Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 512.55, 512.66

Посицельский Леонид Ефимович

ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА ПОЛУМОДУЛЕЙ И ПОЛУКОНТРАМОДУЛЕЙ: ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена в секторе алгебры и теории чисел Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
зав. отделом МИ РАН — *Орлов Дмитрий Олегович*

доктор физико-математических наук,
профессор НИУ ВШЭ — *Пионтковский Дмитрий Игоревич*

доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой СПбГУ — *Яковлев Анатолий Владимирович*

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится 28 мая 2013 года в 16^{00} часов на заседании диссертационного совета *Д 002.077.03* при *Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН*, расположенном по адресу: *127994, г. Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок 19, стр. 1.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.*

Автореферат разослан «____» марта 2013 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по указанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, — *Соболевский А.Н.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая работа посвящена построению полубесконечной гомологической алгебры ассоциативных алгебраических структур как математической теории в рамках современной гомологической алгебры.

Определение полубесконечных гомологий бесконечномерных алгебр Ли было впервые дано в работе Фейгина[1] (1984). При этом речь шла о конкретных алгебрах Ли Вирасоро и Каца–Муди, а полубесконечные гомологии определялись в терминах явного стандартного комплекса полубесконечных форм. Связь конструкции Фейгина с теорией струн обсуждалась в работе Френкеля–Гарланда–Цукермана[2] (1986).

Феномен двойственности между представлениями бесконечномерной алгебры Ли на дополнительных уровнях был впервые отмечен в работах Фейгина–Фукса[3] (1983) и Рока-Кариди–Уоллака[4] (1984), в которых рассматривались модули Верма над алгеброй Вирасоро. Перечисленные работы положили начало полубесконечной гомологической алгебре бесконечномерных алгебр Ли.

Задача построения полубесконечных гомологий алгебр Ли как двусторонних производных функторов в соответствии с общими принципами современной гомологической алгебры рассматривалась в работе Воронова[5] (1993); при этом речь шла о бесконечномерных алгебрах Ли, градуированных целыми числами так, что все компоненты градуировки конечномерны.

Современное определение полубесконечных гомологий локально линейно компактных (тейтовских) алгебр Ли было дано в монографии Бейлинсона и Дринфельда[6] (2004).

---

[1] Б.Л. Фейгин. Полубесконечные когомологии алгебр Ли, Каца–Муди и Вирасоро. *Успехи матем. наук* **39** (1984), №2, стр. 195–196.

[2] I.B. Frenkel, H. Garland, G.J. Zuckerman. Semi-infinite cohomology and string theory. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **83** (1986), #22, pp. 8442–8446.

[3] Б.Л. Фейгин, Д.Б. Фукс. Модули Верма над алгеброй Вирасоро. *Функц. анализ и его прилож.* **17** (1983), №3, стр. 91–92.

[4] A. Rocha-Caridi, N. Wallach. Characters of irreducible representations of the Virasoro algebra. *Math. Zeitschrift* **185** (1984), #1, pp. 1–21.

[5] A. Voronov. Semi-infinite homological algebra. *Inventiones Math.* **113** (1993), #1, pp. 103–146.

[6] A. Beilinson, V. Drinfeld. Chiral algebras. AMS Colloquium Publications, 51. American Math. Society, Providence, RI, 2004.

Определения полубесконечных гомологий и когомологий ассоциативных алгебр впервые появились в работах Архипова[7,8,9,10] (1997–1998) и далее рассматривались в статье Севостьянова[11] (2001). Эти конструкции нашли свое применение в теории представлений малых квантовых групп (Безрукавников–Финкельберг–Шехтман[12], 1998). Одним из истоков построений Архипова стала работа соискателя [8] (1993) (идеи которой позже нашли свое развитие и более полное изложение в главе 5 монографии соискателя [9] (2005), написанной в соавторстве с А. Полищуком).

Архипов и Севостьянов рассматривали ассоциативные алгебры следующего весьма специального вида. Алгебра A над полем k градуирована целыми числами и снабжена двумя градуированными подалгебрами B и N. Отображение умножения $N\otimes_k B \longrightarrow A$ является изоморфизмом; алгебра B градуирована неположительными числами, в то время как алгебра N градуирована положительными числами и имеет конечномерные компоненты.

В этой ситуации делаются некоторые дополнительные предположения, позволяющие построить по градуированной алгебре A с подалгебрами N и B градуированную алгебру $A^\#$ с теми же двумя подалгебрами N и B, такими что отображение умножения $B\otimes_k N \longrightarrow A^\#$ является изоморфизмом. Комплексу правых A-модулей $M^\bullet$ и комплексу левых $A^\#$-модулей $L^\bullet$ (с определенными ограничениями на градуировки) сопоставляются векторные пространства полубесконечных гомологий $\operatorname{Tor}^A_{\infty/2+i}(M^\bullet, L^\bullet)$. Комплексу левых $A^\#$-модулей $L^\bullet$ и комплексу левых A-модулей $P^\bullet$ (с некоторыми другими ограничениями на градуировки) сопоставляются пространства полубесконечных когомологий $\operatorname{Ext}_A^{\infty/2+i}(L^\bullet, P^\bullet)$.

[7] S.M. Arkhipov. Semi-infinite cohomology of quantum groups. *Comm. in Math. Physics* **188** (1997), #2, pp. 379–405.

[8] S.M. Arkhipov. Semi-infinite cohomology of associative algebras and bar-duality. *Internat. Math. Research Notices* **1997**, #17, pp. 833–864

[9] S.M. Arkhipov. Semi-infinite cohomology of quantum groups II. Topics in quantum groups and finite-type invariants, pp. 3–42, *American Math. Society Translations, Ser. 2,* **185** (1998).

[10] S. Arkhipov. A proof of Feigin's conjecture. *Math. Research Letters* **5** (1998), #3, pp. 403–422.

[11] A. Sevostyanov. Semi-infinite cohomology and Hecke algebras. *Advances in Math.* **159** (2001), #1, pp. 83–141.

[12] R. Bezrukavnikov, M. Finkelberg, V. Schechtman. Factorizable sheaves and quantum groups. *Lecture Notes in Math.* **1691**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1998.

В настоящей диссертации [1] решается задача построения функторов полубесконечных гомологий и когомологий ассоциативных алгебр в максимальной естественной общности. Показано, что (в обозначениях выше) ни вторая подалгебра B, ни градуировка с условиями положительности не нужны для определения полубесконечных (ко)гомологий. Достаточно иметь ассоциативную алгебру R над полем k, подалгебру $K \subset R$, и коалгебру $\mathcal{C}$ над k, в подходящем смысле слова "двойственную" к алгебре K (должно быть задано спаривание $\mathcal{C} \otimes_k K \longrightarrow k$, согласованное с умножением в K и коумножением в $\mathcal{C}$). Подходящие условия плоскости/проективности/инъективности и "интегрируемости" накладываются на эти данные.

Более общим образом, в настоящей работе полубесконечные гомологии и когомологии сопоставляются ассоциативным алгебраическим структурам следующего вида. На комодулях над коалгеброй $\mathcal{C}$ над k есть операция котензорного произведения $\square_{\mathcal{C}}$; котензорное произведение бикомодулей является бикомодулем. Категория бикомодулей над $\mathcal{C}$ является (ассоциативной, некоммутативной) тензорной категорией относительно этой операции с единичным объектом $\mathcal{C}$. *Полуалгеброй* над $\mathcal{C}$ называется объект-алгебра в этой тензорной категории. (Термин "полуалгебра" призван указывать на то, что рассматриваемый объект является коалгеброй "по части переменных" и алгеброй "по остальным переменным".)

Другими словами, полуалгебра $\mathcal{S}$ над коалгеброй $\mathcal{C}$ — это $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$-бикомодуль, снабженный отображениями *полуумножения* $\mathcal{S} \square_{\mathcal{C}} \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ и *полуединицы* $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$, удовлетворяющим подходящим версиям обычных аксиом ассоциативности и единицы. Накладывается условие, согласно которому $\mathcal{S}$ должно быть инъективным левым и правым $\mathcal{C}$-комодулем. В этих предположениях, всякому комплексу правых $\mathcal{S}$-полумодулей $\mathcal{N}^\bullet$ и комплексу левых $\mathcal{S}$-полумодулей $\mathcal{M}^\bullet$ сопоставляются векторные пространства полубесконечных гомологий $\operatorname{SemiTor}^{\mathcal{S}}(\mathcal{N}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$.

Есть два существенно разных типа модулей над коалгебрами: наряду с широко известными комодулями, имеются также *контрамодули.* Если $\mathcal{S}$ — полуалгебра над коалгеброй $\mathcal{C}$, то $\mathcal{C}$-контрамодули $\mathfrak{P}$, снабженные действием $\mathcal{S}$, называются $\mathcal{S}$-*полуконтрамодулями.* В предположениях выше, всякому комплексу левых $\mathcal{S}$-полумодулей $\mathcal{M}^\bullet$ и комплексу левых $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей $\mathfrak{P}^\bullet$ сопоставляются векторные пространства полубесконечных когомологий $\operatorname{SemiExt}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}^\bullet, \mathfrak{P}^\bullet)$.

Понятие полуалгебры над коассоциативной коалгеброй, определенное выше, двойственно к понятию *кокольца* над некоммутативным кольцом. Кокольцам в последние годы уделялось некоторое внимание в научной литературе; отметим в этой связи монографию Бжезинского и Висбауэра "Corings and comodules"[13] (2003). В то же время, хотя контрамодули аналогичны комодулям и есественным образом должны рассматриваться параллельно с ними, они не получали того внимания, которое заслуживают, и оставались почти совершенно забытыми с 1970-х годов (в книге Бжезинского–Висбауэра они не упоминаются). Настоящая работа вновь привлекла внимание к этому классическому определению, принадлежащему Эйленбергу и Муру[14] (1965).

Альтернативный подход к определению полубесконечных когомологий ассоциативных алгебр был предложен Безрукавниковым[15] (2000). Современное изложение этого подхода было дано в совместной работе Безрукавникова с соискателем [2]. Насколько сейчас известно, подход Безрукавникова имеет смысл только для конечномерных ассоциативных алгебр и эквивалентен подходу Архипова–Севостьянова при дополнительном ограничительном требовании наличия градуировки с условиями положительности/отрицательности. В общем случае, можно сказать, пользуясь аналогией с алгебраической топологией, что Безрукавников определяет "полубесконечные когомологии с компактным носителем для ассоциативных алгебр", в то время как Архипов и Севостьянов рассматривали "обычные полубесконечные когомологии". Настоящая диссертация [1] посвящена развитию подхода Архипова–Севостьянова.

Антиэквивалентность категорий модулей Верма над алгеброй Вирасоро на дополнительных уровнях c и $26 - c$, построенная в работах Фейгина–Фукса и Рока-Кариди–Уоллака, указывает на возможность построения (анти)эквивалентности производных категорий представлений на дополнительных уровнях, основанной на использовании резольвент, составленных из модулей Верма. Проблема, возникающая

[13] T. Brzezinski, R. Wisbauer. Corings and comodules. London Math. Society Lecture Note Series, 309. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[14] S. Eilenberg, J.C. Moore. Foundations of relative homological algebra. *Memoirs of the American Math. Society* **55** (1965).

[15] R. Bezrukavnikov. On semi-infinite cohomology of finite dimensional algebras. Electronic preprint `arXiv:math.RT/0005148`, 2000.

в этой связи, состоит в том, что функтор, о котором идет речь, переводит неацикличные комплексы в ацикличные и обратно: например, он сопоставляет тривиальному одномерному модулю на уровне 0 ацикличный бесконечный комплекс модулей на уровне 26.

