ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2008, т. 263, с. 1–15

УДК 515.14

Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ [1]

©2008 г. А. В. Чернавский[2]

Поступило в марте 2008 г.

Цель настоящей работы — дать модифицированное изложение основной части доказательства теоремы о локальной стягиваемости. Вывод общих теорем из частного случая евклидова пространства остается прежним. Изложение достаточно подробное и имеет целью, в частности, исправление неаккуратности, допущенной в первоначальном доказательстве.

В русских сказках имеется тема живой и мертвой воды: разрезанного на части богатыря нужно сначала спрыснуть мертвой водой, чтобы части тела срослись, а затем живой, чтобы вернуть ему сознание.

В топологии многообразий роль мертвой воды играет “непрерывная топология”. Основными проблемами тут считались *Hauptvermutung*, триангулируемость и гомотопическая характеризация сферы. Милнор добавил к ним проблему кольца, двойную надстройку и топологическую инвариантность рациональных классов Понтрягина. В настоящее время, как известно, все эти проблемы решены. Первым крупным успехом было решение последней проблемы С.П. Новиковым [1]. При этом, помимо значения самого результата, большую роль для дальнейшего развития сыграло введение в его работе специфического приема, который позволил “извлекать” из имеющихся данных непрерывную информацию. Таким приемом было вложение в гладкое многообразие W, гомеоморфное прямому произведению $M^{4k}\times\mathbb{R}^n$, открытого подмножества $M^{4k}\times T^{n-1}\times\mathbb{R}$. (Это позволило с помощью доказанной методами гладкой топологии теоремы по индукции уменьшать число n и в результате доказать, что k-е число Хирцебруха–Понтрягина многообразия W совпадает с сигнатурой M^{4k}, откуда известным образом следовала топологическая инвариантность классов.)

После работы Новикова появился ряд результатов, в которых использовались различные приемы работы с чисто непрерывной топологией. Прием Новикова с вложением тора был в модифицированной форме использован Р. Кёрби [2] (вместо вложения $T^{n-1}\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^n$ он использовал погружение $T^n\setminus D^n$) для доказательства гипотезы кольца при $n\geq 5$. (Гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ дает на погруженном торе новую pl-структуру, и проблема сводилась к сравнению двух pl-структур на торе, что к этому времени было решенной задачей.)

Следующим продвижением в области непрерывной топологии было доказательство локальной стягиваемости группы гомеоморфизмов топологических (т.е. без предположения существования pl или гладких структур) многообразий [3]. При этом был использован в модифицированной форме известный прием “бесконечных повторений”. Несколько позже Кёрби показал, что этот результат может быть получен и методом Новикова–Кёрби (погружения тора или вложения произведения тора на прямую). Эта теорема сыграла свою роль в решении Кёрби и Зибенманом [4] (уточненных) *Hauptvermutung* и проблемы триангулируемости. Решающее значение имело использование Зибенманом конечнолистных накрытий тора (при котором накрытие гомеоморфизма, гомотопного тождеству, становится близким к тож-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00705).

[2]Институт проблем передачи информации им. А.В. Харкевича РАН, Москва, Россия.
E-mail: chernav@iitp.ru

деству). Этот прием оказался очень полезным в решении ряда проблем топологических вложений.

Цель настоящей работы — дать модифицированное изложение основной части доказательства теоремы о локальной стягиваемости. Вывод общих теорем из частного случая евклидова пространства остается прежним. Изложение достаточно подробное и имеет целью, в частности, исправление неаккуратности, допущенной в первоначальном доказательстве. Кроме того, оно служит подготовкой для подхода к решению задачи о существовании стягиваемой по себе окрестности в группе гомеоморфизмов многообразий, к которому мы обратимся в дальнейших публикациях.

Обозначим через $\mathcal{H}^n$ группу гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ в компактно открытой топологии. Ее единичный элемент $\mathbf{1}$ есть тождественный гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$.

Для фиксированного числа $c > 0$ пусть Q^n_c — куб в $\mathbb{R}^n$, заданный в стандартной системе координат неравенствами $|x^i| \leq c$, $1 \leq i \leq n$.

Пусть N_c — достаточно большое натуральное число.

Для каждого натурального i, $1 \leq i \leq n$, и для каждого целого j, $-N_c \leq j \leq N_c$, обозначим через L_{cij} плоскость, заданную уравнением $x^i = \frac{cj}{N_c}$. Пусть T_{cij}, $-N_c \leq j \leq N_c - 1$, — замкнутая область между L_{cij} и L_{cij+1}.

Пусть дано ε_c, $0 < \varepsilon_c < \frac{c}{3N_c}$. Обозначим через $\widetilde{Q}^n_c$ куб, заданный неравенствами $|x^i| \leq c + \varepsilon_c$.

Обозначим через $S^{\pm}_{cij}$ плоскости, отстоящие на ε_c от L_{cij} с двух сторон соответственно, и через Π_{cij} замкнутую область между ними. $\widetilde{T}_{cij}$ обозначает замкнутую область между S^-_{cij} и S^+_{cij+1}, $-N_c \leq j \leq N_c - 1$, $\widetilde{\widetilde{T}}_{cij}$ — между S^-_{cij-1} и S^+_{cij+2}, если $-N_c + 1 \leq j \leq N_c - 2$, $\widetilde{\widetilde{T}}_{ci(-N_c)}$ — между $S^-_{ci(-N_c)}$ и $S^+_{ci(-N_c+2)}$, $\widetilde{\widetilde{T}}_{ci(N_c-1)}$ — между $S^-_{ci(N_c-2)}$ и $S^+_{ciN_c}$; $\widetilde{\Pi}_{cij}$ для $-N_c < j < N_c$ — между плоскостями S^-_{cij-1} и S^+_{cij+1}, $\widetilde{\Pi}_{ci(-N_c)}$ — между $S^-_{ci(-N_c)}$ и $S^+_{ci(-N_c+1)}$, $\widetilde{\Pi}_{ciN_c}$ — между $S^-_{ci(N_c-1)}$ и $S^+_{ciN_c}$.

