович

# СЛОЕНИЯ, НЕСВОБОДНЫЕ ПОДГРУППЫ В ГРУППАХ ЛИ И БИЛЬЯРДЫ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Лаборатории Ж.-В.Понселе Независимого Московского Университета.

Официальные оппоненты:
*доктор физико-математических наук,*
*профессор,* *Лексин Владимир Павлович*

*доктор физико-математических наук,*
*профессор,* *Натанзон Сергей Миронович*

*доктор физико-математических наук,* *Хованский Аскольд Георгиевич*

Ведущая организация: *Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова РАН*

Защита состоится 22 мая 2012 года в $16^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного совета *Д 002.077.03* при *Федеральном бюджетном учреждении науки Институте проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН*, расположенном по адресу: *127994, г.Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, 19, стр.1.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Института проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2012 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
*кандидат физико-математических наук,* *Соболевский А.Н.*

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В настоящей работе изучаются избранные вопросы о слоениях на римановы поверхности и смежные вопросы из геометрии и комплексного анализа, большинство из которых происходят из исследования второй части 16-й проблемы Гильберта. Эта открытая проблема, имеющая сложную, более, чем столетнюю историю, относится к предельным циклам полиномиальных векторных полей на плоскости и состоит в следующем: верно ли, что число предельных циклов ограничено функцией от степеней компонент поля? Ответ не известен даже для квадратичных векторных полей и полиномиальных векторных полей, близких к гамильтоновым.

Стратегия решения 16-й проблемы Гильберта, предложенная И.Г.Петровским и Е.М.Ландисом в 1950-х гг., состоит в исследовании комплексификации полиномиального векторного поля и его комплексного фазового портрета: голоморфного слоения с особенностями на римановы поверхности (аналитические кривые). Известно, что в типичном случае топология комплексного фазового портрета довольно сложна. Например, все комплексные фазовые кривые плотны, имеется счетное число комплексных предельных циклов. Один из подходов к исследованию этой сложной картины, предложенный д.ф.-м.н. проф. Ю.С.Ильяшенко в конце 1960-х гг., состоит в изучении униформизации листов. Для исследования слоения в целом важно знать зависимость униформизующей функции от трансверсального параметра. Исследованию одновременной униформизации (голоморфных и неголоморфных) слоений на римановы поверхности посвящена глава 1 диссертации.

При исследовании 16-й проблемы Гильберта для полиномиальных векторных полей, близких к гамильтоновым, важно знать, сколько предельных циклов может родиться при возмущении гамильтонова поля. Известно, что в типичном случае (например, если гамильтониан является ультра-морсовским), число предельных циклов, рождённых из регулярных овалов гамильтониана, оценивается сверху числом вещественных изолированных нулей специальной голоморфной функции: абелева интеграла. Инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта состоит в оценке числа нулей абелевых интегралов. Ей посвящена глава 2 диссертации.

Теория бифуркаций, тесно связанная с 16-й проблемой Гильберта, изучает деформации «вырожденных» векторных полей, например, имеющих сложные особые точки, или сепаратрисные многоугольники (полициклы). Вышеперечисленные объекты могут рождать новые предельные циклы возмущенного векторного поля. Для исследования бифуркаций фазовых портретов важно знать, как меняются особые точки и их инварианты аналитической классификации при возмущении. Теория модулей аналитической классификации особых точек параллельна классическим результатам об аналитической классификации ростков линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным временем в иррегулярных особых точках. Результаты о линейных уравнениях и о модулях их аналитической классификации (операторах Стокса и монодромии) применяются в разных областях математики, включая теорию знаменитых уравнений Пенлеве. В 1984 г. В.И.Арнольд предложил исследовать иррегулярные линейные уравнения как пределы фуксовых и изучать операторы Стокса как пределы данных монодромии фуксова уравнения. Результатам этого исследования и их нелинейным аналогам посвящена глава 3 диссертации.

В теории представлений конечно-порождённых групп в группах Ли важно исследовать, как меняется алгебраическая структура образа представления при возмущении представления. Этому посвящена глава 4 диссертации. Ее основной результат относится к недискретным представлениям свободных групп в произвольной группе Ли. Аналогичные вопросы представляют интерес и для представлений в других группах преобразований, например, диффеоморфизмов компактных многообразий, ростков диффеоморфизмов. Исследование свойств групп ростков конформных диффеоморфизмов тесно связано с исследованием топологии фазовых портретов голоморфных слоений.

Математические бильярды встречаются в самых разных областях математики, например, в классической механике, в геометрической оптике, в модели Больцмана идеального газа. Исследование периодических траекторий бильярда тесно связано со спектральной теорией оператора Лапласа, и эта связь исследовалась многими математиками. Глава 4 посвящена частному случаю гипотезы В.Я.Иврия о периодических траекториях, которая тесно связана с гипотезой Германа Вейля (1911 г.) из спектральной теории.

