Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН

На правах рукописи

УДК 512.743.7

Куюмжиян Каринэ Георгиевна

Нормальность замыканий орбит максимального тора

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент И. В. Аржанцев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Д. Н. Ахиезер кандидат физико-математических наук В. С. Жгун
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 29 января 2013 г. в 16 ч. 00 м. на заседании диссертационного совета Д002.077.03 при Институте проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН по адресу: 127994, г.Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, 19, стр.1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН.

Автореферат разослан 19 декабря 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д002.077.03,
кандидат физико-математических наук

А. Н. Соболевский

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена проблеме нормальности замыканий орбит максимального тора в рациональных модулях простых алгебраических групп.

Проблема нормальности для замыканий орбит. Пусть G — аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики ноль, действующая на некотором аффинном алгебраическом многообразии. Напомним, что неприводимое аффинное алгебраическое многообразие X называется *нормальным*, если алгебра регулярных функций $\Bbbk[X]$ целозамкнута в своём поле частных. Вопрос о нормальности замыканий орбит имеет долгую историю. Первые результаты были получены Б. Костантом[1]. Он показал, что для редуктивной G нуль-конус в присоединённом модуле нормален. Х. Крафт и К. Прочези[2] доказали, что в присоединённом модуле $\mathfrak{sl}(\mathfrak{n})$ замыкания всех $SL(n)$-орбит нормальны. В положительной характеристике аналогичный результат для $SL(n)$ был установлен С. Донкиным[3]. Позже Х. Крафт и К. Прочези[4] и Э. Соммерс[5] изучили тот же вопрос для присоединённых модулей других классических групп. В частности, Крафт и Прочези[4] на языке диаграмм Юнга указали орбиты с ненормальными замыканиями. Случаи F_4, G_2, E_6 разобраны А. Броером[6], Х. Крафтом[7] и Э. Соммерсом[8]. Для E_7 и E_8 полного ответа ещё нет.

Перейдём к действиям алгебраического тора T, то есть аффинной алгебраической группы, изоморфной $\Bbbk^\times \times \ldots \times \Bbbk^\times$, где $\Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$. Неприводимое алгебраическое многообразие X называется *торическим*, если оно нормально и допускает регулярное действие T с открытой орбитой. То-

[1] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings.* Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404

[2] H. Kraft, C. Procesi, *Closures of conjugacy classes of matrices are normal.* Invent. Math. **53** (1979), 227-247

[3] S. Donkin, *The normality of closures of conjugacy classes of matrices.* Invent. Math. **101** (1990), 717-736

[4] H. Kraft, C. Procesi, *On the geometry of conjugacy classes in classical groups.* Comment. Math. Helvetici **57** (1982), 539-602

[5] E. Sommers, *Normality of very even nilpotent varieties in D_{2l}.* Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 351–360

[6] A. Broer, *Normal nilpotent varieties in F_4.* J. Algebra **207** (1998), 427–448

[7] H. Kraft, *Closures of conjugacy classes in G_2.* J. Algebra **126** (1989), no. 2, 454-465

[8] E. Sommers, *Normality of nilpotent varieties in E_6.* J. Algebra **270** (2003), 288–306

рические многообразия играют важную роль в алгебраической геометрии, топологии и комбинаторике, так как они полностью описываются в терминах выпуклой геометрии, см. монографии Кокса[9] или Фултона[10]. Если задано действие алгебраического тора T на многообразии Y, то замыкание орбиты $X = \overline{Ty}$ точки $y \in Y$ является естественным кандидатом в торические многообразия. Чтобы проверить это, достаточно убедиться, что X нормально.

