На правах рукописи

БУРНАЕВ ЕВГЕНИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

О МИНИМАКСНОЙ И ОБОБЩЕННОЙ БАЙЕСОВСКОЙ ЗАДАЧАХ СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ ДЛЯ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

Специальность: 05.13.17 – теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2008

Работа выполнена в Московском физико-техническом институте (государственном университете)

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор А.Н. Ширяев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Мазалов

доктор физико-математических наук,
ст. науч. сотр. Б.С. Дарховский

Ведущая организация:

Центральный экономико-математический
институт Российской академии наук

Защита состоится "____" __________ 2008 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д.002.077.01 в Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН по адресу: 101447, Москва, ГСП-4, Б. Каретный пер., 19, стр. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.

Автореферат разослан "31" октября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук И.И. Цитович

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. За последние двадцать лет существенно возросла потребность в решении ряда практических задач[1], таких как автоматическое обнаружение неисправностей (разладок, сбоев, и т.п.), обслуживание оборудования на основе автоматического контроля его состояния, обеспечение безопасности сложных технических и информационных систем (самолетов, судов, ракет, ядерных электростанций, различных интернет-сервисов, и т.д.), автоматический контроль качества выпускаемой продукции, предсказание естественных катастрофических явлений (землятресения, цунами, и т.д.), мониторинг в биомедицине и финансовой сфере.

Эти задачи возникают по причине[2]: возрастания влияния антропогенного воздействия из-за высокоразвитой промышленной индустрии; роста масштабов и сложности эргатических[3] систем; стремления человека эффективно использовать ограниченные природные ресурсы, энергию, сырье и производственное оборудование при минимальных затратах социального времени; необходимости раннего предсказания естественных катастрофических явлений.

Основная черта вышеперечисленных задач состоит в том, что по сути все они сводятся к выявлению момента *резкого изменения* (*разладки*) некоторых характеристик рассматриваемого объекта на основе статистических данных о других характеристиках этого объекта.

С развитием информатики появилась возможность построения автоматизированных информационных систем для ста-

[1] F. Gustaffson. Adaptive filtering and change detection. – New York: Wiley, 2000.

[2] Г.А. Сырецкий. Информатика. Фундаментальный курс. Том I. Основы информационной и вычислительной техники. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

[3] Система, в которой во взаимосвязи находятся "природа+техника+человек".

тистической обработки огромного объема реальных данных с целью вынесения тех или иных суждений о характеристиках истинных разладок.

Для создания таких систем с привлечением программных средств требуется разработка соответствующих фундаментальных математических методов обработки поступающей и поступившей информации исходя из естественных критериев оптимальности. В свою очередь, для построения оптимальных методов обнаружения разладки (методов *скорейшего обнаружения*) необходимо прежде всего формализовать задачу, то есть определить допустимые входные и выходные данные, области их изменения, качественно описать зависимости между характеристиками наблюдаемого процесса и т.д. Другими словами, должна быть определена формальная аналитическая модель разладки, исследование которой потом проводится с помощью специально разработанных для этого теоретических методов.

Теоретические методы обнаружения разладки для диффузионных процессов были получены Ширяевым А.Н., Moustakides G.V., Pollak M., Siegmund D., Новиковым А.А., Файнбергом Е.А. и др. Позже эти методы были применены Тартаковским А.Г., Розовским Б.Л. и др. для построения систем обеспечения безопасности сетей; Basseville M., Benveniste A., Никифоров И.В. и др. использовали их для разработки эффективных алгоритмов обнаружения неисправностей в сложных технических устройствах и т.п.

Многие практические ситуации можно описать с помощью потока событий (заявок, отказов и т.п.), соответственно задача обнаружения разладки в потоке событий является одной из наиболее важных и широко встречающихся на практике. Поток событий во многих приложениях (например, в системах массового обслуживания, информационных системах и т.п.)

описывается с помощью пуассоновской модели. Именно поэтому для практических приложений актуальна задача о разладке для пуассоновского процесса.