**Цель работы.** Диссертация преследует научные цели, сформулированные ниже.

В первой главе, посвященной одновременной униформизации:

- изучение естественных классов (неголоморфных) слоений на параболические римановы поверхности: тор, снабжённый произвольной бесконечно-гладкой римановой метрикой и расслоенный на параллельные плоскости с индуцированной комплексной структурой; доказательство бесконечно-гладкой зависимости униформизующей метрики листа от трансверсального параметра;

- изучение голоморфных слоений с особенностями на аналитические кривые на алгебраических поверхностях; построение экзотических примеров, где листы с отмеченными точками на трансверсальном диске не допускают одновременной биголоморфной униформизации семейством односвязных областей на сфере Римана;

Во второй главе, посвященной ограниченной инфинитезимальной 16-й проблеме Гильберта:

- явная оценка числа вещественных изолированных нулей абелевых интегралов для ультра-морсовских гамильтонианов произвольной степени, оценка должна зависеть только от гамильтониана.

В третьей главе, посвящённой слиянию особых точек и явлению Стокса:

- Исследование ростков линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным временем в нерезонансной иррегулярной особой точке как пределов семейства уравнений со сливающимися фуксовыми особенностями. Выражение модулей аналитической классификации (операторов Стокса) иррегулярного ростка через предел данных монодромии фуксова уравнения.

В четвёртой главе, посвящённой подгруппам в группах Ли:

- Исследование недискретных свободных подгрупп в группах Ли, доказательство их аппроксимируемости несвободными подгруппами.

В пятой главе, посвящённой плоским бильярдам:

- исследование четырёхугольных орбит в кусочно-гладких плоских бильярдах: доказательство того, что они образуют множество меры нуль.

**Методы исследования.** В первой части первой главы, посвященной слоениям тора на параболические римановы поверхности, трансверсальная гладкость униформизующей метрики доказывается с помощью применения метода гомотопии к расслоенному уравнению Бельтрами и сведению его к ограниченному дифференциальному уравнению в пространствах Соболева.

Доказательство результатов из второй части первой главы опирается на результат Берндтсона - Рэнсфорда из комплексного анализа: пример экзотической штейновой области в двумерной комплексной плоскости; штейнова область весьма нетривиально расслоена на бесконечно много проколотых комплексных прямых и проколотые диски.

Доказательство оценки числа нулей абелева интеграла из второй главы основано на теореме о нулях и росте для голоморфных функций, ранее доказанной Ю.С.Ильяшенко и С.Ю.Яковенко.

Результаты главы 3 о линейных уравнениях, операторах Стокса и предельной монодромии доказываются с помощью исследования проективизаций линейных уравнений и сепаратрис проективизаций. Доказывается, что сепаратрисы, отвечающие собственным функциям операторов монодромии фуксова уравнения, суть графики функций с равномерно ограниченными производными в подходящих областях. Для доказательства рассматривается голоморфное векторное поле, задающее проективизацию линейного уравнения. Используется идея из гиперболической теории: строится подходящее инвариантное поле конусов для подходящим образом нормированного предыдущего векторного поля.

Доказательство результата главы 4 о подгруппах в группах Ли использует идеи из теории динамических систем, элементарную линейную алгебру и основы теории полупростых групп Ли. При этом не используется теорема о классификации последних.

Для доказательства результата главы 5 о бильярдах в кусочно-аналитическом случае в предположении противного рассматриваются максимальные аналитические продолжения локальных зеркал и исследуется граница открытого множества периодических траекторий. Доказывается, что типичная точка границы является "вырожденным четырехугольником". Описываются все случаи возможных вырождений и доказывается, что ни один из них априори не может реализоваться.

**Научная новизна.** Диссертация содержит следующие новые результаты и методы

- На торе произвольной размерности с произвольной бесконечно-гладкой римановой метрикой исследуется слоение на двумерные параллельные плоскости с индуцированными комплексными структурами на них. Доказывается, что существует семейство конформных плоских полных метрик на листах, бесконечно-гладко зависящее от трансверсального параметра [5]. Это дает положительный ответ на вопрос, поставленный и частично исследованный Э.Жисом. В ходе доказательства получено новое, простое доказательство классического результата о глобальной интегрируемости бесконечно-гладкой почти комплексной структуры на двумерном торе [12].

- Построены экзотические примеры голоморфных слоений с изолированными особенностями на аналитические кривые на подходящих гладких аффинных (проективных) алгебраических поверхностях [3, 4]. Построенные слоения доставляют контрпримеры к гипотезе Ю.С.Ильяшенко об одновременной униформизуемости (конца 1960-х гг.) А именно, в примерах из [4] листы с отмеченными точками в произвольном заданном трансверсальном сечении не допускают одновременной биголоморфной униформизации семейством односвязных областей на сфере Римана.

- Результат, приведенный ниже, получен в статьях [10, 11] совместно с д.ф.-м.н., профессором Ю.С.Ильяшенко. Получена верхняя оценка числа вещественных изолированных нулей абелева интеграла, отвечающего ультра-морсовскому гамильтониану H произвольной степени и произвольной полиномиальной 1-форме меньшей степени. Оценка экспоненциально зависит от четвертой степени degH, умноженной на некоторый коэффициент, зависящий от $H$. Эта оценка не равномерна: последний коэффициент становится большим, когда многочлен становится слишком близким к дискриминанту (множеству не ультра-морсовских многочленов). Однако на достаточно больших компактных подмножествах в пространствах ультра-морсовских многочленов любой степени вышеупомянутый коэффициент равномерно ограничен абсолютной константой, не зависящей от $degH$. Идея доказательства, а также оценка числа нулей абелева интеграла вблизи критических значений многочлена и вблизи бесконечности принадлежат Ю.С.Ильяшенко. Последняя оценка использует результаты его статьи, опубликованной в Math. Res. Lett. 14 (2007), no.3, 433-442. Доказательство оценки числа нулей «вдали» от критических значений получено совместно и основано на идее Ю.С.Ильяшенко и на результатах диссертанта, опубликованных в статьях [8] и [9].