Возьмём в качестве Y рациональный T-модуль V. Обозначим через $\Lambda = \Lambda(T)$ *решётку характеров* тора T. Относительно действия T модуль V может быть диагонализован:

$$V = \bigoplus_{\mu \in \Lambda} V_\mu, \quad \text{где} \quad V_\mu = \{\mathsf{v} \in V \,|\, t\mathsf{v} = \mu(t)\mathsf{v} \quad \forall\, t \in T\}.$$

Обозначим через $M(V) = \{\mu \in \Lambda \,|\, V_\mu \neq 0\}$ множество весов модуля V. С каждым ненулевым вектором v связано весовое разложение

$$\mathsf{v} = \mathsf{v}_{\mu_1} + \dots + \mathsf{v}_{\mu_s}, \quad \mathsf{v}_{\mu_i} \in V_{\mu_i}, \quad \mathsf{v}_{\mu_i} \neq 0.$$

Обозначим через $M(\mathsf{v})$ множество весов $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$. Этими весами можно породить полугруппу $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}(\mu_1, \dots, \mu_s)$, подрешётку $\mathbb{Z}(\mu_1, \dots, \mu_s)$ и рациональный полиэдральный конус $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}(\mu_1, \dots, \mu_s)$ в пространстве $\Lambda_{\mathbb{Q}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Определение. Множество точек $\{\mu_1, \dots, \mu_s\} \subset \mathbb{Q}^n$ называется *насыщенным*, если

$$\mathbb{Z}_{\geqslant 0}(\mu_1, \dots, \mu_s) = \mathbb{Z}(\mu_1, \dots, \mu_s) \cap \mathbb{Q}_{\geqslant 0}(\mu_1, \dots, \mu_s).$$

Множество точек $\{\mu_1, \dots, \mu_s\} \subset \mathbb{Q}^n$ называется *сверхнасыщенным*, если все его подмножества насыщенны.

Кемпф, Кнудсен, Мамфорд и Сен-Донат[11] доказали, что замыкание $\overline{T\mathsf{v}}$ T-орбиты вектора v нормально тогда и только тогда, когда множество $M(\mathsf{v})$

[9] D. Cox, J. Little, H. Schenck, *Toric Varieties.* GSM **124**, AMS, Providence, RI, 2011

[10] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties.* Princeton University Press, 1993

[11] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings* I. LNM **339**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973

насыщенно. Этот комбинаторный критерий играет ключевую роль в диссертации.

Вопрос о нормальности замыканий орбит для проективных T-действий также изучался в литературе. Пусть $X(\mathsf{v})$ — замыкание T-орбиты $T[\mathsf{v}]$ точки $[\mathsf{v}] \in \mathbb{P}(V)$ в проективизации рационального T-модуля V. Обозначим через $P(\mathsf{v})$ выпуклую оболочку множества $M(\mathsf{v})$ в $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Многообразие $X(\mathsf{v})$ нормально тогда и только тогда, когда множества $\{\mu - \mu_0 \mid \mu \in M(\mathsf{v})\}$ насыщенны для всех вершин μ_0 многогранника $P(\mathsf{v})$. Этот и другие критерии были приведены Дж. Карреллом и А. Кёртом[12].

Рассмотрим более общую задачу. Пусть G — односвязная полупростая алгебраическая группа, $T \subset G$ — максимальный тор, $B \subset G$ — борелевская подгруппа. А.А. Клячко[13] доказал, что замыкание общей T-орбиты в многообразии флагов G/B нормально. Затем Р. Дабровски[14] показал, что замыкание общей T-орбиты в G/P, где $P \subset G$ — параболическая подгруппа, также нормально. Примеры ненормальных замыканий необщих орбит тора можно найти в работе Каррела и Кёрта[12].

Хорошо известно, что замыкания всех T-орбит в торическом многообразии нормальны. Используя метод U-инвариантов, можно доказать нормальность замыканий всех G-орбит на сферическом многообразии для любой связной редуктивной группы G. В случае сложности 1 И.В. Аржанцев[15] доказал, что для действия связной редуктивной группы G на нормальном многообразии X с однопараметрическим семейством общих сферических G-орбит и хорошим фактором $\pi\colon X \mapsto X/\!/G$, где $X/\!/G$ является кривой, замыкание любой G-орбиты нормально.

