Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук (ИППИ РАН)

На правах рукописи
УДК 517.94

Копылова Елена Андреевна

Асимптотическая устойчивость решений линейных и нелинейных гиперболических уравнений в частных производных

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 2013

Работа выполнена в Лаборатории № 4 - Добрушинской математической лаборатории - Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН).

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Ильин Алексей Андреевич,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН,
старший научный сотрудник

доктор физико-математических наук,
профессор Радкевич Евгений Владимирович,
кафедра дифференциальных уравнений
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова, профессор

доктор физико-математических наук,
профессор Рудаков Игорь Алексеевич,
Брянский государственный технический
университет, и.о. ректора

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт проблем
механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук (ИПМех РАН)

Защита состоится «28» мая 2013 г. в 17 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.077.03 при учреждении Российской академии наук Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича (ИППИ РАН) по адресу: 127994, г. Москва, ГСП-4, Большой Каретный переулок, 19, стр. 1. (ст. м. «Цветной бульвар»).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИППИ РАН.

Автореферат разослан «___»______ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.077.03 при ИППИ РАН
кандидат физико-математических наук А.Н. Соболевский

1 Общая характеристика работы

1.1 Актуальность темы

Предметом исследования настоящей диссертации является дисперсионное убывание и асимптотическая устойчивость решений линейных и нелинейных гиперболических уравнений в частных производных.

I. Дисперсионное убывание волновых процессов известно давно из повседневного опыта со звуковыми волнами и волнами на воде. Для волновых уравнений с постоянными коэффициентами математическое обоснование строгого принципа Гюйгенса выводится из явной формулы Кирхгофа. Для общих гиперболических уравнений в частных производных теория дисперсионного убывания возникла в 1960-х годах в работах Б. Вайнберга, П. Лакса, К. Моравец и Р. Филипса по теории рассеяния, где рассматривались начальные данные с компактными носителями, и убывание решений доказывалось в локальных энергетических нормах.

Однако такие результаты оказались недостаточными для теории асимптотической устойчивости решений нелинейных гиперболических уравнений. А именно, потребовалось убывание решений в весовых соболевских нормах для начальных данных с носителем во всем пространстве. Такое убывание для трехмерного уравнения Шредингера впервые было получено в работе А. Йенсена и Т. Като[1] и распространено на другие размерности А. Йенсеном и Г. Ненсиу. Убывание в весовых нормах интенсивно использовалось в последние 20 лет в работах по асимптотической устойчивости для уравнений Шредингера. С другой стороны, для волновых уравнений и уравнений Клейна-Гордона подобные результаты оставались неизвестными. Наши исследования [1, 3, 7-9, 17-19], изложенные в главах I - III диссертации, заполняют этот пробел. Кроме того, автором получено дисперсионное убывание для уравнения Дирака [11], для уравнения Шредингера с магнитным потенциалом [13, 19], а также для дискретных моделей [4, 20, 23].

II. Солитонным решениям принадлежит особая роль при изучении эволюционных уравнений ввиду того, что зачастую они довольно легко находятся численно или аналитически и, кроме того, играют ключевую роль при изучении долговременного поведения решений этих уравнений. Впервые это обнаружили в 1965 году Н. Забуский и М. Крускал для уравнения KdV в результате численного моделирования[2]. В 1967 году К. Гарднер, Д. Грин, М. Крускал

[1] A. Jensen, T. Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, *Duke Math. J.* **46** (1979), 583-611.

[2] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, Interaction of "solitons"in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters* **15** (1965), 240-243.

и Р. Миура показали, что метод обратной задачи рассеяния позволяет решить уравнение KdV аналитически [3]. Выяснилось, что любое решение этого уравнения с достаточно гладкими быстроубывающими начальными данными сходится к конечной сумме солитонов, движущихся вправо, и дисперсионной волны, движущейся влево. Эти результаты были затем распространены на другие *интегрируемые уравнения* в работах А. Итса, Е.Я. Хруслова, А.Б. Шабата, В.Е. Захарова и других [4]. Обзор этих исследований можно найти в книге В. Экхауса и А. Ванхартена [5].

Недавние численные эксперименты[6] показывают, что решения общих неинтегрируемых нелинейных волновых уравнений с начальными данными конечной энергии при больших временах распадаются на конечное число слабо взаимодействующих солитонов и убывающую дисперсионную волну. Теория асимптотической устойчивости солитонов для неинтегрируемых нелинейных уравнений Шредингера возникла в работах Соффера-Вайнштейна (1985-1992) и Буслаева-Перельман-Сулем (1991-2003). Однако обобщение на релятивистские уравнения оставалось открытой проблемой вплоть до 2010 года из-за отсутствия соответствующей теории дисперсионного убывания для соответствующих линеаризованных уравнений. Необходимость такого обобщения связана с проблемами релятивистской теори поля, поставленными в програмных работах Гейзенберга [7,8], посвященных квантовополевой теории элементарных частиц в контексте теории нелинейных гиперболических уравнений в частных производных. В этом контексте элементарные частицы интерпретируются как солитоны, и проблема их устойчивости рассматривается как проблема асимптотической устойчивости солитонов [9]. Именно эта проблема асимптотической устойчивости солитонов решается впервые в предложенной диссертации для неинтегрируемых нелинейных релятивистских волновых уравнений.

[3] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Physical Review Letters* **19** (1967), 1095Ц1097.

[4] A.S. Fokas, V.E. Zakharov (Editors), Important Developments in Soliton Theory, Springer, Berlin, 1993.

[5] W. Eckhaus, A. van Harten, The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons. An Introduction. Amsterdam: North-Holland, 1981.

[6] A. Komech, N.J. Mauser, A. Vinnichenko, On attraction to solitons in relativistic nonlinear wave equations, *Russ. J. Math. Phys.* **11** (2004), no. 3, 289-307.

[7] W. Heisenberg, Der derzeitige Stand der nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen, *Acta Phys. Austriaca* **14** (1961), 328-339.

[8] W. Heisenberg, Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles, Interscience Publishers, London–New York–Sydney, 1966.

[9] D. Anderson, G. Derrick, Stability of time dependent particle like solitons in nonlinear field theories, *J. Math. Phys* **11** (1970), 1336-1346 and **12**, 945-952.

1.2 Цель работы

I. Для линейных уравнений Клейна-Гордона с потенциалом получить долговременное убывание решений в весовых соболевских нормах.

II. Доказать асимптотическую устойчивость солитонного многообразия и получить солитонную асимптотику для релятивистского нелинейного волнового уравнения с потенциалом типа Гинзбурга-Ландау.

III. Построить примеры нелинейных уравнений с необходимыми спектральными свойствами линеаризованной динамики.

1.3 Методы исследования

I. **Дисперсионное убывание**. Наши методы доказательства долговременного убывания решений уравнения Клейна-Гордона в весовых нормах представляют собой развитие теории С. Агмона [10], А. Йенсена и Т. Като [1] и М. Мюраты [11] для уравнения Шредингера с убывающим степенным образом потенциалом. Эта теория основана на изучении аналитических свойств и асимптотик резольвент соответствующих уравнений.