До сих пор были разработаны методы скорейшего обнаружения момента изменения интенсивности пуассоновского потока событий, являющиеся оптимальными только в “среднем”, поскольку при построении этих методов было сделано предположение, что момент разладки является *случайной величиной* с заранее заданным распределением[4,5] (*байесовская* постановка задачи о разладке). В то же время в приложениях зачастую требуется использовать метод обнаружения разладки, являющийся оптимальным для случая, когда момент разладки представляет собой *детерминированный неизвестный параметр*, однако теоретические методы построения эффективных процедур обнаружения разладки в этом важном для практики случае отсутствовали.

Таким образом, **целью** данной работы является развитие теоретических методов исследования аналитической модели разладки, состоящей в смене интенсивности пуассоновского потока событий в неизвестный момент времени, и отыскание эффективных методов ее обнаружения для случая, когда момент разладки является детерминированным неизвестным параметром.

В соответствии с поставленной целью были определены следующие **задачи** исследования:

1. Свести задачу скорейшего обнаружения момента изменения интенсивности потока событий в пуассоновской мо-

[4] Peskir G., Shiryaev A.N. Solving the Poisson disorder problem // Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honour of Dieter Sondermann / Ed. by Sandmann K., Schonbucher P. – Berlin: Springer, 2002. – P. 295–312.

[5] Dayanik S., Sezer S.O. Compound Poisson disorder problem // Mathematics of Operations Research. – 2005. – V. 31, N. 4. – P. 649–672.

дели потока к математической задаче оптимальной остановки некоторого модельного процесса.

2. Найти эффективные методы обнаружения момента смены интенсивности пуассоновского потока событий в случае, когда момент разладки является неизвестным детерминированным параметром, а среднее время запаздывания в обнаружении разладки характеризуется с помощью обобщенной байесовской или минимаксной функции риска.

3. Вычислить среднее время запаздывания в обнаружении разладки при использовании полученных методов.

Общая методика исследования. Для решения поставленных задач в работе используются методы теории оптимальной остановки марковских процессов, стохастический анализ, методы анализа особых свойств кусочно-детерминистических марковских процессов, теория дифференциально-разностных уравнений.

Научная новизна результатов, полученных в диссертации, заключается в том, что в ней впервые найдены оптимальный и асимптотически оптимальный методы обнаружения момента смены интенсивности пуассоновского потока событий в случае, когда момент разладки является неизвестным детерминированным параметром, а среднее время запаздывания в обнаружении разладки характеризуются с помощью обобщенной байесовской или минимаксной функции риска соответственно.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные при решении обобщенной байесовской и минимаксной постановок задачи скорейшего обнаружения результаты

- могут применяться при построении компонент автоматизированных информационных систем, используемых для выявления разладок;
- приближенно описывают, какие "эффекты" следует ожидать на практике при применении полученных методов скорейшего обнаружения момента смены интенсивности пуассоновского потока событий;
- позволяют отработать подходы к решению задачи скорейшего обнаружения для более общих, по сравнению с изменением интенсивности пуассоновского потока событий, моделей разладки (в которых под разладкой понимается, например, одновременное изменение нескольких характеристик наблюдаемого процесса).

Научные результаты, выносимые на защиту:

1. Метод сведения задачи скорейшего обнаружения момента изменения интенсивности потока событий в пуассоновской модели потока к математической задаче оптимальной остановки модельного процесса специального вида (т.н. кусочно-детерминистический процесс Ширяева, являющийся *достаточной статистикой*).
2. Метод исследования свойств модельного процесса и вычисления различных интегральных функционалов от него.
3. Оптимальный и асимптотически оптимальный методы обнаружения момента смены интенсивности пуассоновского потока событий в случае, когда момент разладки является неизвестным детерминированным параметром, а среднее время запаздывания в обнаружении разладки характеризуется с помощью обобщенной байесовской или минимаксной функции риска соответственно.

4. Процедура вычисления среднего времени запаздывания в обнаружении разладки, которая сводится к численному решению дифференциально-разностного уравнения.

5. Асимптотики среднего времени запаздывания в обнаружении разладки.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих российских и международных конференциях:

1. Научная конференция "Информационные технологии и системы" (ИТиС-2008), 29 сентября – 3 октября 2008 г., Геленджик, Россия.

2. Advanced Research Workshop on Financial Mathematics: Methods and Applications, 16-20 September 2008, University of Gdansk, Poland.

3. Russian-Japan Workshop "Complex Stochastic Models: Asymptotics and Applications", 4-5 June 2007, Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia.

4. 15th European Young Statisticians Meeting, 10-14 September 2007, Castro Urdiales, Spain.

5. II всероссийская научная конференция с молодежной научной школой "Математическое моделирование развивающейся экономики" (ЭКОМОД-2007), 9-15 июля 2007 г., ВятГУ, Киров, Россия.

6. 50-я научная конференция Московского физико-технического института, 23-27 ноября 2007 г., Долгопрудный, Россия.

Основные результаты диссертации обсуждались на научном семинаре "Случайные процессы и стохастический анализ" кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством А.Н. Ширяева (2006-2008 гг.), научном семинаре Добрушинской лаборатории ИППИ РАН (2008 г.), научном семинаре кафедры высшей математики МФТИ (2008 г.), научном семинаре лаборатории теории передачи информации и управления ИППИ РАН (2008 г.), научном семинаре ВЦ РАН по руководством И.С. Меньшикова (2008 г.).

Полученные результаты использовались в работах, проводимых в рамках программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (код проекта РНП.2.2.1.1.2467, тема 717).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ, из них 2 работы – статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, 4 работы в трудах ведущих российских и международных конференций. Все работы написаны без соавторов. Наиболее важные результаты опубликованы в работах [1], [2] и [3].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 137 наименований. Работа изложена на 127 страницах и содержит 3 рисунка.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность задачи скорейшего обнаружения, проведен обзор известных результатов, связанных с темой диссертации, сформулирована цель и определены задачи исследования, а также приведено краткое содержание диссертации. Теоретические задачи, которые необходимо решить для достижения поставленной цели, были сформулированы в виде задачи скорейшего обнаружения (в *обобщенной байесовской* и *минимаксной* постановках) момента изменения интенсивности пуассоновского потока событий.

Первая глава посвящена изложению постановок задачи скорейшего обнаружения и получению представления для модельного процесса специального вида (т.н. кусочно-детерминистический процесс Ширяева $(\psi_t)_{t\geq 0}$, являющийся *достаточной статистикой*), к оптимальной остановке которого сводится задача скорейшего обнаружения момента изменения интенсивности пуассоновского потока событий.

В ***первом*** разделе описывается модель разладки на основе пуассоновского процесса, проводится обзор основных приложений, в которых этот процесс используется, а также излагаются постановки задачи скорейшего обнаружения.

Предполагается, что в рассматриваемой модели разладки наблюдаемый стохастический процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ имеет вид

$$X_t = \begin{cases} N_t^{\lambda_0}, & t \leq \theta, \\ N_\theta^{\lambda_0} + N_{t-\theta}^{\lambda_1}, & t > \theta, \end{cases}$$

с $X_0 = 0$, где $\theta \in [0, \infty]$ – неизвестный момент разладки, $N^{\lambda_0} = (N_t^{\lambda_0})_{t\geq 0}$ и $N^{\lambda_1} = (N_t^{\lambda_1})_{t\geq 0}$ – независимые пуассоновские процессы с интенсивностями λ_0 и λ_1 соответственно, определенные на фильтрованном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P}\big)$, при этом параметры $\lambda_0 > 0$ и $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_0 \neq \lambda_1$) считаются известными.

Значения реализации процесса $(X_t)_{t\geq 0}$ поступают последовательно, текущим образом и задача заключается в том, чтобы на основании поступающих данных построить такой конечный момент остановки $\tau = \tau(\omega)$ (выбором τ определяется правило подачи сигнала тревоги) относительно фильтрации $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$, порожденной процессом $(X_t)_{t\geq 0}$ (то есть $\mathcal{F}_t^X =$

$\sigma\{X_s, 0 \le s \le t\}$), который в определенном смысле "наиболее близок" к моменту разладки θ.

Пусть $\mathrm{P}_s = \mathrm{Law}\,(X|s)$ обозначает распределение процесса $(X_t)_{t\ge 0}$ при условии, что разладка происходит в детерминированный момент времени $\theta = s \ge 0$. В частности, через P_∞ обозначим распределение $(X_t)_{t\ge 0}$ при условии, что разладка никогда не произойдет, то есть $\mathrm{P}_\infty = \mathrm{Law}(N_t^{\lambda_0}, t \ge 0)$. Обозначим также через $\mathbb{E}_s$ математическое ожидание по мере P_s.

