Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук

На правах рукописи

Фейгин Евгений Борисович

Вырождение Пуанкаре-Биркгофа-Витта в теории Ли и его приложения

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на факультете математики национального исследовательского университета Высшая Школа Экономики

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,	*И.В.Аржанцев,*
доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор,	*А.А.Белавин,*
доктор физико-математических наук, профессор	*А.Н.Панов,*

Ведущая организация:
Математический Институт им. В.А.Стеклова РАН

Защита состоится 26 марта 2013 года в 17.00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 при Институте проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН, расположенному по адресу: 127994, г.Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, 19, стр.1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института проблем передачи информации им. А.А.Харкевича РАН.

Автореферат разослан февраля 2013 года

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.077.03,
кандидат физико-математических наук Соболевский А.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Наша работа посвящена изучению структуры вырожденных представлений со старшим весом для простых и аффинных групп и алгебр Ли, а также связанных с ними многообразий флагов. Мы также изучаем приложения, возникающие в комбинаторике и математической физике.

Основы теории групп и алгебр Ли были заложены в работах Пуанкаре, Ли, Вейля и других. Важность этих алгебраических структур заключается в том, что они действуют как операторы симметрий разнообразных объектов в задачах теории представлений, коммутативной алгебры, комбинаторики, топологии, алгебраической геометрии, теории дифференциальных уравнений, математической физики. Таким образом, алгебры Ли реализуются как алгебры операторов, действующих в специальных векторных пространствах, векторами которых являются изучаемые в той или иной задаче объекты, а группы Ли возникают как группы автоморфизмов тех или иных геометрических объектов – алгебраических многообразий, топологических пространств и так далее. Это позволяет описывать свойства интересующих нас объектов в терминах структурных свойств и теории представлений алгебр и групп Ли. В качестве примеров приведём описание когомологий линейных расслоений на многообразиях флагов в терминах представлений простых алгебр Ли (теорема Бореля-Вейля-Ботта) и описание пространств состояний некоторых сигма-моделей квантовой теории поля в терминах интегрируемых представлений аффинных алгебр Ли (модель Весса-Зумино-Виттена).

Важнейшим классом представлений алгебр Ли картановского типа являются представления со старшим весом. Отличительная черта этих представлений заключается в том, что они содержат выделенный вектор, называемый старшим, такой что всё представление может быть получено действием на этот вектор операторами из нильпотентной подалгебры. Важность таких представлений обуславливается несколькими причинами: во-первых, все неприводимые конечномерные представления простых конечномерных алгебр Ли имеют такой вид; во-вторых, многообразия флагов могут быть реализованы как подмногообразия в проективизациях представлений со старшим весом; в-третьих, такие представления описывают пространства состояний в различных системах математической физики. Таким образом, вопрос изучения структуры представлений со старшим весом для простых конечномерных алгебр Ли и аффинных алгебр Каца-Муди является интересным и важным как в теории представлений, так и в свете приложений в разнообразных областях математики.

Классическая теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта утверждает, что на универсальной обёртывающей алгебре любой алгебры Ли имеется фильтрация, такая что присоединённая градуированная алгебра изоморфна симметрической алгебре, т.е. алгебре полиномиальных функций на двойственном пространстве к алгебре Ли. Существенная разница между универсальной обёртывающей и симметрической алгебрами заключается в том, что, с одной стороны, вторая алгебра, в отличие от первой, коммутативна, а с другой стороны, на симметрической алгебре имеется естественная градуировка по степени, которая отсутствует на универсальной обёртывающей алгебре. Рассмотрим фильтрацию на представлении со старшим весом, индуцированную фильтрацией Пуанкаре-Биркгофа-Витта на универсальной обёртывающей алгебре нильпотентной алгебры Ли. Основным объектом изучения в нашей диссертации является присоединённое градуированное пространство к этой фильтрации и связанные с ним алгебраические, комбинаторные и геометрические структуры. В дальнейшем мы будем называть присоединённое градуированное пространство, построенное по ПБВ фильтрации, вырожденным или градуированным представлением. Мы также будем называть вырожденными алгебрические и геометрические структуры (группы и алгебры Ли, многообразия флагов и т.д.), возникающие при изучении фильтрации Пуанкаре-Биркгофа-Витта.

Изучение ПБВ вырожденных алгебраических и геометрических объектов оказывается важным по следующим причинам. Во-первых, получающиеся таким образом вырожденные структуры – алгебраические группы, представления, алгебраические многообразия, комбинаторные объекты – возникают в разнообразных задачах математики и математической физики, не связанных напрямую с теорией Ли. Предложенная нами реализация таких структур позволяет применять методы и конструкции из теории Ли для их изучения. Во-вторых, имеется и обратная связь. Описание свойств ПБВ вырожденных структур позволяет получать важные и глубокие результаты об объектах классической теории Ли.

По построению, вырожденные представления являются циклическими представлениями симметрической алгебры, то есть могут быть реализованы как факторы алгебр многочленов по некоторым идеалам. Естественным образом возникают вопросы о вычислении градуированных характеров вырожденных представлений и о нахождении мономиальных базисов. Отметим, что переход от классических представлений со старшим весом к их градуированным аналогам можно воспринимать, как оснащение классических представлений дополнительной структурой. Таким образом, структурные теоремы и теоремы существования для вырожденных представлений позволяют получать важную информацию об их классических аналогах. В нашей диссертации мы отвечаем на вышесформулированные вопросы для простых алгебр типа A и C. В частности, для алгебр типа A мы строим в вырожденных представлениях мономиальные базисы, наличие которых доказывает гипотезу Э. Б. Винберга о существовании канонических базисов в неприводимых конечномерных представлениях алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$. Отметим также, что вопрос определения и изучения естественных q-характеров неприводимых представлений простых алгебр Ли рассматривался в работах разных авторов (например, в работах Брылински и Костанта). Наша конструкция позволяет определить такие q-характеры. Для алгебр типа A и C мы находим комбинаторные формулы для q-характеров.

Как мы уже упоминали выше, важную роль в теории Ли играют многообразия флагов – орбиты старших векторов в проективизациях неприводимых представлений со старшим весом. Центральное значение этих многообразий в теории объясняется тем, что, во-первых, изучение их алгебро-геометрических и топологических свойств позволяет получать новые результаты о структуре самих представлений, и, во-вторых, алгебраическая теория Ли даёт возможность описывать структуру самих многообразий флагов. Изучению этой взаимосвязи посвящены многочисленные работы разных математиков, подробно описанные в книге Кумара. Одной из важных идей, разрабатываемых в последнее время, является идея вырождения многообразий флагов в другие алгебраические многообразия, для изучения которых разработаны (или разрабатываются) отдельные методы и подходы. Например, в работах Лакшмибаи, Кальдеро, Бриона, Алексеева и других были построены и изучены торические вырождения многообразий флагов. Оказалось, что эти вырождения интересны и важны как сами по себе, так и из-за приложений в математической физике (зеркальная симметрия). В нашей работе мы строим промежуточные вырождения многообразий флагов, так что группа симметрий, действующая с открытой орбитой, абелева (как и в торическом случае), однако является не тором, а произведением нескольких копий аддитивной группы поля. Частные случаи таких многообразий изучались в работах Аржанцева. Оказывается, что получившиеся многообразия имеют богатую алгебро-геометрическую и топологическую структуру и тесно связаны с вырожденными представлениями.