Свойство насыщенности играет важную роль во многих алгебраических и геометрических задачах. Н. Уайт[16] доказал, что множество векторов инцидентности в базах реализуемого матроида насыщенно. Геометрическим следствием этого факта является то, что для любой точки y в аффинном

[12]J. B. Carrell, A. Kurth, *Normality of torus orbit closures in G/P.* J. Algebra **233** (2000), 122–134

[13]А. А. Клячко, *Торические многообразия и пространства флагов.* Тр. МИАН **208** (1995), 139–162

[14]R. Dabrowski, *On normality of the closure of a generic torus orbit in G/P.* Pacific J. Math. **192** (1996), no. 2, 321–330

[15]И. В. Аржанцев, *О нормальности замыканий сферических орбит.* Функц. анализ и его прил. **31** (1997), № 4, 66–69

[16]N. White, *The basis monomial ring of a matroid.* Adv. Math. **24** (1977), 292–297

конусе над классическим грассманианом $\mathrm{Gr}(k,n)$ замыкание $\overline{Ty}$ нормально.

Если дан граф Γ с n вершинами, то по нему можно построить следующее конечное множество $M(\Gamma)$ векторов решётки $\mathbb{Z}^n$:

$$M(\Gamma) = \{\varepsilon_i + \varepsilon_j : (ij) \text{ является ребром } \Gamma\},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$. Свойство насыщенности для этого множества эквивалентно следующему утверждению: для любых двух минимальных циклов нечётной длины C и C' в Γ либо у C и C' есть общая вершина, либо найдётся ребро Γ, соединяющее какую-то вершину C с какой-то вершиной C', см. работы Х. Осуги и Т. Хиби[17] и А. Симиса, В. Васконселоса и Р. Виллареаля[18]. С алгебраической точки зрения свойство насыщенности для $M(\Gamma)$ эквивалентно целозамкнутости подалгебры $\mathcal{A}(\Gamma)$ алгебры полиномов $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ в своём поле частных $Q\mathcal{A}(\Gamma)$, где

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \Bbbk[x_i x_j : (ij) \text{ является ребром } \Gamma].$$

Насыщенные множества также возникают в контексте теории представлений колчанов. Пусть Q — конечный связный колчан без ориентированных циклов, а α — вектор размерности. Рассмотрим многообразие $\mathrm{Rep}(Q,\alpha)$ α-мерных представлений колчана Q и стандартное действие блочной группы $GL(\alpha)$ на нём. Пусть $\Sigma(Q,\alpha)$ — множество весов полуинвариантных функций относительно этого действия. Если $W \in \mathrm{Rep}(Q,\alpha)$ — некоторое представление, то рассмотрим также $\Sigma(Q,\alpha,W)$ — множество таких весов, для которых существует хотя бы одна полуинвариантная функция f на $\mathrm{Rep}(Q,\alpha)$ данного веса, не зануляющаяся в W. Х. Дерксен и Е. Вейман[19] доказывают, что $\Sigma(Q,\alpha)$ задаётся в соответствующей целочисленной решётке одним линейным уравнением и несколькими линейными неравенствами, из чего следует, что $\Sigma(Q,\alpha)$ насыщенно. К. Чиндрис[20]

[17]H. Ohsugi, T. Hibi, *Normal polytopes arising for finite graphs.* J. Algebra **207** (1998), 409–426

[18]A. Simis, W. Vasconcelos, R. Villarreal, *The integral closure of subrings associated to graphs.* J. Algebra **199** (1998), 281–299

[19]H. Derksen, J. Weyman, *Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood-Richardson coefficients.* J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), no. 3, 467 – 479

[20]C. Chindris, *Orbit semigroups and the representation type of quivers.* J. Pure Applied Algebra **213** (2009), no. 7, 1418–1429

доказывает, что множество $\Sigma(Q, \alpha, W)$ насыщенно для всех $W \in \mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ тогда и только тогда, когда Q является колчаном Дынкина или евклидовым колчаном (т.е. соответствующий граф является стандартной или аффинной схемой Дынкина типа A, D или E).