Ключевую роль в этой теории играет принцип предельного поглощения, означающий существование предельных значений резольвенты на вещественной оси, и убывание резольвенты при больших значениях спектрального параметра. Предполагаемые условия отсутствия точечного спектра и резонанса в концевой точке непрерывного спектра обеспечивают ограниченность усеченной резольвенты в этой точке. При этих условиях дисперсионное убывание проекции решения $P_c\psi(t)$ на непрерывный спектр доказывается при помощи спектрального представления Фурье-Лапласа

$$P_c\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty e^{-i\omega t}\Big[R(\omega+i0)-R(\omega-i0)\Big]\psi_0 d\omega, \qquad t\in\mathbb{R}, \tag{1.1}$$

где через $R(\zeta)$ обозначена резольвента оператора Шредингера $H=-\Delta+V$:

$$R(\zeta)=(H-\zeta)^{-1}, \quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty). \tag{1.2}$$

Данный подход непосредственно неприменим к уравнению Клейна-Гордона, так как соответствующая резольвента не убывает при больших значениях

[10] S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operator and scattering theory, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Ser. IV **2** (1975), 151-218.

[11] M. Murata, Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations, *J. Funct. Anal.* **49** (1982), 10-56.

спектрального параметра. Проиллюстрируем это на примере трехмерных свободных уравнений ($n = 3$):

i) Резольвента свободного уравнения Шредингера представляет из себя интегральный оператор с ядром

$$R_{\mathrm{S}}(\omega, x-y) = \frac{e^{i\sqrt{\omega}|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

ii) Резольвента свободного уравнения Клейна-Гордона является интегральным оператором с ядром

$$R_{\mathrm{KG}}(\omega, x-y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{i\sqrt{\omega^2-m^2}|x-y|}}{4\pi|x-y|} \begin{pmatrix} \omega & i \\ -i\omega^2 & \omega \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

и область интегрирования в формуле (1.1) нужно заменить на $|\omega| > m$. Главные сингулярности для обеих резольвент в концевых точках непрерывного спектра имеют одинаковый характер: $\sqrt{\omega}$ при $\omega \to 0$ для R_{S}, и $\sqrt{\omega \mp m}$ при $\omega \to \pm m$ для R_{KG}. Соответственно, вклад от низких частот в интеграл (1.1) убывает как $t^{-3/2}$ в обоих случаях. Рассмотрим теперь вклад в этот интеграл от высоких частот . В случае уравнения Шредингера, этот вклад убывает как $\sim t^{-N}$ с любым $N > 0$. Это убывание легко доказывается при помощи интегрирования по частям, так как производные $\partial_\omega^k R_{\mathrm{S}}(\omega, x-y)$ убывают как $|\omega|^{-k/2}$ при $\omega \to \infty$. С другой стороны, функция $R_{\mathrm{KG}}(\omega, x-y)$ не убывает при больших $|\omega|$, и, кроме того, дифференцирование по ω не улучшает ее убывание. Следовательно, для уравнения Клейна-Гордона интегрирование по частям ничего не дает.

Это различие имеет глубокую математическую природу. Оно означает, что умножение на t^N, при больших N улучшает гладкость решений уравнения Шредингера, но не улучшает гладкость решений уравнения Клейна-Гордона. Это соответствует различному характеру распространения волн для релятивистских и нерелятивистских уравнений:

i) главная сингулярность решений уравнения Шредингера сосредоточена в точке $t = 0$ и исчезает на бесконечности при $t \neq 0$ из-за бесконечной скорости распространения.

ii) в случае уравнения Клейна-Гордона сингулярности решений движутся с конечной скоростью, поэтому они сохраняются при всех временах.

Следовательно, метод Агмона - Йенсена - Като доказательства убывания высокочастотной компоненты решения требует существенной модификации. Наш подход к решению данной задачи основан на "ослабленной"версии строгого принципа Гюйгенса, борновских разложениях резольвенты и соответствующих представлениях решения в виде сверток.

II. **Асимптотическая устойчивость солитонов**. Асимптотическая устойчивость солитонного многообразия означает, что решение уравнения с начальными данными, близкими к одному из солитонов, при больших временах асимптотически представляет собой сумму некоторого, возможно другого, солитона (с другой траекторией и скоростью) и убывающей в весовых нормах дисперсионной волны, являющейся решением соответствующего свободного линейного уравнения.

Для доказательства асимптотической устойчивости солитонов мы применяем современную стратегию, развивающуюся в последних работах по теории нелинейных гиперболических уравнений. Эта стратегия основана на методах симплектической геометрии в гильбертовом пространстве для гамильтоновых систем и спектральной теории несамосопряженных операторов и состоит из следующих шагов:

- симплектическая проекция на солитонное многообразие в гильбертовом пространстве
- разделение динамики на движение вдоль солитонного многообразия и в трансверсальном направлении
- убывание для трансверсальной линеаризованной динамики
- модуляционные уравнения для солитонных параметров
- нормальные формы Пуанкаре
- критерий излучения Ферми
- метод мажорант.

Эти методы представляют собой современное развитие теории устойчивости Ляпунова. Принципиальное значение имеет тот факт, что симплектическая проекция позволяет исключить неустойчивые направления, соответствующие нулевому дискретному спектру линеаризованной динамики.

Впервые подобная стратегия была применена Соффером, Вайнштейном и Буслаевым для нелинейных уравнений Шредингера. Мы развиваем эту стратегию для релятивистского нелинейного волнового уравнения, для которого асимптитическая устойчивость солитонов не была установлена в течение долгого времени. Одна из причин заключается в том, что не было известно достаточно быстрое убывание решений линейных уравнений Клейна-Гордона с потенциалом. (см., например, дискуссию во введении работы С. Куканьи[12]). Поэтому первым нашим результатом в этом направлени было доказательство быстрого убывания в весовых соболевских нормах ($\sim t^{-3/2}$ в одномерном случае) для проекции решения на непрерывный спектр при условии отсутствия собственных значений и резонансов в концевых точках непрерывного спектра [1, 7, 12, 16].

[12] S. Cuccagna, On asymptotic stability in 3D of kinks for the ϕ^4 model, *Transactions of AMS* **360** (2008), no. 5, 2581-2614.

Кроме того, несмотря на приведенную выше общую схему получения асимптотической устойчивости, многие утверждения и их доказательства для рассматриваемого нами уравнения существенно отличаются в связи со спецификой релятивистских уравнений, а некоторые являются абсолютно новыми. В частности, мы получили новые оценки, характеризующие скорость распространения нелинейных возмущений для уравнения Клейна-Гордона, являющиеся релятивистской версией оценок В. Буслаева и К. Сулем [13], используемых для доказательства асимптотической устойчивости солитонов нелинейного уравнения Шредингера. Также мы получили релятивистскую версию оценок решений в L^1-L^∞ нормах.

Эти оценки, а также убывание в весовых энергетических нормах решений линеаризованного уравнения играют ключевую роль в получении соответствующих неравенств для мажорант. Они позволяют также получить убывание трансверсальной компоненты линеаризованного на солитоне уравнения, что означает *излучение энергии в бесконечность*, обеспечивающее асимптотическую устойчивость солитонного многообразия.

1.4 Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

I. Впервые получено долговременное убывание в весовых энергетических нормах для решений линейного уравнения Клейна-Гордона с убывающим степенным образом потенциалом.

II. Впервые доказана асимптотическая устойчивость солитонного многообразия и получена солитонная асимптотика для релятивистского нелинейного волнового уравнения.

III. Впервые построены примеры нелинейных уравнений, для которых удается найти все спектральные свойства линеаризованной динамики.

1.5 Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и разработанные методы могут быть использованы специалистами в области дифференциальных уравнений в частных производных и математической физики, в области теории функций, а также в спектральной теории операторов.