Пусть β обозначает набор целых чисел $(b_1, \ldots, b_n)$, где $-N_c \leq b_s \leq N_c - 1$.

Каждый $(n-1)$-куб $Q^{n-1}_{cij} = L_{cij} \cap Q^n_c$, $-N_c \leq j \leq N_c$, есть объединение клеток $q^{n-1}_{cij\beta} = L_{cij} \cap \left(\bigcap_{s \neq i} T_{sb_s}\right)$.

Пусть $P_{cij\beta} = \Pi_{cij} \cap \left(\bigcap_{s \neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\right)$, $\widetilde{P}_{cij\beta} = \widetilde{\Pi}_{cij} \cap \left(\bigcap_{s \neq i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\right)$.

Обозначим через $H_c = H(c, N_c, \varepsilon_c)$ множество гомеоморфизмов $h \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих для всех i, $1 \leq i \leq n$, и j, $-N_c \leq j \leq N_c$, условию

$$h q^{n-1}_{cij\beta} \subset \operatorname{Int} P_{cij\beta}. \qquad (*)$$

Пусть $H_\alpha = H(\alpha, N_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ и $H_\omega = H(\omega, N_\omega, \varepsilon_\omega)$ — две окрестности этого типа.

Мы предполагаем, что $\frac{\omega}{N_\omega} = k\frac{\alpha}{N_\alpha}$, где k кратно 4^{n+1}, $k = 4^{n+1}k'$, причем $\alpha > \omega$ и для каждого i по крайней мере k плоскостей $L_{\alpha ij}$ с каждой стороны лежат вне куба Q^n_ω.

В частности, каждая плоскость $L_{\omega ij}$ есть одновременно некоторая плоскость $L_{\alpha ij'}$, причем $j' = 4^{n+1}k'j$. Обозначим $L_{\alpha ij}$ через $\widehat{L}_{\alpha ij}$, если она рассматривается как $L_{\omega ij'}$.

Набор L_{cij} при любом c и фиксированном i назовем *серией* плоскостей, отвечающей этому i.

Пусть $\varepsilon_\alpha < \frac{1}{k}\varepsilon_\omega$ и $4^{n-1}\frac{\alpha}{N_\alpha} < \frac{\omega}{N_\omega}$.

Множества H_c открыты в $\mathcal{H}$ по определению компактно открытой топологии. Очевидно, $H_\alpha \subset H_\omega$.

Теорема. *Пусть окрестности $H_\alpha = H(\alpha, N_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ и $H_\omega = H(\omega, N_\omega, \varepsilon_\omega)$ удовлетворяют указанным соотношениям. При достаточно большом k имеется деформация окрестности H_α по H_ω в тождественный гомеоморфизм* $\mathbf{1}$.

Иначе говоря, имеется непрерывное отображение $\mathbf{E}\colon H_\alpha \times [0,1] \to \mathcal{H}$, для которого $\mathbf{E}(H_\alpha \times t) \subset H_\omega$ при всех t и $\mathbf{E}(h \times 0) = h$, $\mathbf{E}(h \times 1) = \mathbf{1}$ для всех $h \in H_\alpha$.

Следствие. *$\mathcal{H}^n$ локально стягиваемо. Точнее: для каждой точки $h \in \mathcal{H}$ каждая окрестность $\mathbf{U}(h)$ содержит окрестность $\mathbf{V}(h)$ такую, что $\mathbf{V}(h)$ стягивается по $\mathbf{U}(h)$ в h.*

Доказательство. Так как $\mathcal{H}$ — топологическая группа, в качестве h достаточно взять $\mathbf{1}$. Пусть окрестность $\mathbf{U}(\mathbf{1})$ определена парой (K, U), где K — компактное подмножество, а U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, и состоит из гомеоморфизмов g таких, что $g(K) \subset U$. Так как $\mathbf{1} \in \mathbf{U}$, $K = \mathbf{1}(K)$ лежит в U.

Окрестность $H(\omega, N_\omega, \varepsilon_\omega)$ при достаточно больших ω и N_ω содержится в $\mathbf{U}$ и по теореме содержит стягиваемую по ней окрестность $H(\alpha, N_\alpha, \varepsilon_\alpha)$. В качестве $\mathbf{V}$ можно взять $H(\alpha, N_\alpha, \varepsilon_\alpha)$. $\square$

ЛЕММА 0

Пусть дана пара окрестностей $H_c = H(c, N_c, \varepsilon_c)$ и $H_d = H(d, N_d, \varepsilon_d)$, соотношение которых такое же, как в условиях теоремы для пары $H(\alpha, N_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ и $H(\omega, N_\omega, \varepsilon_\omega)$.

В дальнейшем в этом разделе мы опустим индекс c для элементов, относящихся к окрестности H_c, сохраняя индекс d для элементов окрестности H_d. В частности, положим $Q^n = Q^n_c$.

Пусть для фиксированного i, $1 \le i \le n$, имеются три последовательные плоскости L_0, L_1, L_2, принадлежащие серии L_{ij}, причем L_0 и L_2 соседние с L_1 с двух сторон в этой серии. Пусть плоскости L_0 и L_2 имеют четные номера в этой серии и, значит, плоскость L_1 не имеет вида $\widehat{L}_{ij}$.

Соответственно предыдущему обозначим через $S^\pm_k$ плоскости, отстоящие от L_k, $k = 0, 1, 2$, с двух сторон на $\varepsilon = \varepsilon_c$; через Π_k, $k = 0, 1, 2$, замкнутую область, ограниченную парой S^-_k и S^+_k; через T_k, $k = 0, 1$, замкнутые области между L_k и L_{k+1}; через $\widetilde{T}_k$ область между S^-_k и S^+_{k+1}.

