ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 425, № 3, с. 305–308

МАТЕМАТИКА

УДК 517.927.7

О 21-Й ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ФУКСОВЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2009 г. И. В. Вьюгин

Представлено академиком Д.В. Аносовым 15.10.2008 г.

Поступило 27.10.2008 г.

В работе 21-я проблема Гильберта для скалярных фуксовых уравнений анализируется посредством перехода к системам, что приводит к трем эквивалентным формулировкам этой проблемы. С их помощью явно указаны две новые серии примеров, когда проблема неразрешима, усилена теорема А.А. Болибруха о фуксовых системах с монодромией фуксова уравнения и доказано отсутствие изомонодромных деформаций фуксовых уравнений при четырех и более особых точках.

1. ФУКСОВЫ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(p)} + b_1(z)y^{(p-1)} + \ldots + b_p(z)y = 0 \qquad (1)$$

порядка p с мероморфными на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ коэффициентами $b_1(z), b_2(z), \ldots, b_p(z)$, голоморфными вне множества особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Решения уравнения (1) – голоморфные функции на универсальном накрытии $\widetilde{\overline{\mathbb{C}}\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$ проколотой сферы. В точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ они имеют ветвление, причем если аналитически продолжить фундаментальную систему решений $(y_1(z), y_2(z), \ldots, y_p(z))$ вдоль некоторой петли γ с закрепленным концом в неособой точке z_0, то она перейдет в другую фундаментальную систему решений, связанную с первой умножением справа на постоянную матрицу. Это сопоставление петле γ матрицы перехода G_γ определяет представление

$$\chi\colon \pi_1(\overline{\mathbb{C}}\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, z_0) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}), \qquad (2)$$

которое называется представлением монодромии или монодромией уравнения (1).

Особая точка a_i уравнения (1) называется фуксовой, если коэффициент $b_j(z)$ имеет в этой точке полюс порядка не более j ($j = 1, 2, \ldots, p$). Согласно теореме Фукса (см. [2]), особая точка a_i является фуксовой тогда и только тогда, когда она регулярна (т.е. решения в a_i растут не быстрее чем $(z - a_i)^k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ при стремлении z к a_i внутри некоторого сектора). Уравнение (1) называется фуксовым, если все его особые точки фуксовы.

Наряду с уравнением (1) можно рассмотреть линейную систему

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \quad B(z) \in \mathrm{Mat}_{p\times p}(\mathbb{C}) \qquad (3)$$

из p уравнений с мероморфной на сфере Римана матрицей $B(z)$, голоморфной вне точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Представление монодромии данной системы определяется так же, как и для уравнения (1), нужно только вместо строки $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ рассмотреть фундаментальную матрицу $Y(z)$ – матрицу, столбцы которой образуют базис в пространстве решений системы.

Особая точка a_i системы (3) называется фуксовой, если матрица $B(z)$ имеет полюс первого порядка в этой точке. Фуксова особая точка линейной системы всегда является регулярной, хотя регулярная особенность не обязана быть фуксовой (см. [2]). Система (3) называется фуксовой, если все ее особые точки фуксовы.

2. РАССЛОЕНИЯ И СВЯЗНОСТЬ

Будем рассматривать голоморфные векторные расслоения над сферой Римана. Такое расслоение может быть задано координатным описанием, т.е. набором окрестностей $\{U_i\}$, покрывающих сферу, и набором голоморфных склеивающих функций

$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}),$$

определяющих коцикл, т.е.

$$g_{ij}(z) \equiv (g_{ji}(z))^{-1}, \quad z \in U_i \cap U_j;$$
$$g_{ji}(z) \cdot g_{ik}(z) \cdot g_{kj}(z) \equiv I, \quad z \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Говорят, что в векторном расслоении F задана связность ∇, если для любой тривиализации расслоения, т.е. покрытия $\{U_i\}$ и коцикла $\{g_{ij}(z)\}$, задан набор матричных дифференциальных 1-форм $\{\omega_i\}$, удовлетворяющих соотношениям

$$\omega_i = (dg_{ij})g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega_j g_{ij}^{-1}. \quad (4)$$

Связность называют логарифмической (фуксовой), если дифференциальные формы $\{\omega_i\}$ имеют лишь полюсы первого порядка в окрестностях $\{U_i\}$, где они определены.

Каждое голоморфное векторное расслоение над сферой Римана, согласно теореме Биркгофа–Гротендика, эквивалентно расслоению, имеющему координатное описание вида

$$(U_1 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}}\backslash\{a_1\}, g_{1\infty} = (z-a_1)^K),$$
$$K = \operatorname{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_p),$$

где $k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_p$ (заметим, что в цитированной литературе обычно рассматривается обратный порядок следования элементов). Набор целых чисел $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ называют типом расщепления. Степенью расслоения называют число

$$\deg F = \sum_{i=1}^{p} k_i,$$

а наклоном – величину $\mu(F) = \dfrac{\deg F}{\operatorname{rk} F}$.

Кроме того известно, что степень расслоения равна сумме показателей $\deg F = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p}\beta_i^j$, где β_i^j – собственные значения вычетов связности в особой точке a_i, они же асимптотики горизонтальных сечений связности.

Расслоение F называется стабильным (полустабильным), если для любого его подрасслоения F_{sub} выполнено неравенство $\mu(F) > \mu(F_{\text{sub}})$ $(\mu(F) \ge (F_{\text{sub}}))$. Стабильных расслоений над сферой не бывает, но для нас будет важно понятие стабильного расслоения со связностью.

Подрасслоение называют стабилизирующимся связностью, если подпространство его горизонтальных сечений является инвариантным относительно действия монодромии. Расслоение F со связностью ∇ называют стабильной парой, если для любого его подрасслоения F_{sub}, которое стабилизируется связностью, выполнено соотношение $\mu(F) > \mu(F_{\text{sub}})$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы приводим три эквивалентные формулировки 21-й проблемы Гильберта для скалярных фуксовых уравнений, первая из которых является исходной, данной Гильбертом. В работе мы покажем эквивалентность этих трех задач.

I. Построить по представлению χ и набору точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ фуксово уравнение

$$y^{(p)} + b_1(z)y^{(p-1)} + \ldots + b_p(z)y = 0, \quad (5)$$

имеющее представление монодромии χ и заданный набор особых точек.

II. Построить по представлению χ и набору точек $a_1 = 0, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = \infty$ фуксову систему (3) с матрицей коэффициентов вида

$$B(z) = \frac{\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix}}{z} + \sum_{i=2}^{n}\frac{\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix}}{z-a_i} \quad (6)$$

с данной монодромией χ.

III. Построить голоморфное векторное расслоение F с логарифмической связностью ∇, имеющей заданную монодромию χ и набор особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, образующее стабильную пару с типом расщепления $K = (0, n-2, \ldots, (n-2)(p-1))$.

Далее, везде, кроме последнего раздела, мы будем считать, что $a_0 = 0$, $a_n = \infty$. Этого всегда можно добиться дробно-линейной заменой независимой переменной. Предполагается, что число особых точек $n \ge 3$.

Доказательство эквивалентности трех приведенных выше формулировок 21-й проблемы Гильберта для скалярных фуксовых уравнений проводится в трех следующих теоремах.

Теорема 1. III $\Rightarrow$ II.

Теорема 2. II $\Rightarrow$ I.

Теорема 3. I $\Rightarrow$ III.

В работах [1, 4] уже изучались подобные задачи. В работе [1] для случая неприводимого представления монодромии было получено выражение для числа ложных особых точек, которые необходимо ввести, чтобы реализовать данную монодромию фуксовым уравнением. Отсюда следует III $\Rightarrow$ I для неприводимого χ. Там же показано, что по монодромии фуксова уравнения можно построить фуксову систему, и этот результат был усилен в [4], где появилась система вида (3), (6).

4. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Введем два класса представлений. Б-представлениями называют приводимые представления, каждая образующая которых приводится к жордановой клетке. В этом классе А.А. Болибрухом были найдены первые контрпримеры к проблеме

Римана–Гильберта для фуксовых систем. Еще один класс представлений – это представления вида $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$ с образующими $G_i = G_i^1 \oplus G_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такими, что спектры матриц G_i^1 и G_i^2 не пересекаются ни при одном i. Назовем их расщепимыми.

Следствие 1. *Б-представления и расщепимые представления при не менее трех образующих не могут быть реализованы как представления монодромии скалярных фуксовых уравнений.*

Это следствие вытекает из того факта, что по представлениям таких типов невозможно построение стабильной пары. Относительно Б-представлений это может быть получено из доказательства теоремы 11.2 работы [2], а аналогичный факт о расщепимых представлениях следует из того, что при данных условиях степень расслоения равна сумме степеней подрасслоений, отвечающих прямым слагаемым представления монодромии.

Замечание. В хорошо изученном классе фуксовых уравнений второго порядка с тремя особыми точками 0, 1 и ∞ указанные семейства представлений дают все классы, не реализуемые такими уравнениями. В частности, к этому классу относится гипергеометрическое уравнение (см. [1]).

Следствие 2. *По монодромии фуксова уравнения можно построить бесконечное семейство фуксовых систем.*

Доказательство. Согласно теореме 3, по фуксову уравнению можно построить стабильную пару (F, ∇). С другой стороны, из теоремы 3 работы [3] вытекает, что из существования стабильной пары следует, что существует искомое семейство систем.

Основная трудность явного предъявления контрпримеров к 21-й проблеме Гильберта для скалярных фуксовых уравнений состоит в сложной зависимости от положения особых точек. Как видно из следствия 3 (см. ниже), в случае $n \geq 4$ особых точек ответ к проблеме неустойчив относительно движения особых точек. Известным примером такой зависимости является случай четырех особых точек 0, 1, t и ∞ и неприводимой монодромии, принадлежащей SL(2, $\mathbb{C}$). Такие данные, как правило, нельзя реализовать скалярным фуксовым уравнением с четырьмя особыми точками, но можно реализовать уравнением с одной дополнительной, так называемой ложной (без ветвления) особой точкой $w(t)$, положение которой зависит от t. Предполагаем, что монодромия постоянна. Функция $w(t)$ является решением уравнения Пенлеве 6 (см. [5]). Как правило, решения уравнений Пенлеве – это новые неизвестные функции, имеющие кроме точек 0, 1, ∞ еще и другие, так называемые подвижные особенности. Эти особенности – те положения точки t, при которых существует скалярное фуксово уравнение, реализующее заданную монодромию. Таким образом, вопрос о возможности построения скалярного фуксова уравнения – это вопрос описания структуры дивизора.

5. ЖЕСТКОСТЬ ФУКСОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Известно, что фуксову систему с набором особых точек $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ можно включить в семейство фуксовых систем

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i(a)}{z - a_i}\right) y, \quad \sum_{i=1}^{n} B_i(a) = 0,$$

зависящее от параметра a так, что эти системы будут иметь одно и то же представление монодромии (2). Такое семейство систем называется изомонодромным. Наиболее известное из таких семейств, задаваемое уравнением Шлезингера, называется шлезингеровским. В нерезонансном случае все изомонодромные деформации шлезингеровские или сводятся к ним сопряжением. Непрерывные изомонодромные деформации сохраняют показатели. Шлезингеровская деформация отличается от других еще и тем, что при ней сохраняются связи (отношения Y_i/Y_j) между ассоциированными базисами (определение см. в [2]) в разных точках. Аналогично деформациям систем можно определить деформацию расслоений со связностью.

Теорема 4. *Стабильная пара $(F(a), \nabla(a))$ с типом расщепления $K = (k_1, k_2, \ldots, k_p)$, где $k_{l+1} - k_l > 1$ для некоторого l, при непрерывной деформации по параметру a сохраняющая связи, не может сохранить тип расщепления.*

Назовем уравнение резонансным, если какие-то его показатели (в одной точке) отличаются на целое число.

Следствие 3. *Нерезонансное уравнение с набором особых точек $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 4$, и монодромией χ не может быть включено в изомонодромное семейство с параметрами $a \in W$, где W – некоторая область в $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство. Согласно третьей формулировке, существование уравнения эквивалентно существованию стабильной пары (F, ∇) с типом расщепления $K = (0, n-2, \ldots, (p-1)(n-2))$. По условию $n - 2 > 1$, соответственно это расслоение подпадает под условие теоремы 4, которая утверждает, что не существует изомонодромной деформации шлезингеровского типа, сохраняющей тип расщепления. Все деформации в нерезонансном случае сводятся к шлезингеровским, следовательно, их не существует.

Здесь также можно сказать, что множество наборов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, при которых существует фуксово уравнение с заданной монодромией, является аналитическим множеством положительной коразмерности. В резонансном случае эти утверждения тоже будут верными, но только для деформаций, сохраняющих связи между локальными базисами.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08–01–00342-а и программы "Ведущие научные школы" (грант НШ–3038.2008.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А.А.* 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // Тр. Мат. ин-та РАН. 1994. Т. 206.
2. *Болибрух А.А.* Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2000.
3. *Болибрух А.А.* Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности // Тр. Мат. ин-та РАН. 2002. Т. 238. С. 55–69.
4. *Singer M., Van Der Put M.* Galois Theory of Linear Differential Equations. B.: Springer, 2003.
5. *Гонцов Р.Р., Побережный В.А.* // УМН. 2008. Т. 63. В. 4. С. 147–184.