[13] V.S. Buslaev, C. Sulem, On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* **20** (2003), no. 3, 419-475.

1.6 Апробация диссертации

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

• Научный семинар кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора М.И. Вишика (2008-2011 гг.)

• Научный семинар добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН под руководством профессора Р.А. Минлоса и гл. н. с. М.Л. Бланка (2008-2013 гг.)

• Научный семинар кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством профессора Е. В. Радкевича (2013 г.)

• Научный семинар ИПМех РАН под руководством академика В.П. Маслова (2013 г.)

• Научный семинар по актуальным проблемам математической физики математического центра Мюнхенского технического университета под руководством профессора Г. Шпона (2009-2011 гг.)

• Научный семинар факультета математики Венского университета под руководством профессора Г. Тешля (2011 г.)

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих научных конференциях:

• Минисимпозиум "Глобальные аттракторы в нелинейных гамильтоновых системах", Международный исследовательский центр, Банф, Канада, 2007.

• 5-й Европейский математический конгресс, Амстердам, Голландия, 2008.

• Минисимпозиум "Солитонная асимптотика и смежные вопросы математической физики", Математический институт в Обервольфахе, Германия, 2008.

• Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2008.

• Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию академика В.А. Садовничего, МГУ, Москва, 2009.

• Добрушинская международная конференция, ИППИ РАН, Москва, 2009.

• XVI Международный конгресс математической физики, Прага, Чехия, 2009.

• Международная конференция "Современные проблемы анализа и преподавания математики", посвященная 105-летию академика С.М. Никольского, МГУ, Москва, 2010.

• 8-я Международная конференция AIMS по динамическим системам, дифференциальным уравнениям и приложениям, Дрезден, Германия, 2010.

• Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2010.

• Международный математический конгресс, Хайдерабад, Индия, 2010.

• Международная конференция "Дифференциальные уравнения в математической физике", посвященная 65-летию А.И. Комеча, Москва, 2011.

• Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная академику И.Г. Петровскому, МГУ, Москва, 2011.

• 3-я Международная конференция по спектральной теории, посвященная памяти М. Ш. Бирмана, Петербург, 2011.

• Международная конференция "50 лет ИППИ РАН", Москва, 2011.

• Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2012.

• Международный симпозиум "Анализ, теория операторов и математическая физика" Икстапа, Мексика, 2012.

• Международная конференция "Дифференциальные уравнения и приложения", посвященная 90-летию М.И. Вишика, Москва, 2012.

• 6-й Европейский математический конгресс, Краков, Польша, 2012.

• Международная конференция "Спектральная теория и дифференциальные операторы", Грац, Австрия, 2012.

Тезисы всех докладов опубликованы в сборниках тезисов соответствующих конференций.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 1 монографии и 25 статьях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы. Текст диссертации изложен на 163 страницах. Список литературы содержит 82 наименования. В работе имеется 11 поясняющих иллюстраций.

2 Основное содержание работы

2.1 Введение

Во введении приводится краткий исторический обзор исследований, формулируются основные результаты, полученные в диссертации и излагаются методы их доказательства.

2.2 Часть I

В первой части работы (главы I-III) излагаются результаты и методы линейной теории рассеяния для уравнения Шредингера

$$i\dot{\psi} = H\psi(x,t) := (-\Delta + V(x))\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

и уравнения Клейна-Гордона

$$\ddot{\psi}(x,t) = (\Delta - m^2 - V(x))\,\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \geq 0, \tag{2.5}$$

где $n = 1, 2, 3$. Все производные здесь и ниже понимаются в смысле распределений. Для целей данной диссертации главное значение имеет случай $n = 1$. Случай $n \geq 4$ в диссертации не рассматривается. Заметим, что случай $n \geq 4$ аналогичен случаю $n = 3$ для нечетных n и случаю $n = 2$ для четных n.

Запишем уравнение (2.5) в матричной форме:

$$i\dot{\Psi}(t) = \mathcal{H}\Psi(t), \tag{2.6}$$

где

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i(\Delta - m^2 - V) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Будем предполагать, что $V(x)$ является вещественной функцией и

$$|V(x)| + |\nabla V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.8}$$

где $\beta > 3$ при $n = 3$ и $\beta > 5$ при $n = 1, 2$. Мы рассматриваем так называемый “регулярный случай” в терминологии А. Йенсена и Т. Като [1] или “сингулярный случай” в терминологии М. Мюраты[11] когда усеченная резольвента оператора Шредингера $H = -\Delta + V(x)$ ограничена в концевой точке $\lambda = 0$ непрерывного спектра. Другими словами, точка $\lambda = 0$ не является ни собственным значением, ни резонансом для оператора H. Это условие выполняется для потенциала общего положения.

Определение 2.1 *Для произвольных* $s, \sigma \in \mathbb{R}$ *обозначим через* $H^s_\sigma = H^s_\sigma(\mathbb{R}^n)$ *весовые Соболевские пространства с конечными нормами*

$$\|\psi\|_{H^s_\sigma} = \|\langle x\rangle^\sigma \langle\nabla\rangle^s \psi\|_{L^2} < \infty, \qquad \langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}, \tag{2.9}$$

где $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$.

Будем обозначать $L^2_\sigma = H^0_\sigma$.

Заметим, что при условии (2.8) умножение на $V(x)$ является ограниченным оператором из H^1_s в $H^1_{s+\beta}$ для любого $s \in \mathbb{R}$. Введем фазовое пространство для задачи (2.6):

Определение 2.2 E_σ *- комплексное гильбертово пространство* $H^1_\sigma \oplus H^0_\sigma$ *векторных*
функций $\Psi = (\psi, \pi)$ *с конечными нормами*

$$\|\,\Psi\|_{E_\sigma} = \|\psi\|_{H^1_\sigma} + \|\pi\|_{H^0_\sigma} < \infty. \tag{2.10}$$

Будем обозначать $E = E_0$.

Глава I. Первая глава посвящена дисперсионному убыванию для уравнения Шредингера (2.4). Как уже отмечалось выше, мы ограничиваемся рассмотрением "регулярного" случая, наиболее важного для приложений из-за "хорошего" долговременного убывания, в то время как в основополагающих работах С. Агмона [10], А. Йенсена и Т. Като [1] и М. Мюраты [11], посвященных этому уравнению, рассмотрена общая спектральная ситуация, что приводит к довольно громоздким построениям. Мы впервые излагаем полные доказательства ключевых оценок

а) убывания резольвенты при больших энергиях (A.2') из работы Агмона [10]

б) принцип предельного поглощения при малых энергиях.

Оценка (A.2') в работе Агмона сформулирована в качестве замечания, и ее доказательство в математической литературе отсутствует. Мы приводим адаптированные доказательства всех необходимых в диссертации результатов для наиболее важного "регулярного" случая.

В "регулярном" случае резольвента $R(\zeta)$, определенная в (1.2), обладает следующими свойствами, играющими ключевую роль при доказательстве дисперсионного убывания уравнения Шредингера, а также и уравнения Клейна - Гордона:

Лемма 2.3 *1)* $R(\zeta)$ *является голоморфной функцией от* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus ([0,\infty) \cup \Sigma(V))$ *со значениями в* $\mathcal{L}(H^{-1}_0, H^1_0)$*; где* $\Sigma(V) = \{\omega_j \in [V_0, 0] : j = 1, 2, ...\}$ *-дискретный спектр оператора* H.