Момент остановки τ, с помощью которого оценивается момент разладки θ, должен иметь большое среднее время до ложной тревоги и малое запаздывание в обнаружении разладки. Именно эти естественные требования сформулированы математически в байесовской (вариант (A)), обобщенной байесовской (вариант (B)) и минимаксной (вариант (C)) постановках задачи скорейшего обнаружения.

Вариант (A). Допустим, что θ – случайная величина ($\theta = \theta(\omega)$), независящая от процесса $(X_t)_{t\ge 0}$ и имеющая *экспоненциальное распределение с атомом в нуле*, то есть

$$\mathrm{P}\,(\theta = 0) = \pi \qquad \text{и} \qquad \mathrm{P}\,(\theta > t|\theta > 0) = e^{-\lambda t},$$

где $\pi \in [0,1)$ и $\lambda > 0$ – известные константы.

Обозначим через

$$\mathfrak{M}_{(\alpha)} = \{\tau < \infty : \mathrm{P}\,(\tau < \theta) \le \alpha\}$$

при фиксированном значении $\alpha \in (0,1)$ множество конечных моментов остановки, для которых вероятность ложной тревоги $\mathrm{P}\,(\tau < \theta)$ не превосходит α.

Вариант (A) задачи скорейшего обнаружения состоит в том, чтобы найти для заданного $\alpha \in (0,1)$ такой оптимальный момент остановки $\tau^*_{(\alpha)} \in \mathfrak{M}_{(\alpha)}$, если он существует, что

$$\inf_{\tau_{(\alpha)} \in \mathfrak{M}_{(\alpha)}} \mathbb{E}\,(\tau - \theta|\tau \ge \theta) = \mathbb{E}\left(\tau^*_{(\alpha)} - \theta|\tau^*_{(\alpha)} \ge \theta\right).$$

Вариант (B). В данном случае $\theta \in [0, \infty]$ – детерминированный неизвестный параметр.

Для каждого $T > 0$ обозначим через

$$\mathfrak{M}_T = \{\tau : \mathbb{E}_\infty \tau = T\}$$

множество моментов остановки, среднее время до ложной тревоги $\mathbb{E}_\infty \tau$ которых равно фиксированному значению T.

Вариант (B) задачи о разладке состоит в том, чтобы для заданного $T > 0$ найти такой оптимальный момент остановки τ_T^*, если он существует, что

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbb{E}_\theta (\tau - \theta)^+ d\theta = \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbb{E}_\theta (\tau_T^* - \theta)^+ d\theta.$$

Такая постановка задачи называется *обобщенной байесовской*, поскольку параметр θ можно интерпретировать как обобщенную случайную величину с “равномерным” распределением на $[0, \infty)$.

Естественно также рассматривать более широкий класс моментов остановки

$$\mathfrak{M}_{\geq T} = \{\tau : T \leq \mathbb{E}_\infty \tau < \infty\} \supset \mathfrak{M}_T$$

и найти такой момент остановки $\tau_{\geq T}^* \in \mathfrak{M}_{\geq T}$, если он существует, что

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{\geq T}} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbb{E}_\theta (\tau - \theta)^+ d\theta = \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbb{E}_\theta (\tau_{\geq T}^* - \theta)^+ d\theta.$$

Вариант (C). В данном случае $\theta \in [0, \infty]$ – детерминированный неизвестный параметр.

Вариант (C) задачи о разладке состоит в том, чтобы для заданного $T > 0$ найти такой момент остановки $\sigma_T^* \in \mathfrak{M}_T$, если он существует, что

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{E}_\theta \left(\tau - \theta | \tau \geq \theta \right) = \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{E}_\theta \left(\sigma_T^* - \theta | \sigma_T^* \geq \theta \right).$$

Естественно также найти такой момент остановки $\sigma^*_{\geq T} \in \mathfrak{M}_{\geq T}$, если он существует, что

$$\inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{\geq T}} \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{E}_\theta \left(\tau - \theta | \tau \geq \theta\right) = \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{E}_\theta \left(\sigma^*_{\geq T} - \theta | \sigma^*_{\geq T} \geq \theta\right)$$

Рассмотрим вариант (A) задачи скорейшего обнаружения. Пусть

$$\pi_t = \mathrm{P}\left(\theta \leq t | \mathcal{F}_t^X\right), \ t \geq 0$$

обозначает *апостериорную* вероятность того, что разладка появляется до момента времени t. В частности, $\pi_0 = \pi$. Известно[6], что момент остановки

$$\tau^*_{(\alpha)} = \inf\left\{t \geq 0 : \pi_t \geq 1 - \alpha\right\}$$

является оптимальным решением в классе $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ варианта (A) задачи скорейшего обнаружения для пуассоновского процесса.

Во ***втором*** разделе показано, как получить уравнение для процесса апостериорной вероятности $(\pi_t)_{t \geq 0}$ из уравнения для *процесса отношения правдоподобия* $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ с

$$\varphi_t = \frac{\pi_t}{1 - \pi_t}, \ t \geq 0.$$

Далее, специальным предельным переходом из процесса $(\varphi_t)_{t \geq 0}$ получен кусочно-детерминистический процесс Ширяева $(\psi_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющий уравнению

$$d\psi_t = dt + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1\right) d\left(X_t - \lambda_0 t\right), \ \psi_0 = 0 \qquad (1)$$

и имеющий представление

$$\psi_t = \int_0^t \frac{L_t}{L_u} du,$$

[6]Shiryaev A.N., Peshkir G. Optimal stopping and free-boundary problems. – Birkhauser, 2006.

где отношение правдоподобия

$$L_t = \frac{d\left(\mathrm{P}_0|\mathcal{F}_t^X\right)}{d\left(\mathrm{P}_\infty|\mathcal{F}_t^X\right)} = \exp\left(\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) X_t - (\lambda_1 - \lambda_0)\, t\right).$$

Доказывается, что процесс $(\psi_t)_{t\geq 0}$ является марковским.

Вторая глава посвящена решению варианта (B) задачи скорейшего обнаружения для пуассоновского процесса.

В ***первом*** разделе доказывается, что вариант (B) задачи скорейшего обнаружения может быть сведен к условно-экстремальной задаче оптимальной остановки кусочно-детерминистического процесса $(\psi_t)_{t\geq 0}$.

Теорема 1. *Значение*

$$B(T) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbb{E}_\theta\,(\tau - \theta)^+\, d\theta \tag{2}$$

функции риска обобщенной байесовской задачи о разладке равно значению функции цены условно-экстремальной задачи оптимальной остановки процесса $(\psi_t)_{t\geq 0}$*:*

$$B(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \mathbb{E}_\infty \int_0^\tau \psi_\theta d\theta. \tag{3}$$

Таким образом, процесс $(\psi_t)_{t\geq 0}$ играет роль своего рода *достаточной статистики* в варианте (B) задачи о разладке.

Во ***втором*** разделе исследуется поведение выборочных траекторий кусочно-детерминистического процесса $(\psi_t)_{t\geq 0}$ и доказывается, что этот процесс с вероятностью единица за конечное время выходит на любой заданный уровень.

В ***третьем*** разделе решается задача вычисления среднего значения некоторых интегральных функционалов от кусочно-детерминистического процесса $(\psi_t)_{t\geq 0}$, то есть функций вида

$$G(x; y) = \mathbb{E}_\infty^{(x)} \int_0^{\tau_y} F\left(\psi_{s-}\right) ds,$$

где $\mathbb{E}_\infty^{(x)}$ – математическое ожидание по мере $\mathrm{P}_\infty^{(x)}$, относительно которой процесс $(\psi_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием $\psi_0 = x$, $y > 0$ – произвольная фиксированная величина, $F(x)$ – положительная, непрерывно дифференцируемая, ограниченная на $[0, y]$ функция, а $\tau_y = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \geq y\}$, и разрабатывается метод для подсчета асимптотик этих функционалов.

В ***четвертом*** разделе разрабатывается метод для вычисления математического ожидания $\mathbb{E}_\infty^{(x)}\tau_A$ момента выхода на заданную границу $y = A > 0$ кусочно-детерминистического процесса $(\psi_t)_{t\geq 0}$.