Построение двойственности между представлениями на дополнительных уровнях в виде эквивалентности триангулированных категорий требует, таким образом, развития подходящей теории "экзотических" производных категорий модулей, в которых некоторые ацикличные комплексы представляют нетривиавльные объекты. Такая теория *полупроизводных категорий* полумодулей и полуконтрамодулей, позволяющая сформулировать двойственность между представлениями локально линейно компактной алгебры Ли на дополнительных уровнях в виде ковариантой эквивалентности полупроизводных категорий категории интегрируемых модулей O и ее "контра" версии, развита в настоящей диссертации.

В заключительных замечаниях к работе Воронова "Semi-infinite homological algebra" поднимался вопрос об определении понятия двустороннего производного функтора, не зависящем от предзаданного класса резольвент. Как известно, в классической гомологической алгебре определяются левые производные функторы (в терминах проективных или им подобных левых резольвент) и правые производные функторы (в терминах инъективных или им подобных правых резольвент). Общее определение двустороннего производного функтора двух аргументов дано в настоящей диссертации. Производный функтор, производимый на свет этой конструкцией, может оказаться, в зависимости от входных данных, как левым, так и правым или двусторонним производным функтором.

Соответственно, конструкция чувствительна к входным данным, таким как отношение эквивалентности на комплексах, задающее версию производной категории, на которой двусторонний производный функтор должен быть определен. Построение производных функторов полубесконечных (ко)гомологий SemiTor и SemiExt требует введения в рассмотрение полупроизводных категорий полумодулей и полуконтрамодулей.

Как известно, в классической гомологической алгебре обычно рассматривались либо ограниченные сверху комплексы и их проективные (или плоские, и т.п.) резольвенты, либо ограниченные снизу комплексы модулей и их инъективные резольвенты. Обсуждение неограниченных с обеих сторон комплексов ограничивалось случаем абелевых категорий или функторов конечной гомологической размерности. Можно приблизительно охарактеризовать классическую гомологическую алгебру как теорию производных категорий, определяемых как локализации гомотопических категорий по классу квазиизоморфизмов, и эквивалентных полным подкатегориям в гомотопических категориях, состоящих из комплесов, подлежащие градуированные объекты которых проективны или инъективны.

Рассмотрение неограниченных комплексов над абелевой категорией бесконечной гомологической размерности, с применением к ним функторов бесконечной гомологической размерности, выводит за пределы классической гомологической алгебры. Одно из решений возникающих в этой связи проблем было предложено в работах Спалтенштейна[16] (1988), Келлера[17] (1994), Бернштейна–Лунца[18] (1994) и др. Оно предполагает необходимость накладывать на рассматриваемые резольвенты условия *гомотопической* проективности, инъективности, плоскости и т.д., зависящие не только от членов комплексов, но и от дифференциалов в них, и, по существу, более сильные, чем соответствующие почленные условия. В терминологии, восходящей к работе Хьюзмоллера, Мура и Сташефа[19] (1974), такие теории (производные категории, производные функторы) называются теориями *первого рода*.

В противоположность предыдущему, теории *второго рода* предполагают рассмотрение комплексов с точностью до отношения эквивалентности, несколько более деликатного, чем классический квазиизоморфизм. Исторически, хотя определение дифференциальных производных функторов второго рода было дано уже в упомянутой работе Хьюзмоллера–Мура–Сташефа, определения производных категорий второго рода впервые появились в связи с задачами про-

---

[16] N. Spaltenstein. Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.* **65**, #2, pp. 121–154, 1988.

[17] B. Keller. Deriving DG-categories. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **27** (1994), #1, pp. 63–102.

[18] J. Bernstein, V. Lunts. Equivariant sheaves and functors. *Lecture Notes in Math.* **1578**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[19] D. Husemoller, J.C. Moore, J. Stasheff. Differential homological algebra and homogeneous spaces. *Journ. Pure Appl. Algebra* **5** (1974), #2, pp. 113–185.

изводной неоднородной кошулевой двойственности. Различные варианты таких теорий предлагались в работе Хинича[20] (2001), манускрипте Бейлинсона и Дринфельда[21] (конец 1990-х), диссертации Лефевра-Хасегавы[22] и изложении Келлера некоторых результатов из нее[23] (2003), и, позже, в работе Келлера, Лоуэн и Николаса[24] (2010).

Современное определение производных категорий второго рода (копроизводных и контрапроизводных категорий) принадлежит соискателю [1, 3]; им же разработаны и основные методы работы с ними. Полупроизводные категории, играющие важную роль в полубесконечной гомологической алгебре, представляют собой некоторую "смесь" производных категорий первого рода "вдоль по переменным алгебры" и второго рода "вдоль по переменным коалгебры".

Цели работы. Основными научными целями настоящей работы являются

- построение теории полубесконечных гомологий и когомологий ассоциативных алгебраических структур в максимальной естественной общности, позволяющей включить как частные случаи классическую теорию полубесконечных гомологий алгебр Ли и такие примеры, как полубесконечные гомологии локально компактных вполне несвязных топологических групп и конечномерных алгебр;

- построение гомологического формализма, делающего возможной формулировку классической двойственности между представлениями бесконечномерных алгебр Ли, таких как алгебры Вирасоро и Каца–Муди, на дополнительных уровнях как эквивалентности триангулированных категорий и обобщение ее на случай ассоциативных алгебр.

[20] V. Hinich. DG coalgebras as formal stacks. *Journ. Pure App. Algebra* **162** (2001), #2–3, pp. 209–250

[21] A. Beilinson, V. Drinfeld. Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves.

[22] K. Lefèvre-Hasegawa. Sur les A_∞-catégories. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot – Paris 7, November 2003. `arXiv:math.CT/0310337`

[23] B. Keller. Koszul duality and coderived categories (after K. Lefèvre). October 2003.

[24] B. Keller, W. Lowen, P. Nicolás. On the (non)vanishing of some derived categories of curved dg algebras. *Journ. Pure Appl. Algebra* **214** (2010), #7, pp. 1271–1284.

Дополнительными научными целями работы являются:

- построение гомологической теории комодулей, контрамодулей, полумодулей и полуконтрамодулей над коалгебрами, кокольцами и полуалгебрами;
- построение левых, правых и двусторонних производных функторов естественных операций, определенных на комодулях, контрамодулях, полумодулях и полуконтрамодулях;
- построение производного комодульно-контрамодульного соответствия как эквивалентности копроизводной категории комодулей и контрапроизводной категории контрамодулей над коассоциативным кокольцом;
- построение полумодульно-полуконтрамодульного соответствия как эквивалентности полупроизводных категорий полумодулей и полуконтрамодулей над полуассоциативной полуалгеброй;
- построение производной относительной неоднородной кошулевой двойственности для полумодулей и полуконтрамодулей над полуалгеброй над кокольцом.

Методы исследования. Для целей настоящей работы соискателем были разработаны и/или использованы такие методы и технические средства, как

- тензорные операции на комодулях и контрамодулях над кокольцом: котензорное произведение, Cohom, контратензорное произведение, Hom комодулей и контрамодулей,
- тензорные операции на полумодулях и полуконтрамодулях над полуалгеброй: полутензорное произведение, SemiHom, контратензорное произведение, Hom полумодулей и полуконтрамодулей,
- свойства ассоциативности тензорных операций между комодулями, контрамодулями, полумодулями и контрамодулями, имеющие место при различных условиях приспособленности, наложенных на участвующие кольцевые и модульные объекты,

- конструкции резольвент для комодулей и контрамодулей над кокольцом $\mathcal{C}$ над кольцом A конечной гомологической размерности: сюръективное отображение в произвольный $\mathcal{C}$-комодуль из A-плоского $\mathcal{C}$-комодуля, вложение произвольного $\mathcal{C}$-контрамодуля в A-инъективный $\mathcal{C}$-контрамодуль,

- конструкции резольвент для полумодулей и полуконтрамодулей над полуалгеброй $\mathcal{S}$ над кокольцом $\mathcal{C}$: сюръективное отображение в произвольный $\mathcal{S}$-полумодуль из A-плоского $\mathcal{S}$-полумодуля, вложение A-плоского $\mathcal{S}$-полумодуля в $\mathcal{C}$-коплоский $\mathcal{S}$-полумодуль, вложение произвольного $\mathcal{S}$-полуконтрамодуля в A-инъективный $\mathcal{S}$-полуконтрамодуль, сюръективное отображение в A-инъективный $\mathcal{S}$-полуконтрамодуль из $\mathcal{C}$-коинъективного $\mathcal{S}$-полуконтрамодуля,

- описание взаимосвязей между естественными классами приспособленных комодулей и контрамодулей над коалгебрами и кокольцами, эквивалентности между *a priori* разными свойствами приспособленности и их комбинациями,

- общее понятие двустороннего производного функтора от функтора двух аргументов со свойством сбалансированности,

- технические приемы и методы работы с производными категориями второго рода и полупроизводными категориями, эквивалентности между экзотическими производными категориями и различными категориями резольвент,

- относительная неоднородная квадратичная двойственность для полуалгебр над коалгебрами/кокольцами и CDG-коалгебр/квази-дифференциальных коколец,

- лемма Накаямы для (бесконечно порожденных) контрамодулей, структурная теория контрамодулей над коалгебрами над полями.

Научная новизна. Диссертация содержит следующие новые концепции и результаты:

- построена полубесконечная гомологическая алгебра ассоциативных алгебраических структур как гомологическая теория полумодулей и полуконтрамодулей над полуассоциативными полуалгебрами над коалгебрами и кокольцами;

- введены определения копроизводных, контрапроизводных и полупроизводных категорий комодулей, контрамодулей, полумодулей и полуконтрамодулей, разработаны методы работы с такими категориями;

- предложено общее определение двустороннего производного функтора от функтора двух аргументов со свойством сбалансированности;

- следуя этому общему определению, построены полубесконечные версии функторов Ext и Tor как двусторонние производные функторы от не точных ни слева, ни справа функторов полутензорного произведения и полугомоморфизмов;

- в частности, дано определение полубесконечных гомологий и когомологий ассоциативных алгебр, не зависящее ни от наличия градуировки с условиями положительности и отрицательности, ни от существования второй, дополнительной подалгебры (зависящее только от ассоциативной алгебры с одной подалгеброй и двойственной к этой подалгебре коалгеброй, с наложенными условиями приспособленности и "интегрируемости");

- даны определения полубесконечных гомологий и когомологий локально компактной вполне несвязной топологической группы относительно ее компактной открытой подгруппы;

- введены понятия контрамодулей над топологическими группами и топологическими кольцами;

- построена эквивалентность полупроизводных категорий полумодулей и полуконтрамодулей над полуассоциативной полуалгеброй над коалгеброй над полем или над кокольцом над некоммутативным кольцом конечной гомологической размерности — производное полумодульно-полуконтрамодульное соответствие;

- построены относительные неоднородные варианты квадратичной и производной кошулевой двойственности для полуалгебр над кокольцами и квази-дифференциальных коколец;
- построена структурная теория контрамодулей над коалгебрами над полями.

Большинство методов и технических средств, перечисленных в предыдущем разделе, являются новыми и специально разработанными для целей настоящей диссертации. В частности, к таковым относятся

- конструкции контратензорного произведения ко/контрамодулей над коалгеброй и кокольцом, полу/контра/модулей над полуалгеброй, функтора SemiHom,
- результаты о свойствах ассоциативности тензорных операций,
- конструкции резольвент для комодулей и контрамодулей над кокольцами, полумодулей и полуконтрамодулей над полуалгебрами,
- результаты о взаимосвязях между свойствами приспособленности контрамодулей над коалгебрами, комодулей и контрамодулей над кокольцами.

Научная значимость работы. Диссертация носит теоретический характер. Она проясняет природу полубесконечных гомологий и когомологий ассоциативных алгебр и развивает новую технику производных категорий второго рода и полупроизводных категорий в гомологической алгебре. Кроме того, введенные в работе алгебраические понятия и конструкции позволяют определить новый класс объектов теории представлений групп и алгебр Ли — контрамодули над топологическими алгебрами Ли, алгебраическими парами Хариш-Чандры и их тейтовскими обобщениями, образующие "контра" версию классической категории O. Таким образом, работа вносит вклад в разработку и осмысление фундаментальных вопросов гомологической алгебры и теории представлений.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались

- на Оберсеминаре Математического Института Макса Планка (в г. Бонне) 16 января 2003 года,
- на семинаре отдела алгебры Математического Института им. В.А. Стеклова (в г. Москве) 13 марта 2007 года, 7 октября 2008 года,
- на семинаре “Геометрия алгебраических многообразий” Математического Института им. В.А. Стеклова (в г. Москве) 22 мая 2008 года,
- на конференции “Молодая математика России” (конференция победителей конкурсов П. Делиня и фонда Дмитрия Зимина “Династия”, в г. Москве) 13 января 2009 года,
- на секции по алгебрам и коалгебрам Первой Международной Конференции по Математике и Статистике в Американском Университете Шарджи (ОАЭ) 20 марта 2010 года,
- на Санкт-Петербургском городском алгебраическом семинаре им. Д.К. Фаддева (в ПОМИ РАН) 21 ноября 2011 года,
- на совместном семинаре по теории чисел Лаборатории Понселе НМУ и сектора алгебры и теории чисел ИППИ РАН (в г. Москве) 14 мая 2012 года,
- на Билефельдском семинаре по теории представлений (в Университете Билефельда, Германия) 28 августа 2012 года.

Результаты мемуара [3], представляющего собой в значительной степени развернутое введение к настоящей работе, докладывались и обсуждались

- на Топологическом Оберсеминаре Математического Института Макса Планка (в г. Бонне) 16 июля 2001 года,
- на семинаре по алгебре в Институте Анри Пуанкаре (в г. Париже) 6 апреля 2009 года,

- на семинаре сектора алгебры и теории чисел ИППИ РАН (в г. Москве) 6 апреля 2010 года.

Результаты препринта [5], основанного на методах, развитых в настоящей работе, докладывались и обсуждались:

- на семинаре отдела алгебры Математического Института им. В.А. Стеклова (в г. Москве) 15 февраля 2011 года,
- на международном воркшопе "Производные категории в алгебраической геометрии" (в г. Москве) 6 сентября 2011 года,
- на семинаре факультета математики НИУ ВШЭ "Гомологические и гомотопические методы в геометрии" (в г. Москве) 2 ноября 2011 года.

Ключевые идеи настоящей диссертации были использованы в работе Гайцгори и Каждана о представлениях групп точек алгебраических групп над двумерными локальными полями[25] (2006).

Объем и структура диссертации. Диссертация защищается в виде монографии на английском языке, состоящей из предисловия, введения, двенадцати глав (включая одну вводную главу), шести приложений, списка литературы из 86 наименований, указателя терминов и указателя обозначений. Объем монографии составляет 373 страницы.

Авторство всей монографии принадлежит соискателю, за исключением двух приложений C и D, написанных соискателем в соавторстве с Д. Румыниным и С. Архиповым, соответственно. В качестве диссертации к защите представляется вся монография, за исключением этих двух приложений.

Таким образом, диссертация состоит из предисловия, введения, двенадцати глав, четырех приложений, и списка литературы из 86 наименований. Объем диссертации составляет 300 страниц.

Публикации. Диссертация опубликована в виде монографии [1] (см. список публикаций в конце автореферата). Близкие и смежные результаты соискателя опубликованы в виде журнальной статьи

[25] D. Gaitsgory, D. Kazhdan. Algebraic groups over a 2-dimensional local field: some further constructions. Studies in Lie theory, pp. 97–130, *Progress in Math.* **243**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

(в соавторстве) и мемуара [2, 3]. Дальнейшее развитие тематика диссертации получила в работах соискателя, опубликованных в виде журнальной статьи [4] (в соавторстве) и трех препринтов [5, 6, 7]. Предшествовавшими работами соискателя, имеющими отношение к теме диссертации, являются журнальная статья [8] и монография [9] (в соавторстве).

Содержание работы

Короткое **предисловие** содержит обсуждение общематематического контекста, в котором находится работа, и природы класса математических объектов, с которыми она имеет дело. Более развернутое **введение** включает описание ключевых идей, короткие формулировки важнейших определений и результатов и обсуждение сходств и различий подходов, использованных в настоящей работе, с другими основными публикациями по ее тематике.

Еще более подробная вводная **глава 0** соединяет в себе функции перечня предварительных сведений и сводки основных результатов книги. В **параграфе 0.1** дается краткий пересказ теории производных категорий неограниченных комплексов модулей над кольцом и функторов Tor и Ext между такими комплексами, развитой в работах Спалтенштейна, Келлера и др. **Параграф 0.2** содержит описание основных определений и результатов теории производных функторов и производных категорий второго рода для неограниченных комплексов комодулей и контрамодулей над коалгеброй над полем. Рассматриваются конструкции функторов котензорного произведения, когомоморфизмов и контратензорного произведения комодулей и контрамодулей, производные функторы Cotor, Coext, Ctrtor и Ext второго рода.

Контрпример, иллюстрирующий сильную зависимость двустороннего производного функтора двух аргументов от отношения эквивалентности на комплексах, в присутствии которого такой функтор строится, приведен в **разделе 0.2.3**. В **разделах 0.2.6–0.2.7** дается набросок конструкции производного комодульно-контрамодульного соответствия для коалгебр над полями и приводится контрпример, показывающий, что эта эквивалентность триангулированных категорий может переводить ацикличные комплексы в неацикличные (т. е., она определена только для производных категорий второго, но не первого рода). Обсуждение производных функторов Cotor первого и второго рода и, в этом контексте, истории гомологической теории коалгебр, комодулей и контрамодулей, а также производных категорий второго рода содержится в **разделе 0.2.10**.

Сводка конструкций и результатов гомологической теории полуалгебр над коалгебрами над полями дается в **параграфе 0.3**. Приводятся определения абелевых категорий полумодулей и полуконтрамодулей, конструкции функторов полутензорного произведения, полугомоморфизмов и контратензорного произведения над полуалгеброй, наброски конструкций двусторонних производных функторов SemiTor и SemiExt, левого производного функтора CtrTor, правых производных функторов Ext для комплексов полумодулей и полуконтрамодулей. Производное полумодульно-полуконтрамодульное соответствие обсуждается в **разделе 0.3.7**. Несколько ссылок на предшествующие публикации других авторов, в которых рассматривались полуалгебры над коалгебрами и им подобные объекты, можно найти в **разделе 0.3.10**.

В **параграфе 0.4**, содержащем предварительные сведения и сводку результатов к главе 11, обсуждаются конструкции неоднородной кошулевой двойственности над базовым кольцом. Определяются свойства квадратичности и кошулевости неотрицательно градуированных колец (удовлетворяющих подходящим условиям плоскости над нулевой градуировочной компонентой), неоднородной квадратичности и кошулевости колец с неотрицательной возрастающей фильтрацией.

В **разделе 0.4.3** дается определение категории CDG-колец и строится (для случая колец с компонентами, проективными и конечно порожденными над нулевой компонентой) двойственность между неоднородными кошулевыми кольцами и кошулевыми CDG-кольцами. Формулируется вариант теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта, утверждающий, что эта двойственность является эквивалентностью категорий. В **разделе 0.4.4** вводится язык квазидифференциальных колец и модулей, и DG-категория CDG-модулей определяется в **разделе 0.4.5**.

В **разделах 0.4.6–0.4.7** содержится обсуждение производной неоднородной кошулевой двойственности (эквивалентности экзотических производных категорий модулей над фильтрованным кольцом и CDG-модулей над двойственным CDG-кольцом) в ситуации над базовым кольцом и, в частности, производной D–Ω двойственности, связывающей комплексы модулей над кольцом дифференциальных операторов и DG-модули над комплексом де Рама. История производной кошулевой двойственности коротко рассказывается в **разделе 0.4.8**.

Глава 1 посвящена теории коколец над ассоциативными кольцами, полуалгебр над кокольцами, комодулей над кокольцами и полумодулей над полуалгебрами. Пусть k — фиксированное коммутативное кольцо, и пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над k. *Кокольцом* $\mathcal{C}$ над A называется объект-коассоциативная коалгебра с коединицей в тензорной категории A-A-бимодулей над k (с операцией тензорного умножения над A). *Левым комодулем* над $\mathcal{C}$ называется левый A-модуль, снабженный структорой объекта-комодуля над $\mathcal{C}$ модульной категории левых A-модулей над тензорной категорией A-A-бимодулей (определение *правого комодуля* над $\mathcal{C}$ аналогично). Категория левых $\mathcal{C}$-комодулей абелева, если $\mathcal{C}$ является плоским правым A-модулем (большая часть результатов монографии предполагает, что $\mathcal{C}$ — плоский левый и правый A-модуль).

Определение операции *котензорного произведения* $\mathcal{N}\mathbin{\square}_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ правого комодуля $\mathcal{N}$ и левого комодуля $\mathcal{M}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ формально двойственно классическому определению тензорного произведения правого и левого модулей над ассоциативной алгеброй над полем. Поскольку, однако, речь идет о кокольце над кольцом (а не просто коалгебре над полем), операция котензорного произведения соединяет в себе тензорное произведение над кольцом A и собственно котензорное произведение в направлении $\mathcal{C}$ относительно A. Поэтому котензорное произведение комодулей над кокольцом $\mathcal{C}$ не является, вообще говоря, ни точным слева, ни точным справа функтором (комодули, подстановка которых в один из аргументов делает этот функтор точным по другому аргументу, называются *коплоскими*).

По той же причине котензорное произведение (би)комодулей над кокольцом не является, вообще говоря, ассоциативным. Ряд достаточных условий (приспособленности), гарантирующих ассоциативность котензорного произведения, сформулированы в **параграфе 1.2**. Предполагая одно из таких условий наложенным, можно рассматривать объекты-ассоциативные алгебры с единицей в тензорной категории $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$-бикомодулей относительно котензорного произведения над $\mathcal{C}$.

Такие объекты $\mathcal{S}$ называются *полуалгебрами* над $\mathcal{C}$, а объекты-модули над ними в тензорных категориях (левых и правых) $\mathcal{C}$-комодулей над тензорной категорией $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$-бикомодулей — *полумодулями* над $\mathcal{S}$. Категория левых $\mathcal{S}$-полумодулей абелева, если $\mathcal{S}$ является коплоским правым $\mathcal{C}$-комодулем (большая часть результатов монографии предполагает, что $\mathcal{S}$ — коплоский левый и правый $\mathcal{C}$-комодуль).

Правому $\mathcal{S}$-полумодулю $\mathcal{N}$ и левому $\mathcal{S}$-полумодулю $\mathcal{M}$, для которых ассоциативно тройное котензорное произведение $\mathcal{N} \mathbin{\square}_{\mathcal{C}} \mathcal{S} \mathbin{\square}_{\mathcal{C}} \mathcal{M}$, сопоставляется k-модуль $\mathcal{N} \lozenge \mathcal{M}$ — их *полутензорное произведение*. Этот не точный ни слева, ни справа и, вообще говоря, частично определенный функтор соединяет в себе тензорное произведение над кольцом A, котензорное произведение в направлении кокольца $\mathcal{C}$ относительно A, и тензорное произведение в направлении полуалгебры $\mathcal{S}$ относительно кокольца $\mathcal{C}$.

Построение производных функторов требует существования приспособленных резольвент. Оказывается, что конструкции таких резольвент в ситуации кокольца $\mathcal{C}$ над ассоциативным кольцом A и полуалгебры $\mathcal{S}$ над $\mathcal{C}$ требуют еще одного предположения — конечности гомологической размерности кольца A. В этих предположениях, в **параграфе 1.1** построено сюръективное отображение на произвольный $\mathcal{C}$-комодуль из A-плоского $\mathcal{C}$-комодуля. В **параграфе 1.3** построено сюръективное отображение на произвольный $\mathcal{S}$-полумодуль из A-плоского $\mathcal{S}$-полумодуля, а также инъективное отображение из произвольного A-плоского $\mathcal{S}$-полумодуля в $\mathcal{C}$-коплоский $\mathcal{S}$-полумодуль. Достаточные условия ассоциативности полутензорного произведения рассматриваются в **параграфе 1.4**.

Целью **главы 2** является построение двусторонних производных функторов Cotor и SemiTor функторов котензорного и полутензорного произведения над кокольцом $\mathcal{C}$ и полуалгеброй $\mathcal{S}$. Областями определения этих двусторонних производных функторов служат не обычные производные категории абелевых категорий комодулей и полумодулей, но их *копроизводные* и *полупроизводные* категории.

Точной тройке (короткой точной последовательности) комплексов над аддитивной категорией A можно сопоставить ее тотализацию (тотальный комплекс) как бикомплекса с тремя строками. Комплекс над точной категорией A с точными функторами бесконечных прямых сумм называется *коацикличным*, если он принадлежит минимальной триангулированной подкатегории гомотопической категории $\mathsf{Hot}(\mathsf{A})$ комплексов над A, содержащей тотализации точных троек комплексов над A и замкнутой относительно бесконечных прямых сумм.

Копроизводной категорией точной категории A с точными функторами бесконечных прямых сумм называется факторкатегория ее гомотопической категории $\mathsf{Hot}(\mathsf{A})$ по толстой подкатегории коацикличных комплексов. *Полупроизводной категорией* (левых или правых) полумодулей над полуалгеброй $\mathcal{S}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ называется факторкатегория гомотопической категории комплексов $\mathcal{S}$-полумодулей по ее толстой подкатегории, состоящей из всех комплексов $\mathcal{S}$-полумодулей, *коацикличных как комплексы* $\mathcal{C}$*-комодулей.*

Комплекс (скажем, правых) $\mathcal{S}$-полумодулей называется *полуплоским*, если его полутензорное произведение над $\mathcal{S}$ с любым $\mathcal{C}$-коацикличным комплексом левых $\mathcal{S}$-полумодулей является ацикличным комплексом k-модулей. Аналогично можно определить коплоские комплексы $\mathcal{C}$-комодулей условием ацикличности котензорного произведения над $\mathcal{C}$ с любым коацикличным комплексом $\mathcal{C}$-комодулей (понятие это, однако, является менее важным, чем предыдущее, поскольку всякий комплекс коплоских $\mathcal{C}$-комодулей является коплоским комплексом $\mathcal{C}$-комодулей).

В **параграфе 2.5** доказывается, что комплексов коплоских $\mathcal{C}$-комодулей достаточно много, т. е., факторкатегория гомотопической категории комплексов коплоских $\mathcal{C}$-комодулей по ее пересечению с толстой подкатегорией коацикличных комплексов $\mathcal{C}$-комодулей эквивалентна копроизводной категории $\mathcal{C}$-комодулей. В **параграфе 2.6** получен аналогичный результат для полуплоских комплексов $\mathcal{C}$-коплоских $\mathcal{S}$-полумодулей: факторкатегория гомотопической категории таких комплексов по ее пересечению с толстой подкатегорией $\mathcal{C}$-коацикличных комплексов $\mathcal{S}$-полумодулей эквивалентна полупроизводной категории $\mathcal{S}$-полумодулей.

Следующая обшая схема построения двусторонних производных функторов двух аргументов сформулирована в **параграфе 2.7**. Пусть H_1 и H_2 — две категории, $\mathsf{H} \subset \mathsf{H}_1 \times \mathsf{H}_2$ — подкатегория, K — категория, и $\Theta\colon \mathsf{H} \longrightarrow \mathsf{K}$ — функтор. Пусть $\mathsf{S}_1 \subset \mathsf{H}_1$ и $\mathsf{S}_2 \subset \mathsf{H}_2$ — локализующие классы морфизмов. Чтобы построить двусторонний производный функтор $\mathbb{D}\Theta\colon \mathsf{H}_1[\mathsf{S}_1^{-1}] \times \mathsf{H}_2[\mathsf{S}_2^{-1}] \longrightarrow \mathsf{K}$, предположим, что удалось найти подкатегории ("резольвент") $\mathsf{F}_1 \subset \mathsf{H}_1$ и $\mathsf{F}_2 \subset \mathsf{H}_2$ со следующими свойствами.

Прежде всего, требуется, чтобы обе подкатегории $\mathsf{F}_1 \times \mathsf{H}_2$ и $\mathsf{H}_1 \times \mathsf{F}_2 \subset \mathsf{H}_1 \times \mathsf{H}_2$ содержались в области определения $\mathsf{H} \subset \mathsf{H}_1 \times \mathsf{H}_2$ функтора Θ. Далее, нужно, чтобы подстановка объекта из F_i в один из аргументов функтора Θ делала его точным по второму аргументу: для любых объектов $F_i \in \mathsf{F}_i$ и морфизмов $s_i \in \mathsf{S}_i$ морфизмы $\Theta(F_1, s_2)$

и $\Theta(s_1, F_2)$ должны быть изоморфизмами в K. Кроме того, резольвент должно быть достаточно много: для каждого $i = 1$, 2, функтор $\mathsf{F}_i[(\mathsf{F}_i \cap \mathsf{S}_i)^{-1}] \longrightarrow \mathsf{H}_i[\mathsf{S}_i^{-1}]$ должен быть эквивалентностью категорий.

Тогда ограничения функтора Θ на подкатегории $\mathsf{F}_1 \times \mathsf{H}_2$ и $\mathsf{H}_1 \times \mathsf{F}_2 \subset \mathsf{H}$ факторизуются через локализации этих подкатегорий по их пересечениям с $\mathsf{S}_1 \times \mathsf{S}_2$, индуцируя искомые двусторонние производные функторы $\mathbb{D}_1\Theta$ и $\mathbb{D}_2\Theta\colon \mathsf{H}_1[\mathsf{S}_1^{-1}] \times \mathsf{H}_2[\mathsf{S}_2^{-1}] \longrightarrow \mathsf{K}$, естественно изоморфные между собой. Отсюда следует, что построенный таким образом производный функтор $\mathbb{D}\Theta$ не зависит от выбора подкатегорий резольвент F_1 и F_2, при условии, что обе подкатегории с перечисленными свойствами существуют.

Применение описанной схемы к функторам котензорного произведения комплексов $\mathcal{C}$-комодулей $\square_{\mathcal{C}}$ и полутензорного произведения комплексов $\boldsymbol{\mathcal{S}}$-полумодулей $\Diamond_{\boldsymbol{\mathcal{S}}}$ (с подходящими локализующими классами морфизмов, состоящими из всех морфизмов комплексов $\mathcal{C}$-комодулей с коацикличными конусами и всех морфизмов комплексов $\boldsymbol{\mathcal{S}}$-полумодулей с $\mathcal{C}$-коацикличными конусами, соответственно), производит двусторонние производные функторы $\mathrm{Cotor}^{\mathcal{C}}(\mathcal{N}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$ и $\mathrm{SemiTor}^{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{\mathcal{N}}^\bullet, \boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet)$. При этом в роли подкатегорий резольвент используются полные подкатегории комплексов коплоских $\mathcal{C}$-комодулей и полуплоских комплексов $\mathcal{C}$-коплоских $\boldsymbol{\mathcal{S}}$-полумодулей, соответственно.

В **главе 3**, композиция и логика изложения материала в которой параллельны главе 1, строится теория контрамодулей над кокольцами и полуконтрамодулей над полуалгебрами над кокольцами.

Пусть $\mathcal{C}$ — кокольцо над некоммутативным кольцом A. *Левым контрамодулем* $\mathfrak{P}$ над $\mathcal{C}$ называется левый A-модуль, снабженный гомоморфизмом левых A-модулей (называемым *отображением контрадействия*) $\pi_{\mathfrak{P}}\colon \mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, \mathfrak{P}) \longrightarrow \mathfrak{P}$, удовлетворяющим подходящим условиям *контраассоциативности* и коединицы. Категория левых $\mathcal{C}$-контрамодулей абелева, если $\mathcal{C}$ является проективным левым A-модулем (большая часть результатов монографии, упоминающих контрамодули, предполагает, что $\mathcal{C}$ — проективный левый и плоский правый A-модуль).

Контрамодули двойственно-аналогичны комодулям; в частности, аналогом операции котензорного произведения является функтор *когомоморфизмов* $\mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}$, сопоставляющий левому $\mathcal{C}$-комодулю $\mathcal{M}$ и левому $\mathcal{C}$-контрамодулю $\mathfrak{P}$ — k-модуль $\mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathfrak{P})$. Поскольку речь идет о кокольце над кольцом (а не просто коалгебре над полем), функтор $\mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}$, соединяющий в себе Hom над кольцом A и собственно когомоморфизмы в направлении $\mathcal{C}$ относительно A, не является, вообще говоря, ни точным слева, ни точным справа функтором. Комодули, подстановка которых в первый аргумент этого функтора делает его точным по второму аргументу, называются *копроективными*, а контрамодули, подстановка которых во второй аргумент делает этот фунтор точным по первому аргументу, называются *коинъективными*.

Для левого $\mathcal{C}$-комодуля $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$-бикомодуля $\mathcal{K}$ и левого $\mathcal{C}$-контрамодуля $\mathfrak{P}$, изоморфизм ассоциативности

$$\mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K} \,\square_{\mathcal{C}}\, \mathcal{M},\ \mathfrak{P}) \simeq \mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K}, \mathfrak{P}))$$

имеет место при одном из достаточных условий (приспособленности), сформулированных в **параграфе 3.2**. Предполагая одно из таких условий наложенным, можно дать определение *левого полуконтрамодуля* $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$ над полуалгеброй $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ как левого $\mathcal{C}$-контрамодуля, снабженного гомоморфизмом левых $\mathcal{C}$-контрамодулей (называемым *отображением полуконтрадействия*) $\mathbf{p}_{\boldsymbol{\mathfrak{P}}}\colon \boldsymbol{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{S}}, \boldsymbol{\mathfrak{P}})$, удовлетворяющим подходящим условиям *полуконтраассоциативности* и полуединицы. Категория левых $\boldsymbol{\mathcal{S}}$-полуконтрамодулей абелева, если $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ является копроективным левым $\mathcal{C}$-комодулем (большая часть результатов монографии, упоминающих полуконтрамодули, предполагает, что $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ — копроективный левый и коплоский правый $\mathcal{C}$-комодуль).

Левому $\boldsymbol{\mathcal{S}}$-полумодулю $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ и левому $\boldsymbol{\mathcal{S}}$-полуконтрамодулю $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$, для которых имеется изоморфизм ассоциативности $\mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{S}}\square_{\mathcal{C}}\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\mathfrak{P}}) \simeq \mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \mathrm{Cohom}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\mathcal{S}}, \boldsymbol{\mathfrak{P}}))$, сопоставляется k-модуль *полугомоморфизмов* $\mathrm{SemiHom}_{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{\mathcal{M}}, \boldsymbol{\mathfrak{P}})$. Этот не точный ни слева, ни справа и, вообще говоря, частично определенный функтор соединяет в себе Hom над кольцом A, когомоморфизмы в направлении кокольца $\mathcal{C}$ относительно A, и Hom в направлении полуалгебры $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ относительно кокольца $\mathcal{C}$.

Сюръективное отображение на произвольный $\mathcal{C}$-комодуль из A-проективного $\mathcal{C}$-комодуля и инъективное отображение из произвольного $\mathcal{C}$-контрамодуля в A-инъективный $\mathcal{C}$-контрамодуль строятся в **параграфе 3.1**. Сюръективное отображение на произвольный

$\mathcal{S}$-полумодуль из A-проективного $\mathcal{S}$-полумодуля и инъективное отображение из произвольного $\mathcal{S}$-полуконтрамодуля в A-инъективный $\mathcal{S}$-полуконтрамодуль построены в **параграфе 3.3**. В том же параграфе строятся инъективное отображение из произвольного A-проективного $\mathcal{S}$-полумодуля в $\mathcal{C}$-копроективный $\mathcal{S}$-полумодуль и сюръективное отображение на произвольный A-инъективный $\mathcal{S}$-полуконтрамодуль из $\mathcal{C}$-коинъективного $\mathcal{S}$-полуконтрамодуля.