- Исследованы ростки линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным временем в нерезонансных иррегулярных особых точках как пределы фуксовых уравнений. Полученные результаты относятся к типичным фуксовым деформациям иррегулярного уравнения. Операторы Стокса иррегулярного уравнения выражены через подходящие предельные данные монодромии фуксова уравнения [1, 6, 7]. Аналогичный результат получен для седлоузловых ростков голоморфных векторных полей и их модулей Мартине - Рамиса орбитальной аналитической классификации [2].

- Доказано, что всякая недискретная свободная подгруппа в группе Ли не устойчива: является пределом несвободных подгрупп [13].

- Доказано, что во всяком кусочно-бесконечно-гладком плоском бильярде множество четырёхугольных периодических траекторий имеет меру нуль [14]. Это совместный результат с аспирантом, ныне к.ф.-м.н. Ю.Г.Кудряшовым, которому принадлежит сведение кусочно-гладкого случая к кусочно-аналитическому. В диссертации представлено доказательство в кусочно-аналитическом случае. Оно получено совместно и основано на разборе большого количества случаев. Диссертанту принадлежит разбор половины случаев, в том числе ключевого случая. Ю.С.Кудряшову принадлежит разбор остальных случаев и структуризация дерева случаев.

**Научная значимость работы.** Результаты первой части главы 1 и там же сформулированные родственные результаты из статьи [5] о слоениях на параболические римановы поверхности дают концептуальный ответ на вопрос о том, как униформизующая метрика листа может зависеть от трансверсального параметра. Метод доказательства может быть применён в других задачах теории динамических систем, геометрии и анализа.

Результат второй части главы 1 опровергает гипотезу Ю.С.Ильяшенко конца 1960-х гг. об одновременной униформизуемости и даёт метод построения серии контрпримеров к ней. Метод доказательства может быть применён в задачах комплексного анализа и геометрии, например, для исследования устойчивости одновременной неуниформизуемости.

Результат главы 2 даёт наилучшую из известных явных оценок числа нулей абелева интеграла, справедливых на "достаточно больших"компактных подмножествах в пространствах ультра-морсовских гамильтонианов любой степени. В ходе доказательства диссертантом была развита небольшая теория, «количественная алгебраическая геометрия» [8], которая может найти применения в комплексной геометрии и анализе.

Результаты главы 3 об операторах Стокса нерезонансных иррегулярных линейных уравнений и методы их доказательства могут быть использованы при исследовании смежных вопросов: бифуркации и версальные деформации линейных уравнений, изомонодромные семейства и уравнения Пенлеве. Метод доказательства уже применён диссертантом к некоторым резонансным иррегулярным уравнениям (работа опубликована, но её результаты не включены в диссертацию, а только процитированы в ней). Аналогичный метод применен диссертантом в статье [2], где доказаны нелинейные аналоги для параболических ростков конформных отображений и седлоузловых ростков векторных полей. Перечисленные результаты уже нашли применение и продолжение в работах К.Кристофера, П.Мардешича, Р.Руссари, К.Руссо, Л.Тейсье (C.Christopher, P.Mardesic, R.Roussarie, C.Rousseau, L.Teyssier) об аналитической классификации деформаций вышеупомянутых ростков.

Результат главы 4 доказывает неустойчивость произвольной недискретной свободной подгруппы в произвольной группе Ли [13]. Методы доказательства могут быть применены при исследовании вопросов о скорости аппроксимации свободных подгрупп несвободными. Они уже частично применены в той же статье [13], где получены частные результаты о скорости аппроксимации недискретных инъективных представлений неинъективными. В будущем представляет интерес исследование справедливости аналога основного результата для других групп преобразований (диффеоморфизмов и их ростков).

Результат главы 5 о четырёхугольных орбитах в плоских бильярдах дает решение частного случая гипотезы В.Я.Иврия 1980 г., тесно связанной со спектральной теорией. Это — следующее продвижение в исследовании гипотезы Иврия после работы Я.Б.Воробца 1994 г. о треугольных орбитах в любой размерности. Метод доказательства может быть применён в исследовании других случаев гипотезы Иврия, в частности, четырёхугольных орбит в многомерном бильярде и пятиугольных в плоском.

**Апробация работы.** Работа поддержана грантами РФФИ, Национальным Центром Научных Исследований Франции (CNRS), совместными грантами РФФИ и CNRS, французским грантом ANR, американским грантом CRDF.

