На правах рукописи

Шапировский Илья Борисович

Алгоритмические свойства модальных логик информационных систем

05.13.17 – теоретические основы информатики,
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2007

Работа выполнена в
Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В. Б. Шехтман

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор М. Р. Пентус

кандидат физико-математических наук, доцент М. Н. Рыбаков

Ведущая организация: Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «__» _______ 2007 года в __ часов на заседании диссертационного совета Д.002.077.01 при Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН по адресу: 127994, г.Москва, ГСП-4, Большой Каретный пер., д. 19.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.

Автореферат разослан *«28» сентября* 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.002.077.01,
доктор физико-математических наук И.И.Цитович.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. При построении и анализе сложных информационных систем во многих случаях оказывается невозможным оперировать с точным численным описанием системы: это может быть связано как с недоступностью такого описания, так и с практической невозможностью его обработки. В таких случаях возникает задача описания системы средствами формальных языков. Используемый при этом формальный язык должен быть, с одной стороны, достаточно выразительным для отражения содержательных свойств системы; с другой стороны — предлагаемое описание должно быть приемлемым с алгоритмической точки зрения. Удобным формализмом для такого (качественного) описания оказываются пропозициональные модальные логики.

С точки зрения математической логики, модальные логики являются логиками второго порядка, и потому в них могут быть описаны свойства, невыразимые в классических первопорядковых логиках. Кроме того, для модальных логик характерна относительно невысокая алгоритмическая сложность, что оказывается принципиальным для их реальных приложений.

Как область математической логики, модальная логика возникла в середине прошлого века. В 1960—1970 гг. были развиты математические методы для изучения различных свойств модальных логик — полноты, финитной аппроксимируемости, разрешимости, и др[1]. Было начато исследование алгоритмической сложности модальных логик[2]. В конце 70-х годов 20-го века начался новый этап — появляются многочисленные приложения модальных логик в информатике, такие как динамические логики вычислимости[3], логики параллельности[4,5], логики алгебр процессов[6]. В задачах искусственного интеллекта активно используются

[1] См., например, *Blackburn P., de Rijke M., Venema Y.* Modal Logic. — Cambridge University Press, 2001.

[2] *Ladner R.* The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic // *SIAM J. Comput.* — 1977. — Vol. 6, no. 3. — Pp. 467–480.

[3] *Pratt V.* Semantical considerations on Floyd-Hoare logic // Proceedings 17th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. — Cambridge, USA: Massachusetts Institute of Technology, 1976. — Pp. 109–121.

[4] *Pnueli A.* The temporal logic of programs // Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. — IEEE, 1977. — Pp. 46–57.

[5] *Clarke E., Emerson E.* Design and synthesis of synchronization skeletons using branching-time temporal logic // Proceedings of the Workshop on Logic of Programs, Yorktown Heights. — Vol. 131. — Springer, 1981. — Pp. 52–71.

[6] *Hennessy M., Milner R.* On observing nondeterminism and concurrency // Automata, Languages and

модальные логики представления знаний[7], в том числе так называемые *пространственные модальные логики*, предназначенные для качественного анализа пространственной информации[8]. Таким образом, в настоящее время модальная логика оформилась как самостоятельная дисциплина на стыке информатики и математической логики с широким кругом приложений.

Следует отметить, что для представления пространственной информации при решении прикладных задач (как, например, распознавание образов или построение геоинформационных систем) оказывается удобным использовать формальные языки, в которых высказывания относятся не к отдельным точкам в пространстве, а к множествам определённого вида (*регионам*).

В модальных логиках подобный подход для решения задач информатики впервые был описан в работе Халперна и Шохема, где введены *модальные логики временных интервалов*[9]. Предложенный подход оказался эффективным при решении задач верификации моделей программ, спецификации систем реального времени, компьютерной лингвистики[10]. Как было замечено позднее[11], подход Халперна и Шохема естественным образом обобщается на многомерный случай для решения задач представления пространственной информации: аналогом интервалов являются регионы в действительном (или ином топологическом или метрическом) пространстве. Однако на этом пути был получен ряд отрицательных результатов: оказалось, что различные многомодальные логики регионов являются неразрешимыми или даже неперечислимыми[12]. Таким образом, возникает задача построения модальных логик регионов, с одной стороны, достаточно выразительных, с другой — разрешимых

Programming, 7th Colloquium, Noordweijkerhout, The Netherland, Proceedings. — Vol. 85 of *Lecture Notes in Computer Science*. — Springer, 1980. — Pp. 299–309.