Свойство насыщенности оказывается полезным в задачах теории представлений, см. работы Н. Рессейра[21] и П.-Л. Монтагара, Б. Паскье, Н. Рессейра[22]. В этих работах вычисляются определённые полугруппы в решётках весов. Если *a priori* известно, что полугруппа M является конечнопорождённой, то вычисление M можно разбить на два шага. Сначала находятся неравенства, задающие конус $\mathrm{cone}(M)$, порождённый полугруппой M. На втором шаге требуется выбрать те целые точки из $\mathrm{cone}(M)$, которые принадлежат полугруппе M. Во многих интересных случаях M совпадает со множеством целых точек в конусе $\mathrm{cone}(M)$ (проблема *насыщенности*).

Для присоединённого действия $SL(n)\colon \mathfrak{sl}(\mathfrak{n})$ результат Б. Штурмфельса[23,24] утверждает, что замыкания всех T-орбит нормальны. Г. Бобински и Г. Звара[25] интерпретировали этот комбинаторный результат в терминах представлений колчанов. Ж. Моран[26] классифицировала все полупростые алгебраические группы, для которых замыкания всех T-орбит в присоединённом модуле нормальны.

Цель работы

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики ноль. Зафиксируем в G макси-

[21]N. Ressayre, *Geometric invariant theory and the generalized eigenvalue problem.* Invent. Math. **180** (2010), 389–441

[22]PL. Montagard, B. Pasquier, N. Ressayre, *Two generalizations of the PRV conjecture.* Compositio Math. **147** (2011), 1321–1336

[23]B. Sturmfels, *Equations defining toric varieties.* Proc. Sympos. Pure Math. **62**, Part 2, AMS, Providence, RI, 1997, 437–449

[24]B. Sturmfels, *Gröbner bases and convex polytopes.* University Lecture Series **8**, AMS, Providence, RI, 1996

[25]G. Bobiński, G. Zwara, *Normality of orbit closures for directing modules over tame algebras.* J. Algebra **298** (2006), 120–133

[26]J. Morand, *Closures of torus orbits in adjoint representations of semisimple groups.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 197–202

мальный тор T. Сформулируем задачу, которая решается в диссертации.

Найти все такие конечномерные рациональные простые G-модули V, что для каждого вектора $\mathsf{v} \in V$ замыкание его орбиты $\overline{T\mathsf{v}}$ является нормальным аффинным алгебраическим многообразием.

Напомним описание множества T-весов рационального G-модуля $V(\lambda)$ с данным старшим весом λ. Обозначим через Φ систему корней, соответствующую G. Пусть Ξ — решётка корней, а W — группа Вейля системы корней Φ. *Многогранником весов* $P(\lambda)$ модуля $V(\lambda)$ называется выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{w\lambda \mid w \in W\}$ W-орбиты точки λ в $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Тогда

$$M(\lambda) = (\lambda + \Xi) \cap P(\lambda).$$

Следовательно, замыкания всех T-орбит в $V = V(\lambda)$ нормальны тогда и только тогда, когда $M(\lambda)$ сверхнасыщенно.

Результаты. Объединяя результаты статей [1, 2, 3], мы получаем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Для следующих типов простых алгебраических групп и соответствующих модулей, а также для модулей, получаемых из указанных при помощи автоморфизма диаграммы Дынкина, замыкания всех орбит максимального тора нормальны.*

Система корней	*Старший вес*
$A_n, n \geqslant 1$	π_1
$A_n, n \geqslant 1$	$\pi_1 + \pi_n$
A_1	$3\pi_1$
A_1	$4\pi_1$
A_2	$2\pi_1$
A_3	π_2
A_4	π_2
A_5	π_2
A_5	π_3
$B_n, n \geqslant 2$	π_1
B_2	π_2

Система корней	*Старший вес*
B_2	$2\pi_2$
B_3	π_3
B_4	π_4
$C_n, n \geqslant 3$	π_1
C_3	π_2
C_4	π_2
$D_n, n \geqslant 4$	π_1
D_4	π_2
D_5	π_4
D_6	π_5
F_4	π_4
G_2	π_1

В остальных случаях модуль содержит орбиту максимального тора с ненормальным замыканием.