Классические многообразия флагов имеют также богатую комбинаторную структуру. В качестве примера приведём взаимосвязь теории симметрических функций и структуры алгебры когомологий многообразий флагов типа A, описанную, например, в классической книге Фултона. Как и в случае взаимодействия алгебрических и топологических структур, изучение топологических свойств многообразий помогает получать новые комбинаторные результаты. В нашей работе мы развиваем этот подход в вырожденном случае. Комбинаторные объекты, возникающие в нашей теории, тесно связаны с числами Дженокки и их q-версиями. Эти числа были введены в конце 19-ого века и с тех пор привлекают внимание математиков, работающих в комбинаторике и теории чисел. В качестве примеров приведём работы Деллака, Гесселя, Вьено, Зайделя, Зенга. С помощью топологических свойств вырожденных многообразий флагов мы получаем новые результаты о числах Дженокки и связанных с ними комбинаторных объектах. В частности, нам впервые удалось получить явную формулу для этих чисел.

Последняя часть нашей диссертации посвящена приложениям в математической физике, точнее в теории вертекс-операторных алгебр. Около 15 лет назад Габердиэль и Годдард предложили аксиоматическое описание конформных теорий поля. Ключевым объектом в их описании являются так называемые системы корреляционных функций. Эти объекты зависят от набора параметров: точек проективной прямой. Важнейшим вопросом является изучение вырождения (слияния) параметров систем: из ситуации попарно различных точек в случай (частично) совпадающих. Со времён работ Виттена хорошо известно, что для конформных теорий Весса-Зумино-Виттена основополагающей математической теорией является теория интегрируемых представлений со старшим весом для аффинных алгебр Каца-Муди. Более того, математическое описание разнообразных физических свойств теорий опирается на теорию представлений вертекс-операторных алгебр, построенных по вакуумным представлениям аффинных алгебр. Развивая подход Габердиэля и Годдарда, Ганнон, Найтцке и Габердиэль описали вырождение систем корреляционных функций в терминах теории вертекс-операторных алгебр, точнее в терминах вырождения алгебр Жу в C_2-алгебры. В частности, Т.Ганнон и М.Габердиэль высказали гипотезу о структуре C_2-алгебр типа A. При этом переход от алгебр Жу к C_2-алгебрам является частным случаем нашей процедуры абелианизации: замены неабелевой алгебры порождающих операторов на её коммутативное вырождение. В нашей диссертации мы доказываем гипотезу Габердиэля-Ганнона, а также обобщаем её на случай симплектических алгебр и более общих систем корреляционных функция для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Цель работы. Диссертация преследует следующие научные цели. В первой главе, посвященной вырожденой теории представлений простых конечномерных алгебр Ли:

- определение вырожденной алгебры и группы Ли и вырожденных представлений со старшим весом;
- описание вырожденных представлений для алгебр типов A и C в терминах образующих и соотношений;
- описание мономиальных базисов в вырожденных представлениях для алгебр типов A и C.

Во второй главе, посвященной изучению вырожденных многообразий флагов простых конечномерных алгебр Ли:

- определение вырожденных многообразий флагов;
- вычисление вырожденных соотношений Плюккера для алгебр типа A, описание координатного кольца этих многообразий;

- реализация вырожденных многообразий флагов типа A в виде многообразий цепочек подпространств, изучение их топологических свойств;
- реализация вырожденных многообразий флагов типа A как колчанных грассманианов.

В третьей главе, посвящённой изучению комбинаторных свойств вырожденных многообразий флагов:

- вычисление эйлеровых характеристик и полиномов Пуанкаре вырожденных многообразий флагов через числа Дженокки;
- получения явных формул и комбинаторных реализаций чисел Дженокки и их q-аналогов;
- вычисление производящей функции чисел Дженокки в виде непрерывной дроби.

В четвёртой главе, посвященной изучению вырожденных интегрируемых представлений аффинных алгебр Каца-Муди:

- описание вырожденных представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ в терминах образующих и соотношений;
- вычисление идеалов соотношений для вырожденных базисных представлений произвольных аффинных алгебр, описание связи с модулями Демазюра.

В пятой главе, посвящённой изучению приложений в теории вертекс-операторных алгебр:

- изучение структуры C_2-алгебр для алгебр Ли типов A и C, доказательство гипотезы Гaбердиэля-Годдарда;
- изучение вырождения высших аналогов алгебр Жу, доказательства аналога гипотезы Габердиэля-Годдарда для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Методы исследования. В нашей диссертации использованы методы теории представлений, коммутативной алгебры, алгебраической геометрии, топологии, теории групп, комбинаторики и теории вертекс-операторных алгебр. В первой главе мы используем методы теории представлений и коммутативной алгебры, описывая вырожденные представления простых алгебр Ли в терминах идеалов в полиномиальных алгебрах, оснащённых действием алгебр Ли. Во второй главе использованы методы алгебраической геометрии и топологии. Так, мы явно строим координатные кольца вырожденных многообразий флагов и описываем в них базисы. Мы также вычисляем эйлеровы характеристики и полиномы Пуанкаре, строя клеточные разбиения. В третьей главе использованы комбинаторные методы. Мы используем реализацию чисел Дженокки в терминах треугольника Зайделя и диаграмм Деллака. Мы также используем теорему Флажоле и технику непрерывных дробей. В четвёртой главе мы применяем методы теории представлений аффинных алгебр Ли. В частности, мы используем вертекс-операторную реализацию, теорему Каца-Френкеля и аффинные модули Демазюра. В последней, пятой главе мы применяем методы теории вертекс-операторных алгебр и конформной теории поля. В частности, мы используем теоремы Френкеля-Жу о структуре алгебр Жу, а также аксиоматический подход Габердиэля-Годдарда к конформной теории поля.

Научная новизна. Диссертация содержит следующие новые определения, результаты и методы:

- Определены новые естественные вырождения алгебр и групп Ли картановского типа, их представлений со старшим весом и обобщённых многообразий флагов.
- Изучены вырожденные представления алгебр типа A и C, описаны идеалы соотношений, построены мономиальные базисы. Получены новые результаты о конечномерных неприводимых представлениях простых алгебр, в частности доказана гипотеза Винберга о канонических базисах в представлениях алгебр типа A.
- Изучены вырожденные многообразия флагов типа A, описаны координатные кольца и проективные вложения, вычислены эйлеровы характеристики и полиномы Пуанкаре, построено клеточное разбиение, установлена связь с теорией колчанных грассманианов.
- Получены новые комбинаторные результаты о числах Дженокки. Описаны новые комбинаторные объекты в теории, получены явные формулы, определены естественные q-аналоги, для которых также получены явные формулы. Производящая функция чисел Дженокки вычислены в терминах простой непрерывной дроби.
- Получены новые результаты о вырожденных представлениях аффинных алгебр Каца-Муди. Для алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ найдено описание идеала соотношений для интегрируемых вакуумных представлений произвольного уровня, вычислен градуированный q-характер. Для произвольной аффинной алгебры описано вырожденнное базисное представление, найдена связь с аффинными модулями Демазюра.
- Изучена структура C_2-алгебр типа A и C, доказана гипотеза Габердиэля-Ганнона о структуре C_2-алгебр типа A как градуированных представлений $\mathfrak{sl}_n$, получено обобщение этой гипотезы для симплектических алгебр. Доказан аналог гипотезы Габердиэля-Ганнона для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ и произвольного набора параметров.