[7] *Schmidt-Schauss M., Smolka G.* Attributive concept descriptions with complements // *Artificial Intelligence*. — 1991. — Vol. 48. — Pp. 1–26.

[8] *Gabbay D., Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M.* Many-dimensional modal logics: theory and applications. — Elsevier Science, 2003.

[9] *Halpern J., Shoham Y.* A propositional modal logic of time intervals // Proceedings 1st Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science, LICS'86, Cambridge, MA, USA, 16–18 June 1986. — Washington, DC: IEEE Computer Society Press, 1986. — Pp. 279–292.

[10] См., например, обзорную работу *Goranko V., Montanari A., Sciavicco G.* A road map on interval temporal logics and duration calculi // *Journal of Applied Non-Classical Logics*. — 2004. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 9–54.

[11] *Lutz C., Wolter F.* Modal logics of topological relations // *Logical Methods in Computer Science*. — 2006. — Vol. 2, no. 2. — Paper 5.

[12] См. там же.

и обладающих невысокой алгоритмической сложностью, что и являлось предметом исследований.

Цель работы. Целью работы является построение разрешимых пространственных модальных логик, и исследование их алгоритмической сложности.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Для ряда модальных логик пространственных отношений на регионах в действительном пространстве впервые построены полные системы аксиом. Кроме того, в противовес известным отрицательным алгоритмическим результатам о логиках регионов[13], получены положительные результаты — о разрешимости и PSPACE-полноте.

Для доказательства финитной аппроксимируемости модальных логик используется метод селективной фильтрации в сочетании с методом максимальных точек в канонической модели. Комбинация двух этих хорошо известных подходов даёт эффективный метод доказательства финитной аппроксимируемости (следовательно, разрешимости) транзитивных модальных логик.

В работе В.Б. Шехтмана[14] было замечено, что изучение свойств релятивистских модальных логик может быть использовано при исследовании модальных логик интервалов. В диссертации эта взаимосвязь распространяется на многомерный случай. Постановка задачи о релятивистских модальных логиках принадлежит А. Прайору[15]. Первые конкретные примеры таких логик — для отношения причинного будущего — были построены Р. Голдблаттом[16] и В.Б. Шехтманом[17]. Вопрос о модальной аксиоматизации отношения хронологического будущего долгое время оставался открытым, его решение излагается в диссертации.

Предложен новый метод доказательства PSPACE-разрешимости транзитивных модальных логик.

[13] См. там же.

[14] *Shehtman V.* On some two-dimensional modal logics // 8th International Congress on Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Moscow, Abstracts. — 1987. — Pp. 326–330.

[15] *Prior A.* Past, Present and Future. — Oxford University Press, 1967.

[16] *Goldblatt R.* Diodorean modality in minkowski spacetime // *Studia Logica.* — 1980. — Vol. 39. — Pp. 219–236.

[17] *Shehtman V.* Modal logics of domains on the real plane // *Studia Logica.* — 1983. — Vol. 42. — Pp. 63–80.

Методы исследования. В работе используются методы и результаты теории модальных логик и теории алгоритмической сложности.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и развитые методы могут быть полезны специалистам, работающим в ИППИ РАН им. А.А. Харкевича, МГУ им. М. В. Ломоносова, МИ РАН им. В.А. Стеклова, Тверском Государственном Университете и др. Кроме того, описанные в диссертации алгоритмы могут быть реализованы в программных средствах, предназначенных для анализа пространственной информации.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались в течении 2002-2007 гг. на научном семинаре Добрушинской лаборатории Института проблем передачи информации РАН; на научно-исследовательском семинаре 'Алгоритмические вопросы алгебры и логики' под руководством академика РАН С.И.Адяна и на других спецсеминарах кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ; на научных семинарах в Институте исследований по информатике Тулузы (Франция). Результаты были также представлены на 4-й, 5-й и 6-й Международных конференциях по модальной логике (Тулуза, Франция, 2002; Манчестер, Англия, 2004; Брисбен, Австралия, 2006); на Международном симпозиуме по логике и вычислимости (Москва, 2004); на Международной конференции 'Модальные логики и их приложения в информатике' (Москва, 2005); на XXVIII Конференции молодых учёных механико-математического факультета МГУ (Москва, 2006).

Работа была поддержана грантами РФФИ 'Пространственные модальные логики' (№ 02-01-22003) и 'Геометрические модальные логики' (№ 06-01-72555).