Нумерация фундаментальных весов здесь соответствует книге Бурбаки[27].

Аналогичная задача для приводимых систем корней ещё не исследована. Другим естественным обобщением является решение этой же задачи для приводимых модулей. Те из них, для которых данное свойство выполняется, в своём разложении на простые содержат только модули, обладающие тем же свойством, то есть только перечисленные в теореме 1.1. Но это не является достаточным условием: например, замыкание T-орбиты вектора (x^2, x^3) в $SL(2)$-модуле $S^2\mathbb{C}^{2*} \oplus S^3\mathbb{C}^{2*}$ не нормально. Окончательного ответа для приводимых модулей пока нет.

Методы исследования

В диссертации используются методы алгебраической геометрии, теории представлений, торической геометрии и комбинаторики.

[27]Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, гл. IV – VI.* М.: Мир, 1972

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Получена полная классификация простых модулей простых алгебраических групп, для которых замыкания всех орбит максимального тора нормальны.

2. Разработаны методы для проверки насыщенности и сверхнасыщенности систем весов неприводимых представлений простых алгебраических групп.

3. Разработана теория 2-унимодулярных множеств и её применения к проверке сверхнасыщенности комбинаторно сложных наборов точек.

Теоретическая и практическая ценность

Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение. Они могут найти применение в теории представлений, торической геометрии и теории инвариантов.

Апробация работы

Работа была поддержана фондом Д. Зимина «Династия». Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре «Алгебраические группы и теория инвариантов» механико-математического факультета МГУ (руководители — Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, Д. А. Тимашёв и И. В. Аржанцев), 2007 г.;

- на международной алгебраической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша, Москва, май-июнь 2008 г.;

- на школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, Россия), июнь 2009 г.;

- на осенней школе «Алгебраические действия торов», Лукечин (Польша), сентябрь 2009 г.;
- на семинаре по алгебраической геометрии в Институте Фурье (Гренобль, Франция), декабрь 2010 г.;
- на международной конференции «Алгебра и геометрия», посвящённой 65-летию Аскольда Георгиевича Хованского, Москва, июль 2012 г.;
- на третьей школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Тольятти, Россия), июнь 2012 г..

Постер, посвящённый основной теореме, был представлен на международной школе конференции «MSJ-SI 2012 Schubert calculus», Осака, Япония, июль 2012 г..

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трёх работах. Список работ приводится в конце автореферата [1–3].

Структура и объём работы

Диссертация состоит из четырёх глав (первая из которых является вводной) и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Список литературы включает в себя 35 наименований. Общий объём диссертации составляет 98 страниц.

Краткое содержание работы

В **Главе 1** мы приводим переформулировку поставленной задачи в комбинаторных терминах и излагаем методы, которые будут использоваться при доказательстве. Если $M(\lambda) \subseteq M(\mu)$ и уже построено ненасыщенное подмножество для λ, то оно может быть использовано как ненасыщенное подмножество для μ. Следовательно, во многих случаях достаточно построить одно ненасыщенное множество, чтобы дать отрицательный ответ на вопрос о нормальности замыканий всех T-орбит в целой серии модулей. Поэтому понятие ненасыщенного подмножества будет встречаться очень часто. В дальнейшем ненасыщенные множества будут обозначаться *ННП*. *Расширенным ненасыщенным подмножеством* будем называть ненасыщенное подмножество $\{v_1, \ldots, v_r\}$ вместе с таким вектором v_0, что