2) Для всех вещественных $\zeta > 0$ имеет место сходимость (принцип предельного поглощения):

$$R(\zeta \pm i\varepsilon) \to R(\zeta \pm i0), \quad \varepsilon \to 0+$$

в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma, H^1_{-\sigma})$ с $\sigma > 1/2$.
3) При $k = 0, 1, 2$; $\sigma > 1/2 + k$; $s = 0, 1$ и $l = -1, 0, 1$ справедливы асимптотики

$$\|R^{(k)}(\zeta)\|_{H^s_\sigma \to H^{s+l}_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|\zeta|^{-\frac{1-l+k}{2}}), \quad |\zeta| \to \infty, \ \ \zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty). \tag{2.11}$$

4) При $\zeta \to 0$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ справедливы асимптотики

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\zeta) = A + \mathcal{O}(\zeta^{1/2}), \quad n = 1, 3 \\ \\ R(\zeta) = A + B \log^{-1} \zeta + \mathcal{O}(\log^{-2} \zeta), \quad n = 2 \end{array} \right. \tag{2.12}$$

в пространстве $\mathcal{L}(H^{-1}_\sigma, H^1_{-\sigma})$ с $\sigma > 5/2$, где A и $B \in \mathcal{L}(H^{-1}_0, H^1_0)$ - некоторые интегральные операторы.

Основным результатом первой главы является следующая теорема

Теорема 2.4 *В "регулярном случае" справедливы следующие долговременные асимптотики для решений уравнения Шредингера (2.4) : при $\sigma > 5/2$*

$$\|P_c \psi(t)\|_{L^2_{-\sigma}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), \quad n = 1, 3 \\ \\ \mathcal{O}(|t|^{-1} \log^{-2} |t|), \quad n = 2 \end{array} \right| \qquad t \to \pm\infty \tag{2.13}$$

для начальных данных $\psi_0 = \psi(0) \in L^2_\sigma$. Здесь через P_c обозначен проектор Рисса на непрерывный спектр оператора H.

Теорема 2.4 доказывается при помощи свойств 1) - 4) резольвенты $R(\zeta)$ и спектрального представления Фурье-Лапласа (1.1).

Глава II. Во второй главе излагаются обобщения результатов первой главы на уравнения Клейна-Гордона (2.6), полученные в работе автора [1] и совместных работах [16-18]. Эти обобщения являются нетривиальными из-за различного характера распространения волн для релятивистских и нерелятивистских уравнений и требуют новых методов и подходов. Аналогично (1.3) резольвенту $\mathcal{R}$ оператора $\mathcal{H}$ можно выразить через резольвенту R оператора H:

$$\mathcal{R}(\omega) = \left(\begin{array}{cc} \omega R(\omega^2 - m^2) & iR(\omega^2 - m^2) \\ \\ -i(1 + \omega^2 R(\omega^2 - m^2)) & \omega R(\omega^2 - m^2) \end{array} \right). \tag{2.14}$$

Обозначим $\Gamma := (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$. Из свойств 1) - 4) резольвенты R и формулы (2.14) вытекают следующие свойства резольвенты $\mathcal{R}$:

Лемма 2.5 *i) Резольвента $\mathcal{R}(\omega)$ является мероморфной функцией от $\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}$ со значениями в $\mathcal{L}(E_0, E_0)$;*

ii) Справедлив принцип предельного поглощения:

$$\mathcal{R}(\omega \pm i\varepsilon) \to \mathcal{R}(\omega \pm i0), \quad \varepsilon \to 0+, \quad \omega \in \Gamma$$

в пространстве $\mathcal{L}(E_\sigma, E_{-\sigma})$ с $\sigma > 1/2$;

iii) Для $k = 0, 1, 2$ и $\sigma > 1/2 + k$ справедливы асимптотики

$$\|\mathcal{R}^{(k)}(\omega)\|_{\mathcal{L}(E_\sigma, E_{-\sigma})} = \mathcal{O}(1), \quad |\omega| \to \infty, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \tag{2.15}$$

iv) Для любого $\sigma > 5/2$ в пространстве $\mathcal{L}(E_\sigma, E_{-\sigma})$ справедливы асимптотики при $\omega \to \pm m$, $\omega \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Gamma}$:

$$\mathcal{R}(\omega) = \begin{cases} \mathcal{A}^{\pm} + \mathcal{O}\big((\omega \mp m)^{1/2}\big), \quad n = 1, 3 \\ \\ \mathcal{A}^{\pm} + \mathcal{B}^{\pm} \log^{-1}(\omega \mp m) + \mathcal{O}\big(\log^{-2}(\omega \mp m)\big), \quad n = 2 \end{cases} \tag{2.16}$$

где $\mathcal{A}^{\pm}$, $\mathcal{B}^{\pm} \in \mathcal{L}(E_\sigma, E_{-\sigma})$, $\sigma > 5/2$ - некоторые интегральные матричные операторы.

Главным результатом второй главы является следующая теорема

Теорема 2.6 *В "регулярном случае" справедливы следующие долговременные асимптотики для решений уравнения Клейна-Гордона (2.6) : при $\sigma >$ 5/2*

$$\|\mathcal{P}_c \Psi(t)\|_{E_{-\sigma}} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), \quad n = 1, 3 \\ \\ \mathcal{O}(|t|^{-1} \log^{-2} |t|), \quad n = 2 \end{array} \right| \qquad t \to \pm\infty \tag{2.17}$$

для начальных данных $\Psi_0 = \Psi(0) \in E_\sigma$. Здесь через $\mathcal{P}_c$ обозначен проектор Рисса на непрерывный спектр оператора $\mathcal{H}$.

Как уже отмечалось выше, мы не можем получить убывание (2.17) из спектрального представления Фурье-Лапласа, так как резольвента $\mathcal{R}(\omega)$ и ее производные не убывают при значениях ω (см. асимптотики (2.15)). Наш подход основан на борновском разложении

$$\mathcal{R}(\omega) = \mathcal{R}_0(\omega) - \mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega) + \mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}(\omega). \tag{2.18}$$

Здесь через $\mathcal{R}_0(\omega)$ обозначена свободная резольвента, соответствующая $V = 0$, и $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -iV & 0 \end{pmatrix}$. Применив обратное преобразование Фурье-Лапласа, мы получаем соответствующее представление динамической группы $\mathcal{U}(t)$ оператора Клейна-Гордона в виде свертки:

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0(t) + i\int_0^t \mathcal{U}_0(t-s)\mathcal{V}\mathcal{U}_0(s)ds - iF^{-1}_{\omega\to t}\Big[\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\mathcal{R}(\omega)\Big] \quad (2.19)$$

где через $\mathcal{U}_0(t)$ обозначена свободная динамическая группа, соответствующая $V = 0$. Иначе данное разложение получается методом последовательных приближений, если потенциал рассматривать как возмущение.

Каждое слагаемое в правой части (2.19) рассматривается отдельно. В трехмерном случае долговременное убывание вида (2.17) для первого слагаемого $\mathcal{U}_0(t)$ доказывается при помощи "ослабленной"версии строгого принципа Гюйгенса, обобщающей метод Вайнберга[14] для волнового уравнения.

Для второго слагаемого долговременное убывание следует из стандартных оценок для свертки. При этом используется ранее полученное убывание первого слагаемого и условие (2.8) для потенциала.