Для произвольно заданного натурального числа p пусть дано p плоскостей $M_1, \ldots, M_p$, расположенных между S^+_0 и S^-_1, *считая от L_1 к L_0*.

Пусть $S^\pm_{M_r}$ — плоскости, отстоящие с двух сторон от M_r на достаточно малое произвольно заданное $\varepsilon' > 0$, так что замкнутые области Π_{M_r} между $S^\pm_{M_r}$ не пересекаются попарно и не пересекают Π_0 и Π_1.

Пусть T_{M_r} — замкнутая область между M_r и M_{r-1}, $2 \le r \le p$, T'_r — между L_0 и M_r, T''_r — между M_r и L_1, $1 \le r \le p$; $\widetilde{T}_{M_r}$ — между $S^-_{M_r}$ и $S^+_{M_{r-1}}$, $\widetilde{T}'_r$ — между S^-_0 и $S^+_{M_r}$, $\widetilde{T}''_r$ — между $S^-_{M_r}$ и S^+_1.

Обозначим $L_k \cap Q^n$ через Q^{n-1}_k, $0 \le k \le 2$, и $M_r \cap Q^n$ через $Q^{n-1}_{M_r}$, $1 \le r \le p$. Пусть β, как и выше, обозначает набор $(b_1, \ldots, b_n)$, $-N_c \le b_s \le N_c - 1$, и

$$q^{n-1}_{k\beta} = L_k \cap \left(\bigcap_{s \ne i} T_{sb_s} \right), \qquad P_{k\beta} = \Pi_k \cap \left(\bigcap_{s \ne i} \widetilde{T}_{sb_s} \right), \qquad k = 0, 1, 2,$$

$$q^{n-1}_{M_r\beta} = M_r \cap \left(\bigcap_{s \ne i} T_{sb_s} \right), \qquad P_{M_r\beta} = \Pi_{M_r} \cap \left(\bigcap_{s \ne i} \widetilde{T}_{sb_s} \right), \qquad 1 \le r \le p.$$

Для $m \ne i$:

$$q^{n-1}_{mj\beta k} = L_{mj} \cap T_k \cap \left(\bigcap_{m \ne s \ne i} T_{sb_s} \right), \qquad P_{mj\beta k} = \Pi_{mj} \cap \widetilde{T}_k \cap \left(\bigcap_{m \ne s \ne i} \widetilde{T}_{sb_s} \right),$$

$$\widetilde{P}_{mj\beta k} = \widetilde{\Pi}_{mj} \cap \widetilde{T}_k \cap \left(\bigcap_{m \ne s \ne i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s} \right), \qquad k = 0, 1;$$

$$\bar q^{n-1}_{mj\beta r} = L_{mj}\cap T_{M_r}\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} T_{sb_s}\Bigr),\qquad \overline{P}_{mj\beta r} = \Pi_{mj}\cap \widetilde{T}_{M_r}\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i}\widetilde{T}_{sb_s}\Bigr);$$

$$q'^{\,n-1}_{mj\beta r} = L_{mj}\cap T'_r\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} T_{sb_s}\Bigr),\qquad q''^{\,n-1}_{mj\beta r} = L_{mj}\cap T''_r\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} T_{sb_s}\Bigr),$$

$$P'_{mj\beta r} = \Pi_{mj}\cap \widetilde{T}'_r\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i}\widetilde{T}_{sb_s}\Bigr),\qquad P''_{mj\beta r} = \Pi_{mj}\cap \widetilde{T}''_r\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i}\widetilde{T}_{sb_s}\Bigr);$$

$$\widetilde{P}'_{mj\beta r} = \widetilde{\Pi}_{mj}\cap \widetilde{T}'_r\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i}\widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\Bigr),\qquad \widetilde{P}''_{mj\beta r} = \widetilde{\Pi}_{mj}\cap \widetilde{T}''_r\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i}\widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\Bigr),$$

$$\widetilde{\overline{P}}_{mj\beta r} = \widetilde{\Pi}_{mj}\cap \widetilde{T}_{M_r}\cap\Bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i}\widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\Bigr).$$

(Всюду $1\le r\le p$.)

Назовем клетку $\bar q^{n-1}_{mj\beta r}$, $q'^{\,n-1}_{mj\beta r}$ или $q''^{\,n-1}_{mj\beta r}$ *граничной*, если $j=-N$ или N, и *приграничной*, если какое-либо $b_s=-N$ или $N-1$. В противном случае назовем клетку *внутренней.*

Введем еще в рассмотрение клетки $q^n_{c\beta}=\bigcap_s T_{csb_s}$.

Лемма 0. *Пусть даны окрестности $H=H_d$ и H_c, p плоскостей M_r и число ε', как указано выше.*

Существует непрерывное отображение $\mathbf{B}\colon H\times[0,1]\to\mathcal{H}$ такое, что $\mathbf{B}(H,0)=\mathbf{1}$ и, обозначая $b_{ht}=\mathbf{B}(h,t)$, $b_h=b_{h1}$, $\hbar_{ht}=b_{ht}h$ ($\hbar_{h0}=h$) и (для краткости опуская индекс h) $\hbar=\hbar_{h1}$, имеем