- $v_0 \in (\mathbb{Z}(v_1, v_2, \ldots, v_r) \cap \mathbb{Q}_{\geqslant 0}(v_1, v_2, \ldots, v_r)) \setminus \mathbb{Z}_{\geqslant 0}(v_1, v_2, \ldots, v_r)$,
- существует $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$-комбинация

$$v_0 = q_1 v_{i_1} + \ldots + q_s v_{i_s}, \quad v_{i_j} \in \{v_1, v_2, \ldots, v_r\},$$

в которой векторы $v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}$ линейно независимы, а коэффициенты q_i лежат в полуинтервале $[0, 1)$. Такие подмножества будут сокращённо называться *РННП* и обозначаться $\{v_0; v_1, \ldots, v_r\}$. Легко проверить, что если множество $M = \{v_1, \ldots, v_r\}$ не является насыщенным, то существует вектор v_0 такой, что $\{v_0; v_1, \ldots, v_r\}$ является РННП.

Один из методов проверки ненасыщенности множества состоит в следующем. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_r$ — векторы пространства $\mathbb{Q}^n$, и пусть f — линейная функция на $\mathbb{Q}^n$. Будем называть f *разделяющей* линейной функцией для набора $\{v_0; v_1, \ldots, v_r\}$, если значение $f(v_0)$ не представимо в виде линейной комбинации значений $f(v_1), \ldots, f(v_r)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Если известно, что v_0 лежит в

$$\mathbb{Z}(v_1, v_2, \ldots, v_r) \cap \mathbb{Q}_{\geqslant 0}(v_1, v_2, \ldots, v_r),$$

причём v_0 может быть представлен как $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$-комбинация линейно независимых векторов из числа $v_1, \ldots, v_r$ с коэффициентами из интервала $[0, 1)$, то наличие разделяющей функции гарантирует, что $\{v_0; v_1, \ldots, v_r\}$ — РННП.

Опишем методы, которые используются при проверке того, что данное множество M сверхнасыщенно.

Пусть множество векторов $M \subset \mathbb{Q}^n$ имеет ранг d, $d \leqslant n$, и пусть $L = \langle v \,|\, v \in M \rangle$ — линейная оболочка векторов из M. Множество M называется *унимодулярным*, если для любых линейно независимых векторов $v_1, \ldots, v_d$ из M значение d-мерного объёма $\mathrm{vol}_d(v_1, v_2, \ldots, v_d)$ постоянно по абсолютной величине. Если в L фиксирован базис, то это эквивалентно тому, что модули всех ненулевых определителей $|\det(v_1, v_2, \ldots, v_d)|$, $v_1, v_2, \ldots, v_d \in M$, в этом базисе равны.

Если множество M унимодулярно и $M_1 \subseteq M$ — подмножество, то пересечение M с подпространством $L_1 \subset L$, $L_1 = \langle v \mid v \in M_1 \rangle$, тоже унимодулярно. Это легко увидеть, если выбрать в L базис, согласованный с L_1.

Следующая теорема, также доказанная Штурмфельсом[23], используется во многих доказательствах.

Теорема. *Любое унимодулярное множество векторов M является сверхнасыщенным.*

Обобщим это понятие. Подмножество $M \subset \mathbb{Q}^n$ ранга d называется *почти унимодулярным*, если можно выбрать такое подмножество

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_d\} \subseteq M,$$

что

$$\mathrm{vol}_d(v_1, v_2, \ldots, v_d) = m,$$

и для любого другого вектора $w \in M$ и любого i значение

$$\mathrm{vol}_d(v_1, v_2, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_d, w)$$

делится на m, то есть равно km для какого-то $k \in \mathbb{Z}$ (при этом m не обязательно целое). Если зафиксировать базис в линейном пространстве $\langle M \rangle$, то данное свойство можно будет проверить, сравнивая значения соответствующих определителей, не прибегая к объёмам. Значение $m = \det(v_1, v_2, \ldots, v_d)$ называется *объёмом* почти унимодулярного множества.