Результаты диссертации докладывались на семинаре по аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений на мехмате МГУ, семинаре Отдела обыкновенных дифференциальных уравнений МИРАН, московском семинаре «Глобус», на конференции им. И.Г.Петровского на мехмате МГУ, на международных конференциях

- Geometric group theory, hyperbolic dynamics and symplectic geometry, 11.07.2010 - 17.07.2010 Германия, Обервольфах
- Algebraic methods in dynamical systems, 16.05.2010 - 20.05.2010 Польша, Бендлево
- Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow Workshop, 05.01.2006 - 09.01.2006 Канада, Торонто
- "Bifurcations, limit cycles and analytic foliations". In honour of Robert Roussarie for his 60th birthday, 07.06.2004 - 11.06.2004 Франция, Марсель
- Topological and geometric methods of complex differential equations, 19.01.2004 - 23.01.2004 Япония, Киото
- NATO Advanced Study Institute: Normal forms, bifurcations and finiteness problems in differential equations, 06.07.2002 - 19.07.2002 Канада, Монреаль
- International Congress of Mathematicians (краткое сообщение), 17.08.1998 - 27.08.1998 Германия, Берлин

а также на научных семинарах и конференциях в университете Торонто (Канада), Математическом институте университета штата Нью-Йорк в Стони Брук (США), университете штата Пенсильвания (США), Корнельском университете (США), университете штата Коннектикут в Сторрс (США), Ульмском университете (Германия), Ворвикском университете в Ковентри (Великобритания), институте Анри Пуанкаре в Париже (Франция), Институте Высших Научных Исследований в Бюр-сюр-Иветт (Франция), Политехнической Школе (Франция), университете Ренна (Франция), университете Тулузы (Франция), Высшей Нормальной Школе Лиона (Франция), университете Лилля (Франция), университете Марселя (Франция), университете Страсбурга (Франция), университете Сержи-Пунтуаз (Франция), Институте Чистой и Прикладной Математики в Рио-де-Жанейро (Бразилия), Международном Центре Теоретической Физики в Триесте (Италия), институте Эйлера в Санкт-Петербурге (Россия), Московском авиационном институте (Россия), Казанском Государственном Университете (Россия).

**Объем и структура диссертации.** Общий объем диссертации составляет 296 страниц. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 141 наименований.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 14 работах, список которых приведен в конце автореферата.

## Содержание диссертации

**Униформизация слоений на римановы поверхности.** Один из подходов к исследованию геометрии голоморфных слоений на аналитические кривые состоит в изучении одновременной униформизации листов. Этот подход был предложен и развит Ю.С.Ильяшенко в конце 1960-х - начале 1970-х гг. Результат униформизации индивидуального листа дается классической теоремой Пуанкаре - Кёбе об униформизации:

**Теорема об униформизации (Пуанкаре - Кёбе).** *Всякая некомпактная односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна либо комплексной прямой $\mathbb{C}$, либо диску.*

**Определение.** Риманова поверхность называется *параболической (гиперболической)*, если её универсальная накрывающая конформно эквивалентна $\mathbb{C}$ (соответственно, диску).

По всякому односвязному трансверсальному сечению $D$ к слоению на аналитические кривые, конструкция, принадлежащая Ю.С.Ильяшенко, строит соответствующее *многообразие универсальных накрывающих.* Это - объединение универсальных накрывающих над листами, пересекающими $D$, с отмеченными точками в $D$. Ю.С.Ильяшенко доказал, что для всякого одномерного голоморфного слоения с особенностями на многообразии Штейна (например, $\mathbb{C}^n$), если $D$ - тоже штейново, то и соответствующее многообразие универсальных накрывающих имеет естественную структуру комплексного многообразия и тоже является многообразием Штейна.

Многообразие универсальных накрывающих - это так называемый *косой цилиндр:* многообразие, голоморфно расслоенное над $D$, слои которого суть односвязные голоморфные кривые (универсальные накрывающие), и которое имеет голоморфное сечение. Последнее отождествляется с $D$ с помощью соответствия между отмеченными точками в листах и в универсальных накрывающих.

В кандидатской диссертации автора было доказано, что *все фазовые кривые типичного полиномиального векторного поля в* $\mathbb{C}^n$ *данной степени не меньше 2 являются гиперболическими римановыми поверхностями.* Там же было доказано аналогичное утверждение для большинства естественных классов одномерных голоморфных слоений с особенностями на произвольном гладком проективном алгебраическом многообразии. Версии этих результатов были параллельно получены в работах А.Кандела и Х.Гомес-Монта (чуть ранее) и А. Линса Нето (одновременно), но в меньшей общности. Вышеупомянутые результаты дали положительный ответ к проблеме конформного типа листов, поставленной Ю.С.Ильяшенко в конце 1960-х гг.

Для исследования голоморфного слоения в целом важно знать зависимость униформизации листа от трансверсального параметра. В классической теореме Липмана Берса об одновременной униформизации рассматриваются голоморфные слоения на компактные римановы поверхности. Теорема Берса утверждает, что многообразие их универсальных накрывающих, отвечающее произвольной односвязной трансверсали $D$, всегда *одновременно униформизуемо:* биголоморфно эквивалентно открытому подмножеству в $\overline{\mathbb{C}} \times D$, расслоенному над $D$ на односвязные области в $\overline{\mathbb{C}}$.

В конце 1960-х гг. Ю.С.Ильяшенко высказал гипотезу, говорящую, что всякое многообразие универсальных накрывающих (и даже всякий штейнов косой цилиндр) одновременно униформизуемо. Он доказал её в частном случае, для слоения на компактные алгебраические кривые в окрестности инвариантной кривой с морсовскими особенностями.