Публикации. По теме диссертации опубликовано десять работ, из них три — совместно с В.Б. Шехтманом.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, приложения, списка литературы и указателя терминов. Общий объём диссертации — 112 страниц. Диссертация содержит 14 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 45 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** даётся обзор проблем и результатов, связанных с темой диссертации, приводятся основные полученные результаты и описывается её содержание.

В **Главе 1** содержатся предварительные сведения из теории модальных логик. В частности, вводится семантика Крипке, описываются некоторые преобразования шкал и моделей Крипке, сохраняющие истинность модальных формул.

Множество *n-модальных формул* $FM(\Diamond_1, \ldots, \Diamond_n)$ строится из счетного множества *пропозициональных переменных* $PV = \{p_1, p_2, \ldots\}$, пропозициональной константы $\perp$ (*ложь*), двуместной связки $\to$ (*импликация*), и одноместных связок $\Diamond_1, \ldots, \Diamond_n$ (*модальности типа "возможно"*) следующим образом:

- $\perp, p_1, p_2, \ldots$ — формулы;
- Если A, B — формулы, то $(A \to B)$ — формула;
- Если A — формула, то $\Diamond_i A$ — формула, $i = 1, \ldots, n$.

Связки $\neg, \wedge, \vee, \top, \Box_i$ рассматриваются как сокращения, в частности:

$$\Box_i A = \neg\Diamond_i\neg A \text{ (модальности типа "неодходимо").}$$

Для формулы A пусть $Sub(A)$ обозначает множество всех её подформул.

n-модальной логикой называется множество n-модальных формул $\mathrm{L} \subseteq FM(\Diamond_1, \ldots, \Diamond_n)$, такое что

- L содержит все пропозициональные тавтологии,
- L содержит формулы $\neg\Diamond_i\perp$, $i = 1, \ldots, n$,
- L содержит формулы $\Diamond_i(p_1 \vee p_2) \to \Diamond_i p_1 \vee \Diamond_i p_2$, $i = 1, \ldots, n$,
- L замкнуто относительно *правила Modus Ponens*, *правила подстановки*, и *правил монотонности* Mon_i, $i = 1, \ldots, n$:

$$\mathrm{Mon}_i: \quad A \to B \in \mathrm{L} \Rightarrow \Diamond_i A \to \Diamond_i B \in \mathrm{L}.$$

K_n обозначает наименьшую n-модальную логику. При $n = 1$ в дальнейшем мы будем опускать индексы, т.е. вместо $\Diamond_1, \Box_1, \mathrm{K}_1$ будем писать $\Diamond, \Box, \mathrm{K}$ и т.п.

Для n-модальной логики L и множества формул $\Psi \subseteq FM(\Diamond_1, \ldots, \Diamond_n)$, $\mathrm{L} + \Psi$ обозначает наименьшую n-модальную логику, содержащую $\mathrm{L} \cup \Psi$. n-модальная логика L называется *конечно аксиоматизируемой*, если $\mathrm{L} = \mathrm{K}_n + \Psi$ для некоторого конечного Ψ. Если $\Psi = \{A\}$, то пишем $\mathrm{L} + A$ вместо $\mathrm{L} + \{A\}$. $\mathrm{L} \vdash A$ обозначает $A \in \mathrm{L}$.

n-модальной шкалой Крипке (или просто *n-шкалой*) $\mathfrak{F}$ называется кортеж $(W, R_1, \ldots, R_n)$, где W — непустое множество и $R_1, \ldots, R_n \subseteq W \times W$. *Оценкой* на шкале $\mathfrak{F}$ называется отображение

$$\theta : PV \to 2^W.$$

Моделью (Крипке) $\mathfrak{M}$ над шкалой $\mathfrak{F}$ называется пара $(\mathfrak{F}, \theta)$, где θ — оценка на $\mathfrak{F}$. Для всякой модальной формулы $A \in FM(\Diamond_1, \ldots, \Diamond_n)$ индуктивно определяется истинность формулы A в точке x модели $\mathfrak{M}$ (обозначение — $\mathfrak{M}, x \vDash A$):

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}, x \nvDash \bot, & & \\
\mathfrak{M}, x \vDash p & \Leftrightarrow & x \in \theta(p), \\
\mathfrak{M}, x \vDash A \to B & \Leftrightarrow & \mathfrak{M}, x \nvDash A \text{ или } \mathfrak{M}, x \vDash B, \\
\mathfrak{M}, x \vDash \Diamond_i A & \Leftrightarrow & \text{для некоторого y имеем: } xR_iy \text{ и } \mathfrak{M}, y \vDash A.
\end{array}$$