Почти унимодулярные множества используются для доказательства того, что определённые множества векторов являются сверхнасыщенными. Используя метод «от противного», мы сначала предполагаем, что в данном множестве M есть РННП $\{v_0; v_1, \ldots, v_r\}$. Далее, используя почти унимодулярность множества M, мы анализируем коэффициенты соответствующей $\mathbb{Q}_{\geqslant 0}$-комбинации для v_0, учитывая также неравенства из определения РННП. Получаем конечное число возможностей для этих коэффициентов. Далее, используя эти данные и дополнительную информацию про решётку весов, мы показываем, что на самом деле $\{v_0; v_1, \ldots, v_r\}$ не является РННП. Следовательно, множество M сверхнасыщенно.

Опишем ещё один метод. Выберем в рассматриваемом пространстве такой базис, чтобы все элементы $v \in M$ имели в нём целые координаты. Выразим каждую точку через этот базис и запишем как вектор-столбец. Пусть $K = K(M)$ — целочисленная $n \times r$ матрица, образованная этими вектор-столбцами.

Определение. Каждому столбцу $K_i = (k_{1i}, \ldots, k_{ni})^T$ можно сопоставить моном Лорана $t^{K_i} = t_1^{k_{1i}} \ldots t_n^{k_{ni}}$. *Торический идеал* I_K, построенный по K — это ядро гомоморфизма $\Bbbk$-алгебр

$$\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_r] \to \Bbbk[t_1, \ldots, t_d, t_1^{-1}, \ldots, t_d^{-1}], \quad x_i \mapsto t^{K_i}.$$

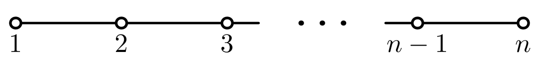
Определение. Пусть u_+ и u_- — два вектора в $\mathbb{Z}_+^n$ с непересекающимися носителями, и пусть $f = x^{u_+} - x^{u_-} \in I_K$. Тогда f называется *контуром* в I_K, если выполнены следующие два условия:

- объединение всех координат u_+ и u_- взаимно просто в совокупности;
- множество переменных, которые действительно входят в f, минимально по включению среди всех биномов в I_K.

Сформулируем критерий, также полученный Б. Штурмфельсом[23].

Теорема. *Множество точек M сверхнасыщенно тогда и только тогда, когда любой контур из $I_{K(M)}$ содержит хотя бы один моном, свободный от квадратов.*

В **Главе 2** разбирается случай специальной линейной группы. Этот случай представляет наибольшую сложность. Он соответствует системе корней A_n.

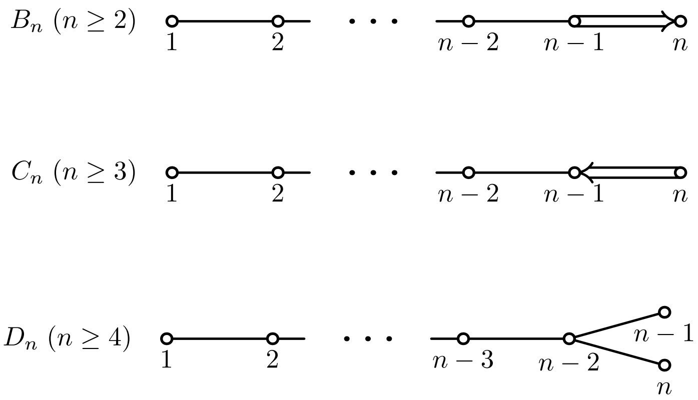
A_n $(n \geq 1)$


Для модулей, перечисленных в теореме 1.1, в доказательствах часто применяются теоремы Штурмфельса[23] об унимодулярных множествах и о торических идеалах. Часть доказательств использует язык теории графов. Необходимые понятия теории графов взяты из книги Харари[28].