1) *для каждого $h\in H$ изотопия b_{ht} тождественна вне $\widetilde{Q}^n$ и на $h(\widetilde{Q}^n\setminus(T_0\cup T_1))$, в частности на $h(\widetilde{Q}^n\cap L_0)$ и $h(\widetilde{Q}^n\cap L_2)$;*
2) $b_{ht}(q^{n-1}_{1\beta})\subset \widetilde{T}_1\cap\bigl(\bigcap_{s\neq i}\widetilde{T}_{sb_s}\bigr)$ *для всех t;*
3) *для внутренних клеток $b_{ht}\bigl(q^{n-1}_{mj\beta 1}\bigr)\subset \Pi_{mj}\cap\widetilde{T}_1\cap\bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i}\widetilde{T}_{sb_s}\bigr)=P_{mj\beta 1}$ для всех t;*
4) *для внутренних клеток $b_{ht}\bigl(q^{n-1}_{mj\beta 0}\bigr)\subset \widetilde{P}_{mj\beta 0}\cup\widetilde{P}_{mj\beta 1}$ для всех t;*
5) *если точка x лежит в граничной или приграничной клетке или в $\widetilde{Q}^n\setminus Q^n$, то траектория точки hx относительно изотопии b_{ht} (т.е. множество точек $b_{ht}hx$) лежит в окрестности точки x, диаметр которой меньше $f_{\rm ex}(n,k)\mu$, где $f_{\rm ex}$ — фиксированная функция, а $m u_c$ — максимальный диаметр клеток $q^n_{c\beta}$;*
6) *b_h тождествен на $h(Q^n\setminus T_0)$ и, значит, $\hbar=h$ на всех клетках $q^{n-1}_{mj\beta}$, лежащих вне открытой области между L_0 и L_1;*
7) $\hbar\bigl(q^{n-1}_{M_r\beta}\bigr)\subset \operatorname{Int}P_{M_r\beta}$;
8) $\hbar\bigl(q'^{\,n-1}_{mj\beta p}\bigr)\subset \operatorname{Int}P'_{mj\beta p}$;
9) *для внутренних клеток $\hbar\bigl(\bar q^{n-1}_{mj\beta r}\bigr)\subset \operatorname{Int}\bigl(\overline{P}_{mj\beta r}\cup\bigl(\Pi_{M_{r-1}}\cap\widetilde{\Pi}_{mj}\cap\bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i}\widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\bigr)\bigr)\bigr)$.*

Замечание. Из 1)–4) следует, что для точки x, лежащей в области $(T_0\cup T_1)\cap\bigl(\bigcap_{s\neq i}T_{sb_s}\bigr)$ траектория точки hx относительно изотопии b_{ht} лежит в области $(\widetilde{T}_0\cup\widetilde{T}_1)\cap\bigl(\bigcap_{s\neq i}\widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\bigr)$. Вместе с 5) это показывает, что если число N достаточно велико, т.е. расстояние между соседними плоскостями L_{mj}, $1\le m\le n$, достаточно мало, то построенная изотопия b_{ht} не выведет гомеоморфизм h за пределы окрестности H_d. В самом деле, диаметры траекторий всех точек hx

можно будет сделать меньше максимума расстояния от клеток $q^{n-1}_{dmj\beta}$ до границ соответствующих областей $P_{dmj\beta}$.

Доказательство леммы 0. Построение идет с помощью индукции по p. Рассмотрим сначала случай $p = 1$, т.е. дана одна плоскость между L_0 и L_1. Обозначим ее M, и пусть $Q^{n-1}_M = Q^n \cap M$.

Пусть также $S^{\pm}_M$ — плоскости, отстоящие с двух сторон от M на ε', и Π_M — область между ними.

Клетку $M \cap \left(\bigcap_{s\neq i} T_{sb_s}\right)$ обозначим $q^{n-1}_{M\beta}$, положим $P_{M\beta} = \Pi_M \cap \left(\bigcap_{s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\right)$; область между L_0 и M обозначим T'_M, между M и L_1 обозначим T''_M. Соответственно область между S^-_0 и S^+_M обозначим $\widetilde{T}'_M$ и между S^-_M и S^+_1 обозначим $\widetilde{T}''_M$; как и выше,

$$q'^{\,n-1}_{mj\beta} = L_{mj} \cap T'_M \cap \left(\bigcap_{m\neq s\neq i} T_{sb_s}\right), \qquad P'_{mj\beta} = \Pi_{mj} \cap \widetilde{T}'_M \cap \left(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\right),$$

$$q''^{\,n-1}_{mj\beta} = L_{mj} \cap T''_M \cap \left(\bigcap_{m\neq s\neq i} T_{sb_s}\right), \qquad P''_{mj\beta} = \Pi_{mj} \cap \widetilde{T}''_M \cap \left(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\right),$$

$$\widetilde{P}'_{mj\beta} = \widetilde{\Pi}_{mj} \cap \widetilde{T}'_M \cap \left(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\right), \qquad \widetilde{P}''_{mj\beta} = \widetilde{\Pi}_{mj} \cap \widetilde{T}''_M \cap \left(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\right).$$

Мы построим изотопию g_{1t}, непрерывно зависящую от h, тождественную вне $\widetilde{Q}^n$ и на $h(Q^n \setminus (T_0 \cup T_1))$, в частности на $h(Q^{n-1}_0 \cup Q^{n-1}_2)$, для которой

$$g_{1t} h q^{n-1}_{1\beta} \subset \widetilde{T}_1 \cap \left(\bigcap_{s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\right), \qquad g_{1t} h q^{n-1}_{mj\beta 1} \subset \Pi_{mj} \cap \widetilde{T}_1 \cap \left(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\right) = P_{mj\beta 1},$$

$$g_{1t} h q^{n-1}_{mj\beta 0} \subset P_{mj\beta 0} \cup \left(\widetilde{\Pi}_{mj} \cap \widetilde{T}_1 \cap \left(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\right)\right) = P_{mj\beta 0} \cup \widetilde{P}_{mj\beta 1}.$$

(В частности, изотопия проходит по H_d.)

При этом гомеоморфизм g_{11} тождествен на $h(Q^n \setminus T_0)$, $g_{11} h q^{n-1}_{M\beta} \subset \operatorname{Int} P_{M\beta}$, $g_{11} h q'^{\,n-1}_{mj\beta} \subset \subset \operatorname{Int} P'_{mj\beta}$ и если $q''^{\,n-1}_{mj\beta}$ внутренняя, то $g_{11} h q''^{\,n-1}_{mj\beta} \subset P''_{mj\beta} \cup (\widetilde{P}_{mj\beta 1} \cap \Pi_1)$.

Если же клетка $q''^{\,n-1}_{mj\beta}$ либо граничная, либо приграничная, т.е. либо $j = -N$ или N, либо некоторые $b_s = -N$ или $N-1$, то $g_{11} h q''^{\,n-1}_{mj\beta} \subset P''_{mj\beta} \cup \widetilde{P}_{mj\beta 1}$.

Пусть $\delta > 0$ — достаточно малое число, выбор которого дальше будет уточняться. Обозначим через $L^{\pm}_{\delta k}$, $k = 0, 1, 2$, плоскости, отстоящие с обеих сторон от L_k на расстояние δ, и соответственно $L^{\pm}_{\delta M}$ для M.

Пусть X_k — замкнутая область между $L^-_{\delta k}$ и L_k.

Мы определим изотопию g_{1t} с помощью трех изотопий, которые следовало бы обозначить l_{11t}, l_{12t}, l_{13t}, но в этом начальном шаге индукции мы для удобства опустим первый индекс и будем писать l_{kt}, $k = 1, 2, 3$.

Пусть $\widetilde{Q}^n_\delta$ — куб, определенный неравенствами $|x^m| \le a + \delta$. Пусть $\widetilde{Q}^{n-1}_k = \widetilde{Q}^n_\delta \cap L_k$, $Q^{n-1}_{\delta k} = Q^n \cap L^-_{\delta k}$ и $\widetilde{Q}^{n-1}_{\delta k} = \widetilde{Q}^n_\delta \cap L^-_{\delta k}$. Аналогично $\widetilde{Q}^{n-1}_M = \widetilde{Q}^n_\delta \cap M$, $Q^{n-1}_{\delta M} = Q^n \cap L^-_{\delta M}$ и $\widetilde{Q}^{n-1}_{\delta M} = \widetilde{Q}^n_\delta \cap L^-_{\delta M}$.

Примем, что $\widetilde{Q}^n_\delta$ лежит (как и Q^n) в $\operatorname{Int} \widetilde{Q}^n$, $h\widetilde{Q}^n_\delta$ лежит (как и hQ^n) в $\operatorname{Int} \widetilde{Q}^n$ и образ области $X_k \cap \widetilde{Q}^n_\delta$, $k = 0, 1, 2$, лежит (как и hQ^{n-1}_k) в $\operatorname{Int} \Pi_k$.

Пусть $R_1 = X_1 \cup T_1$ — замкнутая область между $L^-_{\delta 1}$ и L_2, $O_1 = R_1 \cap \widetilde{Q}^n_\delta$.

Пусть l_{1t} — кусочно линейная изотопия, сдвигающая точки параллельно оси Ox^i в положительном направлении, тождественная вне O_1 и переводящая Q_1^{n-1} в $Q_{\delta 2}^{n-1}$.

Носителем изотопии $hl_{1t}h^{-1}$ является множество $hO_1 \subset h\widetilde{Q}^n_\delta \subset \widetilde{Q}^n$.

Пусть $L^-_{2\delta 1}$ — плоскость, отстоящая от L_1 слева на расстояние 2δ, и $Q^{n-1}_{2\delta 1} = Q^n \cap L^-_{2\delta 1}$, $\widetilde{Q}^{n-1}_{2\delta 1} = \widetilde{Q}^n_\delta \cap L^-_{2\delta 1}$. Примем, что δ так мало, что замкнутая область между $h\widetilde{Q}^{n-1}_{2\delta 1}$ и $L^-_{\delta 1}$ лежит в $\operatorname{Int}\Pi_1$.

Пусть R_2 — замкнутая область между L_0 и $L^-_{\delta 1}$ и $O_2 = R_2 \cap \widetilde{Q}^n_\delta$.

Пусть l_{2t} — кусочно линейная изотопия, сдвигающая точки параллельно оси Ox^i в положительном направлении, тождественная вне O_2 и переводящая Q^{n-1}_M в $Q^{n-1}_{2\delta 1}$.

Носителем изотопии $hl_{2t}h^{-1}$ является множество $hO_2 \subset h\widetilde{Q}^n_\delta \subset \widetilde{Q}^n$.

Заметим, что этот носитель hO_2 целиком лежит в области $\operatorname{Int}(\widetilde{T}_0 \cap \widetilde{Q}^n)$ благодаря условию $(*)$.

Заметим также, что пересечение (открытых) носителей l_{1t} и l_{2t} пусто.

Возьмем в Π_1 плоскость S'_1, столь близкую к S^+_1, что hO_2 (в частности, $h\widetilde{Q}^{n-1}_1$) лежит в области между S^-_0 и S'_1. Пусть $\widetilde{Q}^n_{-\delta}$ — куб, определенный неравенствами $x^m \le 1+\varepsilon-\delta$ для всех m. Примем, что δ выбрано столь малым, что hO_2 лежит в $\operatorname{Int}\widetilde{Q}^n_{-\delta}$. Пусть $\widetilde{Q}'_1 = \widetilde{Q}^n_{-\delta} \cap S'_1$ и $\widetilde{Q}^+_M = \widetilde{Q}^n_{-\delta} \cap S^+_M$.

Обозначим через O_3 пересечение $\widetilde{Q}^n$ и области между S^-_M и S^+_1.

Пусть l_{3t} — кусочно линейная изотопия, сдвигающая точки параллельно оси Ox^i в отрицательном направлении, тождественная вне O_3 и переводящая $\widetilde{Q}'_1$ в $\widetilde{Q}^+_M$. Носителем l_{3t} является $O_3 \subset \widetilde{Q}^n$.

Заметим, что эта изотопия переводит носитель l_{2t} в область $\widetilde{T}'_M$, лежащую вне носителя l_{1t}.

Гомеоморфизмы l_{k1} обозначим l_k.

Рассмотрим композицию четырех изотопий

$$g_{1t} = (hl_{1t}h^{-1})^{-1} \circ l_{3t} \circ (hl_{2t}h^{-1}) \circ (hl_{1t}h^{-1}). \tag{$**$}$$

Определение. Мы называем *композицией* $u_t \circ v_t$ изотопий u_t и v_t, для которых $u_0 = \mathbf{1} = v_0$, изотопию, которая на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ совпадает с v_{2t}, а на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ с изотопией $u_{2t-1}v_1$. Соответственно определяется композиция конечного числа изотопий u_{it} с аналогичным условием $u_{i0} = \mathbf{1}$.

Изотопию g_{1t}, очевидно, можно считать непрерывно зависящей от h.

Изотопия g_{1t} состоит из четырех сомножителей. Носители всех четырех лежат, как мы видели, в $\widetilde{Q}^n$, т.е. $g_{1t} = \mathbf{1}$ вне $\widetilde{Q}^n$. Обозначим первый сомножитель (справа) через g'_{1t}, а второй через g''_{1t}. Гомеоморфизм g_{11} обозначим g_1 и положим $g'_{11} = g'_1$, $g''_{11} = g''_1$, тогда $g_1 = g'^{-1}_1 l_3 g''_1 g'_1$.

Рассмотрим подробнее траектории точек относительно изотопии g_{1t}. Это нужно, во-первых, чтобы убедиться, что деформация гомеоморфизма не выходит за пределы окрестности H_d, во-вторых, чтобы установить границу для длин траекторий, что понадобится в заключительном предельном переходе, и, в-третьих, чтобы доказать выполнение подправленного аналога условия $(*)$ для гомеоморфизма g_1h, что нужно для индуктивного построения.

Введем дополнительно в рассмотрение клетки $q^n_{\beta k} = \bigcap_{s\ne i} T_{sb_s} \cap T_k$, $\widetilde{q}^n_{\beta k} = \bigcap_{s\ne i} \widetilde{T}_{sb_s} \cap \widetilde{T}_k$ и $\widetilde{\widetilde{q}}^n_{\beta k} = \bigcap_{s\ne i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s} \cap \widetilde{T}_k$, $k = 0, 1$.

Траектории точек при изотопиях l_{1t}, l_{2t}, l_{3t} лежат на прямых, параллельных оси Ox^i. Образы траекторий точек для l_{1t} и l_{2t} при гомеоморфизме h служат *траекториями точек* соответственно для изотопий g'_{1t} и g''_{1t} (в пределах их носителей). Они лежат на дугах, являющихся образами отрезков, которые носители l_{1t} и l_{2t} высекают из прямых, параллельных оси Ox^i. Траекториями l_{kt} назовем сами отрезки, высекаемые их носителями.

Каждая траектория g'_{1t} либо целиком лежит вне hQ^n, либо состоит из малой дуги в образе некоторой клетки $q^{n-1}_{mj\beta 0}$ (может быть, в образе пересечения нескольких таких клеток) и остальной части в образе $q^{n-1}_{mj\beta 1}$ с теми же m, j и с тем же набором β. Траектории g''_{2t} целиком лежат в образе одной (или нескольких) клеток типа $q^{n-1}_{mj\beta 0}$.

Замечание. Мы можем допустить, что δ было выбрано столь малым, что для заданного $\eta > 0$ каждая траектория изотопии l_{1t} первого типа (т.е. вне Q^n) лежит в η-окрестности некоторой траектории, расположенной на образе границы Q^n. В таком случае мы можем утверждать, что соответствующая траектория изотопии g'_{1t} целиком лежит в той же области типа $P_{mj\beta 1}$, что и близкая ей траектория на границе hQ^n.

Рассмотрим теперь *траектории точек при изотопии* g_{1t}.

Если точка лежит в $h(T_1 \cap Q^n)$, то изотопия g'_{1t} переведет ее по своей траектории в область Π_2, т.е. вне носителей g''_{1t} и l_{3t}. Поэтому траектория каждой такой точки при изотопии g_{1t} лежит в траектории g'_{1t}.

В частности, если взятая точка лежит в клетке $hq^{n-1}_{mj\beta 1}$, то в ней остается и ее траектория.

Аналогично траектория точки, лежащей в области $h\bigl(T_1 \cap \bigl(\bigcap_{s\neq i} T_{sb_s}\bigr)\bigr) = hq^n_{\beta 1}$, остается в этой области и, значит, в $\widetilde{T}_1 \cap \bigl(\bigcap_{s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\bigr) = \widetilde{q}^n_{\beta 1}$. В этой же области лежит и траектория точки из клетки типа $hq^{n-1}_{\beta 1}$.

Для точки, лежащей в клетке типа $hq^{n-1}_{mj\beta 0}$, но не в носителе g'_{1t} (значит, в носителе g''_{1t}), траектория состоит из дуги в траектории изотопии g''_{1t} и, возможно, отрезка прямой, параллельной Ox^i, в траектории l_{3t}. Обе дуги лежат в той же области $P_{mj\beta 0}$, что и клетка.

Аналогично если точка лежит в области $h\bigl(T_0 \cap \bigl(\bigcap_{s\neq i} T_{sb_s}\bigr)\bigr) = hq^n_{\beta 0}$, но не в носителе g'_{1t}, то траектория этой точки состоит из дуги и отрезка, которые лежат в $\widetilde{T}_0 \cap \bigl(\bigcap_{s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\bigr) = \widetilde{q}^n_{\beta 0}$.

Рассмотрим точку клетки типа $hq^{n-1}_{mj\beta 0}$, которая попадает в носитель изотопии g'_{1t}. Ее траектория состоит из трех частей. Первая часть проходит по траектории g'_{1t}, на которой $g''_{1t} = \mathbf{1}$. Траектория этой точки при действии изотопии $g''_{1t} \circ g'_{1t}$ заканчивается либо в носителе l_{3t}, либо вне него.

Во втором случае к траектории точки под действием $g''_{1t} \circ g'_{1t}$ изотопия $(g'_{1t})^{-1} \circ l_{3t}$ добавит эту же траекторию в обратном направлении и мы можем сказать, что вся траектория этой точки остается в $\Pi_{mj\beta} \cap (\widetilde{T}_0 \cup \widetilde{T}_1) \cap \bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\bigr) = P_{mj\beta 0} \cup P_{mj\beta 1}$ (на самом деле в $P_{mj\beta 1}$).

Если траектория точки под действием $g''_{1t} \circ g'_{1t}$ заканчивается в пределах носителя изотопии l_{3t}, то к ней добавляется вторая часть — отрезок траектории l_{3t}. Если этот отрезок заканчивается за пределами носителя g'_{1t} (значит, и за пределами носителя $(g'_{1t})^{-1}$), то вся траектория точки состоит из этих двух частей. В этом случае мы можем сказать, что траектория лежит в $\Pi_{mj} \cap (\widetilde{T}_0 \cup \widetilde{T}_1) \cap \bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\bigr) = P_{mj\beta 0} \cup P_{mj\beta 1}$.

Аналогичное верно и для траектории точки, лежащей в $h\bigl(T_0 \cap \bigl(\bigcap_{s\neq i} T_{sb_s}\bigr)\bigr)$.

Допустим, что траектория точки x из $hq^{n-1}_{mj\beta 0}$ под действием изотопии $l_{3t} \circ g''_{1t} \circ g'_{1t}$ состоит из дуги траектории изотопии g'_{1t} и отрезка траектории l_{3t}, который заканчивается в точке y носителя g'_{1t}. Тогда к ней добавляется третья часть — кусок траектории изотопии g'_{1t}.

Точка y, очевидно, лежит в $P_{mj\beta 0} \cap \Pi_1$, и этот третий кусок траектории лежит в $\widetilde{\Pi}_{mj} \cap \widetilde{T}_1$. Аналогично он лежит в $\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}$. Значит, вся траектория расположена в $\bigl(\Pi_{mj} \cap (\widetilde{T}_0 \cup \widetilde{T}_1) \cap$ $\cap \bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\bigr)\bigr) \cup \bigl(\widetilde{\Pi}_{mj} \cap \widetilde{T}_1 \cap \bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\bigr)\bigr) = P_{mj\beta 0} \cup \widetilde{P}_{mj\beta 1}$.

Аналогично траектория точки клетки $hq^n_{\beta 0}$ лежит в $\widetilde{q}^n_{\beta 0} \cup \widetilde{\widetilde{q}}^n_{\beta 1}$.

Если точка x не принадлежит hQ^n, но лежит в $h\widetilde{Q}^n_\delta$, то ее траектория при g'_{1t} или g''_{1t} лежит, как мы видели, в малой окрестности траектории точки границы Q^n и для нее справедливо сказанное для граничной точки.

Если, наконец, точка x не лежит в $h\widetilde{Q}^n_\delta$, то первые две изотопии оставляют ее неподвижной, и если l_{3t} выводит ее за пределы носителя g'_{1t}, то вся ее траектория состоит из отрезка, если же l_{3t} вводит ее в этот носитель, то ее траектория состоит из малого отрезка в пределах Π_1 и дуги траектории изотопии g'_{1t} (лежащей вблизи траектории на границе hQ^n и, значит, в одной области $P_{mj\beta 1}$).

Из этого анализа во всяком случае следует, что диаметр каждой траектории не более диаметра области вида $(\widetilde{T}_0 \cup \widetilde{T}_1) \cap \bigl(\bigcap_{s\neq i} \widetilde{\widetilde{T}}_{sb_s}\bigr)$ и что изотопия g_{1t} не выводит гомеоморфизм h за пределы H_d.

Рассмотрим теперь *действие гомеоморфизма* g_1.

Положим $\check{h}_1 = g_1 h = (g'_1)^{-1} l_3 g'_2 g'_1 h$. Заметим, что $\check{h}_1 = (g'_1)^{-1} l_3 h l_2 l_1$.

Так как $g'_1 h(T_1 \cap Q^n)$ лежит в $\Pi_2 \cap Q^n$, где g''_1 и l_3 тождественны, гомеоморфизм g_1 тождествен на $h(Q^n \setminus T_0)$. Значит, $\check{h}_1 = h$ на всех $(n-1)$-клетках q, лежащих вне T_0. Кроме того, $\check{h}_1$ переводит Q^{n-1}_M в область Π_M малой произвольно заданной ширины $(2\varepsilon')$.

Очевидно, для клеток, лежащих на M и в области $Q^n \cap T'_M$, будет выполнено условие, аналогичное $(*)$: $\check{h}_1(q^{n-1}_{M\beta}) \subset \operatorname{Int} P_{M\beta}$, $\check{h}_1(q'^{\,n-1}_{mj\beta}) \subset \operatorname{Int} P'_{mj\beta}$. (В этих случаях h отображает клетку вне носителя g'_1.)

Рассмотрим клетки вида $q''^{\,n-1}_{mj\beta}$, лежащие в области T''_M между M и L_1.