В ***пятом*** разделе решается задача подбора такого значения границы $y = A$, среднее значение момента выхода $\tau_A = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \geq A\}$ на которую кусочно-детерминистического процесса $(\psi_t)_{t\geq 0}$ равняется заданной величине T. Доказана

Теорема 2. *При $\lambda_1 < \lambda_0$ и любых $T > 0$ для $A = A(T) = T$ момент остановки $\tau_A \in \mathfrak{M}_T$. При $\lambda_1 > \lambda_0$ и любых $T > 0$ найдется решение $A = A(T)$ уравнения $\mathbb{E}_\infty\tau_A = T$, удовлетворяющее неравенствам $\frac{\lambda_0}{\lambda_1}T < A(T) < T$, для которого $\tau_A \in \mathfrak{M}_T$.*

В ***шестом*** разделе решается условно-экстремальная задача оптимальной остановки кусочно-детерминистического процесса $(\psi_t)_{t\geq 0}$

$$\inf_{\tau\in\mathfrak{M}_T} \mathbb{E}_\infty \int_0^\tau \psi_\theta d\theta$$

и доказывается, что момент первого выхода этого процесса на специальным образом подобранную границу является оптимальным решением варианта (B) задачи скорейшего обнаружения, то есть верна

Теорема 4. *При любых $\lambda_1 > 0$, $\lambda_0 > 0$ и $T > 0$ момент остановки*

$$\tau_T^* = \tau_{A(T)} = \inf\left\{t \geq 0 : \psi_t \geq A(T)\right\},$$

где процесс $(\psi_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет уравнению (1), а $A = A(T)$ является решением уравнения $\mathbb{E}_\infty \tau_A = T$, будет оптимальным решением варианта (B) задачи скорейшего обнаружения для пуассоновского процесса в классах моментов остановок $\mathfrak{M}_T$ и $\mathfrak{M}_{\geq T}$.

В ***седьмом*** разделе подсчитываются среднее время запаздывания $B(T)$ при обнаружении разладки в варианте (B) задачи скорейшего обнаружения и асимптотики этого среднего времени. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть $\lambda_1 \to \infty$ и $\lambda_0 \to \infty$ так, что выполняется соотношение $\lambda_1 = \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0} \cdot \Lambda$ с произвольным фиксированным значением $\Lambda \in \mathbb{R}$. Тогда для функции риска $B(T)$ имеет место следующее разложение по степеням малого параметра $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \downarrow 0$*

$$B(T) = B_0(T) + \varepsilon B_1(T) + \ldots,$$

где

$$B_0(T) = \begin{cases} \frac{1}{\rho}\left[\log(\rho T) - (\mathbb{C}+1) + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right)\right] & \text{при } T \to \infty, \\ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\rho T}{2} + O\left((\rho T)^2\right)\right] & \text{при } T \to 0, \end{cases}$$

$$B_1(T) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\Bigg[\log(\rho T) - \left(\mathbb{C} + \frac{5}{2}\right) & \\ \qquad\qquad + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right)\Bigg] & \text{при } T \to \infty, \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\left[\frac{(\rho T)^3}{2} + O\left((\rho T)^4\right)\right] & \text{при } T \to 0 \end{cases}$$

в случае $\lambda_1 < \lambda_0$ *и*

$$L_{B_1}(T) < B_1(T) < R_{B_1}(T),$$

$$L_{B_1}(T) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\Big[2\log(\rho T) - \left(2\mathbb{C} - \frac{5}{2}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right)\Big] & \text{при } T \to \infty, \\ -\sqrt{\frac{2}{\rho}}\left[\rho T + O\left((\rho T)^2\right)\right], & \text{при } T \to 0, \end{cases}$$

$$R_{B_1}(T) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\Big[4\log(\rho T) - \left(4\mathbb{C} + \frac{5}{2}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right)\Big] & \text{при } T \to \infty, \\ \sqrt{\frac{2}{\rho}}\left[\rho T + O\left((\rho T)^2\right)\right], & \text{при } T \to 0 \end{cases}$$

в случае $\lambda_1 > \lambda_0$.