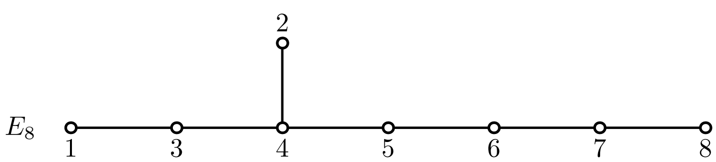
[28]Ф. Харари, *Теория графов.* М.: Мир, 1973

Среди модулей, не перечисленных в теореме 1.1, наибольшую трудность представляют фундаментальные представления. Чтобы изучить этот класс, мы используем следующее наблюдение. Если уже найдено ненасыщенное подмножество во множестве весов k-го фундаментального представления группы $SL(n)$, то во множестве весов k-го фундаментального представления группы $SL(n+k)$ также найдётся ненасыщенное подмножество. Далее при помощи процесса, похожего на алгоритм Евклида, можно свести все случаи к тем, в которых РННП уже построен.

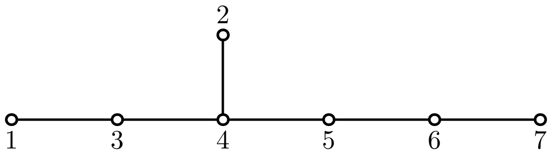
В **Главе 3** изучаются другие классические группы. Самыми сложными случаями являются спинорные модули для D_5 и D_6. Мы доказываем, что множества $M(\pi_4)$, $M(\pi_5)$ для D_5 и $M(\pi_5)$, $M(\pi_6)$ для D_6 являются сверхнасыщенными. Методы, использованные в случае A_n, здесь применить нельзя. Поэтому надо использовать почти унимодулярные множества, чтобы разобраться с подмножествами, которые теоретически могли бы являться ненасыщенными поднаборами.



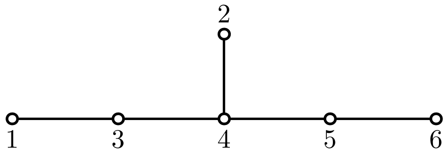
В **Главе 4** мы изучаем исключительные группы. Здесь используются те же методы, включающие в себя унимодулярные и почти унимодулярные множества. Оказывается, что замыкания всех T-орбит нормальны только в двух случаях, а именно для последнего фундаментального представления F_4 и первого фундаментального представления G_2. Схемы Дынкина для исключительных систем корней выглядят так:



E_7

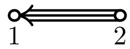


E_6



F_4

G_2



Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук доценту Аржанцеву Ивану Владимировичу за ту неоценимую поддержку, которую он оказывал в течение всех лет обучения в университете и в аспирантуре, за постановки задач и постоянное внимание к работе. Автор признателен кандидату физико-математических наук Богданову Илье Игоревичу за ценные комментарии и полезные идеи. Часть работы была выполнена в Институте Фурье (Гренобль, Франция). Автор благодарит М. Г. Зайденберга за гостеприимство и ценные советы и Л. Манивеля за полезные консультации. Автор благодарен всему коллективу семинара «Группы Ли и теория инвариантов» под руководством Э. Б Винберга, А. Л. Онищика, И. В. Аржанцева и Д. А. Тимашёва и всем сотрудникам кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за творческую атмосферу, способствовавшую научной работе.

Публикации автора по теме диссертации:

[1] K. Kuyumzhiyan, Simple $SL(n)$-modules with normal closures of maximal torus orbits. Journal of Algebraic Combinatorics **30** (2009), no. 4, 515–538

[2] К. Г. Куюмжиян, Простые модули классических линейных групп с нормальными замыканиями орбит максимального тора. Сибирский Математический Журнал, Ноябрь–декабрь 2012. Том 53, No 6, 1354–1372

[3] И. И. Богданов, К. Г. Куюмжиян, Простые модули исключительных групп с нормальными замыканиями орбит максимального тора. Математические Заметки, 2012, том 92, вып. 4, 483–496

Работы [1]-[3] опубликованы в журналах из перечня ВАК РФ ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук.