Детерминированные системы

© 2003 г. В.С. Козьякин, д-р. физ.-мат. наук
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

О НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ В o -МИНИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ КОНЕЧНЫХ НАБОРОВ МАТРИЦ, БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОТОРЫХ СХОДЯТСЯ, ОГРАНИЧЕНЫ ИЛИ НЕОГРАНИЧЕННЫ¹

Рассматривается задача о сходимости, ограниченности или неограниченности множества всех возможных произведений матриц с сомножителями из некоторой конечной совокупности, к которой сводятся многие вопросы теории управления и математики. Установлена неопределимость данной задачи в o -минимальных структурах, содержащих полуалгебраические множества, что может рассматриваться как характеристика сложности задачи. Из полученного результата следует, в частности, что решение рассматриваемой задачи не может быть получено как конечная булева комбинация условий, включающих конечное число не только обычных арифметических операций сложения, вычитания и умножения, но и взятия экспоненты, а также применения ограниченных аналитических функций.

1. Введение

К вопросу об исследовании свойств бесконечных произведений матриц

$$(1) \quad \cdots A_n A_{n-1} \cdots A_1,$$

где каждая из матриц A_i берется из некоторого (конечного или бесконечного) набора матриц $\mathcal{A}$, сводятся многие задачи теории управления и математики. Примерами таких задач являются проблема оценки показателей Ляпунова для нестационарных линейных систем в проблеме абсолютной устойчивости [1, 2], задачи анализа сходимости асинхронных параллельных вычислительных алгоритмов [3] и устойчивости рассинхронизованных систем управления [4], задача вычисления обобщенного спектрального радиуса семейства матриц [5] и др. В различных работах (см., например, обзор [6]) приведены формальные обоснования тезиса о том, что в случае, когда $\mathcal{A}$ состоит более чем из одной матрицы, исследование таких произведений является сложной задачей. В частности, в [4] показано, что уже множества наборов $\mathcal{A}$, состоящих всего из двух матриц, для которых все произведения (1) сходятся к нулю или ограничены, не являются полуалгебраическими, т.е. не могут быть описаны комбинациями конечного числа алгебраических равенств и неравенств, составленных из элементов матриц, принадлежащих $\mathcal{A}$. В этом смысле вопросы

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 03-01-00258, гранта Президента РФ НШ-1532.2003.1, а также проекта «Разработка математических методов анализа функционирования распределенных асинхронных вычислительных сетей» программы фундаментальных исследований ОИТВС РАН «Новые физические и структурные решения в инфокоммуникациях».

о сходимости произведений вида (1) или об ограниченности множества всех возможных произведений матриц с сомножителями из $\mathcal{A}$ не могут быть решены «формульно».

Полуалгебраические множества обладают рядом достаточно хороших свойств (см. раздел 2), и потому естественным явилось желание выяснить, существуют ли более широкие классы множеств, обладающие подобными свойствами. Формально выделить тот набор аксиом, который обеспечивает полуалгебраическим множествам их «хорошие» свойства, удалось в [7, 8, 9]. Соответствующая теория получила название теории o -минимальности (см. краткий обзор и ссылки в разделе 2). В частности, были получены новые конструктивно описываемые и достаточно естественные с точки зрения приложений классы множеств, обладающих многими ключевыми свойствами полуалгебраических множеств. Желание распространить результаты, полученные в [4], на эти классы множеств явилось одной из побудительных причин написания настоящей работы.

Другой побудительной причиной явилось желание описать новые аналитические конструкции (в отличие от геометрических, предложенных в [4]), которые позволяют доказать полуалгебраическую неразрешимость рассматриваемой задачи или ее неопределимость в o -минимальных структурах. Необходимость таких конструкций вызвана тем, что, с одной стороны, их использование проще в техническом плане, а с другой стороны, именно они (а не собственно факт неразрешимости) часто могут быть использованы для дальнейших исследований.

2. Полуалгебраические множества и основные понятия теории o -минимальности

В классической алгебраической геометрии над замкнутыми алгебраическими полями образ аффинного алгебраического многообразия при проектировании на аффинное пространство меньшей размерности оказывается булевой комбинацией алгебраических многообразий. При изучении алгебраических многообразий над полем вещественных чисел ситуация оказывается более сложной. Например, образ окружности $x^2 + y^2 = 1$ при проектировании ее на ось x совпадает с интервалом $[-1, 1]$ и не является булевой комбинацией алгебраических многообразий.

Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ называют *полуалгебраическим*, если оно является конечной булевой комбинацией множеств решений полиномиальных уравнений

$$(2) \quad p(x_1, \dots, x_n) = 0$$

и полиномиальных неравенств

$$(3) \quad q(x_1, \dots, x_n) > 0.$$

Интерес к полуалгебраическим множествам объясняется двумя причинами. С одной стороны, множество всех полуалгебраических множеств достаточно богато, а свойства полуалгебраических множеств разнообразны. С другой стороны, полуалгебраические множества допускают простое описание — для проверки принадлежности точки данному полуалгебраическому множеству достаточно уметь выполнять операции сложения, вычитания, умножения и сравнения чисел. Из-за этого полуалгебраические множества обычно воспринимаются как объекты простые («tame» — «ручные» в английской терминологии), допускающие конечное (алгоритмическое) описание. Тем не менее часто в конкретных случаях выписать полиномы, определяющие данное полуалгебраическое множество, непросто.

Во многих задачах знание конкретного вида полиномов, определяющих полуалгебраическое множество, бывает не нужно — важен лишь сам факт полуалгебраичности. Одна из конструкций, позволяющая во многих ситуациях устанавливать факт полуалгебраичности множества, является следствием принципа Зейденберга–Тарского, утверждающего, что *образ $f(X)$ полуалгебраического множества $X \subset \mathbb{R}^n$ при полиномиальном отображении $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ также является полуалгебраическим множеством.*

Полуалгебраичность полного прообраза полуалгебраического множества при полиномиальном отображении очевидна. Полуалгебраичность же образа полуалгебраического множества — глубокий факт. Заметим, что прообраз алгебраического множества при полиномиальном отображении является алгебраическим множеством, а образ, вообще говоря, таковым не является. Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим квадратный многочлен $p(x) = x^2 + p_1x + p_2$. Он однозначно определяется заданием своих коэффициентов $\{p_1, p_2\}$ в $\mathbb{R}^2$. Поставим вопрос: является ли полуалгебраическим множество P пар $\{p_1, p_2\} \in \mathbb{R}^2$, при которых многочлен $p(x)$ имеет вещественные корни x_1, x_2 , лежащие в интервале $[-1, 1]$? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что по теореме Виета $p_1 = -(x_1 + x_2)$, $p_2 = x_1x_2$. Поэтому множество P является образом при полиномиальном отображении $\{x_1, x_2\} \mapsto \{-(x_1 + x_2), x_1x_2\}$ полуалгебраического множества (квадрата) $-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1$. Следовательно, согласно принципу Зайденберга–Тарского множество P полуалгебраическое. $\square$

Пример 2. Пусть A — квадратная матрица порядка N с вещественными элементами. Матрицу A можно отождествить с точкой координатного пространства $\mathbb{R}^{N^2}$, перенумеровав в каком-либо порядке ее элементы. Следовательно, можно говорить об алгебраичности или неалгебраичности некоторого множества матриц. Справедливо утверждение: множество квадратных матриц A порядка N , удовлетворяющих условиям $\rho(A) \leq 1$ или $\rho(A) < 1$, полуалгебраические. Для доказательства этого утверждения можно воспользоваться известным критерием Рауса–Гурвица, чтобы в явном виде выписать алгебраические соотношения между элементами матрицы A , равносильные условиям $\rho(A) \leq 1$ или $\rho(A) < 1$. Другой подход к доказательству сформулированного утверждения использует идею примера 1 и принцип Зайденберга–Тарского; такой подход устанавливает лишь факт полуалгебраичности соответствующих множеств, но не дает их явного описания. $\square$