Научная значимость работы. Результаты работы могут быть полезны математикам, работающих в таких областях, как теория представлений, комбинаторика, алгебраическая геометрия, математическая физика. В частности, конструкции и методы, развитые в диссертации, могут быть использованы при изучении $\mathfrak{b}$-инвариантных идеалов в симметрических алгебрах, $\mathbb{G}_a^M$-многообразий, колчанных грассманианов и колчанных многообразий флагов, комбинаторных свойств чисел Дженокки, структуры пространств корреляционных функций. Результаты диссертации уже получили своё развитие при построении разрешений особенностей вырожденных многообразий флагов (М.Финкельберг, П.Литтелманн), при изучении геометрических свойств представлений колчанов и колчанных грассманианов (М.Райнеке, Д.Черулли Ирелли), а также в теории инвариантов (О.Якимова и Д.Панюшев).

Апробация работы. Часть настоящей работы была удостоена премий П. Делиня и фонда Династия. Работа частично поддержана грантами РФФИ и Минобрнауки (Президентский грант для поддержки молодых кандидатов наук).

Результаты диссертации докладывались на семинаре отдела алгебры и теории чисел и отдела алгебраической геометрии МИАН, семинаре кафедры высшей алгебры МГУ им. Ломоносова «Группы Ли и теория инвариантов», семинаре НМУ «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика», семинаре лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ, на заседании Московского математического общества, семинаре Отделения теоретической физики им.И.Е.Тамма ФИАН, семинаре по квантовой теории поля ФИАН, на летней школе «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Самарский университет, на зимней школа «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», МГУ, на Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам Санкт-Петербургского отделения МИАН, на международных конференциях:

- Symmetric Spaces and their Generalisations - II, Тренто, Италия, июнь 2012,
- Algebra and Geometry, Москва, Россия, июнь 2012,
- Lie Theory and quantum analogues, Марсель, Франция, апрель 2012,
- Enveloping algebras and geometric representation theory, Обервольфах, Германия, март 2012,
- International workshop on Classical and Quantum Integrable Systems, Дубна, Россия, январь 2012,
- Workshop on the Interaction of Representation Theory with Geometry and Combinatorics, Бонн, Германия, март 2011,
- Workshop on classical and quantum integrable Systems (CQIS-2011), Протвино, Россия, январь 2011,

- Geometry and Combinatorics in Representation Theory of Lie Algebras, Кёльн, Германия, октябрь 2010,
- Algebraic and combinatorial approaches to representation theory, Бангалор, Индия, август 2010,
- Representation theory and quantization, Цюрих, Швейцария, январь 2010,
- Structures in Lie Representation Theory, Бремен, Германия, август 2009,
- String Field Theory and Related Aspects, Москва, Россия, апрель 2009,
- Enveloping algebras and geometric representation theory, Обервольфах, Германия, март 2009,
- Современная российская математика, Россия, Москва, январь 2009,
- Geometry and Integrability in Mathematical Physics, Марсель, Франция, сентябрь 2008,

а также на научных семинарах в университетах Кёльна (Германия), Бонна (Германия), Вупперталя (Германия), Чапел Хилла (США), Киото (Япония), Амстердама(Голландия), Парижа (Франция), Цюриха (Швейцария).

Объем и структура диссертации. Общий объем диссертации составляет 147 страниц. Диссертация состоит из введения, пяти глав глав и списка литературы из 92 наименований.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Краткое содержание работы

Опишем краткое содержание каждой из глав диссертации.

Теория представлений. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}^-$ – картановское разложение, V – представление $\mathfrak{g}$, удовлетворяющее следующему условию: существует вектор $v \in V$, такой что $V = U(\mathfrak{n}^-)v$ (через U обозначена универсальная обёртывающая алгебра). Вектор v называется старшим вектором представления V. На универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{n}^-)$ имеется стандартная возрастающая фильтрация Пуанкаре-Биркгофа-Витта F_s, такая что присоединённая градуированная алгебра изоморфна симметрической алгебре $S(\mathfrak{n}^-)$, которая, в свою очередь, изоморфна алгебре полиномов. Рассмотрим индуцированную фильтрацию на пространстве представления V, т.е. фильтрацию $F_0v \subset F_1v \subset F_2v \subset \dots$. Тогда присоединённое градуированное пространство V^a является представлением абелевой алгебры $(\mathfrak{n}^-)^a$. Более того, поскольку V является циклическим представлением $\mathfrak{n}^-$ (т.е. $V = U(\mathfrak{n}^-)v$), то $V^a = S(\mathfrak{n}^-)v$, т.е. всё пространство получается из старшего вектора действием алгебры полиномов. Итак, $V^a \simeq S(\mathfrak{n}^-)/I$, где I некоторый идеал.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ – конечномерная простая алгебра Ли, V_λ – неприводимое представление $\mathfrak{g}$ со старшим весом λ и старшим вектором v_λ. Классическими вопросами теории представлений является вычисление размерностей и характеров этих представлений. Вышеописанная конструкция позволяет строить пространства V_λ^a. По построению, $V_\lambda^a \simeq S(\mathfrak{n}^-)/I_\lambda$ для некоторого идеала I_λ. Заметим, что кроме стандартной градуировки алгеброй Картана, индуцированной из V_λ, пространства V_λ^a снабжены дополнительной градуировкой по степени многочлена из $S(\mathfrak{n})$. Таким образом, получаем естественно определённый q-характер представлений V_λ. Естественно возникают следующие вопросы:

- Описать идеалы соотношений I_λ.
- Вычислить q-характеры представлений V_λ.
- Построить мономиальные базисы пространств V_λ^a.

Мы решаем эти вопросы для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$. Сформулируем здесь ответ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, отметив предварительно, что пространства V_λ^a являются представлениями не только абелевой алгебры $(\mathfrak{n}^-)^a$, но и большей алгебры $\mathfrak{g}^a = \mathfrak{b} \oplus (\mathfrak{n}^-)^a$, которую мы называем вырожденной алгеброй Ли.

Обозначим через $\triangle_+$ множество положительных корней $\mathfrak{sl}_n$ и через α_i, ω_i простые и фундаментальные корни соответственно. Для формулировки теоремы нам понадобится определение пути Дика. Путь Дика это последовательность положительных корней $\mathfrak{sl}_{n+1}$

$$\mathbf{p} = (\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(k)),\ \ k \geq 0,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

- первый и последний корень простые, т.е. $\beta(0) = \alpha_i$ и $\beta(k) = \alpha_j$ для некоторых $1 \le i < j \le n$;
- если $\beta(s) = \alpha_{p,q}$, то следующий элемент в пути имеет вид $\beta(s+1) = \alpha_{p,q+1}$ или $\beta(s+1) = \alpha_{p+1,q}$.