Теорема 6. *Для произвольных* $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$ *и*

$$C(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1 \log \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0)}$$

при $T \to \infty$

$$B(T) = C(\lambda_0, \lambda_1)\, \widetilde{B}(T) + O(1),$$

где

$$\widetilde{B}(T) = \frac{1}{T}\mathbb{E}_\infty\left(\psi_{\tau_{A(T)}} \log \psi_{\tau_{A(T)}}\right),$$

процесс $(\psi_t)_{t\geq 0}$ *удовлетворяет уравнению (1),* $\tau_{A(T)} = \{t \geq 0 : \psi_t \geq A(T)\}$, *а* $A = A(T)$ *– решение уравнения* $\mathbb{E}_\infty \tau_A = T$. *При этом* $\widetilde{B}(T) = \log T$ *в случае* $\lambda_1 < \lambda_0$ *и* $\widetilde{B}(T) \in \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\log T, \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\log T\right]$ *в случае* $\lambda_1 > \lambda_0$.

<u>Третья глава</u> посвящена получению асимптотически оптимального решения варианта (C) задачи скорейшего обнаружения для пуассоновского процесса.

В ***первом*** разделе определяются оценки сверху и снизу среднего времени запаздывания при обнаружении разладки в варианте (C) задачи скорейшего обнаружения, а именно, доказывается, что для минимаксных рисков

$$C(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{E}_\theta \left(\tau - \theta | \tau \geq \theta\right) \tag{4}$$

и

$$C_{\geq}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_{\geq T}} \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{E}_\theta \left(\tau - \theta | \tau \geq \theta\right). \tag{5}$$

выполняется следующая

Теорема 7. *Для произвольного $T > 0$ и момента остановки $\tau_T^* = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \geq A(T)\}$, где процесс $(\psi_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет уравнению (1), а $A = A(T)$ является решением уравнения $\mathbb{E}_\infty \tau_A = T$, выполнено, что*

$$B(T) \leq C_{\geq}(T) \leq C(T) \leq C^*(T), \tag{6}$$

где $C^*(T) = \mathbb{E}_0 \tau_T^*$, а $B(T)$ определено в (2), (3) (см. также теоремы 5 и 6).

Во ***втором*** разделе решается задача вычисления функции $W(x; A) = \mathbb{E}_0^{(x)} \tau_A$, где $\mathbb{E}_0^{(x)}$ – математическое ожидание по мере $\mathrm{P}_0^{(x)}$, относительно которой процесс $(\psi_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием $\psi_0 = x$, $A > 0$ – произвольная фиксированная величина, и разрабатывается метод для подсчета асимптотик этой функции.

В ***третьем*** разделе подсчитываются асимптотики оценки сверху $C^*(T) = \mathbb{E}_0 \tau_T^*$ среднего времени запаздывания и доказывается, что момент первого выхода кусочно-детерминистического процесса $(\psi_t)_{t\geq 0}$ на специальным образом подобранную границу является асимптотически оптимальным решением варианта (C) задачи скорейшего обнаружения. Доказана

Теорема 8. *Для оценки сверху $C^*(T)$ минимаксных рисков (4) и (5) при $\lambda_1 \to \infty$ и $\lambda_0 \to \infty$, удовлетворяющих соотношению $\lambda_1 = \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0}\cdot\Lambda$ с произвольным фиксированным значением $\Lambda \in \mathbb{R}$, имеет место следующее разложение по степеням малого параметра $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \downarrow 0$*

$$C^*(T) = C_0^*(T) + \varepsilon C_1^*(T) + \dots,$$

где

$$C_0^*(T) = \begin{cases} \frac{1}{\rho}\left[\log(\rho T) - \mathbb{C} + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right)\right] & \text{при } T \to \infty, \\ \frac{1}{\rho}\left[\rho T + O\left((\rho T)^2\right)\right] & \text{при } T \to 0, \end{cases}$$

$$C_1^*(T) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\Bigg[\log(\rho T) - \left(\mathbb{C} + \frac{3}{2}\right) \\ \qquad\qquad + O\left(\frac{\log \rho T}{\rho T}\right)\Bigg] & \text{при } T \to \infty, \\ -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\left[2(\rho T)^2 + O\left((\rho T)^4\right)\right] & \text{при } T \to 0 \end{cases}$$

в случае $\lambda_1 < \lambda_0$ и

$$L_{C_1^*}(T) < C_1^*(T) < R_{C_1^*}(T),$$

$$L_{C_1^*}(T) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\Bigg[\log(\rho T) - \left(\mathbb{C} + \frac{9}{2}\right) \\ \qquad\qquad + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right)\Bigg], & T \to \infty; \\ -\sqrt{\frac{2}{\rho}}\left[\rho T + O\left((\rho T)^2\right)\right], & T \to 0, \end{cases}$$

$$
R_{C_1^*}(T) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\Big[\log(\rho T) - \left(\mathbb{C} - \frac{3}{2}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right)\Big], & T \to \infty; \\ \sqrt{\frac{2}{\rho}}\left[\rho T + O\left((\rho T)^2\right)\right], & T \to 0 \end{cases}
$$

в случае $\lambda_1 > \lambda_0$.

Из теорем 5, 8 и формулы (6) получаем

Следствие. *Пусть $\lambda_1 \to \infty$ и $\lambda_0 \to \infty$ так, что выполняется соотношению $\lambda_1 = \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0} \cdot \Lambda$ с произвольным фиксированным значением $\Lambda \in \mathbb{R}$, тогда момент остановки*

$$
\tau_T^* = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \geq A(T)\},
$$

где процесс $(\psi_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет уравнению (1), а порог $A = A(T)$ является решением уравнения $\mathbb{E}_\infty \tau_A = T$, будет асимптотически при $T \to \infty$ оптимальным решением варианта (C) задачи скорейшего обнаружения для пуассоновского процесса в классах моментов остановок $\mathfrak{M}_T$ и $\mathfrak{M}_{\geq T}$.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы:

1. Метод сведения задачи скорейшего обнаружения момента изменения интенсивности потока событий в пуассоновской модели потока к математической задаче оптимальной остановки модельного процесса специального вида (т.н. кусочно-детерминистический процесс Ширяева, являющийся *достаточной статистикой*).

2. Метод исследования свойств модельного процесса и вычисления различных интегральных функционалов от него.

3. Оптимальный и асимптотически оптимальный методы обнаружения момента смены интенсивности пуассоновского потока событий в случае, когда момент разладки является неизвестным детерминированным параметром, а среднее время запаздывания в обнаружении разладки характеризуется с помощью обобщенной байесовской или минимаксной функции риска соответственно.

4. Процедура вычисления среднего времени запаздывания в обнаружении разладки, которая сводится к численному решению дифференциально-разностного уравнения.

5. Асимптотики среднего времени запаздывания в обнаружении разладки.

Публикации автора по теме диссертации

1. Бурнаев Е.В. О задаче обнаружения разладки для пуассоновского процесса в обобщенной байесовской постановке // Теория вероятностей и ее применения. – 2008. – Т. 53, вып. 3. – С. 534–556.

2. Бурнаев Е.В. Задача о разладке для пуассоновского процесса в обобщенной байесовской постановке // Успехи математических наук. – 2007. – Т. 62, вып. 4. – С. 151–152.

3. Бурнаев Е.В. О минимаксной асимптотической оптимальности первого порядка в задаче наискорейшего обнаружения изменения интенсивности пуассоновского процесса // Информационные технологии и системы (ИТиС'08): сборник трудов конференции. – М.: ИППИ РАН, 2008. – С. 403–405.

4. Бурнаев Е.В. Об обобщенной байесовской постановке задачи о разладке для пуассоновского процесса // Сборник научных трудов II всероссийской научной конференции “Математическое моделирование развивающейся экономики” (ЭКОМОД-2007). – Киров: ВятГУ, 2007. – С. 64–69.

5. Burnaev E.V. Quickest detection of intensity change for Poisson process in generalized Bayesian setting // Proceedings of the 15th European Young Statisticians Meeting (EYSM-2007). – 2007. – P. 1–5.

6. Бурнаев Е.В. О задаче обнаружения разладки для пуассоновского процесса в обобщенной байесовской постановке // Труды 50-й научной конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”. – Москва–Долгопрудный: ФУПМ, 2007. – С. 11–14.