Формула A называется *истинной в модели* $\mathfrak{M}$ (обозначение: $\mathfrak{M} \vDash A$), если она истинна во всех точках этой модели. Формула A называется *общезначимой* в шкале $\mathfrak{F}$ (обозначение: $\mathfrak{F} \vDash A$), если она истинна в любой модели над $\mathfrak{F}$. A называется *общезначимой в классе шкал* $\mathcal{F}$ (обозначение: $\mathcal{F} \vDash A$), если A общезначима в любой шкале $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$. Множество всех формул, общезначимых в классе $\mathcal{F}$ будем обозначать через $\mathbf{L}(\mathcal{F})$. $\mathbf{L}(\mathfrak{F})$ — сокращение $\mathbf{L}(\{\mathfrak{F}\})$. Для логики L и шкалы $\mathfrak{F}$, если $\mathbf{L}(\mathfrak{F}) \supseteq \mathrm{L}$, то $\mathfrak{F}$ называется L-*шкалой*. Формула A называется L-*выполнимой*, если A выполнима в некоторой L-шкале.

Хорошо известно, что если $\mathcal{F}$ – класс n-шкал, то $\mathbf{L}(\mathcal{F})$ является n-модальной логикой. Логика L называется *полной относительно класса шкал* $\mathcal{F}$, если $\mathrm{L} = \mathbf{L}(\mathcal{F})$. L называется *полной (по Крипке)*, если она полна относительно некоторого класса шкал. L называется *финитно* *аппроксимируемой*, если она полна относительно некоторого класса конечных шкал.

В **Главе 2** исследуется аксиоматизация одномодальных логик пространственных структур.

Параграфы **2.1—2.5** посвящены модальной аксиоматизации логик хронологического будущего. Отношение *причинного будущего* $\preceq$ и отношение *хронологического будущего* $\prec$ в $\mathbb{R}^n$ определяются следующим образом: для $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$X \preceq Y \;\Leftrightarrow\; \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (y_i - x_i)^2 \leqslant (y_n - x_n)^2 \text{ и } x_n \leqslant y_n,$$
$$X \prec Y \;\Leftrightarrow\; \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (y_i - x_i)^2 < (y_n - x_n)^2 \text{ и } x_n < y_n.$$

Эти отношения транзитивны, и $\preceq$ рефлексивно. Хорошо известно, что модальные логики $\mathrm{K4} = \mathrm{K} + \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$, $\mathrm{S4} = \mathrm{S} + \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ характеризуются классом всех транзитивных и классом всех транзитивных рефлексивных шкал соответственно. Таким образом, $\mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \prec) \supseteq \mathrm{K4}$ и $\mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \preceq) \supseteq \mathrm{S4}$. Точная аксиоматизация логик причинного будущего была дана в работах Р. Голдблатта и В.Б. Шехтмана. Было показано, что возникающие логики — это S4 и её хорошо известные расширения

$$\mathrm{S4.1} = \mathrm{S4} + \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p, \quad \mathrm{S4.2} = \mathrm{S4} + \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p.$$

А именно, что для $n \geqslant 2$, $\mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \preceq) = \mathrm{S4.2}$ (Голдблатт, 1980, см. сноску 16); кроме того, для области V в $\mathbb{R}^2$, ограниченной регулярной кривой, $\mathbf{L}(V, \preceq) = \mathrm{S4}$, $\mathbf{L}(\mathbf{C}V, \preceq) = \mathrm{S4.1}$, где $\mathbf{C}V$ обозначает замыкание V (Шехтман, 1983, см. сноску 17).

В диссертации доказаны аналогичные результаты для отношения $\prec$. В отмеченной выше работе Р. Голдблатта было замечено, что свойство *2-плотности*

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 (xRy_1 \wedge xRy_2 \to \exists z(xRz \wedge zRy_1 \wedge zRy_2)),$$

которым обладает отношение $\prec$ в $\mathbb{R}^n$, выражается модальной аксиомой

$$\mathrm{ADens}_2 = \Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \to \Diamond(\Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2).$$

Для *2-плотных логик*

$$\mathrm{LM}_1 = \mathrm{K4}\ +\ \mathrm{ADens}_2\ +\ \Diamond\top,$$
$$\mathrm{LM}_2 = \mathrm{LM}_1\ +\ \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p,$$
$$\mathrm{LM}_3 = \mathrm{K4}\ +\ \mathrm{ADens}_2\ +\ \Diamond\top \to \Diamond\Box\bot,$$

в диссертации доказаны следующие результаты:

ТЕОРЕМА 2.23. *Для* $n \geqslant 2$, $\mathbf{L}(\mathbb{R}^n, \prec) = \mathrm{LM}_2$.