Долговременное убывание для последнего слагаемого доказываеся при помощи спектрального представления вида (1.1) и техники Йенсена и Като, так как

$$\|\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}\| \sim |\omega|^{-2} \text{ при } |\omega| \to \infty.$$

Это оказалось возможным благодаря удачной структуре матрицы $\mathcal{V}\mathcal{R}_0(\omega)\mathcal{V}$.

В одномерном и двумерном случаях появляются дополнительные сложности ввиду того, что для свободных одномерных и двумерных уравнений Клейна-Гордона, соответствующих $V = 0$, долговременное убывание вида (2.17) отсутствует. А именно, решение одномерного уравнения убывает как $\sim t^{-1/2}$, а решение двумерного уравнения убывает как $\sim t^{-1}$. Следовательно убывание (2.17) для уравнений с потенциалами не может быть получено посредством теории возмущений из соответствующих оценок для свободных уравнений. Такое медленное убывание обусловлено наличием “резонанса” для свободного оператора Шредингера в концевой точке $\lambda = 0$ непрерывного спектра. В этом случае мы выделяем слагаемое со слабым убыванием $\sim t^{-1/2}$ (соответственно $\sim t^{-1}$) и показываем, что оно не влияет на убывание высокочастотной компоненты, поскольку его спектр сосредоточен в концевой точке непрерывного спектра. После этого “сильное” убывание высокочастотной компоненты доказывается аналогично трехмерному случаю. С другой стороны,

[14]Б.Р. Вайнберг, Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

в “регулярном случае” убывание вида (2.17) для низкочастотной компоненты получается при помощи надлежащего уточнения методов Йенсена и Като.

Убывание вида (2.17) позволяет построить оператор рассеяния при помощи стандартного метода Кука. Так как слагаемое $V(x)\psi(x,t)$ стремится к нулю при $t \to \pm\infty$, то естественно ожидать, что решение $\Psi(x,t)$ уравнения (2.6) сходится при больших временах к решению свободного уравнения Клейна - Гордона:

$$\Psi(x,t) \sim \Psi_{\pm}(x,t), \quad t \to \pm\infty.$$

Наши результаты также дают уточнение порядка убывания для остаточного члена.

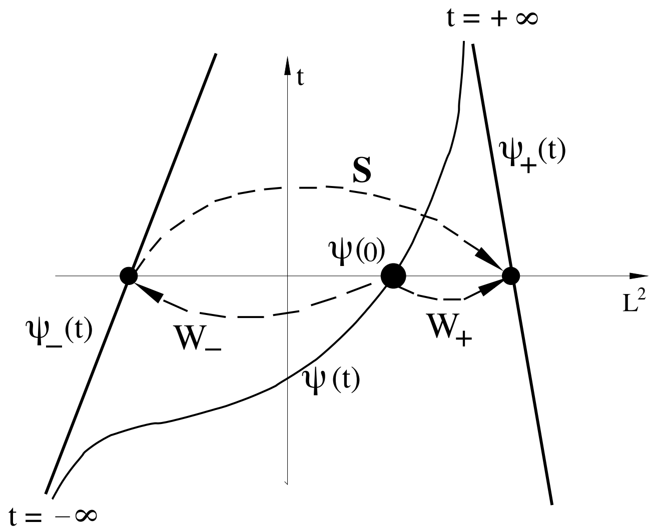

Рис. 1: Волновые операторы и оператор рассеяния

Теорема 2.7 *i) Для решения уравнения (2.6) с начальными данными* $\Psi(0) \in \mathcal{P}_c E$ *справедлива долговременная асимптотика*

$$\Psi(t) = \mathcal{U}(t)\Phi_{\pm} + r_{\pm}(t), \tag{2.20}$$

где $\Phi_{\pm} := W_{\pm}\Psi_0 \in E$ *- асимптотические состояния рассеяния и*

$$\|r_{\pm}(t)\|_E \to 0, \qquad t \to \pm\infty. \tag{2.21}$$

ii) Кроме того, если $\Psi(0) \in \mathcal{P}_c E_{\sigma}$ *с некоторым* $\sigma > 5/2$*, то*

$$\|r_{\pm}(t)\|_E = \begin{cases} \mathcal{O}(|t|^{-1/2}), & n = 1,3 \\ \mathcal{O}(\log^{-1}|t|), & n = 2 \end{cases} \tag{2.22}$$

Отображение $S: \ \Psi_-(\cdot,\infty) \to \Psi_+(\cdot,\infty)$, где $\Psi_\pm(\cdot,t) = U(t)\Phi_\pm$, является оператором расеяния. Из (2.20) - (2.22) вытекает асимптотическая полнота рассеяния, означающая, что оператор S является унитарным оператором на $\mathcal{P}_c E$.

Глава III. В этой главе рассматривается одномерное "модифицированное" уравнение Клейна-Гордона, соответствующее системе координат движущейся со скоростью $|v| < 1$:

$$i\dot{\Psi}(x,t) = \mathcal{H}_v \Psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

где

$$\mathcal{H}_v = \left(\begin{array}{cc} v\nabla & i \\ i(\Delta - m^2 - V) & v\nabla \end{array} \right).$$

Такое модифицированное уравнение возникает при линеаризации динамики на солитоне во второй части диссертации. Для него также справедливо дисперсионное убывание вида (2.17), играющее ключевую роль в установлении солитонной асимптотики.

Мы предполагаем, что вещественный потенциал $V(x)$ удовлетворяет условию (2.8) с некоторым $\beta > 5$ и рассматриваем "регулярный случай", означающий что усеченная резольвента оператора

$$\tilde{H} = -\Delta + \gamma^2 V(x), \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$$

ограничена в концевой точке $\lambda = 0$ непрерывного спектра.

Главным результатом третьей главы является следующая теорема

Теорема 2.8 *В "регулярном случае" справедлива следующая долговременная асимптотика для решений уравнения (2.23) : при* $\sigma > 5/2$

$$\|\mathcal{P}_c \Psi(t)\|_{E_{-\sigma}} = \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), \qquad t \to \pm\infty \tag{2.24}$$

для начальных данных $\Psi_0 = \Psi(0) \in E_\sigma$. *Здесь через* $\mathcal{P}_c$ *обозначен проектор Рисса на непрерывный спектр оператора* $\mathcal{H}_v$.

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 2.6 для одномерного случая некоторыми техническими деталями.

2.3 Часть II

Во второй части работы (главы IV-VI) излагаются результаты и методы нелинейной теории рассеяния для релятивистского уравнения Гинзбурга -

Ландау, полученные автором. Рассматривается одномерное нелинейное волновое уравнение

$$\ddot{\psi}(x,t) = \psi''(x,t) + F(\psi(x,t)), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.25}$$

где $F(\psi) = -U'(\psi)$. Мы предполаем, что потенциал $U(\psi)$ удовлетворяет следующим условиям:

U1 *Потенциал* $U(\psi)$ *является гладкой четной функцией, такой что*

$$U(\psi) > 0 \quad \text{при} \quad \psi \neq a. \tag{2.26}$$

U2 *В окрестности точек* $\pm a$ *потенциал* $U(\psi)$ *является параболой*:

$$U(\psi) = \frac{m^2}{2}(\psi \mp a)^2, \quad |\psi \mp a| < \delta \tag{2.27}$$

с некоторыми $0 < \delta < a/2$ *и* $m > 0$.
Примерный график потенциала изображен на рисунке 2.

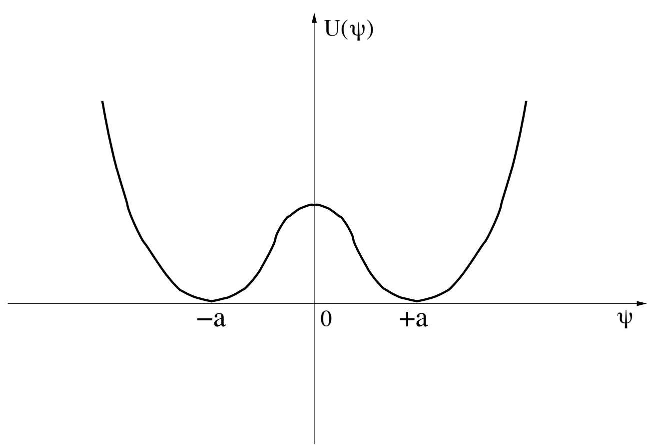

Рис. 2: Потенциал $U(\psi)$

Соответствующее стационарное уравнение имеет вид:

$$s''(x) - U'(s(x)) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Это уравнение имеет постоянные решения $\psi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv \pm a$. Непостоянные решения находятся при помощи "интеграла энергии":

$$\frac{(s')^2}{2} - U(s) = C,$$

где C - произвольная постоянная. На рисунке 3 изображен фазовый портрет данного уравнения.

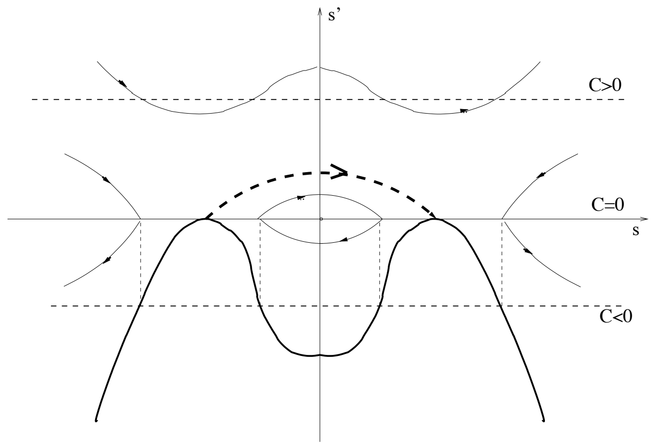

Рис. 3: Фазовый портрет

Мы видим, что при $C = 0$ существует так называемый кинк - непостоянное решение $s(x)$ стационарного уравнения (2.28), обладающее конечной энергией и удовлетворяющее условию

$$s(x) \to \pm a, \quad x \to \pm\infty.$$

(См. рисунок 4). Кроме того, из условия (2.36) следует, что

$$(s(x) \mp a)'' \sim m^2(s(x) \mp a), \quad x \to \pm\infty.$$

Поэтому

$$|s(x) \mp a| \sim Ce^{-m|x|}, \qquad x \to \pm\infty, \tag{2.29}$$

т.е. кинк приближается к своим асимптотам $\pm a$ с экспоненциальной скоростью.

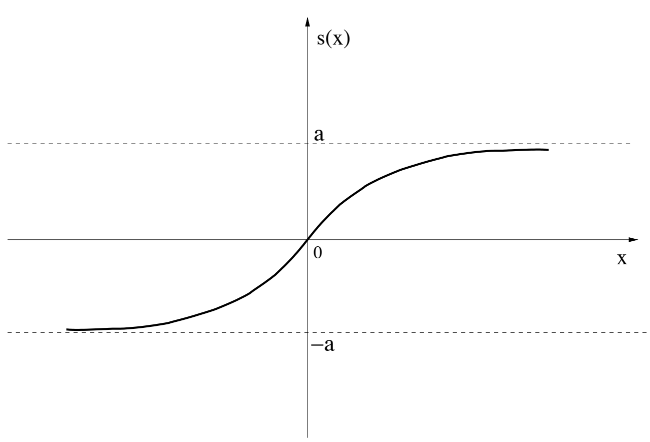

Рис. 4: Кинк

Так как уравнение (2.25) является релятивистски инвариантным, то движущиеся со скоростью |v|<1 солитоны (или кинки)

$$s_{q,v}(x,t) = s(\gamma(x - vt - q)), \quad q \in \mathbb{R}$$

также являются решениями уравнения (2.25). Здесь $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ - лоренцево сокращение. Будем обозначать

$$\psi_v(x) = s(\gamma x), \quad \pi_v(x) = -v\psi_v'(x).$$

Подставляя разложение $\psi(x,t) = s(x)+\phi(x,t)$ в уравнение (2.25), формально получим

$$\ddot{\phi}(x,t) = -H\phi(x,t) + \mathcal{O}(|\phi(x,t)|^2), \tag{2.30}$$

где $H := -\frac{d^2}{dx^2} + m^2 + V(x)$ – оператор Шредингера с потенциалом

$$V(x) = -F'(s(x)) - m^2 = U''(s(x)) - m^2. \tag{2.31}$$

Из условия **U2** и асимптотики (2.29) следует, что функция $V(x)$ имеет компактный носитель.

Легко проверить, что оператор H обладает следующими свойствами:

H1. Непрерывный спектр оператора H совпадает с интервалом $[m^2, \infty)$.

H2. Точка $\lambda_0 = 0$ является точкой дискретного спектра с собственной функцией $s'(x)$.

H3. Точка $\lambda_0 = 0$ является минимальным собственным значением, а все остальные точки дискретного спектра, если они существуют, содержатся в интервале $(0, m^2]$.

Дополнительно предполагается, что

E *Концевая точка $\lambda = m^2$ непрерывного спектра оператора H не является ни собственным значением, ни резонансом.* Мы доказываем солитонную асимптотику при двух различных вариантах условиях на дискретный спектр:

D1 *Дискретный спектр оператора H состоит ровно из одной точки $\lambda_0 = 0$.*

D2 *Дискретный спектр оператора H состоит из двух точек: $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 \in (0, m^2)$, причем*

$$4\lambda_1 > m^2. \tag{2.32}$$

В случае D2 будем также предполагать условие невырожденности, или так называемое *золотое правило Ферми* (Fermi golden rule), означающее эффективное взаимодействие нелинейного члена с непрерывным спектром. Это условие обеспечивает рассеяние энергии в бесконечность. Для уравнения (2.25) *золотое правило Ферми* имеет вид

$$\mathbf{F} \qquad \int \varphi_{4\lambda_1}(x)F''(s(x))\varphi^2_{\lambda_1}(x)dx \neq 0, \tag{2.33}$$

где φ_{λ_1} - собственная функция, соответствующая собственному значению λ_1, а $\varphi_{4\lambda_1}$ - нечетная собственная функция непрерыного спектра, соответствующая точке $4\lambda_1 \in (m^2, \infty)$.

Определение 2.9 *Обозначим через W^k, $k = 0, 1, 2...$ - соболевское пространство функций с конечными нормами*

$$\|\psi\|_{W^k} = \sum_{i=0}^{k} \|\psi^{(i)}\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Определение 2.10 *W - гильбертово пространство $W^2 \oplus W^1$ векторных функций $\Psi = (\psi, \pi)$ с конечными нормами*

$$\|\Psi\|_W = \|\psi\|_{W^2} + \|\pi\|_{W^1} < \infty.$$

Глава IV. В четвертой главе доказывается асимптотическая устойчивость движущихся кинков в случае выполнения условия **D1**, т. е. при отсутствии дополнительного дискретного спектра. Главным результатом четвертой главы являются следующая теорема

Теорема 2.11 *Пусть выполнены условия* **U1**, **U2**, **E** *и* **D1** *и пусть $Y(t) = (\psi(t), \dot{\psi}(t))$ - решение задачи Коши (2.25) с начальными данными $Y_0 = (\psi(0), \dot{\psi}(0))$ близкими к некоторому кинку $S_{q_0,v_0}(x) = (\psi_{v_0}(x - q_0), \pi_{v_0}(x - q_0)$:*

$$Y_0 = S_{q_0,v_0} + X_0, \quad d_0 := \|X_0\|_{E_\beta \cap W} \ll 1,$$

где $\beta > 5/2$. Тогда при достаточно малых d_0 справедлива асимптотика:

$$Y(x,t) = (\psi_{v_\pm}(x - v_\pm t - q_\pm), \pi_{v_\pm}(x - v_\pm t - q_\pm)) + W_0(t)\Phi_\pm + r_\pm(x,t), \quad t \to \pm\infty \tag{2.34}$$

с некоторыми постоянными $v_\pm$ и $q_\pm$. Здесь $W_0(t)$ - динамическая группа свободного уравнения Клейна-Гордона, $\Phi_\pm \in E$ - асимптотические состояния рассеяния. Кроме того,

$$\|r_\pm(t)\|_E = \mathcal{O}(|t|^{-1/2}), \quad t \to \pm\infty. \tag{2.35}$$

Замечание 2.12 i) Асимптотическая устойчивость солитонного многообразия $\mathcal{S}$ обусловлена *излучением энергии в бесконечность*, которая проявляется как *убывание в весовых энергетических нормах* трансверсальной компоненты.

ii) Асимптотика (2.34) может быть интерпретирована как взаимодействие входящего солитона с траекторией $v_-t + q_-$ и входящей дисперсионной волны $W_0(t)\Phi_-$, в результате которого рождается исходящий солитон с новой траекторией $v_+t + q_+$ и новая исходящая дисперсионная волна $W_0(t)\Phi_+$. Это взаимодействие определяет (нелинейный) *оператор рассеяния*

$$\mathbf{S}: \ (v_-, q_-, \Phi_-) \mapsto (v_+, q_+, \Phi_+).$$

Однако нахождение области определения этого оператора остается открытой проблемой, так же и его *асимптотическая полнота* (т.е. область значений).

Глава V. В данной главе рассмотрен случай, когда оператор H, определенный в (2.30) - (2.31), имеет дополнительный дискретный спектр, удовлетворяющий условию **D2** (в главе IV этот спектр отсутствовал). Для простоты изложения мы рассматриваем только нечетные решения и доказываем асимптотическую устойчивость стоячего кинка, соответствующего $v = q = 0$. Главным результатом главы V является следующая теорема

Теорема 2.13 *Пусть выполнены условия* **U1**, **U2**, **E**, **D2** *и* **F**, *и пусть* $Y(t)$ *является решением задачи Коши (2.25) с нечетными начальными данными* Y_0, *достаточно близкими к кинку:*

$$Y_0 = (s(x), 0) + X_0, \quad d_0 := \|X_0\|_{E_\beta \cap W} \ll 1,$$

где $\beta > 5/2$. *Тогда справедлива асимптотика*

$$Y(x,t) = (s(x), 0) + W_0(t)\Phi_\pm + r_\pm(x,t), \quad t \to \pm\infty,$$

где $\Phi_\pm \in E$ *- асимптотические состояния рассеяния,* $W_0(t)$ *- динамическая группа свободного уравнения Клейна-Гордона. Кроме того,*

$$\|r_\pm(t)\|_E = \mathcal{O}(|t|^{-1/3}), \quad t \to \pm\infty.$$

Заметим, что асимптотическая устойчивость движущихся кинков при наличии дополнительного дискретного спектра может быть получена объединением методов обеих глав.

Замечание 2.14 *В наших работах [23, 24] доказана асимптотическая устойчивость кинков для нелинейного волнового уравнения (2.25) в немного* *более общем случае. А именно, вместо условия* **U2** *в этих работах предполагается выполнение следующего условия*

$$U(\psi) = \frac{m^2}{2}(\psi \mp a)^2 + \mathcal{O}(|\psi \mp a|^K), \quad \psi \to \pm a \tag{2.36}$$

с некоторым $K > 13$. *При этом доказательство асимптотической устойчивости кинков отличается только небольшими техническими деталями.*

Отметим, что известный потенциал Гинзбурга-Ландау

$$U_{GL}(\psi) = (\psi^2 - a^2)^2/(4a^2)$$

удовлетворяет условию (2.26), условию (2.36) с $m^2 = 2$ и $K = 3$, а также условиям **D2** и **F**. Однако концевая точка спектра $\lambda = 2$ является резонансом для соответствущего линеаризованного оператора. Этот факт является основной причиной того, что асимптотическая устойчивость кинков для уравнения с потенциалом U_{GL} до сих пор не доказана.

Глава VI. В этой главе строятся примеры нелинейных потенциалов, удовлетворяющих предполагаемым в теоремах 2.11 и 2.13 спектральным условиям. Отметим, что в большинстве работ, посвященных асимптотической устойчивости солитонов, накладывается ряд условий на спектральные свойства соответствующей линеаризованной динамики. В нашей работе - это условия **E**, **D1**, **D2** и **F**. Однако эти спектральные свойства обычно только постулируются, и примеры нелинейностей, для которых они справедливы, в большинстве случаев неизвестны.

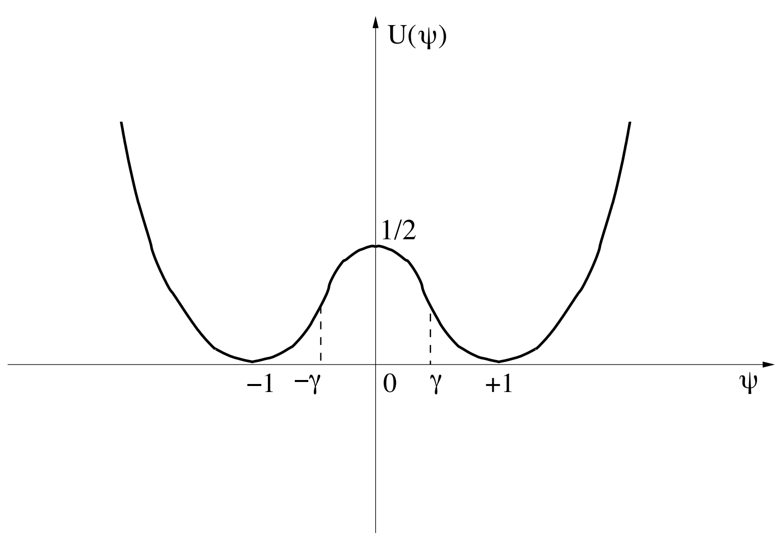

Рис. 5: Потенциал $U_0(\psi)$

Мы строим кусочно-параболические потенциалы вида

$$U_0(\psi) = \begin{cases} 1 - b\psi^2, & |\psi| \le \gamma \\ d(\psi \mp 1)^2, & \pm\psi \ge \gamma \end{cases} \tag{2.37}$$

где $b = 1/\gamma$, $d = 1/(1-\gamma)$, и параметр γ принадлежит интервалу $(0,1)$.