В 1999-2001 гг. автором настоящей диссертации были построены контрпримеры [3, 4] к гипотезе Ильяшенко: *не одновременно-униформизуемые многообразия универсальных накрывающих.* Контрпример из работы [3] связан со слоением некоторой (аффинной или проективной) алгебраической поверхности на алгебраические кривые и подходящим трансверсальным сечением. Отметим, что слоение из [3] на проективной поверхности имеет как не одновременно-униформизуемые, так и униформизуемые многообразия универсальных накрывающих. А именно, по теореме Берса, всякое односвязное трансверсальное сечение, не пересекающее особых слоев, отвечает одновременно униформизуемому многообразию универсальных накрывающих.

В диссертации представлены результаты статьи [4]. В этой работе автором было показано, что *существуют комплексные алгебраические поверхности (и аффинные, и проективные), которые допускают голоморфное слоение с изолированными особенностями, вообще не имеющее одновременно униформизуемых многообразий универсальных накрывающих. Более того, соответствующее слоение может быть построено с плотными листами и трансверсальной инвариантной аффинной структурой.*

В вышеупомянутых работах Кандела, Гомес-Монта и Линса Нето доказано, что для типичных одномерных голоморфных слоений с особенностями на комплексных проективных пространствах метрика Пуанкаре (гиперболических) листов непрерывно зависит от трансверсального параметра. В работе [5] автором была исследована родственная задача о (не обязательно голоморфных) слоениях на параболические римановы поверхности, где комплексная структура листов гладко зависит от трансверсального параметра. Основным примером, рассмотренным и частично исследованным Э.Жисом, является тор произвольной размерности, расслоенный на параллельные плоскости и снабжённый произвольной бесконечно-гладкой римановой метрикой $g$. Метрика индуцирует комплексную структуру на каждом листе. Всякий лист конформно эквивалентен $\mathbb{C}$, и следовательно, допускает плоскую полную конформную метрику. Точнее, на каждом индивидуальном листе существует положительная гладкая функция $\phi$, такая что метрика $\phi g$ на листе является плоской и полной. Функция $\phi$ единственна с точностью до умножения на константу.

Э.Жис поставил следующий вопрос: верно ли, что функция $\phi$ может быть выбрана на каждом листе так, чтобы она гладко зависела от трансверсального параметра? Например, верно ли, что она гладко зависит от точки пересечения данного листа с данным трансверсальным сечением? Он доказал положительный ответ в размерности три в частных случаях, когда либо листы гомеоморфны цилиндру, либо наклон листов удовлетворяет некоторому диофантову условию.

Автором был доказан положительный ответ в общем случае:

**Теорема 1** ([5]) *Для всякого слоения тора произвольной размерности параллельными плоскостями, и для всякой римановой метрики $g$ класса гладкости $C^\infty$ на торе существует положительная функция $\phi$ класса гладкости $C^\infty$ на торе, такая что ограничение метрики $\phi g$ на каждый лист является плоским.*

В той же статье [5] автором были получены и другие результаты (положительные и отрицательные) о других слоениях на параболические римановы поверхности. Основные результаты статьи [5] представлены в диссертации.

Доказательство вышесформулированной теоремы позволило автору получить новое доказательство теоремы об интегрируемости гладкой почти комплексной структуры на двумерном торе [5, 12]. С помощью вышеупомянутого доказательства и классических рассуждений было получено новое, упрощённое доказательство [12] основной теоремы теории квазиконформных отображений: теоремы Ч. Морри Мл. о существовании квазиконформного гомеоморфизма, выпрямляющего произвольную заданную измеримую ограниченную почти комплексную структуру на двумерной сфере. Последнее доказательство не представлено в диссертации.

**Ограниченная версия инфинитезимальной 16-й проблемы Гильберта.** Всякое полиномиальное векторное поле на плоскости лежит в поле касательных прямых (направлений), зануляющих некоторую 1- форму с полиномиальными коэффициентами. Поле направлений, касающееся гамильтонова полиномиального векторного поля, записывается в виде

$$dH = 0, \text{ где } H \text{ - гамильтониан.}$$

Напомним, что овал многочлена - это замкнутая кривая, лежащая на его кривой уровня и не содержащая его критических точек. Замкнутые траектории гамильтонова поля образуют конечное объединение непрерывных семейств овалов гамильтониана.

Отметим, что никакая равномерная оценка числа предельных циклов не известна даже для векторных полей, близких к гамильтоновым. Обзор частных результатов с библиографией представлен в статье Yu.S.Ilyashenko, *Centennial history of Hilbert's 16th problem*, Bull. AMS, **39** ( 2002), no 3, 301–354.

Рассмотрим следующую однопараметрическую деформацию гамильтонова поля направлений, зависящую от параметра $\varepsilon$:

$$dH + \varepsilon\omega = 0, \ \omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy, \ degA, degB < degH.$$

Гамильтоново поле отвечает нулевому значению параметра $\varepsilon$. *Овал* $\gamma(t) \subset \{H = t\}$ *гамильтонова поля может породить предельный цикл возмущённого поля* ($\varepsilon \neq 0$) *только в том случае, когда соответствующее значение* $t$ *гамильтониана является нулём некоторой специальной функции* $I(t)$*: абелева интеграла*

$$I(t) = \int\limits_{\gamma(t)} \omega.$$

В случае ультра-морсовского гамильтониана (см. определение ниже) овалы, порождающие предельные циклы, отвечают вещественным *изолирован-*

*ным* нулям абелева интеграла. Абелев интеграл продолжается в комплексную область как голоморфная функция на универсальной накрывающей над дополнением к множеству комплексных критических значений гамильтониана.