Достаточные условия ассоциативности полугомоморфизмов рассматриваются в **параграфе 3.4**.

Целью **главы 4**, изложение в которой параллельно главе 2, является построение двусторонних производных функторов Coext и $\mathrm{SemiExt}$ функторов ко- и полугомоморфизмов над кокольцом $\mathcal{C}$ и полуалгеброй $\mathcal{S}$. Областями определения вторых аргументов этих двусторонних производных функторов являются контрапроизводная категория $\mathcal{C}$-контрамодулей и полупроизводная категория $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей.

Комплекс над точной категорией A с точными функторами бесконечных произведений называется *контраацикличным*, если он принадлежит минимальной триангулированной подкатегории гомотопической категории $\mathsf{Hot}(\mathsf{A})$, содержащей тотализации точных троек комплексов над A и замкнутой относительно бесконечных произведений. *Контрапроизводной категорией* точной категории A с точными функторами бесконечных произведений называется факторкатегория ее гомотопической категории $\mathsf{Hot}(\mathsf{A})$ по толстой подкатегории контраацикличных комплексов.

Полупроизводной категорией левых полуконтрамодулей над полуалгеброй $\mathcal{S}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ называется факторкатегория гомотопической категории (комплексов) левых $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей по ее толстой подкатегории, состоящей из всех комплексов, *контраацикличных как комплексы левых $\mathcal{C}$-контрамодулей.* Комплекс левых $\mathcal{S}$-полумодулей называется *полупроективным*, если комплекс полугомоморфизмов из него в любой $\mathcal{C}$-контраацикличный комплекс левых $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей является ацикличным комплексом k-модулей. Аналогично, комплекс левых $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей называется *полуинъективным*, если комплекс полугомоморфизмов в него из любого $\mathcal{C}$-коацикличного комплекса левых $\mathcal{S}$-полумодулей является ацикличным комплексом k-модулей.

В **параграфе 4.5** показано, что факторкатегория гомотопической категории комплексов копроективных $\mathcal{C}$-комодулей по ее пересечению с толстой подкатегорией коацикличных комплексов $\mathcal{C}$-комодулей эквивалентна копроизводной категории $\mathcal{C}$-комодулей, а факторкатегория гомотопической категории комплексов коинъективных $\mathcal{C}$-контрамодулей по ее пересечению с толстой подкатегорией контраацикличных комплексов $\mathcal{C}$-контрамодулей эквивалентнта контрапроизводной категории $\mathcal{C}$-контрамодулей. Аналогично, в **параграфе 4.6** доказывается, что факторкатегория гомотопической категории полупроективных комплексов $\mathcal{C}$-копроективных $\mathcal{S}$-полумодулей по ее пересечению с толстой подкатегорией $\mathcal{C}$-коацикличных комплексов $\mathcal{S}$-полумодулей эквивалентна полупроизводной категории $\mathcal{S}$-полумодулей, а факторкатегория гомотопической категории полуинъективных комплексов $\mathcal{C}$-коинъективных $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей по ее пересечению с толстой подкатегорией $\mathcal{C}$-контраацикличных комплексов $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей эквивалентна полупроизводной категории $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей.

С помощью этих резольвент, в **параграфе 4.7** строятся двусторонние производные функторы $\mathrm{Coext}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}^\bullet, \mathfrak{P}^\bullet)$ и $\mathrm{SemiExt}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\mathcal{M}}^\bullet, \boldsymbol{\mathfrak{P}}^\bullet)$ функторов когомоморфизмов из $\mathcal{C}$-комодулей в $\mathcal{C}$-контрамодули и полугомоморфизмов из $\mathcal{S}$-полумодулей в $\mathcal{S}$-полуконтрамодули.

В **главе 5** строится производное комодульно-контрамодульное соответствие — эквивалентность между копроизводной категорией левых комодулей и контрапроизводной категорией левых контрамодулей над кокольцом $\mathcal{C}$ над некоммутативным кольцом A конечной гомологической размерности. Кроме того, в главе доказываются более сильные версии некоторых результатов главы 4.

Различные варианты понятий *относительной инъективности* ($\mathcal{C}/A$-инъективности) $\mathcal{C}$-комодулей и *относительной проективности* ($\mathcal{C}/A$-проективности) $\mathcal{C}$-контрамодулей (необходимые также для построения производного полумодульно-полуконтрамодульного соответствия в главе 6) определяются в **параграфе 5.1**.

Контратензорное произведение $\mathcal{N} \odot_{\mathcal{C}} \mathfrak{P}$ правого $\mathcal{C}$-комодуля $\mathcal{N}$ и левого $\mathcal{C}$-контрамодуля $\mathfrak{P}$ — это k-модуль, определяемый как коядро естественной пары отображений $\mathcal{N} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, \mathfrak{P}) \rightrightarrows \mathcal{N} \otimes_A \mathfrak{P}$. Для любых двух коколец $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}$-$\mathcal{C}$-бикомодуля $\mathcal{K}$, функтор из категории левых $\mathcal{C}$-контрамодулей в категорию левых $\mathcal{D}$-комодулей, сопоставляющий $\mathcal{C}$-контрамодулю $\mathfrak{P}$ контратензорное произведение $\mathcal{K} \odot_{\mathcal{C}} \mathfrak{P}$, сопряжен слева к функтору из категории левых $\mathcal{D}$-комодулей в категорию левых $\mathcal{C}$-контрамодулей, сопоставляющему $\mathcal{D}$-комодулю $\mathcal{M}$ модуль всех $\mathcal{D}$-комодульных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{K}, \mathcal{M})$.

Достаточные условия для взаимной ассоциативности котензорного и контратензорного произведений, когомоморфизмов и гомоморфизмов комодулей и контрамодулей над кокольцами приводятся в **параграфе 5.2**, где из них выводится также важная лемма об эквивалентности некоторых свойств приспособленности комодулей и контрамодулей над кокольцами.

Сопряженные функторы $\Psi_{\mathcal{C}}$ и $\Phi_{\mathcal{C}}$ между категориями левых $\mathcal{C}$-комодулей и левых $\mathcal{C}$-контрамодулей определяются правилами $\Psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ и $\Phi_{\mathcal{C}}(\mathfrak{P}) = \mathcal{C} \odot_{\mathcal{C}} \mathfrak{P}$. В **параграфе 5.3** доказывается, что функторы $\Psi_{\mathcal{C}}$ и $\Phi_{\mathcal{C}}$ индуцируют взаимно-обратные эквивалентности между точными категориями $\mathcal{C}/A$-инъективных $\mathcal{C}$-комодулей и $\mathcal{C}/A$-проективных $\mathcal{C}$-контрамодулей.

Описание копроизводной категории $\mathcal{C}$-комодулей и контрапроизводной категории $\mathcal{C}$-контрамодулей как факторкатегорий гомотопических категорий комплексов $\mathcal{C}/A$-инъективных $\mathcal{C}$-комодулей и $\mathcal{C}/A$-проективных $\mathcal{C}$-контрамодулей по подходящим толстым подкатегориям дается в **параграфе 5.4** (другое подобное описание, применимое в несколько большей общности, предлагается в **параграфе 5.5**, где оно используется для построения левого производного функтора Ctrtor над кокольцом). Теорема о производном ко-контра соответствии выводится отсюда как следствие.

Производное полумодульно-полуконтрамодульное соответствие — эквивалентность полупроизводных категорий левых полумодулей и левых полуконтрамодулей над полуалгеброй $\mathbf{S}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ — строится в **главе 6**. Сопряженные функторы $\Psi_{\mathbf{S}}$ и $\Phi_{\mathbf{S}}$ между категориями левых $\mathbf{S}$-полумодулей и левых $\mathbf{S}$-полуконтрамодулей, производные функторы которых $\mathbb{R}\Psi_{\mathbf{S}}$ и $\mathbb{L}\Phi_{\mathbf{S}}$ задают эту эквивалентность триангулированных категорий, определяются правилами $\Psi_{\mathbf{S}}(\mathbf{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ и $\Phi_{\mathbf{S}}(\mathbf{P}) = \mathbf{S} \circledcirc_{\mathbf{S}} \mathfrak{P}$.

Здесь *контратензорное произведение* $\mathbf{N} \circledcirc_{\mathbf{S}} \mathbf{P}$ правого $\mathbf{S}$-полумодуля $\mathbf{N}$ и левого $\mathbf{S}$-полуконтрамодуля $\mathbf{P}$ — это k-модуль, определяемый как коядро естественной пары отображений $(\mathbf{N} \square_{\mathcal{C}} \mathbf{S}) \odot_{\mathcal{C}} \mathbf{P} \rightrightarrows \mathbf{N} \odot_{\mathcal{C}} \mathbf{P}$; а через $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}$ обозначается k-модуль гомоморфизмов в абелевой категории $\mathcal{S}$-полумодулей. Функторы $\Psi_{\mathcal{S}}$ и $\Phi_{\mathcal{S}}$ образуют коммутативные диаграммы с функторами $\Psi_{\mathcal{C}}$ и $\Phi_{\mathcal{C}}$ и забывающими функторами из категорий $\mathcal{S}$-полумодулей и $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей в категории $\mathcal{C}$-комодулей и $\mathcal{C}$-контрамодулей.

Достаточные условия для взаимной ассоциативности полутензорного и контратензорного произведений, полугомоморфизмов и гомоморфизмов полумодулей и полуконтрамодулей над полуалгебрами над кокольцами приводятся в **параграфе 6.2**. Описание полупроизводных категорий $\mathcal{S}$-полумодулей и $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей как факторкатегорий гомотопических категорий комплексов $\mathcal{C}/A$-инъективных $\mathcal{S}$-полумодулей и $\mathcal{C}/A$-проективных $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей дается в **параграфе 6.3**, где также выводится теорема о производном полумодульно-полуконтрамодульном соответствии.

Морфизмы в полупроизводных категориях $\mathcal{S}$-полумодулей и $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей вычисляются (с помощью частично проективных/инъективных резольвент обоих аргументов) в **параграфе 6.5**; там же приводится конструкция левого производного функтора $\mathrm{CtrTor}^{\mathcal{S}}$ функтора контратензорного произведения $\mathcal{S}$-полумодулей и $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей. Теорема, согласно которой производное полумодульно-полуконтрамодульное соответствие преобразует функтор полубесконечных когомологий $\mathrm{SemiExt}_{\mathcal{S}}$ в функтор Hom в полупроизводной категории полумодулей или полуконтрамодулей, а функтор полубесконечных гомологий $\mathrm{SemiTor}^{\mathcal{S}}$ — в левый производный функтор $\mathrm{CtrTor}^{\mathcal{S}}$, доказывается в **параграфе 6.6**.

Целью **главы 7** является описание свойств функториальности зависимости теорий $\mathrm{Cotor}^{\mathcal{C}}(\mathcal{N}^{\bullet}, \mathcal{M}^{\bullet})$ и $\mathrm{Coext}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}^{\bullet}, \mathfrak{P}^{\bullet})$ от их неабелева аргумента — кокольца $\mathcal{C}$ над некоммутативным кольцом A. Понятие совместимой пары морфизмов $A \longrightarrow B$ и $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ для кокольца $\mathcal{C}$ над кольцом A и кокольца $\mathcal{D}$ над кольцом B, а также морфизма из $\mathcal{C}$-комодуля в $\mathcal{D}$-комодуль или из $\mathcal{D}$-контрамодуля в $\mathcal{C}$-контрамодуль, совместимого с такой парой морфизмов, вводится в **параграфе 7.1**. Там же строятся пары сопряженных функторов замены базового кольца, сопоставляющих $\mathcal{C}$-ко/контрамодулю $\mathcal{D}$-ко/контрамодуль, и замены кокольца, сопоставляющих $\mathcal{D}$-ко/контрамодулю $\mathcal{C}$-ко/контрамодуль.