Обозначим через γ_k решения уравнения

$$\frac{\arcsin\sqrt{\gamma_k}}{\sqrt{1-\gamma_k}} = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.38}$$

которые легко найти численно:

$$\gamma_1 \sim 0.64643, \quad \gamma_2 \sim 0.8579, \quad \gamma_3 \sim 0.92472, \quad \gamma_4 \sim 0.95359, \quad \gamma_5 \sim 0.96856...$$

Спектральные свойства линеаризованного на солитоне уравнения зависят от параметра γ. В частности, при $\gamma \in (0, \gamma_1]$ существует только одно собственное значение $\lambda_0 = 0$, при $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2]$ - два собственных значения и т.д.

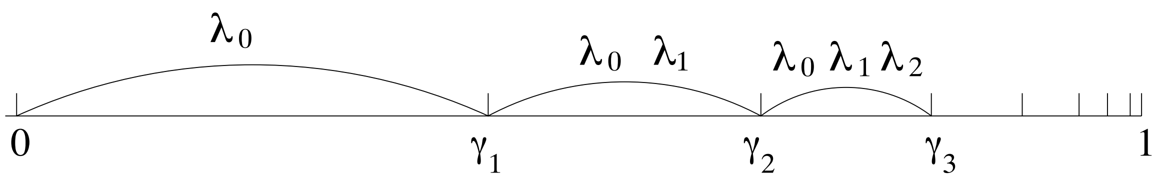

Рис. 6: Дискретный спектр

Резонанс существует только при $\gamma = \gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$, золотое правило Ферми выполнено при всех $\gamma \in (0,1)$ за исключением дискретного множества.

В этой главе также построены гладкие апроксимации кусочно-параболических потенциалов с такими же спектральными свойствами. Отметим, что в [24] построен другой класс примеров нелинейных потенциалов, представляющих собой малые возмущения потенциала Гинзбурга - Ландау.

В заключении автор выражает глубокую благодарность профессору А.И. Комечу за полезные советы и постоянное внимание к работе и профессору Б.Р. Вайнбергу за полезные обсуждения. Автор многим обязан профессору В.С. Буслаеву (1937-2012), сотрудничество с которым повлияло на выбор направления исследования. Большая благодарность ИППИ РАН за поддержку и внимание.

3 Публикации автора по теме диссертации

Монография

1. A. Komech, E. Kopylova, Dispersion decay and scattering theory. John Willey and Sons, Hoboken, New Jersey, 2012.

Статьи автора

2. E. Kopylova, Existence of solitary waves for the discrete Schrödinger equation coupled to a nonlinear oscillator, Russian J. Math. Physics. 15 (2008), no. 4, 486-491.

3. E. Kopylova, Weighted energy decay for 3D wave equation, *Asymptotic Anal.* **65** (2009), no. 1-2, 1-16.

4. Е. Копылова, Дисперсионные оценки для дискретных уравнений Шредингера и Клейна-Гордона, *Алгебра и анализ* **21** (2009), № 5, 87-113. (Имеется английский перевод : E. Kopylova, Dispersion estimates for discrete 3D Schrödinger and Klein-Gordon equations, *St. Petersburg Math. J.* **21** (2010), no. 5, 743-760.)

5. E. Kopylova, On asymptotic stability of solitary waves in discrete Schrödinger equation coupled to nonlinear oscillator, *Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications* **71** (2009), no. 7-8, 3031-3046.

6. E. Kopylova, On asymptotic stability of solitary waves in discrete Klein-Gordon equation coupled to nonlinear oscillator, *Applicable Analysis* **89** (2010), no. 9, 1467-1493.

7. Е. Копылова, Дисперсионные оценки для уравнений Шредингера и Клейна-Гордона, *Успехи матем. наук* **65** (2010), № 1, 95-144. (Имеется английский перевод : E. Kopylova, Dispersive estimates for Schrödinger and Klein-Gordon equation, *Russian Math. Survey* **65** (2010), no. 1, 95-142.)

8. E. Kopylova, Weighted energy decay for 1D wave equation, *J. Math. Analysis and Applications* **366** (2010), no. 2, 494-505.

9. E. Kopylova, Long-time decay for 2D wave equation, *Russian J. Math. Phys.* **17** (2010), no. 2, 226-239.

10. Е. Копылова, Об убывании резольвенты оператора Шредингера, *Труды Математического института им. В.А. Стеклова* **270** (2010), Дифференциальные Уравнения и Динамические Системы, 170-176. (Имеется английский перевод : E. Kopylova, On the decay of the resolvent of the Schrödinger operator, *Proc. Steklov Inst. Math.* **270** (2010), no. 1, 165-171.

11. E. Kopylova, Weighted energy decay for 1D Dirac equation, *Dynamics of PDE* **8** (2011), no. 2, 113-125.

12. E. Kopylova, On long-time decay for modified Klein-Gordon equation. Comm.

Math. Analysis, Conference 03 (2011), 137-152.

13. E. Kopylova, On long-time decay for magnetic Schrödinger and Klein-Gordon equations, *Труды Математического института им. В.А. Стеклова* **278** (2012), 1-9. (*Proc. Steklov Inst. Math.* **278** (2012), 121-129.)

14. Е. Копылова, Асимптотическая устойчивость солитонов для нелинейных гиперболических уравнений, *Успехи матем. наук* **68** (2013), № 2.

Статьи, написанные с соавторами

14. V. Buslaev, A. Komech, E. Kopylova, D. Stuart, On asymptotic stability of solitary waves in nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Partial Diff. Eqns.* **33** (2008), no. 4, 669-705.

15. A. Komech, E. Kopylova, Scattering of solitons for Schrödinger equation coupled to a particle, *Russian J. Math. Phys.* **13** (2006), no. 2, 158-187.

16. A. Komech, E. Kopylova, Weighted energy decay for 1D Klein-Gordon equation, *Comm. PDE* **35** (2010) , no. 2, 353-374.

17. A. Komech, E. Kopylova, Long time decay for 2D Klein-Gordon equation, *J. Func. Anal.* **259** (2010), no. 2, 477-502.

18. A. Komech, E. Kopylova, Weighted energy decay for 3D Klein-Gordon equation, *J. Differ. Equations* **248** (2010), no. 3, 501-520. |

19. A. Komech, E. Kopylova, Weighted decay for magnetic Schrödinger equation, *J. Funct. Analysis.* **248** (2013), no. 3, 735-751.

20. A. Komech, E. Kopylova, M. Kunze, Dispersion estimates for 1D discrete Schrödinger and Klein-Gordon equations, *Applicable Analysis* **85** (2006), no. 12, 1487-1508.

21. A. Komech, E. Kopylova, D. Stuart, On asymptotic stability of solitons in a nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Pure and Applied Analysis* **11** (2012), no. 3, 1063-1079.

22. A. Komech, E. Kopylova, H. Spohn, Scattering of solitons for Dirac equation coupled to a particle, *J. Math. Anal. Appl.* **383** (2011), 265-290.

23. A. Komech, E. Kopylova, B. Vainberg, On Dispersion properties of discrete 2D Schrödinger and Klein-Gordon equations, *J. Func. Anal.* **254** (2008), 2227-2254.

25. E. Kopylova, A. Komech, On asymptotic stability of moving kink for relativistic Ginsburg-Landau equation, *Comm. Math. Phys.* **302** (2011), no. 1, 225-252.

26. E. Kopylova, A. Komech, On asymptotic stability of kink for relativistic Ginsburg-Landau equation, *Arch. Rat. Mech. and Analysis* **202** (2011), no. 2, 213-245.