Теорема Варченко - Хованского утверждает, что число вещественных изолированных нулей абелева интеграла допускает равномерную оценку функцией от степени гамильтониана. Однако метод Варченко - Хованского не позволяет получить эффективной явной оценки.

Напомним, что многочлен от двух переменных называется *ультра-морсовским,* если его комплексные критические значения различны и комплексные прямые нулей его старшей однородной части также различны.

В совместной работе автора с д.ф.-м.н., проф. Ю.С.Ильяшенко ([10, 11]) была получена явная верхняя оценка числа нулей абелева интеграла для ультра-морсовских гамильтонианов функцией от гамильтониана. Эта оценка не равномерна: она стремится к бесконечности, когда гамильтониан вырождается, так что сливаются либо пара комплексных прямых нулей старшей однородной части, либо пара комплексных критических значений гамильтониана. Однако она равномерна по всем гамильтонианам, пробегающим "достаточно большое"компактное подмножество в пространстве ультра-морсовских многочленов произвольной заданной степени. Оценка имеет вид экспоненты от $q(H)(degH)^4$. Коэффициент $q(H)$ равномерно ограничен абсолютной константой, не зависящей от $degH$, на вышеупомянутых компактных подмножествах. На данный момент это - лучшая из известных явных оценок[1] числа нулей абелева интеграла, справедливых на "достаточно больших"компактных подмножествах в пространствах ультра-морсовских многочленов произвольной

[1] После публикации результатов Ильяшенко и диссертанта, в совсем недавней совместной работе Г.Биньямини, Д.И.Новикова и С.Ю.Яковенко была получена явная *равномерная* оценка числа нулей абелева интеграла. Но она имеет вид *двойной* экспоненты от $c(degH)^{61}$, где $c$ - универсальная константа. Подробнее см. Binyamini, G.; Novikov, D.; Yakovenko, S., *On the number of zeros of Abelian integrals. A constructive solution of the infinitesimal Hilbert sixteenths problem*, Invent. Math. **181** (2010), 227-289.

степени.

Доказательство вышеупомянутой оценки основано на идее Ю.С.Ильяшенко (использовать теорему Ильяшенко - Яковенко о нулях и росте), теории Пикара - Лефшеца, результатах автора [8, 9] и результате Ильяшенко, опубликованном отдельно и развивающем результаты Ройтмана - Хованского - Яковенко об оценке вариации аргумента голоморфной функции. Результаты автора [8, 9] относятся к слоениям на кривые уровня комплексного многочлена от двух переменных, у которого старшая однородная часть не вырождена.

Основной результат статьи [9] даёт явную формулу для детерминанта матрицы абелевых интегралов от базисных мономиальных 1-форм вдоль циклов, порождающих гомологии комплексной кривой уровня рассматриваемого многочлена.

Известно, что корни и критические точки подходящим образом нормированного комплексного многочлена от одной переменной со старшим коэффициентом 1 допускают явную верхнюю оценку. Здесь "подходящим образом нормированный" означает, что нуль есть критическая точка, и все критические значения лежат в единичном диске.

Результаты автора, опубликованные в статье [8] и относящиеся к "количественной алгебраической геометрии,"дают аналог предыдущего утверждения для комплексных *многочленов от двух переменных* (аналогично нормированных подходящим образом). Основная теорема статьи [8] относится к топологии кривых уровня многочлена, отвечающих не слишком большим его значениям. Она дает верхнюю оценку на минимальный радиус бидиска с центром в нуле, содержащего всю нетривиальную топологию вышеупомянутых кривых уровня.

**Слияние особых точек и явление Стокса.** Голономия (отображение первого возвращения) предельного цикла голоморфного слоения коразмерности один есть росток конформного отображения $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ в неподвижной точке 0. Росток называется *параболическим,* если он касателен к тождественному в неподвижной точке и отличен от тождественного. Аналитическая классификация (т.е. классификация с точностью до конформной сопряжённости) параболических ростков была получена одновременно и независимо Ж.Экалем и С.М.Ворониным. Построенный ими инвариант аналитической классификации параболического ростка состоит из его формальной нормальной формы и конечного набора конформных ростков $(\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$, называемого *модулем Экаля - Воронина.*

Теория модулей Экаля - Воронина - это нелинейный аналог классической теории (развитой в 1970-е годы) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным временем в окрестности иррегулярных особых точек. Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение вида

$$\dot{z} = A(t)z, \ z \in \mathbb{C}^n,$$

где $A(t)$ - матричнозначная мероморфная функция. *Особая точка* уравнения - это полюс функции $A(t)$. *Фуксова* особая точка - это простой полюс. В окрестности фуксовой особой точки решения растут не более, чем полиномиально вдоль секторов с вершиной в рассматриваемой точке. Особая точка называется *иррегулярной,* если в ее окрестности некоторое решение растёт быстрее, чем полиномиально вдоль некоторого сектора с вершиной в рассматриваемой особой точке. Например, кратный полюс типичного уравнения является иррегулярной особой точкой. Аналитическая классификация ростков линейных уравнений в иррегулярных особых точках была получена В.Бальзером, В.Юркатом, Д.Лутцем, А.Пейеримхофом и Я.Сибуйей. В типичном случае соответствующий инвариант аналитической классификации состоит из формальной нормальной формы ростка уравнения и набора унипотентных линейных операторов, действующих в пространствах решений уравнения над подходящими секторами с вершиной в особой точке. Последние линейные операторы называются *операторами Стокса.*