Пусть $\mathbf{s} = \{s_\beta\}_{\beta>0}$, $s_\beta \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ – набор из целых неотрицательных чисел, занумерованных положительными корнями. Обозначим через $f^{\mathbf{s}}$ элемент

$$f^{\mathbf{s}} = \prod_{\beta \in \triangle_+} f_\beta^{s_\beta} \in S(\mathfrak{n}^-).$$

Для целого доминантного веса $\mathfrak{sl}_{n+1}$ вида $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \omega_i$ определим множество $S(\lambda)$ как множество наборов $\mathbf{s} = (s_\beta)_{\beta \in \triangle_+} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{\triangle_+}$, таких что для всех путей Дика $\mathbf{p} = (\beta(0), \dots, \beta(k))$ выполнено

$$s_{\beta(0)} + s_{\beta(1)} + \dots + s_{\beta(k)} \le m_i + m_{i+1} + \dots + m_j,$$

где $\beta(0) = \alpha_i$ и $\beta(k) = \alpha_j$. В нашей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Векторы $f^{\mathbf{s}} v_\lambda$, $\mathbf{s} \in S(\lambda)$, образуют базис $V^a(\lambda)$.*

В частности,

$$char_q(V_\lambda) = \sum_{\mathbf{s} \in S(\lambda)} e^{\lambda - \mathrm{wt}(\mathbf{s})} q^{\deg(\mathbf{s})},$$

где $\deg(\mathbf{s}) = \sum_{1 \le j \le k \le n} s_{j,k}$. Кроме того, мы получаем

Следствие 2. *Пусть $\lambda = \sum_j m_j \omega_j \in P^+$. Для каждого $\mathbf{s} \in S(\lambda)$ зафиксируем произвольный порядок сомножителей f_α в произведении $\prod_{\alpha>0} f_\alpha^{s_\alpha}$. Пусть $f^{\mathbf{s}} = \prod_{\alpha>0} f_\alpha^{s_\alpha}$ – упорядоченное произведение в $U(\mathfrak{n}^-)$. Тогда элементы $f^{\mathbf{s}} v_\lambda$, $\mathbf{s} \in S(\lambda)$, образуют базис V_λ.*

В частности, это доказывает гипотезу Винберга. В диссертации мы также описываем идеал соотношений $I(\lambda)$.

Теорема 3.

$$I(\lambda) = S(\mathfrak{n}^-) \left(U(\mathfrak{n}^+) \circ \mathrm{span}\{ f_\alpha^{(\lambda,\alpha)+1}, \alpha > 0 \} \right). \tag{1}$$

В нашей работе также доказаны аналогичные теоремы для симплектических алгебр.

Многообразия флагов. Пусть G – группа Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим обобщённое многообразие флагов $\mathcal{F}_\lambda = G \cdot \mathbb{C} v_\lambda$, вложенное в проективизацию $\mathbb{P}(V_\lambda)$ как орбита прямой, порождённой старшим вектором. Легко видеть, что $\mathcal{F}_\lambda \simeq G/P$, где P – некоторая параболическая подгруппа, определяемая весом λ. Напомним, что в случае группы типа

A обобщённые многообразия флагов изоморфны классическим многообразиям флагов, состоящим из наборов вложенных друг в друга подпространств. Изучение алгебро-геометрических и топологических свойств (обобщённых) многообразий флагов важно и интересно как с геометрической точки зрения, так и в свете приложений в теории представлений и комбинаторике. В частности, теорема Бореля-Вейля-Ботта позволяет вычислять характеры неприводимых представлений простых алгебр Ли с помощью эквивариантных линейных расслоений на многообразиях флагов (по формуле Атьи-Ботта-Лефшеца).

Пусть теперь G^a – вырожденная группа Ли, являющаяся группой Ли алгебры $\mathfrak{g}^a$. Отметим, что G^a равно полупрямому произведению борелевской подгруппы B и абелевой группы $\mathbb{G}_a^{\dim \mathfrak{n}}$, где $\mathbb{G}_a$ – аддитивная группа поля. Определим вырожденное многообразие флагов $\mathcal{F}^a_\lambda$. Пусть $[v_\lambda] \in \mathbb{P}(V^a_\lambda)$ – прямая $\mathbb{C}v_\lambda$.

Определение 4. *Многообразие $\mathcal{F}^a_\lambda \hookrightarrow \mathbb{P}(V^a_\lambda)$ являются замыканием G^a-орбиты $[v_\lambda]$,*

$$\mathcal{F}^a_\lambda = \overline{G^a[v_\lambda]} = \overline{\mathbb{G}^M v_\lambda} \hookrightarrow \mathbb{P}(V^a_\lambda).$$

Заметим, что в отличие от классического случая, замыкание орбиты не совпадает с самой орбитой. Кроме того, легко видеть, что $\mathcal{F}^a_\lambda = \overline{\mathbb{G}_a^{\dim \mathfrak{n}} \cdot \mathbb{C}v_\lambda}$, т.е. вырожденные многообразия флагов являются так называемыми $\mathbb{G}_a^M$-многообразиями. Во второй главе мы изучаем геометрию и топологию вырожденных многообразий флагов типа A, в том числе и параболических. Здесь мы сформулируем основные результаты для полных вырожденных многообразий флагов для группы SL_n.

Обозначим через $\mathcal{F}_n$ многообразие флагов SL_n/B. Мы доказываем, что если λ и μ доминантные регулярные веса, то $\mathcal{F}^a_\lambda \simeq \mathcal{F}^a_\mu$. Таким образом, вырожденные многообразия флагов не зависят от регулярного доминантного веса. Мы будем обозначать соответствующие многообразия через $\mathcal{F}^a_n$. Наша первая теорема позволяет явно описывать эти многообразия в терминах цепочек подпространств. Нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $w_1, \dots, w_n$ – некоторый базис пространства $W \simeq \mathbb{C}^n$. Определим проекции $pr_i : W \to W$ по формуле

$$pr_i(\sum_{l=1}^n c_l w_l) = \sum_{l=1}^{i-1} c_l w_l + \sum_{l=i+1}^{n} c_l w_l.$$

Теорема 5. *Существует вложение вырожденного многообразия флагов $\mathcal{F}^a$ в произведение грассманианов* $\mathrm{Gr}(1, \mathrm{n}) \times \cdots \times \mathrm{Gr}(\mathrm{n}-1, \mathrm{n})$. *Образ этого вложения состоит из всех таких последовательностей $V_1, \dots, V_{n-1}$, $V_l \in \mathrm{Gr}(\mathrm{l}, \mathrm{n})$, что для всех $1 \le l \le n-2$*

$$pr_{l+1} V_l \hookrightarrow V_{l+1}.$$

Напомним, что грассманиан $\mathrm{Gr}(\mathrm{s}, \mathrm{n})$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^s W)$. Таким образом, получаем вложение вырожденных многообразий флагов в произведение проективных пространств. В классическом случае также имеется такое вложение, называемое вложением Плюккера. Его образ задаётся в терминах соотношений Плюккера – явно выписываемых образующих идеала мульти-однородных полиномов, обращающихся в ноль на образе $\mathcal{F}_n$. Мы находим вырожденные аналоги соотношений Плюккера и изучаем порождённый ими идеал I^a. В частности, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 6. *Координатное кольцо вырожденного многообразия флагов $\mathcal{F}_n^a$ изоморфно*

$$\bigoplus_{\lambda \in P^+} (V_\lambda^a)^*,$$

где умножение $(V_\lambda^a)^* \otimes (V_\mu^a)^* \to (V_{\lambda+\mu}^a)^*$ индуцировано с помощью вложения $V_{\lambda+\mu}^a \hookrightarrow V_\lambda^a \otimes V_\mu^a$.