В **разделе 7.2.2** доказывается важная теорема, согласно которой всякий комплекс A-плоских $\mathcal{C}$-комодулей, коацикличный по отношению к абелевой категории произвольных $\mathcal{C}$-комодулей, коацикличен также и по отношению к точной категории A-плоских $\mathcal{C}$-комодулей. Производные функторы функторов замены кольца и кокольца строятся в **параграфе 7.3**.

Отношение эквивалентности на кокольцах, связывающее кокольцо $\mathcal{C}$ над кольцом A и кокольцо $\mathcal{D} = B \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A B$ над кольцом B, где $A \longrightarrow B$ — гомоморфизм колец, превращающий B в строго проективный левый и строго плоский правый A-модуль, рассматривается в **параграфе 7.4**. Теория морфизмов и эквивалентностей Мориты между кольцами и кокольцами обсуждается в **параграфе 7.5**.

Свойства функториальности зависимости полубесконечных гомологий $\operatorname{SemiTor}^{\mathcal{S}}(\mathcal{N}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet)$ и полубесконечных когомологий $\operatorname{SemiExt}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}^\bullet, \mathfrak{P}^\bullet)$ от их неабелева аргумента — полуалгебры $\mathcal{S}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ — рассмативаются в **главе 8**. Понятие морфизма полуалгебр $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$, совместимого с морфизмом колец $A \longrightarrow B$ и морфизмом коколец $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ (для полуалгебры $\mathcal{S}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ над кольцом A и полуалгебры $\mathcal{T}$ над кокольцом $\mathcal{D}$ над кольцом B), вводится в **параграфе 8.1**. Там же строятся пары сопряженных функторов замены базового кокольца, сопоставляющих $\mathcal{T}$-полу(контра)модулю $\mathcal{S}$-полу(контра)модуль, и замены полуалгебры, сопоставляющих $\mathcal{S}$-полу(контра)модулю $\mathcal{T}$-полу(контра)модуль.

Производные функторы функторов замены кокольца и полуалгебры строятся в **параграфе 8.3**. В том же параграфе показано, что производное полумодульно-полуконтрамодульное соответствие преобразует правый производный функтор замены кокольца в полумодулях в левый производный функтор замены кокольца в полуконтрамодулях.

Теория морфизмов и эквивалентностей Мориты между кокольцами и полуалгебрами обсуждается в **параграфе 8.4**. Эквивалентности Мориты между полуалгебрами, вообще говоря, не индуцируют эквивалентностей полупроизводных категорий полумодулей и полуконтрамодулей над такими полуалгебрами, поскольку полупроизводная категория полу(контра)модулей не определяется абелевой категорией полу(контра)модулей, а зависит также от забывающего функтора в абелеву категорию ко/контрамодулей. Соответственно, полубесконечные (ко)гомологии эквивалентных по Морите полуалгебр могут быть существенно разными.

Достаточное условие для эквивалентности полупроизводных категорий при эквивалентности Мориты полуалгебр, связанной с заменой кокольца с помощью строго копроективного/коплоского морфизма Мориты между кокольцами приводится в **разделе 8.4.4**.

Глава 9 посвящена построению структур замкнутых модельных категорий на категориях комплексов комодулей и контрамодулей над кокольцами (рассматриваемых в **параграфе 9.1**) и комплексов полумодулей и полуконтрамодулей над полуалгебрами над кокольцами (обсуждаемых в **параграфе 9.2**). Модельные структуры, о которых здесь идет речь, имеют "полубесконечную" природу, т. е., кофибрантные объекты в них выделяются условиями проективности "по части переменных", в то время как фибрантные объекты выделяются условиями инъективности "по оставшимся переменным".

В частности, фибрантно-кофибрантными объектами модельной категории комплексов $\mathcal{C}$-комодулей являются комплексы копроективных $\mathcal{C}$-комодулей, а фибрантно-кофибрантными объектами модельной категории комплексов $\mathcal{C}$-контрамодулей являются комплексы коинъективных $\mathcal{C}$-контрамодулей. Фибрантно-кофибрантными объектами модельной категории $\mathcal{S}$-полумодулей являются полупроективные комплексы полупроективных $\mathcal{S}$-полумодулей, а фибрантно-кофибрантными объектами модельной категории $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей являются полуинъективные комплексы полуинъективных $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей.

Точнее, корасслоениями в модельной структуре на категории комплексов $\mathcal{C}$-комодулей являются почленно инъективные морфизмы комплексов с A-проективными коядрами, а расслояниями являются почленно сюръективные морфизмы комплексов с $\mathcal{C}/A$-инъективными ядрами. Корасслоениями в модельной структуре на категории комплексов $\mathcal{C}$-контрамодулей являются почленно инъективные морфизмы комплексов с $\mathcal{C}/A$-проективными коядрами, а расслоениями — почленно сюръективные морфизмы комплексов с A-иньетивными ядрами. Корасслоения и расслоения комплексов $\mathcal{S}$-полумодулей и $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей описываются аналогичным образом, с той разницей, что условия проективности и инъективности в направлении $\mathcal{S}$ относительно $\mathcal{C}$ относительно A применяются не только к каждому члену комплексов, но и к комплексам в целом.

"Обычные" инъективная модельная структура на категории комплексов $\mathcal{S}$-полумодулей и проективная модельная структура на категории комплексов $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей коротко обсуждаются в **замечании 9.2.2** в конце главы. Необходимый запас инъективных комплексов инъективных $\mathcal{S}$-полумодулей и проективных комплексов проективных $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей может быть получен применением функторов полумодульно-полуконтрамодульного соответствия $\Phi_{\mathcal{S}}$ и $\Psi_{\mathcal{S}}$ к полупроективным комплексам полупроективных $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей и полуинъективным комплексам полуинъективных $\mathcal{S}$-полумодулей, соответственно.

В **главе 10** излагается важный способ построения полуассоциативных полуалгебр по таким исходным данным, как ассоциативная алгебра с фиксированной подалгеброй и отдельно заданная коалгебра или кокольцо, двойственное к подалгебре. Более элементарная конструкция кокольца, двойственного к кольцу, являющемуся конечно-порожденным проективным правым модулем над своим подкольцом, дана в **разделе 10.1.1**.

Пусть $\mathcal{C}$ — кокольцо над ассоциативным кольцом A и $A \longrightarrow K$ — гомоморфизм ассоциативных колец. На гомоморфизм A-A-бимодулей

$$\phi\colon \mathcal{C} \otimes_A K \longrightarrow A$$

накладываются условия совместимости с коумножением в $\mathcal{C}$ и умножением в K. Такое отображение ϕ позволяет определить на любом правом $\mathcal{C}$-комодуле структуру правого K-модуля и на любом левом $\mathcal{C}$-контрамодуле структуру левого K-модуля. Достаточное условие для того, чтобы первый из этих двух функторов был вполне строгим, сформулировано в **разделе 10.1.4**.

Пусть теперь $f\colon K \longrightarrow R$ — гомоморфизм ассоциативных колец, такой что R является проективным левым K-модулем. Предположим, что структура правого K-модуля на тензорном произведении $\mathcal{C} \otimes_A R$ происходит из структуры правого $\mathcal{C}$-комодуля, согласованной с некоторыми естественными отображениями ("условие интегрируемости"). Тогда на $\mathcal{C}$-$\mathcal{C}$-бикомодуле $\mathcal{S} = \mathcal{C} \otimes_A R$ появляется структура полуалгебры над кокольцом $\mathcal{C}$.

На всяком правом $\mathcal{S}$-полумодуле имеется естественная структура правого R-модуля. Более того, правые $\mathcal{S}$-полумодули могут быть описаны как k-модули, снабженные одновременно структурами правого $\mathcal{C}$-комодуля и правого R-модуля, удовлетворяющими некоторым условиям согласования. Аналогично, на всяком левом $\mathcal{S}$-

полуконтрамодуле имеется естественная структура левого R-модуля; более того, левые $\mathcal{S}$-полуконтрамодули могут быть описаны как k-модули, снабженные одновременно структурами левого $\mathcal{C}$-контрамодуля и левого R-модуля, удовлетворяющими некоторым условиям согласования.

В то же время, в общем случае *неизвестно никакого явного описания категории левых $\mathcal{S}$-полумодулей* в терминах набора данных $(\mathcal{C}, K, R, \phi, f)$. Можно построить только естественную пару сопряженных функторов между категориями левых $\mathcal{S}$-полумодулей и левых R-модулей.

Конструкции коколец и полуалгебр, связанных со структурами сплетения (entwining structures) рассматриваются в **параграфе 10.3**. Конструкция *полупроизведения* двух модулей, принадлежащая Севостьянову, находит свою естественную общность в этом контексте. Приводится также двойственно-аналогичная конструкция модуля *полуморфизмов* между модулем и контрамодулем над структурой сплетения.

Глава 11 посвящена построению теории неоднородной кошулевой двойственности над базовым кокольцом. Условия кошулевости в относительной ситуации над неполупростой базой рассматриваются в присутствии условий плоскости или проективности над такой базой.

Неотрицательно градуированная полуалгебра $\mathcal{S}$ над кокольцом $\mathcal{C}$ над ассоциативным кольцом A называется *коплоской справа кошулевой*, если ее нулевая компонента градуировки совпадает с $\mathcal{C}$, относительная приведенная бар-конструкция $\mathcal{S}$ над $\mathcal{C}$ не имеет гомологий вне диагонали, полуалгебра $\mathcal{S}$ плоска справа над A, и диагональные гомологии удовлетворяют условию коплоскости справа над $\mathcal{C}$. Аналогично определяется класс *плоских справа и относительно коплоских слева кошулевых* градуированных полуалгебр $\mathcal{S}$ над $\mathcal{C}$.

Неотрицатрельно градуированное кокольцо $\mathcal{D}$ над кольцом A, нулевая компонента градуировки которого равна $\mathcal{C}$, называется *коплоским справа кошулевым* над кокольцом $\mathcal{C}$, если относительная приведенная кобар-конструкция $\mathcal{D}$ над $\mathcal{C}$ не имеет когомологий вне диагонали, диагональные когомологии удовлетворяют условию плоскости справа над A, и кокольцо $\mathcal{D}$ коплоско справа над $\mathcal{C}$. Аналогично определяется класс *плоских справа и относительно коплос-*

ких слева кошулевых градуированных коколец $\mathcal{D}$ над $\mathcal{C}$. Согласно **теореме 11.4.3**, категории кошулевых градуированных полуалгебр и кошулевых градуированных коколец (с соответствующими условиями (ко)плоскости) над одним и тем же (фиксированным, или даже переменным) базовым кокольцом эквивалентны между собой.

Известная теорема о градуированных алгебрах над полями утверждает, что если в такой алгебре есть центральный элемент степени 1, не являющийся делителем нуля, то факторалгебра по идеалу, порожденному таким элементом, кошулева тогда и только тогда, когда исходная алгебра кошулева. Иными словами, это значит, что прямая сумма компонент фильтрации (алгебра Риса) ассоциативной алгебры с возрастающей фильтрацией кошулева тогда и только тогда, когда присоединенная градуированная алгебра кошулева. В **параграфе 11.5** доказывается аналогичное утверждение для полуалгебр над кокольцами, снабженных возрастающей фильтрацией, удовлетворяющей подходящим условиям (ко)плоскости. Полуалгебра с возрастающей фильтрацией, удовлетворяющая этим эквивалентным условиям, называется *неоднородной кошулевой* (с соответствующими условиями (ко)плоскости) над своим кокольцом.