В 1984 г. В.И.Арнольд предложил изучать росток линейного уравнения в иррегулярной особой точке как предел уравнений со сливающимися фуксовыми особенностями. Он высказал гипотезу, утверждающую, что некоторые операторы монодромии возмущённого (фуксова) уравнения сходятся к операторам Стокса. Близкий вопрос был сформулирован и частично исследован Ж.-П.Рамисом. Краткий обзор частных результатов со ссылками представлен в статье [6].

В статьях [1, 6, 7] автором были получены результаты, связывающие предельную монодромию с операторами Стокса в общем нерезонансном случае, для типичной фуксовой деформации нерезонансной иррегулярной особой точки. Эти результаты представлены в диссертации. В статье [2] автором были получены нелинейные аналоги вышеупомянутых результатов:

- для параболических ростков и их модулей Экаля - Воронина;

- для седлоузловых ростков двумерных голоморфных векторных полей и их модулей Мартине - Рамиса (результат представлен в диссертации);

- для седлоузловых ростков в высших размерностях и их секториальных центральных многообразий.

**Неустойчивость недискретных свободных подгрупп в группах Ли.** В 1971 г. Д.Эпстейн доказал, что во всякой группе Ли с неразрешимой единичной компонентой типичная пара элементов (по мере Хаара) порождает свободную подгруппу. В статье [13] автором было доказано, что если свободная подгруппа не дискретна, то она не устойчива, т.е. данная пара её образующих является пределом пар, порождающих несвободные подгруппы.

**Теорема 2** ([13]) *Пусть $G$ - группа Ли, а* $\Gamma$*- конечно-порождённая некомму-*

*тативная свободная группа. Тогда всякое инъективное недискретное представление $\rho : \Gamma \to G$ есть предел последовательности неинъективных представлений.*

**Замечание.** Аппроксимирующие неинъективные представления из теоремы могут быть выбраны с несвободными образами.

Вышесформулированная теорема даёт положительный ответ на вопрос Э.Жиса. Последний также предложил исследовать оптимальную скорость приближения образующих недискретной свободной подгруппы в группе Ли образующими несвободных подгрупп с заданной минимальной длиной соотношения. Имеется гипотеза, говорящая, что для типичной исходной свободной подгруппы погрешность наилучшего приближения экспоненциально растет с ростом последней длины.

В той же статье [13] автором исследована скорость приближения недискретных инъективных представлений неинъективными. Доказана оценка оптимальной погрешности приближения, экспоненциально зависящая от некоторой степени минимальной длины соотношения.

**О четырёхугольных орбитах в плоских бильярдах.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ - ограниченная область в евклидовом пространстве с кусочно-гладкой границей.

Рассмотрим бильярд в области $\Omega$. Это - отображение в себя пространства пар $(x, v)$, где $x \in \partial\Omega$ - это точка границы области, а $v \in T_x\mathbb{R}^d$ - единичный касательный вектор в точке $x$, направленный внутрь области $\Omega$. По определению, бильярдное преобразование переводит пару $(x, v)$ в другую пару $(x^*, v^*)$, определенную следующим образом:

- луч, порождённый вектором $v$, пересекает границу $\partial\Omega$; первая точка пересечения - это точка $x^*$;

- предыдущий луч отражается от касательной плоскости $T_{x^*}\partial\Omega$ по обычному закону отражения (угол падения равен углу отражения), и отражённый луч, выпущенный из точки $x^*$, направлен внутрь области $\Omega$; вектор $v^*$ - это единичный касательный вектор отражённого луча в точке $x^*$.

Бильярды встречаются во многих областях математики и физики. Например, в геометрической оптике, в классической механике, в модели Больцмана идеального газа.

Результат, представленный в диссертации и ниже, относится к гипотезе В.Я.Иврия о периодических орбитах в бильярдах, связанной с гипотезой Германа Вейля из спектральной теории.

Рассмотрим задачу Дирихле в области $\Omega$ на собственные функции оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями. Известно, что ее собственные значения отрицательны и стремятся к бесконечности. Физик Дебай и Герман Вейль исследовали асимптотическое поведение собственных значений задачи Дирихле. Они рассмотрели счетную функцию от $\lambda > 0$, равную количеству собственных значений, по модулю не превосходящих $\lambda^2$. Дебай получил асимптотическую формулу для счетной функции при $\lambda \to \infty$ с первым главным мономиальным членом для случая прямоугольного параллелепипеда. В 1911 г. Вейль доказал, что формула Дебая справедлива для любой области и вывел более точную асимптотическую формулу, со вторым мономиальным асимптотическим членом, для прямоугольного параллелепипеда. Вейль высказал гипотезу, утверждающую, что последняя формула со вторым асимптотическим членом верна для любой области.