ТЕОРЕМА 2.25. *Пусть* V — *область в* $\mathbb{R}^2$, *ограниченная регулярной кривой. Тогда*

- $\mathbf{L}(V, \prec) = \mathrm{LM}_1$,
- $\mathbf{L}(\mathbf{C}V, \prec) \subseteq \mathrm{LM}_3$,
- $\mathbf{L}(\mathbf{C}V, \prec) = \mathrm{LM}_3$, *если* V *выпукла.*

Для доказательства этих теорем используется модификация метода из работ Р. Голдблатта и В.Б. Шехтмана. Существенным при этом является финитная аппроксимируемость исследуемых логик. Хорошо известно, что логика S4 и рассмотренные выше её расширения S4.1, S4.2 обладают этим свойством: для этих логик (как и для многих других) применим метод "эпи-фильтраций" Леммона-Сегерберга. Однако в случае логик, содержащих аксиому ADens_2, этот метод неприменим непосредственно, так как фильтрации такого рода не сохраняют свойство 2-плотности. Таким образом, именно доказательство финитной аппроксимируемости (теоремы 2.12—2.14) представляло принципиальную сложность при исследовании логик LM_1—LM_3 и при получении изложенных выше теорем. Требуемый результат был получен при использовании метода селективной фильтрации в сочетании с методом максимальных точек в канонической модели.

В параграфах **2.6** и **2.7**, на основании результатов, полученных в параграфах 2.1—2.5, строятся аксиоматики модальных логик регионов в действительном пространстве.

Компактное множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *регионом в* $\mathbb{R}^n$, или n-*регионом*, если U является замыканием непустой области.

Примерами множеств регионов в $\mathbb{R}^n$ являются:

$\mathcal{R}eg_n$ — множество всех n-регионов;

$\mathcal{C}onv_n$ — множество всех выпуклых n-регионов;

$\mathcal{B}_n$ — множество всех замкнутых шаров;

$\mathcal{R}_n = \left\{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \mid [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n] \in \mathcal{B}_1 \right\}$ — множество всех *n-мерных параллелепипедов.*

Для множества n-регионов W пусть W° обозначает расширение W всеми одноэлементными множествами: $W^\circ = W \cup \{\{X\} \mid X \in \mathbb{R}^n\}$.

Определим отношение *компактного включения* $\Subset$: для множеств $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ положим

$$U \Subset V \Leftrightarrow \mathbf{C}U \subseteq \mathbf{I}V; \qquad \Supset = \Subset^{-1},$$

где $\mathbf{I}V$ и $\mathbf{C}V$ обозначают внутренность и замыкание V соответственно.

Для функции $f : V \to W$ пусть $f_* : 2^V \to 2^W$, где $f_*(U) = \{f(x) \mid x \in U\}$ для $U \subseteq V$.

Определение 2.30. Множество n-регионов W называется *насыщенным*, если

$$\forall u \in \mathcal{B}_n \; \exists v \in W \;\; (u \subseteq v)\,, \tag{1}$$

$$\forall u \in W \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists v \in W \;\; (u \Subset v \subseteq B(u, \varepsilon))\,, \tag{2}$$

$$\forall u \in W \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists v \in W \;\; (-B(-u, \varepsilon) \subseteq v \Subset u)\,, \tag{3}$$

и кроме того, существует открытая непрерывная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая что для $R \in \{\subseteq, \supseteq, \Subset, \Supset\}$,

$$\forall u \in W^\circ \; \forall s \in \mathcal{R}eg_1^\circ \left(f_*(u) R s \Rightarrow \exists w \in W^\circ (uRw \& f_*(w) = s)\right). \tag{4}$$

(Заметим, что свойство (4) соответствует так называемому *свойству поднятия* отображения f_* шкалы (W°, R) в шкалу $(\mathcal{R}eg_1^\circ, R)$.)

В частности, насыщенными являются множество замкнутых шаров, множество n-мерных параллелепипедов, множество всех n-регионов; более того, всякое непустое множество выпуклых регионов, замкнутое относительно гомотетий $\mathbb{R}^n$, является насыщенным (предложение 2.34).