Мы также доказываем, что $\mathcal{F}_n^a$ являются плоским вырождением классических многообразий флагов $\mathcal{F}_n$.

Для более глубокого изучения алгебро-геометрических и топологических свойств вырожденных многообразий флагов мы используем их реализацию в терминах колчанных грассманианов. Пусть Q – однонаправленный колчан типа A_n. Занумеруем вершины Q от 1 до n таким образом, чтобы стрелки в Q имели бы вид $i \to i+1$. Пусть P_i, I_i, $i = 1, \dots, n$ проективные и инъективные представления, соответствующие вершине i. Обозначим через P прямую сумму неразложимых проективных представлений $\bigoplus_{i=1}^n P_i$ (в частности, $\mathbf{dim}\, A = (1, 2, \dots, n)$), а через I прямую сумму неразложимых инъективных представлений $\bigoplus_{i=1}^n I_i$. Наше основное замечание заключено в следующем предложении:

Предложение 7. *Колчанный грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim}\, P}(P \oplus I)$ изоморфен вырожденному многообразию флагов $\mathcal{F}_{n+1}^a$ алгебры $\mathfrak{sl}_{n+1}$.*

Представление $P \oplus I$ может быть изображено следующим образом ($n = 4$):

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \to & \bullet & \to & \bullet & \to & \bullet \\
\bullet & \to & \bullet & \to & \bullet & & \bullet \\
\bullet & \to & \bullet & & \bullet & \to & \bullet \\
\bullet & & \bullet & \to & \bullet & \to & \bullet \\
\bullet & \to & \bullet & \to & \bullet & \to & \bullet
\end{array}$$

Одним из важнейших следствий наличия вышеописанной реализации является возможность использования структур теории представлений колчанов для описания свойств вырожденных многообразий флагов. В частности, мы доказываем, что вырожденные многообразия флагов является нормальными многообразиями, а также строим клеточные разбиения. Точнее, рассмотрим группу

$$G = \begin{bmatrix} \mathrm{Aut}_Q(P) & 0 \\ \mathrm{Hom}_Q(P,I) & \mathrm{Aut}_Q(I) \end{bmatrix},$$

являющуюся подгруппой коразмерности один в группе автоморфизмов представления $P \oplus I$. Мы доказываем следующую теорему:

Теорема 8. *Группа G действует на $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim} P}(P \oplus I)$ с конечным числом орбит. Каждая орбита является аффиной клеткой.*

Таким образом, группа G играет ту же роль для вырожденных многообразий флагов, что и борелевской подгруппа для классических.

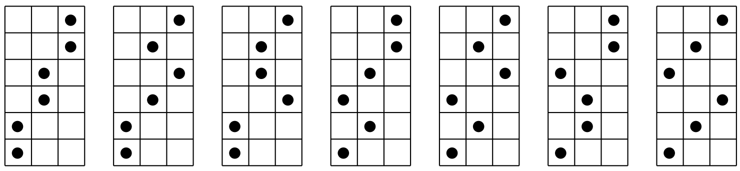
Как мы уже упоминали выше, теория представлений колчанов и геометрические структуры этой теории позволяют более глубоко понимать геометрические и топологические свойства вырожденных многообразий флагов. Одновременно, определения и конструкции, естественно возникающие при изучении многообразий $\mathcal{F}_n^a$, могут быть обобщены на все колчанные грассманианы вида $\mathrm{Gr}_{\mathbf{dim} P}(P \oplus I)$ для проективного представления P и инъективного представления I произвольного колчана Дынкина. В частности, мы доказываем, что все такие грассманианы являются нормальными и описываем орбиты действия на них группы G.

Комбинаторика. Как известно, эйлерова характеристика классических многообразий флагов типа A равна $n!$. Это обстоятельство важно для разнообразных комбинаторных приложений геометрии многообразий флагов. Мы показываем, что в вырожденном случае аналогом факториалов являются так называемые нормализованные числа Дженокки второго рода. Используя геометрические и топологические свойства вырожденных многообразий флагов, мы находим новые комбинаторные описание чисел Дженокки, а также явное выражение для их производящей функции. Более того, мы находим явные формулы для чисел Дженокки. При этом, используются разнообразные комбинаторные объекты и конструкции, такие как q-биномиальные коэффициенты, диаграммы Деллака, пути Моцкина, теорема Флажоле непрерывные дроби и т.д. Отметим, что полиномы Пуанкаре вырожденных многообразий флагов позволяют определить естественную q-версию чисел Дженокки. Мы также находим явные формулы для определённых таким образом q-чисел Дженокки.

Обозначим через h_n нормализованные числа Дженокки второго рода. Приведём несколько первых чисел последовательности: $1, 2, 7, 38, 295, 3098$. У чисел h_n много разных реализаций, принадлежащих Деллаку, Зайделю, Креверасу и другим. В частности, число h_n равно числу конфигураций Деллака D, каждая из которых является подмножеством клеток прямоугольника с n столбцами и $2n$ строками, удовлетворяющее следующим условиям:

- каждый столбец содержит ровно две клетки D,
- каждая строка содержит ровно одну клетку D,
- если (l,j)-ая клетка в D, то $l \le j \le n+l$.

Приведём все конфигурации Деллака для $n=3$. Мы обозначаем принадлежность клетки конфигурации, ставя толстую точку внутри клетки.

(2)  .

Мы доказываем следующее предложение.

Предложение 9. *Число наборов $I^1,\dots,I^{n-1}$, таких что $I^l \subset \{1,\dots,n\}$, $\#I^l = l$, удовлетворяющих условию*

$$I^{l-1} \setminus \{l\} \subset I^l,\ l=2,\dots,n-1 \tag{3}$$

равно h_n.

Как следствие, мы получаем, что эйлерова характеристика вырожденных многообразий флагов равна h_n. А именно, мы строим явное клеточное разбиение многообразий $\mathcal{F}_n^a$, так что клетки параметризованы вышеописанными наборами $\mathbf{I}=(I^1,\dots,I^{n-1})$. Более того, мы строим статистику, описывающую полиномы Пуанкаре. Точнее, пусть $\mathbf{I} = (I^1,\dots,I^{n-1})$ – набор, удовлетворяющий условиям $I^{l-1}\setminus\{l\}\subset I^l$. Обозначим через $D_{\mathbf{I}}$ соответствующую диаграмму Деллака. Для диаграммы Деллака $D\in DC_n$, определим длину $l(D)$ как число таких пар (l_1,j_1), (l_2,j_2), что клетки (l_1,j_1) и (l_2,j_2) принадлежат D и $l_1<l_2$, $j_1>j_2$. Будем называть такую пару клеток (l_1,j_1), (l_2,j_2) беспорядком. Наше определение похоже на стандартное определение длины перестановки. Заметим, что в классическом случае размерность клетки, соответствующей перестановке σ, в многообразии флагов равно числу таких пар $j_1<j_2$, что $\sigma(j_1)>\sigma(j_2)$, т.е. длине σ.