Принцип Зайденберга–Тарского является мощным инструментом доказательства полуалгебраичности множеств. Но иногда необходимо установить обратный факт — что то или иное множество не является полуалгебраическим. Как известно (см., например, [10, стр. 113]), *дополнение одного вещественного алгебраического множества до другого содержит не более конечного числа компонент линейной связности*.¹ Из этого факта следует, что и любое полуалгебраическое множество состоит не более чем из конечного числа компонент линейной связности. В качестве примера применения данного факта немедленно получаем, например, что график функции $y = \sin(1/x)$, $x > 0$ в $\mathbb{R}^2$ не является полуалгебраическим множеством, поскольку его пересечение с полуалгебраическим множеством $y = 0$ состоит из бесконечного числа изолированных точек.

Перечислим теперь некоторые «ручные» свойства, которыми обладают полуалгебраические множества:

- *Стратифицируемость:* для каждого полуалгебраического множества X существует конечное число таких непересекающихся полуалгебраических множеств $X_1, \dots, X_n$, что $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$; при этом каждое X_i является связным гладким вещественным многообразием, и если $\bar{X}_i \cap X_j \neq \emptyset$ при $i \neq j$, где $\bar{X}_i$ — замыкание множества X_i , то $\bar{X}_i \supseteq X_j$ и $\dim X_i > \dim X_j$. В частности, каждое полуалгебраическое множество имеет конечное число компонент связности, а граница полуалгебраического множества является полуалгебраическим множеством более низкой размерности.
- *Триангулируемость:* каждое компактное полуалгебраическое множество допускает полуалгебраическую триангуляцию.
- *Конечность топологического типа:* пусть $X \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ — полуалгебраическое множество, положим $X_a = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, a) \in X\}$ при каждом $a \in \mathbb{R}^m$. Тогда существует конечное число таких $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}^m$, что при каждом $a \in \mathbb{R}^m$ найдется $i \leq l$ и полуалгебраический гомеоморфизм $f : X_a \rightarrow X_{a_i}$.

¹ Напомним, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют линейно связным, если для любых двух его точек x, y найдется такая непрерывная функция $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ и $\gamma(t) \in X$ при $0 \leq t \leq 1$.

- *Кусочная гладкость полуалгебраических отображений*: говорят, что отображение полуалгебраическое, если его график является полуалгебраическим множеством. Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — полуалгебраическое отображение, то X может быть разбито на конечное число попарно непересекающихся полуалгебраических множеств $X_1, \dots, X_n$ таких, что каждое сужение $f|_{X_i}$ является аналитическим отображением.
- *Выполнимость леммы об отборе кривых*: пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — полуалгебраическое множество и $a \in \bar{X}$, тогда найдется такая вещественная аналитическая функция $f : (0, 1) \rightarrow X$, что $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = a$. Более того, функция f может быть выбрана таким образом, чтобы ее график был алгебраическим множеством.

Обсуждение описанных выше фактов можно найти в [11, 12].

Учитывая, что перечисленные свойства полуалгебраических множеств весьма сильны и нетривиальны, хотелось бы получить описание более широких классов множеств, обладающих тем же набором свойств. Наиболее естественными кандидатами на эту роль представляются полуаналитические и субаналитические множества.

Говорят, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *полуаналитическое*, если для каждой точки $a \in \mathbb{R}^n$ найдется такая ее открытая окрестность U , что $X \cap U$ является конечным объединением множеств

$$\{x \in U : f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\},$$

где $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_l$ — аналитические в U функции.

Локальные свойства полуаналитических множеств во многом сходны со свойствами полуалгебраических множеств. Например, любое полуаналитическое множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ с компактным замыканием является объединением конечного числа полуаналитических множеств, каждое из которых является вещественным аналитическим многообразием. К несчастью, полуаналитические множества неустойчивы по отношению к проекции. Простейший пример — это неограниченное полуаналитическое множество

$$(4) \quad \{(1/n, n) : n = 1, 2, \dots\},$$

проекция которого на $\mathbb{R}$ не является полуаналитическим множеством в окрестности точки 0. Даже ограниченные полуаналитические множества могут иметь проекции, не являющиеся полуаналитическими множествами. Так, множество

$$Y = \{(x, y, z, w) : 0 < x, y, w \leq 1, yw = x, z = ye^w\}$$

полуаналитическое, однако, как показал Осгуд (см., например, [13]), его проекция на пространство первых трех координат полуаналитическим множеством не является.

Чтобы избежать подобных проблем, Лоясиевич и Хиронака ввели класс субаналитических множеств (см. введение в субаналитические множества в [14]). Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *субаналитическим*, если для каждой точки $a \in \mathbb{R}^n$ найдется такая ее открытая окрестность U и полуаналитическое множество $Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ с компактным замыканием, что $X \cap U$ является проекцией Y на $\mathbb{R}^n$. Субаналитические множества с компактным замыканием демонстрируют все «хорошие» свойства полуалгебраических множеств, описанные выше (точнее, субаналитические множества обладают этими свойствами локально).

К сожалению, даже такое «простое» множество, как график функции e^{-1/x^2} , не является субаналитическим. Это привело к провозглашению Гротендиком следующей программы (см. [15]):

Исследовать классы множеств, обладающих «ручными» свойствами полуалгебраических множеств.

Приводимое ниже понятие o -минимальности явилось ответом на поставленный вопрос. Несмотря на то, что понятие o -минимальности первоначально возникло в теории моделей (области математической логики), лишь базовые понятия логики необходимы для восприятия и доказательств основных результатов.

Упорядоченной структурой в $\mathbb{R}$ называется последовательность $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \dots)$ булевых алгебр S_n подмножеств $\mathbb{R}^n$, обладающих свойствами:

- i) $\emptyset \in S_n, \mathbb{R}^n \in S_n$,
- ii) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^n, x = y\} \in S_{2n}$,
- iii) если $a \in \mathbb{R}$, то $\{a\} \in S_1$,
- iv) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x < y\} \in S_2$,
- v) если $A \in S_n$, то $A \times \mathbb{R} \in S_{n+1}$ и $\mathbb{R} \times A \in S_{n+1}$,
- vi) если $A \in S_{n+1}$ и B является проекцией A на первые n координат, то $B \in S_n$.

Если $A \in S_n$, то множество A называется *определимым* в структуре $\mathcal{S}$; функция, график которой является определимым множеством, называется *определимой*.

Упорядоченная структура $\mathcal{S}$ называется *o-минимальной*, если

- vii) каждое множество $A \in S_1$ является конечным объединением точек и интервалов (возможно, неограниченных) из $\mathbb{R}$.

Примером упорядоченной структуры является совокупность всех полуалгебраических подмножеств. А вот совокупность всех субаналитических подмножеств не является упорядоченной структурой, поскольку проекция неограниченного субаналитического множества (4) не является субаналитическим множеством.

На практике упорядоченную структуру часто удобно задавать как минимальную упорядоченную структуру, содержащую некоторый набор множеств: при каждом $n = 1, 2, \dots$ указывается некоторая совокупность B_n подмножеств $\mathbb{R}^n$, а затем ищется наименьшая упорядоченная структура $\mathcal{S}$, для которой $B_n \subseteq S_n$ при всех n .