ТЕОРЕМА 2.32. Пусть W — насыщенное множество n-регионов, $n \geqslant 1$, $R \in \{\subseteq, \supseteq, \Subset, \Supset\}$. Тогда логики шкал (W, R) и (W°, R) описываются следующей таблицей:

	$\Supset$	$\supseteq$	$\Subset$	$\subseteq$
W	LM_1	S4	LM_2	S4.2
W°	LM_3	S4.1	LM_2	S4.2

В параграфе **2.8** рассматриваются логики отношений сравнимости и несравнимости по отношениям $\prec$ и $\preceq$ в $\mathbb{R}^n$, а также логики регионов, упорядоченных отношениями сравнимости и несравнимости по включению и компактному включению. Для этих логик доказывается невозможность аксиоматизации никаким множеством формул с ограниченным числом переменных, и следовательно, невозможность конечной аксиоматизации (теоремы 2.39, 2.40).

На основании результатов, полученных в главе 2, опубликованы работы [1], [6], [9], [10].

В **Главе 3** рассматриваются модальные логики шкал вида $(W, R, W \times W)$, то есть бимодальные логики, в которых вторая модальность интерпретируется универсальным отношением.

В параграфах **3.1** — **3.3** изучаются общие вопросы введения универсальной модальности для логик так называемых *антинаправленных* шкал. Дадим необходимые определения.

Для шкалы $\mathfrak{F} = (W, R)$ пусть $\mathfrak{F}^u$ обозначает шкалу с дополнительным *универсальным* отношением: $\mathfrak{F}^u = (W, R, W \times W)$. Для класса шкал $\mathcal{F}$ положим $\mathcal{F}^u = \{\mathfrak{F}^u \mid \mathfrak{F} \in \mathcal{F}\}$.

Аксиоматически, универсальная модальность может быть введена следующим образом[18]: для одномодальной логики L пусть LU обозначает наименьшую бимодальную логику содержащую L и формулы

$$\mathrm{ATr}_\exists = \exists\exists p \to \exists p, \quad \mathrm{ARefl}_\exists = p \to \exists p, \quad \mathrm{ASymm}_\exists = p \to \forall\exists p;$$
$$\mathrm{A}_\subseteq = \Diamond p \to \exists p$$

(вместо связок $\Diamond_1, \Diamond_2$ и двойственным к ним $\Box_1, \Box_2$, используются связки $\Diamond, \exists$ и двойственные к ним $\Box, \forall$).

Шкала (W,R) называется *антинаправленной*, если она удовлетворяет свойству $\forall x \forall y \exists z (zRx \wedge zRy)$. Это свойство выражается формулой $\mathrm{A}^\downarrow$ в обогащенном бимодальном языке: $\mathrm{A}^\downarrow = \exists p \wedge \exists q \to \exists(\Diamond p \wedge \Diamond q)$. Для одномодальной логики L пусть $\mathrm{LU}^\downarrow = \mathrm{LU} + \mathrm{A}^\downarrow$. Таким образом, если $\mathcal{F}$ — некоторый класс антинаправленных шкал и $\mathrm{L} = \mathbf{L}(\mathcal{F})$, то $\mathbf{L}(\mathcal{F}^u) \supseteq \mathrm{LU}^\downarrow$.

В диссертации получено достаточное условие для равенства этих логик. Для $n \geqslant 1$ пусть $\mathfrak{C}_n = (W_n, W_n \times W_n)$, где $|W_n| = n$; кроме того, пусть

[18] *Goranko V., Passy S.* Using the universal modality: Gains and questions // *J. Log. Comput.* — 1992. — Т. 2, № 1. — С. 5–30.

$\mathfrak{C}_0 = (W_1, \varnothing)$. Для транзитивных шкал $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, пусть $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ обозначает их порядковую сумму.

ТЕОРЕМА 3.13. Рассмотрим класс транзитивных шкал $\mathcal{F}$, такой что

- всякая шкала $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ обладает рефлексивным корнем;
- если $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ и $x \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{F}_x \in \mathcal{F}$, где $\mathfrak{F}_x$ обозначает *конус* в шкале $\mathfrak{F}$ с корнем x.

Тогда $\mathbf{L}(\mathcal{F}^u) = \mathbf{L}(\mathcal{F})\mathrm{U}^{\downarrow}$.

Следствие 3.14. Пусть L — одномодальная транзитивная полная логика, такая что если $\mathfrak{F}$ — L-конус, то и $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{F}$ — L-конус. Тогда

- $\mathrm{LU}^{\downarrow}$ — полна;
- если L — финитно аппроксимируема, то и $\mathrm{LU}^{\downarrow}$ — финитно аппроксимируема;
- L и $\mathrm{LU}^{\downarrow}$ полиномиально эквивалентны.