Понятие *квазидифференциального кокольца* призвано отвечать на вопрос о том, какая структура на коалгебре поливекторных полей на гладком многообразии соответствует дифференциалу де Рама на алгебре дифференциальных форм. Квазидифференциальным кокольцом $\mathcal{D}^{\sim}$ над ассоциативным кольцом A называется градуированное кокольцо, снабженное нечетным кодифференцированием ∂ степени 1 с нулевым квадратом и нулевыми k-модулями когомологий. Подлежащим градуированным кокольцом квазидифференциального кокольца $\mathcal{D}^{\sim}$ считается коядро $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\sim}/\partial\mathcal{D}^{\sim}$ дифференциала ∂. Квазидифференциальное кокольцо $\mathcal{D}^{\sim}$ называется *кошулевым* (с подходящими условиями (ко)плоскости), если градуированное кокольцо $\mathcal{D}$ кошулево над своей нулевой компонентой.

В **параграфе 11.6** рассматривается конструкция неоднородной квадратичной двойственности, сопоставляющая неоднородной кошулевой полуалгебре $(\mathbf{S}^{\sim}, F)$ над кокольцом $\mathcal{C}$ кошулево квазидифференциальное кокольцо $\mathcal{D}^{\sim}$ над $\mathcal{C}$. Присоединенная градуированная полуалгебра $\mathbf{S}$ фильтрованной полуалгебры $\mathbf{S}^{\sim}$ связана при этом (однородной) кошулевой двойственностью с градуированным кокольцом

$\mathcal{D}$, а прямая сумма компонент фильтрации полуалгебры $\mathcal{S}^{\sim}$ — с градуированным кокольцом $\mathcal{D}^{\sim}$.

Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта в контексте относительной неоднородной квадратичной двойственности утверждает, что описанный функтор является эквивалентностью категорий. Нетривиальная часть этого утверждения состоит в том, что всякое кошулево квазидифференциальное кокольцо происходит из некоторой неоднородной кошулевой полуалгебры. Теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта для алгебр Ли над полями, плоских алгебр Ли над коммутативными кольцами, и плоских алгеброидов Ли над коммутативными кольцами являются частным случаем этого общего утверждения. Другим частным случаем является теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта для неоднородных кошулевых алгебр и CDG-алгебр над полями, полученная в предшествовавших работах соискателя [8, 9][26].

Квазидифференциальным комодулем или *контрамодулем* над квазидифференциальным кокольцом $(\mathcal{D}^{\sim}, \partial)$ называется произвольный градуированный $\mathcal{D}^{\sim}$-комодуль или контрамодуль (без дифференциала). В **параграфе 11.7** показано, что квазидифференциальные $\mathcal{D}^{\sim}$-комодули и контрамодули образуют DG-категории. Теорема производной кошулевой двойственности, доказанная в **параграфе 11.8**, утверждает, что для неоднородной кошулевой полуалгебры $\mathcal{S}^{\sim}$ и кошулева квазидифференциального кокольца $\mathcal{D}^{\sim}$ полупроизводная категория $\mathcal{S}^{\sim}$-полумодулей эквивалентна копроизводной категории квазидифференциальных комодулей над $\mathcal{D}^{\sim}$, а полупроизводная категория $\mathcal{S}^{\sim}$-полуконтрамодулей эквивалентна контрапроизводной категории квазидифференциальных контрамодулей над $\mathcal{D}^{\sim}$. Эти эквивалентности триангулированных категорий преобразуют функтор $\mathrm{SemiTor}^{\mathcal{S}^{\sim}}$ в функтор Cotor квазидифференциальных комодулей над $\mathcal{D}^{\sim}$, а функтор $\mathrm{SemiExt}_{\mathcal{S}^{\sim}}$ в функтор Coext квазидифференциальных комодулей и контрамодулей над $\mathcal{D}^{\sim}$.

Целью **приложения A** является построение основ структурной теории контрамодулей над коалгебрами над полями. В **разделе A.1.1** приводится интерпретация контрамодулей над коалгеброй, двойственной к алгебре формальных степенных рядов Тейлора,

[26]См. также A. Braverman, D. Gaitsgory. Poincaré–Birkhoff–Witt theorem for quadratic algebras of Koszul type. *Journ. of Algebra* **181** (1996), #2, p. 315–328.

как векторных пространств с *операцией бесконечного суммирования*; при этом показано, что такое бесконечное суммирование не может быть, вообще говоря, интерпретировано как какой-либо предел конечных частичных сумм.

Известно, что всякий комодуль над коассоциативной коалгеброй $\mathcal{C}$ над полем k является объединением своих конечномерных подкомодулей, причем последние являются комодулями над конечномерными подкоалгебрами $\mathcal{C}$. Контрпримеры показывают, что контрамодули не обладают такими свойствами: что естественное отображение из $\mathcal{C}$-контрамодуля в проективный предел его конечномерных фактор-контрамодулей может не быть инъективным. Более того, структура $\mathcal{C}$-контрамодуля на конечномерном векторном пространстве может не происходить из структуры контрамодуля ни над какой конечномерной подкоалгеброй $\mathcal{C}$.

Классическая *лемма Накаямы*, широко используемая в коммутативной алгебре, применима к конечно порожденным модулям. Лемма Накаямы для контрамодулей, доказанная в **параграфе A.2**, не зависит ни от каких предположений конечной порожденности. В том же параграфе доказывается лемма о классификации контрамодулей над бесконечной прямой суммой коалгебр. Взятые вместе, эти результаты позволяют получить классификацию неприводимых контрамодулей над коалгеброй $\mathcal{C}$. Все такие контрамодули конечномерны и происходят из неприводимых контрамодулей над простыми конечномерными подкоалгебрами $\mathcal{C}$; в частности, имеется биективное соответствие между неприводимыми $\mathcal{C}$-контрамодулями и неприводимыми $\mathcal{C}$-комодулями.

Важная лемма об эквивалентности трех свойств приспособленности контрамодулей над коалгеброй над полем — контраплоскости, коинъективности и проективности — доказывается в **параграфе A.3**. Длинное замечание в конце этого параграфа вводит понятие контрамодуля над топологическим ассоциативным кольцом и намечает пути обобщения результатов приложения на случай таких контрамодулей.

Сравнению теории полубесконечных гомологий и когомологий полуалгебр над коалгебрами, построенной в настоящей работе, с теориями полубесконечных гомологий и когомологий ассоциативных алгебр, рассматривавшимися в предшествовавших работах Архипова и

Севостьянова, посвящено **приложение B**. По градуированной ассоциативной алгебре R над полем k, снабженной двумя градуированными подалгебрами K и B, такими что K сосредоточена в отрицательных градуировках и имеет конечномерные компоненты, а B сосредоточена в неотрицательных градуировках, и при этом отображение умножения $K \otimes_k B \longrightarrow R$ является изоморфизмом, можно построить градуированную полуалгебру $\mathcal{S}$ над градуированной коалгеброй $\mathcal{C}$, двойственной к алгебре K.

Предположим, что ту же полуалгебру $\mathcal{S}$ можно получить аналогичной с точностью до перемены левой и правой сторон умножения конструкцией из градуированной алгебры $R^\#$ с теми же двумя подалгебрами K и B, для которой отображение умножения $B \otimes_k K \longrightarrow R^\#$ является изоморфизмом. Тогда категория градуированных правых $\mathcal{S}$-полумодулей, сосредоточенных в неположительных градуировках, описывается как категория градуированных правых R-модулей; категория градуированных левых $\mathcal{S}$-полумодулей, сосредоточенных в неположительных градуировках, описывается как категория градуированных левых $R^\#$-модулей; и категория градуированных левых $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей, сосредоточенных в неотрицательных градуировках, описывается как категория градуированных левых R-модулей (с соответствующим ограничением на градуировки).

Налагая на один из модулей условие проективности над K, функтор полугомоморфизмов $\mathrm{SemiHom}_{\mathcal{S}}$ можно описать, следуя подходу Архипова, в терминах функторов тензорного произведения над R и гомоморфизмов над $R^\#$. Аналогичный подход к описанию функтора полутензорного произведения $\lozenge_{\mathcal{S}}$ в общем случае не проходит из-за того, что функтор контратензорного произведения над $\mathcal{S}$ хотя и близок, но отличается от функтора тензорного произведения над R. Эта проблема не встает в рамках подхода Севостьянова, позволяющего описать функтор полутензорного произведения в терминах функторов котензорного произведения над $\mathcal{C}$ и тензорного произведения над B в предположении проективности одного из перемножаемых модулей относительно K.

Применительно к комплексам модулей, сосредоточенных в, соответственно, неположительных и неотрицательных градуировках, полупроизводные категории полумодулей и полуконтрамодулей не отличаются от обычных производных категорий модулей. Конструкции резольвент, предложенные в работах Архипова, обладают необходимыми свойствами приспособленности, позволяющими использовать их для вычисления производных функторов SemiTor и SemiExt. Как объяснено в **параграфе B.4**, это позволяет сделать заключение о согласованности конструкций функторов SemiExt и SemiTor из настоящей работы с конструкцией функтора $\mathrm{Ext}^{\infty/2+*}$, данной Архиповым, и конструкцией функтора $\mathrm{Tor}_{\infty/2+*}$, принадлежащей Севостьянову.

Отдельный интерес представляет случай, когда подалгебра $K \subset R$ конечномерна. В этом случае, предполагая, что R является проективным левым K-модулем и не используя ни градуировки, ни существования дополнительной подалгебры B, всегда можно построить полуалгебру $\mathcal{S} = \mathcal{C} \otimes_K R$, где $\mathcal{C} = K^*$. Предполагая дополнительно, что $\mathcal{S}$ является инъективным правым K-модулем, можно построить и соответствующую алгебру $R^{\#} = \mathcal{S} \mathbin{\square}_{\mathcal{C}} K$ с подалгеброй K.

Категории правых $\mathcal{S}$-полумодулей, левых $\mathcal{S}$-полумодулей и правых $\mathcal{S}$-полуконтрамодулей описываются как категории правых R-модулей, левых $R^{\#}$-модулей, и левых R-модулей, соответственно. В подходящих предположениях приспособленности модулей, функторы полутензорного произведения и полугомоморфизмов над $\mathcal{S}$ описываются в терминах функторов тензорного произведения и гомоморфизмов над R и $R^{\#}$ формулами $N \lozenge_{\mathcal{S}} M \simeq N \otimes_R \mathrm{Hom}_{R^{\#}}(\mathcal{S}, M)$ и $\mathrm{SemiHom}_{\mathcal{S}}(M, P) \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\#}}(M,\ \mathcal{S} \otimes_R P)$, следуя подходу Архипова.

Предполагая, что дополнительная подалгебра $B \subset R$, $R^{\#}$ все-таки имеется, применимы и конструкции резольвент из работ Архипова. Последние удовлетворяют необходимым условиям приспособленности и $\mathcal{C}$-ко/контраацикличности конусов, позволяющим использовать их для вычисления функторов полубесконечных (ко)гомологий $\mathrm{SemiTor}^{\mathcal{S}}$ и $\mathrm{SemiExt}_{\mathcal{S}}$. Соответствующие явные комплексы выписаны в **параграфе B.5**.

Приложение C, написанное в соавторстве с Д. Румыниным, не является частью настоящей диссертации. В **приложении D**, написанном в соавторстве с С. Архиповым и также не являющемся частью диссертации, результаты диссертации находят свои приложения к теории представлений бесконечномерных алгебр Ли и их полубесконечных (ко)гомологий.