Теорема 10. *Полином Пуанкаре $P_n(t)=P_{\mathcal{F}_n^a}(t)$ равен*

$$P_n(t)=\sum_{D\in DC_n} t^{2l(D)}.$$

Пусть $q=t^2$. Тогда P_n являются полиномами от q и $P_n(1)=h_n$. Таким образом, полиномы Пуанкаре вырожденных многообразий флагов позволяют определить естественную q-версию нормализованных чисел Дженокки второго рода.

Используя реализацию вырожденных многообразий флагов через колчанные грассманианы, мы получаем следующее выражение для полиномов Пуанкаре.

Теорема 11. *Полином Пуанкаре полного вырожденного многообразия флагов $\mathcal{F}^a_{n+1}$ равен*

$$\sum_{f_1,\dots,f_n\geq 0} q^{\sum_{k=1}^n (k-f_k)(1-f_k+f_{k+1})} \prod_{k=1}^n \binom{1+f_{k-1}}{f_k}_q \prod_{k=1}^n \binom{1+f_{k+1}}{f_k}_q, \tag{4}$$

(мы полагаем $f_0 = f_{n+1} = 0$).

Аналогичные формулы также получены для частичных многообразий флагов.

Следствие 12.

$$h_{n+1} = \sum_{f_1,\dots,f_n\geq 0} \prod_{k=1}^n \binom{1+f_{k-1}}{f_k} \prod_{k=1}^n \binom{1+f_{k+1}}{f_k}$$

где $f_0 = f_{n+1} = 0$.

Мы показываем, что последняя формула может быть записана как сумма по множеству M_{n+1} путей Моцкина, начинающихся в точке $(0,0)$ и заканчивающихся в точке $(n+1,0)$. А именно, для пути Моцкина $\mathbf{f} \in M_{n+1}$, обозначим через $l(\mathbf{f})$ число подъёмов $(f_{i+1} = f_i + 1)$ плюс число спусков $(f_{i+1} = f_i - 1)$. Тогда:

Следствие 13.

$$h_{n+1} = \sum_{\mathbf{f}\in M_{n+1}} \frac{\prod_{k=1}^n (1+f_k)^2}{2^{l(\mathbf{f})}}.$$

Используя последнее следствие и теорему Флажоле, мы получаем явную формулу в виде непрерывной дроби для производящей функции полиномов Пуанкаре $h_n(q)$.

Пусть $\tilde{h}(q,s) = \sum_{n\geq 0} \tilde{h}_n(q) s^n$, где $\tilde{h}_n(q) = q^{n(n-1)/2} h_n(q^{-1})$ и $\tilde{h}_n(q)$ – производящая функция нормализованных чисел Дженокки.

Теорема 14.

$$\tilde{h}(q,s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{s}{1 - \cfrac{qs}{1 - \cfrac{\binom{3}{2}_q s}{1 - \cfrac{q\binom{3}{2}_q s}{1 - \cfrac{\binom{4}{2}_q s}{1 - \cfrac{q\binom{4}{2}_q s}{1 - \dots}}}}}}} \tag{5}$$

Специализируя в $q = 1$, мы получаем формулу для нормализованных чисел Дженокки второго рода.

Следствие 15. *Производящая функция* $\sum_{n\geq 0} h_n s^n$ *равна непрерывной дроби*

$$\frac{1}{1-\cfrac{s}{1-\cfrac{s}{1-\cfrac{3s}{1-\cfrac{3s}{1-\cfrac{6s}{1-\cfrac{6s}{1-\cfrac{10s}{1-\dots}}}}}}}} \tag{6}$$

В качестве следствия, мы получаем, что $h_n(q)$ совпадают с q-версиями нормализованных чисел Дженокки второго рода, определёнными Ханом и Зенгом.

Аффинные алгебры Ли. Пусть теперь $\widehat{\mathfrak{g}}$ – аффинная алгебра Каца-Муди. Все определения, данные выше, имеют смысл и в этом случае. Точнее, рассмотрим бесконечномерное интегрируемое представление L_λ алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$. Применяя стандартное определение ПБВ фильтрации, получаем градуированное представление вырожденной аффинной алгебры. В отличие от случая конечномерных алгебр и их представлений, все однородные компоненты в аффинном случае бесконечномерны, поэтому вопрос о вычислении их размерностей не имеет смысла. Однако задача вычисления их характеров и построения базисов представляется важной и интересной. В нашей работе мы получим результаты в двух частных случаях: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, а также для произвольной аффинной алгебры и базисного (вакуумного) представления.

Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная простая алгебра Ли, $\widehat{\mathfrak{g}}$ – соответствующая алгебра Каца-Муди. Рассмотрим возрастающую фильтрацию Пуанкаре-Биркгофа-Витта F_s на интегрируемом представлении L_λ алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ и определим L_λ^a как присоединённое градуированное пространство. Определим u-характер пространства L_λ^a по формуле

$$\mathrm{ch}_u\, L_\lambda^a = \sum_{s\geq 0} u^s\, \mathrm{ch}(F_s/F_{s-1}), \tag{7}$$

где мы полагаем $F_{-1} = 0$ и ch обозначает классический характер относительно $\widehat{\mathfrak{h}}^*$. Отметим, что мы ввели переменную u, так как стандартно используемое обозначение q в теории алгебр Каца-Муди занято при определении струнных функций – характеров оператора d.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, e, h, f – стандартный базис. Мы приводим явную конструкцию мономиального базиса в вакуумном представлении $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$. Рассмотрим (q, z, u)-характер L_1^a:

$$\mathrm{ch}_{q,z,u} L_1^a = \sum_{s=0}^{\infty} u^s \,\mathrm{ch}_{q,z}(F_s/F_{s-1}). \tag{8}$$

Используя мономиальные базисы и вертекс-операторную реализацию интегрируемых представлений аффинных алгебр (конструкцию Каца-Френкеля), мы вычисляем градуированный характер представления уровня один.

Предложение 16.
(9)

$$\mathrm{ch}_{q,z,u} L_1^a = \sum_{n^+, n^0, n^- \geq 0} u^{n^+ + n^0 + n^-} z^{2(n^+ - n^-)} \frac{q^{(n^+)^2 + (n^0)^2 + (n^-)^2 + n^+ n^0 + n^0 n^-}}{(q)_{n^+} (q)_{n^0} (q)_{n^-}},$$

где $(q)_n = \prod_{i=1}^{n} (1 - q^i)$.