Из этих результатов, в частности, следует, что если L — одна из логик S4, S4.1, S4.2, LM_1, LM_2, LM_3, то логика $\mathrm{LU}^{\downarrow}$ — полна по Крипке и финитно аппроксимируема.

В параграфе **3.4** описываются логики конкретных антинаправленных шкал:

ТЕОРЕМА 3.22. Для $n \geqslant 2$,
$\mathbf{L}((\mathbb{R}^n, \preceq)^u) = \mathrm{S4.2U}^{\downarrow}$;
$\mathbf{L}((\mathbb{R}^n, \prec)^u) = \mathrm{LM_2U}^{\downarrow}$.

ТЕОРЕМА 3.24. Пусть W — насыщенное множество n-регионов, $n \geqslant 1$. Тогда
$\mathbf{L}((W, \supseteq)^u) = \mathrm{S4U}^{\downarrow}$, $\mathbf{L}((W^\circ, \supseteq)^u) = \mathrm{S4.1U}^{\downarrow}$;
$\mathbf{L}((W, \Supset)^u) = \mathrm{LM_1U}^{\downarrow}$, $\mathbf{L}((W^\circ, \Supset)^u) = \mathrm{LM_3U}^{\downarrow}$.

В **Главе 4** исследуется алгоритмическая сложность построенных логик.

Для логики $\mathrm{L} = \mathrm{LM}_1, \mathrm{LM}_2, \mathrm{LM}_3$ показано, что L-выполнимость формулы сводится к выполнимости формулы на некоторой L-шкале ограниченного *ветвления, толщины* и *высоты* (леммы 4.4, 4.5).

Для шкал $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, пусть $\mathfrak{F} \sqcup \mathfrak{G}$ обозначает дизъюнктную сумму этих шкал[19].

Определение 4.6. Для $n, k \geqslant 1$ индуктивно определим шкалы $\mathfrak{T}_{n,k}$ и $\mathfrak{T}^{\bullet}_{n,k}$.

Положим

$$\mathfrak{T}_{n,1} = \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_n,\ \mathfrak{T}_{n,k+1} = \mathfrak{T}_{n,1} + (\mathfrak{G}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{G}_n),$$

где $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ — шкалы, изоморфные $\mathfrak{T}_{n,k}$.

Пусть $\mathfrak{T}^{\bullet}_{n,k}$ — шкала, полученная из $\mathfrak{T}_{n,k}$ добавлением над каждым невырожденным сгустком n штук вырожденных сгустков, т.е.

$$\mathfrak{T}^{\bullet}_{n,1} = \mathfrak{T}_{n,1} + (\mathfrak{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{F}_n),$$
$$\mathfrak{T}^{\bullet}_{n,k+1} = \mathfrak{T}_{n,1} + (\mathfrak{G}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{G}_n \sqcup \mathfrak{F}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{F}_n),$$

где $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ — изоморфны $\mathfrak{T}^{\bullet}_{n,k}$, $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ — изоморфны $\mathfrak{C}_0$.

Лемма 4.7. Пусть $|Sub(A)| = n$. Тогда

1. A LM_1-выполнима $\Leftrightarrow$ A выполнима в корне $\mathfrak{T}_{n,n}$;

2. A LM_2-выполнима $\Leftrightarrow$ A выполнима в корне $\mathfrak{T}_{n,n} + \mathfrak{C}_n$;

3. A LM_3-выполнима $\Leftrightarrow$ A выполнима в корне $\mathfrak{T}^{\bullet}_{n,n}$ или в $\mathfrak{C}_0$.

Явным образом описаны алгоритмы верификации формул на таких шкалах, использующие полиномиальное относительно длины формулы количество памяти, тем самым показана принадлежность проблемы выполнимости (разрешимости) логик $\mathrm{LM}_1, \mathrm{LM}_2, \mathrm{LM}_3$ классу PSPACE (теорема 4.15).

В параграфе **4.3** доказывается PSPACE-трудность проблемы выполнимости для логик $\mathrm{LM}_1, \mathrm{LM}_2, \mathrm{LM}_3$. Для этого используется метод Р. Ладнера (см. сноску 2), сводящий проблему общезначимости булевой формулы с кванторами к проблеме выполнимости модальной формулы на шкалах Крипке определённого вида (“кванторных деревьях”).

[19] Определение понятия дизъюнктной суммы шкал может быть найдено в *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal logic. — Oxford University Press, 1997.

Из этого следует, что логики $\mathrm{LM}_1, \mathrm{LM}_2, \mathrm{LM}_3$ PSPACE-полны.

Из PSPACE-полноты $\mathrm{LM}_1, \mathrm{LM}_2, \mathrm{LM}_3$ и результатов главы 3 следует также PSPACE-полнота бимодальных логик, рассмотренных в теоремах 3.22 и 3.24.

В **Заключении** приведены основные результаты и выводы диссертационной работы.

В **Приложении** приведён алгоритм проверки условной выполнимости модальных формул на шкалах вида $\mathfrak{T}_{n,k}$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Основными результатами диссертации являются следующие.

1. Построены полные конечные системы аксиом модальных логик ряда пространственных структур: для отношений включения на так называемых *насыщенных* множествах регионов и для отношения хронологического будущего в действительных пространствах;

2. Полностью изучены алгоритмические свойства построенных модальных логик: показана финитная аппроксимируемость (следовательно, разрешимость) и PSPACE-полнота.

3. Для ряда модальных логик пространственных структур показано отсутствие конечной аксиоматизируемости.

4. Исследованы модальные логики с дополнительной универсальной модальностью: получены теоремы о сохранении свойств (полноты по Крипке, финитной аппроксимируемости, алгоритмической сложности) при добавлении универсальной модальности для логик транзитивных *антинаправленных* шкал.

5. Построена аксиоматика ряда модальных логик регионов и релятивистских модальных логик в языке с универсальной модальностью; показана PSPACE-полнота этих логик.

Таким образом, в работе построен ряд полных модальных аксиоматик пространственных отношений, обладающих относительно невысокой (PSPACE) алгоритмической сложностью, и приведены разрешающие алгоритмы для этих логик.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Shapirovsky I., Shehtman V.* Chronological future modality in Minkowski spacetime // Advances in Modal Logic. — Vol. 4. — London: King's College Publications, 2003. — Pp. 437–459.

В работе [1] В.Б. Шехтману принадлежит идея доказательства финитной аппроксимируемости; И.Б. Шапировскому принадлежит конструкция p-морфного отображения области пространства Минковского в бесконечное дерево.

[2] *Shapirovsky I.* PSPACE-decision procedure for some transitive modal logics // Proceedings of the International Conference "AiML-2004: Advances in Modal Logic". — University of Manchester, UK: 2004. — Pp. 331–343.

[3] *Shapirovsky I.* PSPACE-decidability of modal logics via selective filtration // Proceedings of the 3-rd Moscow-Vienna Workshop on Logic and Computation. — Moscow: 2004. — P. 10.

[4] *Shapirovsky I.* On PSPACE-decidability in transitive modal logic // Advances in Modal Logic. — Vol. 5. — London: King's College Publications, 2005. — Pp. 269–287.

[5] *Shapirovsky I., Shehtman V.* RCC-relations and relativistic time // Proceedings of the international conference "Computer science applications of modal logic" / Independent University of Moscow. — Moscow: 2005. — P. 37.

[6] *Shapirovsky I., Shehtman V.* Modal logics of regions and Minkowski spacetime // *Journal of Logic and Computation.* — 2005. — Vol. 15. — Pp. 559–574.

В работах [5] и [6] В.Б. Шехтману принадлежит идея интерпретации регионов как типов информации в духе Колмогорова—Медведева, а также идея доказательства отстутствия конечной аксиоматики модальных логик регионов с помощью характеристических шкал; для конкретных логик такие шкалы были найдены И.Б. Шапировским, которому также принадлежат положительные результаты об аксиоматизации множеств регионов.

[7] *Shapirovsky I.* Downward-directed transitive frames with universal relations. // Advances in Modal Logic. — Vol. 6. — London: College Publications, 2006. — Pp. 413–428.

[8] *Шапировский И.Б.* О свойствах некоторых транзитивных логик с универсальной модальностью // Труды XXVIII Конференции молодых учёных механико-математического факультета МГУ. — Москва: 2006. — С. 233–236.

[9] *Shapirovsky I.* Modal logics of closed domains on Minkowski plane // *Journal of Applied Non-Classical Logics*. — 2007. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 283–316.

[10] *Шапировский И.* О модальных логиках некоторых геометрических структур // *Проблемы передачи информации.* — 2007. — Т. 43, № 3. — С. 97–104.