Приведем некоторые примеры упорядоченных структур:

- $\mathcal{S}_{\text{lin}}$ (структура полиэдральных множеств) — минимальная упорядоченная структура, содержащая все линейные многообразия вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sum r_i x_i = 0, \text{ где } r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}\};$$

- $\mathcal{S}_{\text{alg}}$ (структура полуалгебраических множеств) — минимальная упорядоченная структура, содержащая все алгебраические множества;
- $\mathcal{S}_{\text{exp}}$ — минимальная упорядоченная структура, содержащая полуалгебраические множества и график функции $x \mapsto e^x$;
- $\mathcal{S}_{\text{an}}$ — минимальная упорядоченная структура, содержащая полуалгебраические множества и все субаналитические множества с компактным замыканием;
- $\mathcal{S}_{\text{an,exp}}$ — минимальная упорядоченная структура, содержащая полуалгебраические множества, график функции $x \mapsto e^x$ и все субаналитические множества с компактным замыканием;

O-минимальность структуры полиэдральных множеств $\mathcal{S}_{\text{lin}}$ очевидна. O-минимальность структуры полуалгебраических множеств $\mathcal{S}_{\text{alg}}$ является следствием (а по сути переформулировкой) принципа Зайденберга–Тарского. Ван-ден-Дрие установил [16], что структура субаналитических множеств с компактным замыканием $\mathcal{S}_{\text{an}}$ является o-минимальной. Существенный прорыв в исследовании «ручных» свойств множеств был сделан Вилки, который доказал [17], что $\mathcal{S}_{\text{exp}}$ является o-минимальной структурой. Наконец, Ван-ден-Дрие, Макинтайр и Маркер доказали [18], что структура $\mathcal{S}_{\text{an,exp}}$ является o-минимальной. Описания дальнейших результатов по теории o-минимальности можно найти, например, в монографии [13].

Возникает вопрос о том, в каких из упорядоченных структур определимые множества обладают свойствами, присущими полуалгебраическим множествам. Как оказалось, *если o-минимальная упорядоченная структура $\mathcal{S}$ содержит полуалгебраические множества, то определимые в ней множества обладают всеми перечисленными выше «ручными» свойствами, присущими полуалгебраическим множествам.*

В заключение приведем менее формальные, но более понятные для неспециалистов в математической логике или теории o-минимальных структур описания множеств из $\mathcal{S}_{\text{an}}$,

$\mathcal{S}_{\text{exp}}$ и $\mathcal{S}_{\text{an,exp}}$. Напомним, что полуалгебраические множества определяются, как множества, выделяемые булевыми комбинациями наборов полиномиальных формул (2), (3). При этом термин «полином» можно определить как выражение, полученные применением конечного числа операций $\langle +, -, \cdot \rangle$ к своим аргументам.

Начнем с описания множеств структуры $\mathcal{S}_{\text{exp}}$. Назовем *формулой*, соответствующей структуре $\mathcal{S}_{\text{exp}}$, выражение, полученное применением конечного числа операций $\mathcal{O}_{\text{exp}} = \langle +, -, \cdot, \text{exp} \rangle$ к своим аргументам. Примером формулы, соответствующей структуре $\mathcal{S}_{\text{exp}}$, является выражение

$$e^{e^{y^2+1}} - ze^{x-2y} + 3xy - 7.$$

Тогда определимые в структуре $\mathcal{S}_{\text{exp}}$ множества это в точности те множества, которые являются конечной булевой комбинацией множеств решений уравнений (2), (3), где на этот раз $p(x_1, \dots, x_n)$ и $q(x_1, \dots, x_n)$ не полиномы, а формулы, соответствующие структуре $\mathcal{S}_{\text{exp}}$.

Опишем множества структуры $\mathcal{S}_{\text{an}}$. Пусть f — вещественно-аналитическая функция определенная в некоторой окрестности куба $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. Назовем функцию $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемую формулой

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [-1, 1]^n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

ограниченной аналитической функцией. Множество всех ограниченных аналитических функций обозначим через $\{\hat{f}\}$. В этом случае формулами, соответствующими структуре $\mathcal{S}_{\text{an}}$, будут все выражения, полученные применением конечного числа операций из множества операций $\mathcal{O}_{\text{an}} = \langle +, -, \cdot, \{\hat{f}\} \rangle$ к своим аргументам. А определимыми в структуре $\mathcal{S}_{\text{an}}$ множествами будут множества, являющиеся конечной булевой комбинацией множеств решений уравнений (2), (3), в которых на этот раз $p(x_1, \dots, x_n)$ и $q(x_1, \dots, x_n)$ не полиномы, а формулы, соответствующие структуре $\mathcal{S}_{\text{an}}$.

Наконец, множества структуры $\mathcal{S}_{\text{an,exp}}$ получаются по той же схеме, что и множества структуры $\mathcal{S}_{\text{an}}$, с тем лишь отличием, что множество операций $\mathcal{O}_{\text{an,exp}}$ получается дополнением множества операций $\mathcal{O}_{\text{an}}$ операцией взятия экспоненты: $\mathcal{O}_{\text{an,exp}} = \langle +, -, \cdot, \text{exp}, \{\hat{f}\} \rangle$.

3. Основной результат: произведения матриц

Обозначим через $\mathcal{M}(p, q)$ множество упорядоченных наборов $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_q\}$ состоящих из $p \times p$ вещественных² матриц L_i , $i = 1, 2, \dots, q$. Очевидно, множество $\mathcal{M}(p, q)$ можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{qp^2}$, взяв в качестве координат элемента $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(p, q)$ перенумерованные в каком-либо порядке (скажем, построчно) элементы матриц $L_1, L_2, \dots, L_q$.

Сопоставим каждому набору матриц $\mathcal{L} \in \mathcal{M}(p, q)$ отвечающее ему множество $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ всех конечных произведений матриц из $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{L}) := \{A_n A_{n-1} \cdots A_1 : A_i \in \mathcal{L}, n = 1, 2, \dots\}.$$

Набор матриц $\mathcal{L}$ будем называть *сходящимся*, если для любой последовательности матриц $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{L}$, имеет место соотношение:

$$(5) \quad A_n A_{n-1} \cdots A_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

² Рассмотрение комплексных матриц не добавляет общности, и потому мы ограничиваемся рассмотрением случая вещественных матриц.

Множество всех сходящихся наборов матриц из $\mathcal{M}(p, q)$ обозначим через $\mathcal{C}(p, q)$. Как известно (см., например, [4]), если набор матриц $\mathcal{L}$ сходящийся, то множество матриц $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ ограничено.

Набор матриц $\mathcal{L}$ будем называть *ограниченным*, если множество матриц $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ ограничено, но при этом хотя бы для одной последовательности матриц $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{L}$, не выполняется соотношение (5). Множество всех ограниченных наборов матриц из $\mathcal{M}(p, q)$ обозначим через $\mathcal{B}(p, q)$.

Если множество матриц $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ не является ограниченным, то набор матриц $\mathcal{L}$ будем называть *неограниченным*; множество всех неограниченных наборов матриц из $\mathcal{M}(p, q)$ обозначим через $\mathcal{U}(p, q)$. Ясно, что множества матриц $\mathcal{C}(p, q)$, $\mathcal{B}(p, q)$ и $\mathcal{U}(p, q)$ попарно не пересекаются и в совокупности образуют все множество $\mathcal{M}(p, q)$:

$$\mathcal{M}(p, q) = \mathcal{C}(p, q) \cup \mathcal{B}(p, q) \cup \mathcal{U}(p, q).$$

Теорема 1. Если $p, q \geq 2$, то ни одно из множеств $\mathcal{C}(p, q)$, $\mathcal{B}(p, q)$, $\mathcal{U}(p, q)$ не является определяемым в o -упорядоченных структурах, содержащих полуалгебраические множества.

Доказательство теоремы, а также необходимые вспомогательные конструкции вынесены в Приложение.

В [4] установлен более слабый вариант теоремы 1, утверждающий, что ни одно из множеств $\mathcal{C}(p, q)$, $\mathcal{B}(p, q)$, $\mathcal{U}(p, q)$ не может быть полуалгебраическим. Из теоремы 1 и примеров o -упорядоченных структур, приведенных в разделе 2, вытекает, например, что ни одно из множеств $\mathcal{C}(p, q)$, $\mathcal{B}(p, q)$, $\mathcal{U}(p, q)$ не может быть описано конечной булевой комбинацией формул, каждая из которых, в свою очередь, содержит лишь конечное число арифметических операций и операций взятия экспоненты или применения ограниченных аналитических функций.

4. Заключение

Традиционной характеристикой сложности задачи является ее так называемая алгоритмическая сложность; алгоритмически сложные задачи называют также NP -трудными. Известно (см., например, обзор [6]), что задачи о сходимости, ограниченности или неограниченности бесконечных произведений матриц являются NP -трудными. Более того, NP -трудной является даже более простая, казалось бы, задача о возможности обращения в нуль некоторого конечного произведения матриц с сомножителями из данной совокупности матриц с целочисленными элементами.

Установленные в работе результаты могут трактоваться как еще одна, альтернативная характеристика сложности рассматриваемого класса задач.

Автор благодарен Е.А.Асарину и В.Блонделю за плодотворные обсуждения различных аспектов теории o -минимальности и теории сложности и организацию визита в университет им. Фурье в Гренобле (Франция) в рамках проекта НАТО CRG-961115 "Computational complexity of control problems".

ПРИЛОЖЕНИЕ

П.1. Произведения пары двумерных матриц, одна из которых вырождена

Установим некоторые простые, но тем не менее играющие ключевую роль в последующих рассуждениях свойства 2×2 матриц. Пусть имеется набор 2×2 матриц $\mathcal{L} = \{L, M\}$. Рассмотрим вопрос о сходимости произведений вида

$$(П.1) \quad A_n A_{n-1} \cdots A_1,$$

где $A_i = L$ или $A_i = M$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$.

Исследование этого вопроса в общем случае, когда матрицы L и M не предполагаются коммутируемыми, оказывается достаточно непросто.³ Упростить ситуацию до такой степени, чтобы она поддавалась анализу и вместе с тем чтобы при этом не исчезли интересные эффекты в поведении произведений (П.1), можно, предположив, что одна из матриц L или M вырождена; в дальнейшем будем считать вырожденной матрицу M . Смысл такого предположения заключается в том, что в этом случае любое произведение матриц вида $M^m L^p M^q$, в котором $m, p \geq 1$, может быть представлено в виде γM с некоторой константой γ , которую в ряде случаев несложно найти в явном виде.

Сделанное замечание позволяет достаточно просто и конструктивно исследовать асимптотические свойства произведений (П.1).

Лемма П.1. Пусть

$$L = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \text{где } \det M = 0.$$

Тогда

$$(П.2) \quad M^n = (\text{tr } M)^{n-1} M \equiv \rho^{n-1}(M)M$$

и

$$(П.3) \quad MLM = \eta(L, M)M, \quad \text{где } \eta(L, M) := (ap + br + cq + ds).$$

Доказательство. Если матрица M вырождена, то при некотором α имеют место соотношения $c = \alpha a$, $d = \alpha b$, т.е.

$$M = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix}.$$

Значит,

$$M^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix} = (a + \alpha b)M = (\text{tr } M)M,$$

откуда и следует (П.2).

Для доказательства (П.3) достаточно заметить, что

$$MLM = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix} = (ap + br + \alpha aq + \alpha bs)M = (ap + br + cq + ds)M,$$

откуда и получаем (П.3). $\square$

Рассмотрим теперь произвольное произведение матриц (П.1), в котором $A_i = L$ или $A_i = M$ при каждом $i = 1, 2, \dots, n$. Сгруппировав в (П.1) множители одного вида, получаем, что для (П.1) справедливо одно из следующих представлений:

$$A_n A_{n-1} \cdots A_1 = L^{n_p} M^{n_{p-1}} \cdots M^{n_1} L^{n_0},$$

либо

$$A_n A_{n-1} \cdots A_1 = M^{n_p} L^{n_{p-1}} \cdots M^{n_1} L^{n_0},$$

либо

$$A_n A_{n-1} \cdots A_1 = L^{n_p} M^{n_{p-1}} \cdots L^{n_1} M^{n_0},$$

³ Более того, если матрицы L и M коммутируют друг с другом, то ответ на вопрос о сходимости произведений (П.1) тривиален: $\mathcal{L} \in C(2, 2)$, если и только если $\rho(L) < 1$ и $\rho(M) < 1$. Таким образом, интересных эффектов можно ожидать именно в случае некоммутируемых матриц L и M .

либо

$$A_n A_{n-1} \cdots A_1 = M^{n_p} L^{n_{p-1}} \cdots L^{n_1} M^{n_0},$$

где

$$n_0 + n_1 + \cdots + n_{p-1} + n_p = n, \quad n_i \geq 1.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$A_n A_{n-1} \cdots A_1 = L^{n_p} M^{n_{p-1}} \cdots M^{n_1} L^{n_0},$$

где n_0 и n_p могут принимать нулевые значения. Тогда на основании леммы П.1 произведение матриц $A_n A_{n-1} \cdots A_1$ допускает представление

$$(П.4) \quad A_n A_{n-1} \cdots A_1 = \gamma L^{n_p} M L^{n_0},$$

в котором константа γ может быть указана явно:

$$(П.5) \quad \begin{aligned} \gamma &= (\operatorname{tr} M)^{n_{p-1}-1} \eta(L^{n_{p-2}}, M) \cdots \eta(L^{n_2}, M) (\operatorname{tr} M)^{n_1-1} = \\ &= (\operatorname{tr} M)^{n_{p-1} + \cdots + n_1 - [p/2]} \eta(L^{n_{p-2}}, M) \cdots \eta(L^{n_2}, M). \end{aligned}$$

Из представлений (П.4), (П.5) вытекают следующие условия сходимости, ограниченности и неограниченности набора матриц $\{L, M\}$.

Лемма П.2. Пусть $\rho(L), \rho(M) < 1$. Тогда набор матриц $\{L, M\} \in \mathcal{M}(2, 2)$ является сходящимся, ограниченным или неограниченным, если и только если величина

$$\eta_*(L, M) := \sup_n |\eta(L^n, M)|$$

меньше, равна или больше 1 соответственно.

Доказательство. Пусть сначала $\eta_*(L, M) < 1$. Рассмотрим произвольную последовательность матриц $\{A_n\}$, в которой $A_n = L$ или $A_n = M$. Если в этой последовательности имеется лишь конечное число матриц вида L или M , то начиная с некоторого индекса $n = n_0$ все элементы последовательности $\{A_n\}$ совпадают друг с другом. Значит, в этом случае $A_n = L$ при $n \geq n_0$, либо $A_n = M$ при $n \geq n_0$; в обоих ситуациях условия $\rho(L) < 1$, $\rho(M) \equiv |\operatorname{tr} M| < 1$ влекут соотношение $A_n A_{n-1} \cdots A_1 \rightarrow 0$.

Если в последовательности $\{A_n\}$ имеется бесконечное число элементов как вида L , так и вида M , то имеет место представление (П.4), (П.5). В этом случае в силу условий $\rho(L), \rho(M) < 1$ сомножители L^{n_i} и M в (П.4) равномерно ограничены сверху по норме матриц. При этом в (П.5) сомножитель

$$(П.6) \quad (\operatorname{tr} M)^{n_{p-1} + \cdots + n_1 - [p/2]} \equiv \rho(M)^{n_{p-1} + \cdots + n_1 - [p/2]}$$

в силу условия $\rho(M) < 1$ не превосходит 1, а сомножители вида $\eta(L^{n_i}, M)$ в (П.5) не превосходят по модулю величины $\eta_*(L, M) < 1$. Так как по предположению в последовательности $\{A_n\}$ имеется бесконечное число элементов как вида L , так и вида M , то число сомножителей вида $\eta(L^{n_i}, M)$ в (П.5) неограниченно возрастает с ростом n . Отсюда и из приведенных оценок следует соотношение $A_n A_{n-1} \cdots A_1 \rightarrow 0$.

Пусть теперь $\eta_*(L, M) = 1$. Тогда, как и в предыдущем случае, в силу условий $\rho(L), \rho(M) < 1$ сомножители L^{n_i} и M в (П.4) равномерно ограничены сверху по норме матриц, сомножитель (П.6) в (П.5) не превосходит 1 и каждый из сомножителей вида $\eta(L^{n_i}, M)$ в (П.5) также не превосходит по модулю величины $\eta_*(L, M) = 1$. Отсюда вытекает ограниченность множества матриц $\mathcal{P}(\{L, M\})$. Докажем существование такой последовательности матриц $A_n \in \{L, M\}$, для которой в этой ситуации соотношение $A_n A_{n-1} \cdots A_1 \rightarrow 0$ не выполняется.

Поскольку по предположению

$$\eta_*(L, M) = \sup_n |\eta(L^n, M)| = 1,$$

то найдется такая последовательность индексов $n_i, i = 1, 2, \dots$, для которой

$$(П.7) \quad \prod_i \eta(L^{n_i}, M) > 0.$$

Построим в этом случае последовательность матриц $\{A_n\}, n \geq 0$, в которой первый элемент совпадает с M , затем n_1 элементов совпадают с L , затем следующий элемент снова совпадает с M , а следующие за ним n_2 элементов совпадают с L и т.д. Другими словами, последовательность матриц $\{A_n\}$ состоит из групп, состоящих из $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ элементов вида L , а каждая из таких групп отделяется от другой группы одним элементом вида M . В этом случае, согласно представлению (П.4), (П.5) при каждом значении n вида $n = n_i + \dots + n_1 + i + 1$ будет иметь место представление

$$A_n A_{n-1} \dots A_1 = \eta(L^{n_i}, M) \dots \eta(L^{n_2}, M) \eta(L^{n_1}, M) M$$

и, следовательно, в силу (П.7) произведение матриц A_n не стремится к нулю. Доказательство ограниченности набора матриц $\{L, M\}$ завершено.

Пусть, наконец, выполняется условие $\eta_*(L, M) > 1$. Тогда при некотором $n = n_0$ выполняется неравенство $|\eta(L^{n_0}, M)| > 1$ и из представления (П.4), (П.5) следует, что для периодической последовательности $\{A_n\}$, в которой первые $n_0 + 1$ элементов имеют вид

$$A_1 = M, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n_0+1} = L,$$

а остальные повторяются с периодом $n_0 + 1$, будет выполняться соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A_n A_{n-1} \dots A_1\| = \infty.$$

Итак, достаточность условий $\eta_*(L, M) < 1$, $\eta_*(L, M) = 1$ и $\eta_*(L, M) > 1$ для соответственно сходимости, ограниченности и неограниченности набора матриц $\{L, M\}$ доказана. Поскольку, указанные три условия исчерпывают все возможные комбинации соотношений между числами $\eta_*(L, M)$ и 1, то они являются и необходимыми. Лемма доказана. $\square$

Из лемм П.1 и П.2 следует, что при сделанных выше предположениях для анализа сходимости набора матриц $\{L, M\}$ необходимо научиться вычислять величину $\eta_*(L, M)$, а значит, в конечном счете, — величину $\eta(L, M)$.

На первый взгляд, функция $\eta(L^n, M)$ допускает явное выражение в терминах элементов матриц L и M лишь в некоторых частных случаях: либо при $n = 1$, либо когда элементы матрицы L^n явно выражаются через элементы матрицы L . К счастью, путем соответствующей замены координат матрицу L всегда можно привести к нормальной жордановой форме. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что матрица L определяется одним из следующих равенств⁴:

$$L = \left\| \begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{array} \right\|, \quad \text{либо} \quad L = \left\| \begin{array}{cc} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{array} \right\|, \quad \text{либо} \quad L = \lambda \left\| \begin{array}{cc} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{array} \right\|.$$

Выражения для соответствующих констант $\eta(L^n, M)$ теперь легко получить в явном виде, используя лемму П.1; они приведены в следующей лемме.

Лемма П.3. Пусть

$$M = \left\| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right\|, \quad \text{где} \quad \det M = 0.$$

⁴ Конечно, совместно с приведением к жордановой форме матрицы L соответствующим преобразованием должна быть подвергнута и матрица M . Однако поскольку в дальнейшем мы будем вольны в выборе M , подобное приведение L к нормальной жордановой форме не будет ограничительным.

Тогда

$$(П.8) \quad \eta(L^n, M) = a\lambda^n + d\mu^n \quad \text{при} \quad L = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix},$$

$$(П.9) \quad \eta(L^n, M) = a\lambda^n + (n-1)c\lambda^{n-1} + d\lambda^n \quad \text{при} \quad L = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

$$(П.10) \quad \eta(L^n, M) = (a+d)\lambda^n \cos n\varphi + (b-c)\lambda^n \sin n\varphi \quad \text{при} \quad L = \lambda \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Как уже отмечалось, в силу лемм П.1 и П.2 для анализа сходимости набора матриц $\{L, M\}$ необходимо научиться вычислять величину $\eta_*(L, M) := \sup_n |\eta(L^n, M)|$, что сводится к поиску наибольшего значения функции $|\eta(L^n, M)|$. Соответствующий анализ, отвечающий случаю, когда матрица L имеет диагональную форму, проводится в следующей лемме.

Лемма П.4. Пусть $0 < \lambda, \mu < 1$ и $|a+d| < 1$. Тогда функция

$$\varphi(u) := |a\lambda^u + d\mu^u|, \quad u \geq 0, \quad u \in \mathbb{R},$$

достигает максимального значения в точке

$$(П.11) \quad u_* = \frac{\ln\left(-\frac{a \ln \lambda}{d \ln \mu}\right)}{\ln \mu - \ln \lambda},$$

если

$$(П.12) \quad ad < 0, \quad (\mu - \lambda)(a|\ln \lambda| - d|\ln \mu|) > 0,$$

и в точке $u_* = 0$ в противном случае.

Доказательство. Производная функции $\varphi(u)$ имеет вид $\varphi'(u) = a\lambda^u \ln \lambda + d\mu^u \ln \mu$ и может обращаться в нуль только при выполнении условия

$$(П.13) \quad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^u = -\frac{a \ln \lambda}{d \ln \mu}.$$

Отсюда видно, что при выполнении условий (П.12) уравнение (П.13) имеет ровно одно положительное решение (П.11), а в том случае, когда условие (П.12) не выполняется, уравнение (П.13) не имеет положительных решений и, следовательно, функция $|\varphi(u)|$, монотонно убывая при $u \geq 0$, имеет единственный максимум в нулевой точке. $\square$

Следствие. Если $a = -d > 0$ и $\mu = \lambda^2 < 1$, то функция $\varphi(u)$, имеющая в этом случае вид $\varphi(u) = a(\lambda^u - \lambda^{2u})$, принимает максимальное значение в точке $u_* = -\ln 2 / \ln \lambda$ и при этом

$$(П.14) \quad \sup_{u \geq 0} \varphi(u) = \varphi(u_*) = \frac{a}{4}.$$

Лемма П.5. Если выполнены условия леммы П.1 и $\rho(L) < 1$, то $\eta_*(L, M)$ непрерывно зависит от $L, M \in \mathcal{M}(2, 2)$.

Доказательство. Пусть $L_k, M_k \in \mathcal{M}(2, 2)$, причем $L_k \rightarrow L_0, M_k \rightarrow M_0$. Тогда при каждом фиксированном n имеют место соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_*(L_k, M_k) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_m \eta(L_k^m, M_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \eta(L_k^n, M_k) = \eta(L_0^n, M_0).$$

Отсюда, взяв $\sup$ в правой и левой части полученной цепочки неравенств, получаем:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \eta_*(L_k, M_k) \geq \sup_n \eta(L_0^n, M_0) = \eta_*(L_0, M_0),$$

и для завершения доказательства леммы осталось показать, что

$$(П.15) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \eta_*(L_k, M_k) \leq \eta_*(L_0, M_0).$$

Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве матриц $\mathcal{M}(2, 2)$. Тогда в силу условия $\rho(L_0) < 1$ можно указать такие числа $q \in (0, 1)$, $\sigma > 0$, $c < \infty$, что для всех матриц L из σ -окрестности матрицы L_0 (т.е. при выполнении условия $\|L - L_0\| < \sigma$) будут справедливы равномерные оценки $\|L^n\| \leq cq^n$. Действительно, спектральный радиус матрицы L_0 выражается формулой [19, гл. VIII, теорема 3]:

$$(П.16) \quad \rho(L_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_0^n\|^{1/n}.$$

Выберем тогда некоторое положительное $\nu < 1 - \rho(L_0)$ и положим

$$\|x\|_\nu = \sup_{n \geq 0} (\rho(L_0) + \nu)^{-n} \|L_0^n x\|.$$

Из формулы (П.16) следует ограниченность сверху некоторой константой $c < \infty$ чисел $(\rho(L_0) + \nu)^{-n} \|L_0^n\|$. Поэтому $\|x\| \leq \|x\|_\nu \leq c\|x\|$ и, значит, $\|\cdot\|_\nu$ является нормой. Простой подсчет показывает, что

$$\|L_0 x\|_\nu = \sup_{n \geq 0} (\rho(L_0) + \nu)^{-n} \|L_0^{n+1} x\| \leq (\rho(L_0) + \nu) \|x\|_\nu,$$

откуда $\|L_0\|_\nu \leq \rho(L_0) + \nu$. Выберем теперь число q таким образом, чтобы выполнялись неравенства $\rho(L_0) + \nu < q < 1$. Тогда для всех матриц L , удовлетворяющих соотношению $\|L - L_0\|_\nu \leq q - \rho(L_0) - \nu$, будет иметь место оценка $\|L\|_\nu \leq q$. Следовательно, для таких матриц L будут выполняться и соотношения $\|L^n\|_\nu \leq q^n$ при $n = 1, 2, \dots$, а тогда $\|L^n\| \leq cq^n$ при $n = 1, 2, \dots$ для всех матриц L , удовлетворяющих соотношению $\|L - L_0\| \leq \sigma = (q - \rho(L_0) - \nu)/c$.

Итак, без ограничения общности можно считать, что при всех n и k справедливы оценки $\|L_k^n\| \leq cq^n$, а тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $n(\varepsilon)$, что

$$(П.17) \quad |\eta(L_k^n, M_k)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n(\varepsilon), \quad \forall k.$$

Представив теперь величину $\eta_*(L_k, M)$ в виде

$$\eta_*(L_k, M) := \sup_n |\eta(L_k^n, M_k)| = \max \left\{ \max_{n < n(\varepsilon)} |\eta(L_k^n, M_k)|, \sup_{n \geq n(\varepsilon)} |\eta(L_k^n, M_k)| \right\},$$

получаем в силу (П.17)

$$\eta_*(L_k, M) \leq \max \left\{ \max_{n < n(\varepsilon)} |\eta(L_k^n, M_k)|, \varepsilon \right\}.$$

Перейдя в полученной оценке к пределу при $k \rightarrow \infty$ (что возможно, поскольку под внутренним знаком максимума имеется конечное, причем не зависящее от k число членов), получим

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \eta_*(L_k, M_k) \leq \max \left\{ \max_{n < n(\varepsilon)} |\eta(L_0^n, M_0)|, \varepsilon \right\} \leq \max \{ \eta_*(L_0, M_0), \varepsilon \},$$

откуда в силу произвольности выбора числа ε

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \eta_*(L_k, M_k) \leq \eta_*(L_0, M_0).$$

Неравенство (П.15) установлено и с ним доказательство леммы завершено. $\square$

П.2. Доказательство теоремы 1

Идея доказательства теоремы 1 близка к идее доказательства более слабого утверждения из [4], использующего, по существу, лишь тот факт, что полуалгебраические множества могут содержать только конечное число компонент связности. Поскольку, как упоминалось в разделе 2, определимые множества в o -минимальных структурах также содержат лишь конечное числа компонент связности, то это позволяет при доказательстве теоремы 1 использовать соображения и конструкции из [4]. Тем не менее, как представляется, в приложениях может представлять интерес не только сам факт неопределимости множеств $\mathcal{C}(p, q)$, $\mathcal{B}(p, q)$, $\mathcal{U}(p, q)$ в o -упорядоченных структурах, но и те конструкции, с помощью которых этот факт доказывается. Поэтому ниже приводится аналитическое доказательство теоремы 1, существенно отличающееся по технике от доказательства, предложенного в [4].

Опишем схему доказательства сначала для случая $p = q = 2$. Строится семейство пар 2×2 матриц $\mathcal{L}(t) = \{L(t), M(t)\} \in \mathcal{M}(2, 2)$, зависящее от параметра $t \in [0, 1]$ и обладающее тем свойством, что множество $\mathcal{L}_+ = \bigcup_{t \in [0, 1]} (\mathcal{L}(t), t)$ образует полуалгебраическое, а значит, и определимое в соответствующей o -упорядоченной структуре подмножество $\mathcal{M}(2, 2) \times \mathbb{R}^1$. Тогда, в предположении определимости в соответствующей o -упорядоченной структуре множеств $\mathcal{C}(2, 2)$, $\mathcal{B}(2, 2)$, $\mathcal{U}(2, 2)$, и каждое из множеств

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_+ \cap (\mathcal{C}(2, 2) \times \mathbb{R}^1), \quad \mathcal{L}_B = \mathcal{L}_+ \cap (\mathcal{B}(2, 2) \times \mathbb{R}^1), \quad \mathcal{L}_U = \mathcal{L}_+ \cap (\mathcal{U}(2, 2) \times \mathbb{R}^1),$$

будучи булевой комбинацией определимых множеств, также должно быть определимым в соответствующей o -упорядоченной структуре. Значит, по свойству vi) упорядоченных структур должны быть определимыми и проекции множеств $\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_B, \mathcal{L}_U$ на $\mathbb{R}^1$ -компоненту прямого произведения $\mathcal{M}(2, 2) \times \mathbb{R}^1$. Однако матрицы $L(t), M(t)$ будут построены таким образом, что соответствующие проекции окажутся состоящими из бесконечного числа компонент связности и, значит, неопределимыми в o -упорядоченных структурах, содержащих полуалгебраические множества. Полученное противоречие и будет означать, что множества $\mathcal{C}(2, 2)$, $\mathcal{B}(2, 2)$, $\mathcal{U}(2, 2)$ не являются определимыми в o -упорядоченных структурах, содержащих полуалгебраические множества.

После этого для доказательства теоремы при произвольных значениях $p, q \geq 2$ достаточно построить сначала $p \times p$ матрицы $\tilde{L}_1(t), \tilde{L}_2(t)$, у которых в левом верхнем углу расположены построенные ранее матрицы $L(t), M(t)$ соответственно, а остальные элементы нулевые. Затем в качестве матриц $\tilde{L}_3(t), \dots, \tilde{L}_q(t)$ взять нулевые матрицы. Построенный таким образом набор матриц

$$\tilde{\mathcal{L}}(t) := \{\tilde{L}_1(t), \tilde{L}_2(t), \tilde{L}_3(t), \dots, \tilde{L}_q(t)\}$$

при каждом t будет принадлежать $\mathcal{M}(p, q)$ и будет, очевидно, сходящимся, ограниченным или неограниченным тогда и только тогда, когда соответственно сходящимся, ограниченным или неограниченным будет набор 2×2 матриц $\{L(t), M(t)\}$. Тогда из неопределимости множеств $\mathcal{C}(2, 2)$, $\mathcal{B}(2, 2)$, $\mathcal{U}(2, 2)$ в o -упорядоченных структурах, содержащих полуалгебраические множества, будет вытекать аналогичный факт и для множеств $\mathcal{C}(p, q)$, $\mathcal{B}(p, q)$, $\mathcal{U}(p, q)$.

Приступим непосредственно к построению пар матриц $\mathcal{L}(t) = \{L(t), M(t)\} \in \mathcal{M}(2, 2)$, для которых проекции множеств $\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_B, \mathcal{L}_U$ на $\mathbb{R}^1$ -компоненту прямого произведения $\mathcal{M}(2, 2) \times \mathbb{R}^1$ состоят из бесконечного числа компонент связности. Предположим, что нам удалось построить семейства матриц $L(t), M(t)$, удовлетворяющих следующим условиям.

- Δ_1 : элементы матриц $L(t), M(t)$ связаны друг с другом и с t полиномиальной зависимостью;
- Δ_2 : при всех достаточно малых $t > 0$ выполняются неравенства

$$\rho(L(t)) < 1, \quad \rho(M(t)) < 1;$$

Δ_3 : существуют такие значения $t_n \rightarrow 0$, $t_n > 0$, при которых выполняются неравенства

$$\sup_n |\eta(L^n(t_n), M(t_n))| < 1;$$

Δ_4 : существуют значения $s_n \rightarrow 0$, $s_n > 0$, при которых выполняются неравенства

$$\sup_n |\eta(L^n(s_n), M(s_n))| > 1;$$

Δ_5 : существуют значения $r_n \rightarrow 0$, $r_n > 0$, при которых выполняются равенства

$$\sup_n |\eta(L^n(r_n), M(r_n))| = 1.$$

В этом случае без ограничения общности можно считать, что между элементами последовательностей $\{t_n\}$, $\{s_n\}$ и $\{r_n\}$ имеют место соотношения $t_{n+1} < s_n < r_n < t_n$. А тогда проекция каждого из *полуалгебраических* множеств $\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_B, \mathcal{L}_U$ на t -координату будет состоять из бесконечного числа компонент связности (поскольку элементы $\{t_n\}$, $\{s_n\}$ и $\{r_n\}$, принадлежащие проекциям различных множеств, в силу соотношений $t_{n+1} < s_n < r_n < t_n$ будут перемежаться друг с другом). Отсюда, как отмечалось выше, и вытекает неопределимость множеств $\mathcal{C}(2, 2)$, $\mathcal{B}(2, 2)$ и $\mathcal{U}(2, 2)$ в o -упорядоченных структурах, содержащих полуалгебраические множества.

Замечание П.1. Доказательства требует лишь существование последовательностей $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$, обладающих указанными выше свойствами, существование же последовательности $\{r_n\}$ вытекает из факта существования последовательностей $\{t_n\}$ и $\{s_n\}$. В самом деле, в силу непрерывности функции $\eta_*(L(t), M(t))$ (см. лемму П.5) для каждой пары чисел $s_n < t_n$, удовлетворяющих условиям Δ_3 и Δ_4 , найдется такое $r_n \in (s_n, t_n)$, для которого будет выполняться условие Δ_5 , что и означает существование требуемой последовательности $\{r_n\}$.

Итак, наша задача — построить семейства матриц $L(t), M(t)$, удовлетворяющих условиям Δ_1 – Δ_5 . Выберем пару матриц

$$(П.18) \quad L(t) = \begin{vmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & \mu(t) \end{vmatrix}, \quad M(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}, \quad \det M(t) \equiv 0,$$

где $\lambda(t), \mu(t) > 0$. Тогда первое из условий Δ_2 окажется равносильным выполнению неравенств $0 < \lambda(t), \mu(t) < 1$, а второе из условий Δ_2 примет вид $|a(t) + d(t)| < 1$. Предположим дополнительно, что элементы $\lambda(t), \mu(t), a(t)$ и $d(t)$ матриц $L(t)$ и $M(t)$ подчинены соотношениям

$$\mu(t) \equiv \lambda^2(t), \quad a(t) \equiv -d(t) > 0.$$

Тогда согласно леммам П.2, П.4 сходимость набора матриц $\{L(t), M(t)\}$ при определенном значении параметра t будет определяться величиной

$$\eta_*(L(t), M(t)) := \sup_n |\eta(L^n(t), M(t))| = \sup_{u \geq 0, u \in \mathbb{Z}} \varphi_i(u).$$

В то же время согласно следствию из леммы П.4

$$|\eta(L^n(t), M(t))| \equiv \varphi_i(n) = a(t)(\lambda^n(t) - \lambda^{2n}(t)),$$

и при этом

$$(П.19) \quad \sup_{u \geq 0, u \in \mathbb{R}} \varphi_i(u) = \varphi_i(u_i) = \frac{a(t)}{4}, \quad \text{где} \quad u_i = -\frac{\ln 2}{\ln \lambda(t)}.$$

Заметим, что $\sup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \varphi_t(k)$ совпадает с $\sup_{u \geq 0, u \in \mathbb{R}} \varphi_t(u)$ только в том случае, когда u_t является целым числом. В остальных же случаях имеет место строгое неравенство

$$(П.20) \quad \sup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \varphi_t(k) = \max \{ \varphi_t([u_t]), \varphi_t([u_t] + 1) \} < \sup_{u \geq 0, u \in \mathbb{R}} \varphi_t(u),$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа (т.е. наибольшее целое, не превосходящее значение аргумента). Именно на строгости неравенства в правой части (П.20) и будет идти «игра» в завершающей части доказательства.

Определим последовательность чисел $\{t_n\}$ таким образом, чтобы при каждом значении n выполнялось равенство $u_{t_n} = n$. В силу (П.19) при этом будут выполняться соотношения

$$(П.21) \quad \sup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \varphi_{t_n}(k) = \varphi_{t_n}(n) = \frac{a(t_n)}{4}, \quad \lambda(t_n) := 2^{-\frac{1}{n}}.$$

Последовательность же чисел $\{s_n\}$ определим таким образом, чтобы при каждом значении n выполнялось равенство $u_{s_n} = n + \frac{1}{2}$. Тогда в силу (П.20) будут иметь место соотношения

$$(П.22) \quad \sup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \varphi_{s_n}(k) = \max \{ \varphi_{s_n}(n), \varphi_{s_n}(n + 1) \}, \quad \lambda(s_n) := 2^{-\frac{2}{2n+1}}.$$

Здесь по определению функции $\varphi_t(u)$

$$\varphi_{s_n}(n) = a(s_n) \left(\lambda^n(s_n) - \lambda^{2n}(s_n) \right), \quad \varphi_{s_n}(n + 1) = a(s_n) \left(\lambda^{n+1}(s_n) - \lambda^{2n+2}(s_n) \right)$$

и, как показывает непосредственный подсчет, $\lambda^n(s_n) - \lambda^{2n}(s_n) < \lambda^{n+1}(s_n) - \lambda^{2n+2}(s_n)$. Поэтому

$$\sup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \varphi_{s_n}(k) = \varphi_{s_n}(n + 1) = a(s_n) \left(\lambda^{n+1}(s_n) - \lambda^{2n+2}(s_n) \right),$$

где в силу соотношения $\lambda(s_n) := 2^{-\frac{2}{2n+1}}$ имеем:

$$\lambda^{n+1}(s_n) - \lambda^{2n+2}(s_n) = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda(s_n)} - \frac{1}{4} \lambda(s_n) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(1 - \sqrt{\lambda(s_n)} \right)^2 \right).$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$(П.23) \quad \sup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \varphi_{s_n}(k) = \frac{a(s_n)}{4} \left(1 - \left(1 - \sqrt{\lambda(s_n)} \right)^2 \right), \quad \lambda(s_n) := 2^{-\frac{2}{2n+1}}.$$

Теперь для завершения доказательства нам достаточно подобрать такие полиномиально зависящие от t функции $a(t)$ и $\lambda(t)$, при которых выполнялись бы неравенства

$$\sup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \varphi_{t_n}(k) > 1, \quad \sup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \varphi_{s_n}(k) < 1$$

или, что то же в силу (П.21), (П.23), неравенства

$$(П.24) \quad \frac{a(t_n)}{4} > 1, \quad \frac{a(s_n)}{4} \left(1 - \left(1 - \sqrt{\lambda(s_n)} \right)^2 \right) < 1,$$

в которых t_n и s_n определяются равенствами

$$\lambda(t_n) := 2^{-\frac{1}{n}}, \quad \lambda(s_n) := 2^{-\frac{2}{2n+1}}.$$

Нетрудно убедиться, что соотношения (П.24) выполняются, если функции $a(t)$ и $\lambda(t)$ определены следующим образом:

$$a(t) = 4 + t^3, \quad \lambda(t) = 1 - t.$$

Действительно, в этом случае

$$\frac{a(t_n)}{4} = 1 + \frac{1}{4}t_n^3 > 1$$

и

$$\frac{a(s_n)}{4} \left(1 - \left(1 - \sqrt{\lambda(s_n)}\right)^2\right) \simeq \left(1 + \frac{1}{4}s_n^3\right) \left(1 - \frac{1}{4}s_n^2\right) \simeq 1 - \frac{1}{4}s_n^2 < 1$$

при всех достаточно больших значениях n (и, соответственно, малых значениях s_n).

Итак, при выборе семейства пар 2×2 матриц $\mathcal{L}(t) = \{L(t), M(t)\}$ с элементами, определяемыми соотношениями

$$\lambda(t) = 1 - t, \quad \mu(t) = \lambda^2(t), \quad a(t) = b(t) = -d(t) = -c(t) = 4 + t^3,$$

в силу (П.24) будут выполняться условия Δ_3 и Δ_4 , а значит проекция каждого из *полуалгебраических* множеств $\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_B, \mathcal{L}_U$ на t -координату будет состоять из бесконечного числа компонент связности.

Доказательство теоремы завершено. $\square$

Замечание П.2. Предложенная выше конструкция доказательства теоремы 1 может быть выполнена и для случаев, когда матрица $L(t)$ имеет не диагональный вид, как в (П.8), а представима в виде жорданового блока (П.9) или в виде матрицы поворота (П.10). Указанные случаи не рассматриваются, поскольку соответствующие конструкции отличаются от уже рассмотренных лишь техническими деталями, связанными с поиском наибольшего значения функции $|\eta(L^n, M)|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brayton R.K., Tong C.H.* Stability of dynamical systems: a constructive approach// IEEE Trans. Circuits Syst. 1980. V. 26. № 4. P. 224–234. 24
2. *Brayton R.K., Tong C.H.* Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems// IEEE Trans. Circuits Syst. 1980. V. 27. №. 11. P. 1121–1130. 24
3. *Chazan D., Miranker W.* Chaotic relaxation// Linear Algebra Appl. 1969. V. 2. P. 199–222. 24
4. *Козьякин В.С.* Алгебраическая неразрешимость задачи об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем// АИТ. 1990. №. 6. С. 41–47. 24, 25, 30, 36
5. *Lagarias J.C., Wang Y.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices// Linear Algebra Appl. 1995. V. 214. P. 17–42. 24
6. *Blondel V.D., Tsitsiklis J.N.* A survey of computational complexity results in systems and control// Automatica. 2000. V. 36. №. 9. P. 1249–1274. 24, 30
7. *Van den Dries L.* Remarks on Tarski's problem concerning $(R, +, \cdot, \exp)$ // Logic Colloquium '82/ Eds. G. Lolli, G. Longo, A. Marcja. North-Holland, 1984. P. 97–121. 25
8. *Knight J., Pillay A., Steinhorn C.* Definable sets in ordered structures II// Trans. AMS. 1986, V. 295. P. 593–605. 25
9. *Pillay A., Steinhorn C.* Definable sets in ordered structures I// Trans. AMS. 1986. V. 295. P. 565–592. 25
10. *Милнор Дж.*, Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971. 26
11. *Benedetti R., Risler J.-J.* Real algebraic and semi-algebraic sets. Hermann, 1990. 27
12. *Bochnak J., Coste M., Roy M.-F.* Real Algebraic Geometry. Springer Verlag, 1998. 27

13. *Van den Dries L.* Tame topology and o -minimal structures// LMS Lecture Notes Series. V. 248. Cambridge Univ. Press. 1988. 27, 28
14. *Bierstone E., Milinan P.* Semianalytic and subanalytic sets// IHES Publ. Math. 1988. V. 67. P. 5–42. 27
15. *Schneps L., Lochak P.* Geometric Galois Actions: I. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme. Cambridge Univ. Press. 1997. 27
16. *Van den Dries L.* A generalization of the Tsrski–Seidenberg theorem, and some nondefinability results// Bull. AMS. 1986. V. 15. P. 189–193. 28
17. *Wilkie A.* Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function// J. AMS. 1996. V. 9. P. 1051–1094. 28
18. *Van den Dries L., Macintyre A., Marker D.* The elementary theory of restricted analytic fields with exponeotiation// Ann. Math. 1994. V. 140. P. 183–205. 28
19. *Иосуда К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 35