Получаем важное следствие

Следствие 17.

$$\mathrm{ch}_{q,z,u} L_1^a = \sum_{m \geq 0} \frac{u^m q^{m^2}}{(q)_m} \sum_{-m \leq l \leq m} z^{2l} S_{m,l}(q), \tag{10}$$

где

$$S_{m,l}(q) = \sum_{m \geq \nu \geq m-l-\nu} q^{(\nu+l-m)(\nu+l)+\nu(\nu-m)} \binom{m}{\nu}_q \binom{\nu}{m-l-\nu}_q$$

и $\binom{n}{m}_q = \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}}$.

Это позволяет вычислить (q, z, u)-характеры вакуумных представлений произвольного уровня.

Теорема 18.

$$\mathrm{ch}_{q,z,u} L_k^a = \sum_{\mathbf{n}^-, \mathbf{n}^0, \mathbf{n}^+ \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k} u^{|\mathbf{n}^+| + |\mathbf{n}^0| + |\mathbf{n}^-|} z^{2(|\mathbf{n}^+| - |\mathbf{n}^-|)} \times \frac{q^{\frac{1}{2}(\mathbf{n}^+ A \mathbf{n}^+ + \mathbf{n}^0 A \mathbf{n}^0 + \mathbf{n}^- A \mathbf{n}^-) + \mathbf{n}^+ B \mathbf{n}^0 + \mathbf{n}^0 B \mathbf{n}^-}}{(q)_{\mathbf{n}^+} (q)_{\mathbf{n}^0} (q)_{\mathbf{n}^-}}, \tag{11}$$

где для $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ *мы полагаем* $|\mathbf{n}| = \sum_{i=1}^{k} i \mathbf{n}_i$, *а матрицы* A *и* B *определяются как*

$$A_{i,j} = 2 \min(i, j), \;\; B_{i,j} = \max(0, i + j - k).$$

Пусть теперь $\widehat{\mathfrak{g}}$ – произвольная аффинная алгебра Ли. Для $x \in \mathfrak{g}$ определим производящую функцию $x(z) = \sum_{i>0}(x \otimes t^{-i})z^i$ элементов $x \otimes t^i$, $i < 0$. Рассмотрим ряд $e_\theta(z)$, где θ – старший вес $\mathfrak{g}$ и $e_\theta \in \mathfrak{g}$ – элемент старшего веса. Все коэффициенты

$$\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\leq -1}} (e_\theta \otimes t^i)(e_\theta \otimes t^j)$$

квадрата тока $e_\theta(z)$ зануляются на вакуумном представлении L уровня один. Как следствие, $e_\theta(z)^2$ обращается в ноль и на присоединённом градуированном пространстве L^a. Мы доказываем следующую теорему:

Теорема 19. *Определяющим соотношением в L^a является $e_\theta(z)^2 = 0$.*

Основным средством, используемым нами при изучении градуированных представлений, являются результаты Литтелманна и Фурье о структуре аффинных модулей Демазюра в L. Напомним, что аффинные модули Демазюра $D(N)$ являются представлениями $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$. При этом весь модуль L является индуктивным пределом $D(N)$ при N стремящимся к бесконечности. Мы также используем конструкцию фьюжн-произведения, позволяющую строить градуированные $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$-модули по набору конечномерных представлений $\mathfrak{g}$. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 20. *Пусть $F_\bullet$ – ПБВ фильтрация на представлении L алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ уровня один. Тогда*

a) $\mathrm{gr}_m F_\bullet$ *отфильтровано фьюжн-произведениями $\mathfrak{g}^{**m}$.*

b) *Характер пространства циклических векторов $\mathfrak{g}^{**m}$ равен $\frac{q^{m^2}}{(q)_m}$.*

Алгебры Жу. Случай аффинных алгебр Ли также оказывается важным из-за приложений в математической физике, точнее в конформной теории поля и в теории вертекс-операторных алгебр. С каждой аффинной алгеброй Каца-Муди $\widehat{\mathfrak{g}}$ можно связать два объекта: конформную теорию поля Весса-Зумино-Виттена или, с математической точки зрения, теорию представлений вертекс-операторной алгебры, построенной по $\widehat{\mathfrak{g}}$. При этом пространства состояний конформной теории соответствуют бесконечномерным представлениям вертекс-операторной алгебры. Оказалось, что изучать эти представления удобно с помощью так называемой алгебры Жу – конечномерной ассоциативной (но не коммутативной) алгебры, которая строится по базисному (вакуумному) представлению вертекс-операторной алгебры и содержит в себе информацию о всех остальных представлениях. Процедура вырождения позволяет построить по алгебре Жу другую, на этот раз коммутативную, алгебру, так называемую C_2-алгебру. Возникает вопрос об описании C_2-алгебр и вычислении их градуированного характера. С точки зрения теории представлений, этот вопрос можно сформулировать как задачу о разложении C_2-алгебр на неприводимые представления алгебры $\mathfrak{g}$. В работе мы решаем этот вопрос для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_n$. В частности, мы доказываем гипотезу Габердиэля и Ганнона, изучавших вырождение алгебры Жу с точки зрения конформной теории поля.

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, θ – старший корень $\mathfrak{g}$ и $e_\theta \in \mathfrak{g}$ – старший вектор в присоединённом представлении. Зафиксируем натуральное число k и обозначим через $P_k^+(\mathfrak{g})$ множество доминантных интегрируемых весов $\mathfrak{g}$ уровня k. Напомним, что согласно теореме Френкеля-Жу алгебра Жу уровня k $A(\mathfrak{g};k)$ является фактором универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу, порождённому e_θ^{k+1}:

$$A(\mathfrak{g};k) = U(\mathfrak{g})/\langle e_\theta^{k+1}\rangle.$$

Кроме того, имеется изоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей:

$$A(\mathfrak{g};k) \simeq \bigoplus_{\beta\in P_k^+(\mathfrak{g})} V_\beta \otimes V_\beta^*.$$

Рассмотрим симметрическую алгебру $S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m=0}^\infty S^m(\mathfrak{g})$ векторного пространства $\mathfrak{g}$. Для $v \in S^m(\mathfrak{g})$ и $a \in \mathfrak{g}$ обозначим через $av \in S^{m+1}(\mathfrak{g})$ произведение в симметрической алгебре. Заметим, что каждое пространство $S^m(\mathfrak{g})$ является $\mathfrak{g}$-модулем относительно присоединённого действия. Для $v \in S^m(\mathfrak{g})$ и $a \in \mathfrak{g}$ обозначим через $a \circ v \in S^m(\mathfrak{g})$ присоединённое действие a. C_2-алгебра уровня k $A_{[2]}(\mathfrak{g};k)$ является фактором симметрической алгебры $S(\mathfrak{g})$ по идеалу, порождённому подпространством $V_{k+1} = U(\mathfrak{g}) \circ e_\theta^{k+1} \hookrightarrow S^{k+1}(\mathfrak{g})$:

$$A_{[2]}(\mathfrak{g};k) = S(\mathfrak{g})/\langle V_{k+1}\rangle.$$

Рассмотрим стандартную фильтрацию $F_\bullet$ на универсальной обёртывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$, $\mathrm{gr}_\bullet F \simeq S(\mathfrak{g})$. Пусть $F_\bullet(k)$ – индуцированная фильтрация на факторалгебре $A(\mathfrak{g};k)$. Имеем очевидную сюръекцию

$$A_{[2]}(\mathfrak{g};k) \to \mathrm{gr}_\bullet F(k). \tag{12}$$

Получаем сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей

$$A_{[2]}(\mathfrak{g};k) \to A(\mathfrak{g};k). \tag{13}$$

В частности, $\dim A_{[2]}(\mathfrak{g};k) \geq \sum_{\beta\in P_k^+(\mathfrak{g})} (\dim V_\beta)^2$. Возникает естественный вопрос: когда это неравенство является равенством? Мы доказываем следующие теоремы:

Теорема 21. *$A_{[2]}(k)$ и $A(k)$ изоморфны как $\mathfrak{sl}_n$-модули.*

Теорема 22. *C_2-алгебра $A_{[2]}(\mathfrak{sp}_{2m};k)$ и алгебра Жу $A(\mathfrak{sp}_{2m};k)$ имеют одинаковую размерность.*

Также важным является вопрос изучения градуировки по степени на $A_{[2]}(\mathfrak{g};k)$ и соответствующего градуированного разложения в прямую сумму $\mathfrak{g}$-модулей. Пусть

$$S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m\geq 0} S^m(\mathfrak{g})$$

разложение симметрической алгебры. Это разложение индуцирует разложение C_2-алгебры:

$$A_{[2]}(\mathfrak{g};k) = \bigoplus_{m\geq 0} A^m_{[2]}(\mathfrak{g};k). \tag{14}$$

Каждое из пространств $A^m_{[2]}(\mathfrak{g};k)$ является представлением $\mathfrak{g}$. Задача заключается в разложении $A^m_{[2]}(\mathfrak{g};k)$ в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{g}$-модулей. Гипотетический ответ для типа A дан в работе Габердиэля и Ганнона. Мы доказываем их гипотезу в следующей теореме.

Теорема 23. *Имеем изоморфизм $\mathfrak{sl}_n$-модулей*

$$A^m_{[2]}(k) = \frac{\bigoplus_{\substack{\lambda:\ k\geq\lambda_1,\ \lambda_n\geq 0\\ \lambda_1+\dots+\lambda_n=m}} V_\lambda\otimes V^*_\lambda}{\bigoplus_{\substack{\lambda:\ k-1\geq\lambda_1,\ \lambda_n\geq 0\\ \lambda_1+\dots+\lambda_n=m-1}} V_\lambda\otimes V^*_\lambda},$$

где $\mathfrak{gl}_n$-модуль V_λ рассматривается как $\mathfrak{sl}_n$-модуль со старшим весом $(\lambda_1-\lambda_n,\dots,\lambda_{n-1}-\lambda_n)$.

Мы также получаем аналогичное разложение для симплектических алгебр.

Напомним, что Габердиэль и Годдард определили понятие систем корреляционных функций на римановой сфере, которые играют ключевую роль в аксиоматическом подходе к конформной теории поля. Эти системы $A_{\mathbf{u}}(\lambda)$ зависят от параметров $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)\in(\mathbb{CP}^1\setminus\{0\})^n$ и старшего веса λ. Они естественно обобщают алгебры Жу и C_2-алгебры. Мы доказываем, что системы корреляционных функций имеют естественное описание в терминах пространств коинвариантов

$$L_\lambda/\mathfrak{g}\otimes\prod_{j=1}^n(t^{-1}-u_j^{-1})\mathbb{C}[t^{-1}].$$

Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 24.

$$L_\lambda/\mathfrak{g}\otimes\prod_{j=1}^n(t^{-1}-u_j^{-1})\mathbb{C}[t^{-1}] \simeq \bigoplus_{\mu_1,\dots,\mu_n\in P^k_+} N^{\lambda;k}_{\mu_1,\dots,\mu_n} V_{\mu_1}\otimes\ldots\otimes V_{\mu_n},$$

где $N^{\lambda;k}_{\mu_1,\dots,\mu_n}$ – числа Верлинде уровня k и $u_j\in\mathbb{CP}^1\setminus\{0\}$ попарно различные точки.

Как следствие, получаем

Теорема 25. *Пусть $u_1, \dots, u_n$ попарно различные точки $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$. Тогда пространства $A_{\mathbf{u}}$ снабжены естественной структурой $\mathfrak{g}^{\oplus n}$-модуля и*

$$A_{\mathbf{u}}(\lambda) \simeq \bigoplus_{\mu_1,\dots,\mu_n \in P_+^k} N^{\lambda;k}_{\mu_1,\dots,\mu_n} V_{\mu_1} \otimes \dots \otimes V_{\mu_n}. \tag{15}$$

Заметим, что существование n коммутирующих действий $\mathfrak{g}$ на $A_{\mathbf{u}}(\lambda)$ является проявлением общего факта из теории систем корреляционных функций. Кроме того, если $n = 2$ и $\lambda = 0$, то $N^{0;k}_{\mu_1,\mu_2} = \delta_{\mu_1,\mu_2^*}$ и Теорема 25 сводится к теореме Френкеля-Жу.

Заметим, что точки u_j в Теореме 25 попарно различны. В то же время, пространства $A_{\mathbf{u}}(\lambda)$ определены для всех наборов точек из $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$. Таким образом, следующий вопрос представляется важным и интересным: выполняется ли изоморфизм (15) в случае, когда точки u_j совпадают? Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Мы доказываем, что

Следствие 26. *При $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ (15) верно при всех $\lambda \in P_+^k$ и наборах $\mathbf{u}$.*

Список литературы

[1] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Algebra & Number Theory*, 6-1 (2012), 165–194.

[2] E. Feigin, *The PBW filtration, Demazure modules and toroidal current algebras*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), 4 (2008), 070, 21 p.

[3] E. Feigin, *The PBW filtration*, Representation Theory 13 (2009), 165-181.

[4] E. Feigin, *Degenerate flag varieties and the median Genocchi numbers*, Mathematical Research Letters, 18 (2011), no. 6, pp. 1–16.

[5] E. Feigin, *$\mathbb{G}_a^M$ degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica: Volume 18, Issue 3 (2012), pp. 513–537.

[6] Е.Б.Фейгин, *Системы корреляционных функций, коинварианты и алгебра Верлинде*, Функц. анализ и его прил., 46:1 (2012), 49–64.

[7] E. Feigin, *The median Genocchi numbers, Q-analogues and continued fractions*, European Journal of Combinatorics 33 (2012), pp. 1913–1918.

[8] B. Feigin, E. Feigin, P. Littelmann, *Zhu's algebras, C_2-algebras and abelian radicals*, Journal of Algebra 329 (2011) 130—146.

[9] E. Feigin, P. Littelmann, *Zhu's algebra and the C_2-algebra in the symplectic and the orthogonal cases*, 2010 J. Phys. A: Math. Theor. 43 135206.

[10] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n*, Transformation Groups: Volume 16, Issue 1 (2011), 71–89.

[11] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras*, International Mathematics Research Notices 2011 (24), pp. 5760–5784.