Гипотеза Вейля была исследована многими математиками, в том числе Р.Курантом, Б.М.Левитаном, Л.Хёрмандером, Дж.Дейстермаатом, В.Гийемином и В.Я.Ивриeм. Наилучший результат был получен в 1980 г. В.Я.Иврием, который доказал гипотезу Вейля при следующем дополнительном геометрическом условии на область $\Omega$: множество периодических точек преобразования бильярда имеет меру нуль. Иврий высказал гипотезу, утверждающую, что последнее геометрическое условие выполнено всегда:

**Гипотеза (В.Я.Иврий, 1980).** *Для всякой области в евклидовом пространстве с кусочно-бесконечно-гладкой границей множество периодических траекторий соответствующего бильярда имеет меру нуль.*

Гипотеза Иврия была исследована многими математиками. В 1989 г. М.Рыхлик доказал, что в плоском бильярде множество треугольных траекторий имеет меру нуль, с использованием компьютера. Позднее Л.Стоянов получил простое геометрическое доказательство результата Рыхлика. В 1994 г. Я.Б.Воробец обобщил результат Рыхлика на случай треугольных орбит бильярда в произвольной размерности.

В совместной работе автора с аспирантом (ныне к.ф.-м.н.) Ю.Г.Кудряшовым [14] получено доказательство частного случая гипотезы Иврия для четырёхугольных орбит в размерности два: доказано, что для любого плоского бильярда с кусочно-гладкой границей достаточной гладкости множество *четырёхугольных* орбит имеет меру нуль.

Доказательство состоит из двух шагов. Первый шаг - это сведение к кусочно-аналитическому случаю, принадлежащее Ю.Г.Кудряшову (работает в любой размерности, для периодических траекторий любого периода). Для доказательства сведения к кусочно-аналитическому случаю, гипотеза Иврия переформулируется в терминах аналитических пфаффовых систем как задача о существовании интегральных многообразий данной размерности. Доказательство сведения основано на версии теоремы Картана-Курaниси-Рашевского о бесконечном продолжении пфаффовой системы на пространства струй.

В диссертации представлен второй шаг: доказательство гипотезы Иврия для кусочно-аналитического случая. Доказательство получено совместно с Ю.Г.Кудряшовым. В предположении противного исследуется граница множества четырехугольных траекторий (идея, предложенная Ю.С.Ильяшенко).

Для этого изучаются максимальные аналитические продолжения локальных зеркал бильярда. Доказывается, что типичная точка границы отвечает "вырожденной"четырехугольной траектории. Классифицируются всевозможные вырождения и доказывается, что ни одно из них не может отвечать типичной точке границы множества четырёхугольных траекторий. Диссертантом разобрана половина случаев вырождения, в том числе ключевой случай: вырождение типа "четырёхугольник с развёрнутым углом". Другая половина случаев разобрана Ю.Г.Кудряшовым. Ему же принадлежит структуризация дерева случаев.

## Список публикаций


1. Glutsuk, A., *Stokes operators via limit monodromy of generic perturbation*, Journal of Dynamical and Control Systems, **5** (1999), no 1, 101–135.

2. Глуцюк, А.А., *Слияние особых точек и нелинейное явление Стокса*, Труды Моск. Матем. Общества, **62** (2000), 54–104.

3. Glutsyuk, A., *Nonuniformizable skew cylinders: a counterexample to the simultaneous uniformization problem*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1 Math., **332** (2001), 209–214.

4. Glutsyuk, A., *On simultaneous uniformization and local nonuniformizability*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **334** (2002), 489–494.

5. Glutsyuk, A., *Simultaneous metric uniformization of foliations by Riemann surfaces*, Commentarii Mathematici Helvetici, **79** (2004), Issue 4, 704–752.

6. Glutsyuk, A., *Confluence of singular points and Stokes phenomena*, Proceedings of NATO Advanced Study Institute “Normal Forms, Bifurcations and Finiteness Problems in Differential Equations”, Montreal, July 6-19, 2002

(C. Rousseau and Yu. Ilyashenko, eds.), NATO Science Series II Math. Phys. Chem., **137** (2004), 267–294. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

7. Glutsyuk, A., *On the monodromy group of confluenting linear equations*, Moscow Math. J., **5** (2005), no. 1, 67–90.

8. Glutsyuk, A., *Upper bounds of topology of complex polynomials in two variables*, Moscow Math. J. **5** (2005), no. 4, 781–828.

9. Glutsyuk, A., *An explicit formula for period determinant*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 4, 887–917.

10. Глуцюк, А.А.; Ильяшенко, Ю.С., *Ограниченная инфинитезимальная 16-я проблема Гильберта*, Доклады Акад. Наук, **407** (2006), no. 2, 154-159.

11. Glutsyuk, A.; Ilyashenko, Yu., *Restricted version of the infinitesimal Hilbert 16-th problem*, Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2, 281-325.

12. Glutsyuk, A., *Simple proofs of uniformization theorems*, Fields Institute Communications, **53** (2008), 125-143. A Volume in Honour of John Milnor's 75th Birthday.

13. Glutsyuk, A., *Instability of nondiscrete free subgroups in Lie groups*, Transformation Groups, **16** (2011), no. 2, 413-479.

14. Глуцюк, А.А.; Кудряшов, Ю.Г., *О четырёхугольных орбитах в плоских бильярдах*, Доклады Акад. Наук, **438:5** (2011), 590-592.