Две конструкции, “левая” и “правая”, полуассоциативной полуалгебры над коалгеброй по центральному расширению $\varkappa$ тейтовской пары Хариш-Чандры $(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ (состоящей из тейтовской алгебры Ли $\mathfrak{g}$, компактной открытой подалгебры $\mathfrak{h}$ в ней, и действующей на них кокоммутативной алгебры Хопфа $\mathcal{C}$, связанной спариванием с $\mathfrak{h}$) приведены в **параграфе D.2**. Левые полумодули над "левой" полуалгеброй $\mathcal{S}^l_\varkappa(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ описываются как алгебраические модули Хариш-Чандры над $(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ с центральным зарядом $\varkappa$, а левые полуконтрамодули над "правой" полуалгеброй $\mathcal{S}^r_\varkappa(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ — как контрамодули Хариш-Чандры. Последние образуют "контра" версию $\mathsf{O}^{\mathsf{ctr}}_\varkappa(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ категории $\mathsf{O} = \mathsf{O}(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда.

Согласно теореме из **параграфа D.3**, доказательство которой основано на результатах главы 11, "левая" и "правая" полуалгебры, связанные с тейтовской парой Хариш-Чандры $(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$, изоморфны с точностью до сдвига центрального заряда на величину канонического центрального заряда $\varkappa_0$, т. е., $\mathcal{S}^r_{\varkappa+\varkappa_0}(\mathfrak{g}, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{S}^l_\varkappa(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$. Ввиду этого изоморфизма, следствием теоремы о полумодульно-полуконтрамодульном соответствии из главы 6 настоящей диссертации становится теорема об эквивалентности полупроизводных категорий категории $\mathsf{O}_\varkappa(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ алгебраических модулей Хариш-Чандры с центральным зарядом $\varkappa$ и категории $\mathsf{O}^{\mathsf{ctr}}_{\varkappa+\varkappa_0}(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ контрамодулей Хариш-Чандры с центральным зарядом $\varkappa + \varkappa_0$.

Классическое понятие полубесконечных (ко)гомологий бесконечномерных алгебр Ли, называемых вразнобой различными авторами "полубесконечными гомологиями" или "полубесконечными когомологиями", интерпретируется в контексте приложения D как *полубесконечные гомологии* алгебр Ли. Определение *полубесконечных когомологий* алгебр Ли, принадлежащее авторам приложения, дается в **параграфе D.5**.

Теорема сравнения полубесконечных гомологий полуассоциативных полуалгебр и бесконечномерных алгебр Ли доказывается в **параграфе D.6**. При этом необходимо предполагать, что линейно компактная алгебра Ли $\mathfrak{h}$ двойственна к конильпотентной коалгебре Ли, а алгебра Хопфа $\mathcal{C}$ является ее конильпотентной кообертывающей коалгеброй. В этом случае для любого комплекса $\mathcal{N}^\bullet$ в категории $\mathsf{O}_{-\varkappa-\varkappa_0}(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ и комплекса $\mathcal{M}^\bullet$ в категории $\mathsf{O}_\varkappa(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ имеет место естественный изоморфизм градуированных векторных пространств $\mathrm{SemiTor}_*^{\mathcal{S}^l_\varkappa}(\mathcal{N}^\bullet, \mathcal{M}^\bullet) \simeq H^{\mathfrak{h}}_{\infty/2+*}(\mathfrak{g},\ \mathcal{N}^\bullet \otimes_k \mathcal{M}^\bullet)$. Аналогичный изоморфизм связывает пространства SemiExt над полуалгеброй $\mathcal{S}^l_\varkappa(\mathfrak{g}, \mathcal{C})$ с полубесконечными когомологиями алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Целью **приложения E** является определение понятий полубесконечных гомологий и когомологий локально компактных вполне несвязных топологических групп. Группе G из этого класса с фиксированной компактной открытой подгруппой H и коммутативному кольцу k сопоставляется полуалгебра $\mathcal{S}_k(G,H)$ локально постоянных k-значных функций с компактным носителем на G над коалгеброй/кокольцом локально постоянных k-значных функций на H над кольцом k.

Все полуалгебры $\mathcal{S}_k(G,H)$ при фиксированных G и k и разных выборах подгруппы $H \subset G$ эквивалентны по Морите, т. е., абелевы категории $\mathcal{S}_k(G,H)$-полумодулей и $\mathcal{S}_k(G,H)$-полуконтрамодулей не зависят от H. Первая есть категория гладких (дискретных) G-модулей над k. Вторая называется категорией *G-контрамодулей* над k; ее объекты суть k-модули P, снабженные отображением, сопоставляющим каждой конечно-аддитивной P-значной мере с компактным носителем, определенной на открыто-замкнутых подмножествах G, элемент из P (и удовлетворяющие подходящим условиям контраассоциативности и единицы).

Однако, полупроизводные категории $\mathcal{S}_k(G,H)$-полумодулей и $S_k(G,H)$-контрамодулей зависят очень существенно от H. Соответственно, от H сильно зависят и функторы SemiTor и SemiExt над $\mathcal{S}_k(G,H)$. *Полубесконечными гомологиями* группы G относительно ее подгруппы H с коэффициентами в комплексе гладких G-модулей $N^\bullet$ над k называются k-модули $\mathrm{SemiTor}_*^{\mathcal{S}_k(G,H)}(N^\bullet,k)$. Полубесконечные гомологии локально компактных вполне несвязных топологических групп представляют собой некую “смесь” гомологий дискретных групп и когомологий проконечных групп. Аналогично, *полубесконечными когомологиями* группы G относительно H с коэффициентами в комплексе G-контрамодулей $P^\bullet$ над k называются k-модули $\mathrm{SemiExt}^*_{\mathcal{S}_k(G,H)}(k,P^\bullet)$. Зависимость полубесконечных (ко)гомологий G от кольца коэффициентов k не является существенной (однако, кольцо k должно иметь конечную гомологическую размерность, чтобы определение было применимо).

Параграф E.4 содержит ряд замечаний о конструкции Гайцгори–Каждана кокольца “про-полумер”, связанного с группой двумерных петель или, более общим образом, с групповым объектом в категории инд-про-инд-про-конечных множеств. Переход от векторных пространств к про-векторным пространствам меняет местами роли алгебр и коалгебр в гомологической теории, изложенной в настоящей работе, поскольку тензорное произведение векторных пространств коммутирует с прямыми суммами, а про-векторных пространств — с прямыми произведениями, но не наоборот (как объясняется в **замечании 2.7**). Соответственно, при работе с про-векторными пространствами роль полуалгебр над коалгебрами в этой теории переходит к кокольцам.

Пусть $\mathbb{H}$ — групповой объект в категории про-инд-про-конечных множеств, представимый проективной системой локально компактных вполне несвязных топологических групп и открытых сюръективных отображений между ними, и пусть k — поле характеристики 0. Категория представлений $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ в про-k-векторных пространствах имеет естественную структуру тензорной категории с единичным объектом, задаваемым проективной системой пространств гладких мер с компактным носителем на локально компактных вполне несвязных топологических факторгруппах группы $\mathbb{H}$ (с отображениями прямого образа мер). Категория представлений $\mathbb{H}$ является модульной категорией над этой тензорной категорией.

Пусть $\mathbb{G}$ — групповой объект в категории инд-про-инд-про-конечных множеств, содержащий $\mathbb{H}$ в качестве подгруппы и удовлетворяющий некоторым условиям. У такой группы есть каноническое центральное расширение c_0 с ядром k^*. Произвольному центральному расширению c' группы $\mathbb{G}$ с ядром k^* сопоставляется пространство "про-полумер на $\mathbb{G}$ относительно $\mathbb{H}$ на уровне c'", являющихся мерами в направлении $\mathbb{H}$ и функциями в направлении $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ на $\mathbb{G}$. Это пространство оказывается кокольцом с коединицей в тензорной категории представлений $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$; левые комодули над ним суть представления $\mathbb{G}$ на уровне c', а правые — на уровне $c'' = c_0 - c'$. Функтор котензорного произведения над кокольцом про-полумер сопоставляет двум представлениям $\mathbb{G}$ на уровнях c' и c'' про-k-векторное пространство. Пользуясь методами, развитыми в настоящей работе, можно построить двусторонний производный функтор этого не точного ни слева, ни справа функтора двух аргументов. Областью определения этого производного функтора являются соответствующие полупроизводные категории.

Цель **приложения F** — привести нетривиальный пример полуалгебры над кокольцом, не являющимся коалгеброй. Такая полуалгебра сопоставляется гладкому аффинному алгебраическому группоиду (M, G), снабженному гладким замкнутым подгруппоидом (M, H) с тем же многообразием вершин. В приложении показано, что "левая" и "правая" конструкции такой полуалгебры приводят к двум полуалгебрам, естественным образом эквивалентным по Морите между собой.

С аффинным алгебраическим группоидом (M, H) с многообразием вершин M и многообразием стрелок H связывается кокольцо $\mathcal{C} = O(H)$ регулярных функций на H над коммутативным кольцом $A = O(M)$ регулярных функций на M. Левое и правое действия A на $\mathcal{C}$ при этом различны и происходят из отображений "конца" и "начала стрелки" $H \rightrightarrows M$, в то время как коумножение в $\mathcal{C}$ происходит из отображения композиции $H \times_M H \longrightarrow H$. Если многообразие M и отображения $H \rightrightarrows M$ гладкие, то у кокольца $(A, \mathcal{C})$ есть естественная автоэквивалентность Мориты, определяемая в терминах модулей дифференциальных форм старшей степени на M и H.

С гладким аффинным группоидом (M, G) можно связать алгеброид Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом $A = O(M)$ и его обертывающую ассоциативную алгебру $U_A(\mathfrak{g})$. Если группоид (M, H) вложен в качестве замкнутого подгруппоида в группоид (M, G), конструкция из главы 10 позволяет построить по ассоциативным кольцам $A \subset U_A(\mathfrak{h}) \subset U_A(\mathfrak{g})$ и кокольцу $(A, \mathcal{C})$ "левую" и "правую" полуалгебры $\mathcal{S}^l(G, H) = U_A(\mathfrak{g}) \otimes_{U_A(\mathfrak{h})} \mathcal{C}$ и $\mathcal{S}^r(G, H) = \mathcal{C} \otimes_{U_A(\mathfrak{h})^{\mathrm{op}}} U_A(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}$. Естественная автоэквивалентность Мориты кокольца $\mathcal{C}$ трансформирует одну из этих полуалгебр в другую. Последнее утверждение является обобщением классической эквививалентности Мориты между алгеброй дифференциальных операторов на гладком аффинном многообразии и противоположной к ней ассоциативной алгеброй.

Список публикаций

[1] L. Positselski. Homological algebra of semimodules and semicontramodules: Semi-infinite homological algebra of associative algebraic structures. Appendix C in collaboration with D. Rumynin; Appendix D in collaboration with S. Arkhipov. Monografie Matematyczne IMPAN, vol. 70, Springer/Birkhäuser Basel, 2010. xxiv+349 pp.

[2] R. Bezrukavnikov, L. Positselski. On semi-infinite cohomology of finite-dimensional graded algebras. *Compositio Math.* **146**, #2, p. 480–496, 2010.

[3] L. Positselski. Two kinds of derived categories, Koszul duality, and comodule-contramodule correspondence. *Memoirs of the American Math. Society* **212**, #996, 2011. vi+133 pp.

[4] A. Polishchuk, L. Positselski. Hochschild (co)homology of the second kind I. *Transactions of the American Math. Society* **364**, #10, p. 5311–5368, 2012.

[5] L. Positselski. Coherent analogues of matrix factorizations and relative singularity categories. Electronic preprint `arXiv:1102.0261 [math.CT]`, 68 pp., 2011.

[6] L. Positselski. Weakly curved A_∞-algebras over a topological local ring. Electronic preprint `arXiv:1202.2697 [math.CT]`, 167 pp., 2012.

[7] L. Positselski. Contraherent cosheaves. Electronic preprint `arXiv:1209.2995 [math.CT]`, 186 pp., 2012–13.

[8] Л.Е. Посицельский. Неоднородная квадратичная двойственность и кривизна. *Функц. анализ и его прил.* **27** (1993), №3, стр. 57–66.

[9] A. Polishchuk, L. Positselski. Quadratic algebras. University Lecture Series, 37. American Math. Society, Providence, RI, 2005. xii+159 pp.