Проанализируем последовательное поведение образа точки $x \in q''^{\,n-1}_{mj\beta}$ под действием h и сомножителей g_1. Пусть сначала $q''^{\,n-1}_{mj\beta}$ — внутренняя клетка.

Если точка $hx \in hq''^{\,n-1}_{mj\beta}$, $m \neq i$, лежит вне носителя g'_1, то $g''_1 g'_1 hx = g''_1 hx$ остается на $hq''^{\,n-1}_{mj\beta} \subset hq^{n-1}_{mj\beta 0}$ и тогда лежит в $P_{mj\beta 0}$ левее S'_1, значит, $l_3 g''_1 g'_1 hx$ лежит в $\Pi_{mj} \cap \widetilde{T}'_M$, оставаясь вне носителя g'_1, т.е. $\check{h}_1 x \in P''_{mj\beta}$.

В противном случае x лежит между $L^-_{\delta 1}$ и L_1 и $l_2 l_1 x = l_1 x$. Если при этом $l_1 x$ остается в $q^{n-1}_{mj\beta 0}$, то $hl_2 l_1 x \in hT_0$ и l_3 выведет образ из носителя g'_1, так что $\check{h}_1 x$ останется в $P''_{mj\beta}$.

Пусть гомеоморфизм l_1 переводит точку x в $q^{n-1}_{mj\beta 1}$. Тогда $l_2 l_1 x = l_1 x \in q^{n-1}_{mj\beta 1}$ и $hl_2 l_1 x$ лежит по условию в $P_{mj\beta 1} = \Pi_{mj} \cap \widetilde{T}_1 \cap \bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\bigr)$. Если эта точка не попадает в носитель l_3, то $\check{h}_1 x = hx$. Если она лежит в носителе l_3 и при этом лежит левее S'_1, то l_3 выведет ее в Π_M, т.е. за пределы носителя g'_1, оставив в T''_M, и тогда $\check{h}_1 x \in P''_{mj\beta}$.

Пусть теперь $hl_2 l_1 x$ лежит между S'_1 и S^+_1 и $y = l_3 h l_2 l_1 x$. Если y не попадает в носитель g'_1, то $(g'_1)^{-1} y = \check{h}_1(x) = y$ остается в $\Pi_{mj} \cap \widetilde{T}''_M \cap \bigl(\bigcap_{m\neq s\neq i} \widetilde{T} sb_s\bigr)$, т.е. в $P''_{mj\beta}$. В противном случае, так как g'_1 переводит свой носитель самого в себя, $z = (g'_1)^{-1} y = \check{h}_1 x = g_1 h(x)$ лежит в носителе g'_1.

Точка $z = (g'_1)^{-1} y$ не может лежать в $h(Q^n \cap T_1)$, так как тогда ее образ $g'_1 z = y$ должен был бы лежать в Π_2, а $y \in \Pi_1$. Следовательно, z лежит в $hO_1 \setminus h(Q^n \cap T_1) = h(O_1 \setminus (Q^n \cap T_1))$.

Выше через X_1 обозначена замкнутая область между $L^-_{\delta 1}$ и L_1, $R_1 = X_1 \cup T_1$ и $O_1 = \widetilde{Q}^n_\delta \cap \cap (X_1 \cup T_1) = \bigl((\widetilde{Q}^n_\delta \setminus Q^n) \cap (X_1 \cup T_1)\bigr) \cup (Q^n \cap X_1) \cup (Q^n \cap T_1)$. Носитель g'_1 представляется в виде

$$h\bigl((\widetilde{Q}^n_\delta \setminus Q^n) \cap (X_1 \cup T_1) \cup Q^n \cap X_1 \cup Q^n \cap T_1\bigr).$$

Таким образом, z лежит либо в $h\bigl((\widetilde{Q}^n_\delta \setminus Q^n) \cap (X_1 \cup T_1)\bigr)$, либо в $h(Q^n \cap X_1)$, причем пересечение этих множеств пусто.

Область $h\bigl((\widetilde{Q}^n_\delta \setminus Q^n) \cap (X_1 \cup T_1)\bigr)$ состоит из целых траекторий g'_{1t}.

Точка $z = (g'_1)^{-1} y$ лежит в той же траектории, что и y. Если $q''_{mj\beta}$ — внутренняя клетка, т.е. все b_s в ее наборе β отличны от $-N$ и от $N-1$, то y, а тогда и z не могут попасть в $h\bigl((\widetilde{Q}^n_\delta \setminus Q^n) \cap (X_1 \cup T_1)\bigr)$. Значит, z лежит в $h(Q^n \cap X_1) \subset \Pi_1$. Таким образом, в этом случае выполнено модифицированное условие $(*)$: $\check{h}_1 q''_{mj\beta} \subset \widetilde{P}''_{mj\beta}$. Точнее, $\check{h}_1 q''_{mj\beta}$ лежит в $P''_{mj\beta} \cup \bigl(\Pi_1 \cap \widetilde{P}''_{mj\beta}\bigr)$.

Если $q''_{mj\beta}$ граничная ($j = N$ или $-N$), то к этому добавляется $P_{m\,\pm N\,\beta 1}$.

В случае приграничной клетки, если некоторые b_s равны $-N$ или $N-1$, $q''_{mj\beta} \subset P''_{mj\beta} \cup \cup \big(\Pi_1 \cap \widetilde{P}''_{mj\beta}\big) \cup \big(\bigcup' P''_{mj\beta r-1}\big)$.

Теперь заметим, что мы можем итерировать проведенную конструкцию. В самом деле, чтобы построить g_{2t}, мы можем заменить тройку плоскостей L_0, L_1, L_2 на тройку L_0, $M = M_1$, $L^-_{\delta 1}$ и для данной плоскости M_2 с окрестностью Π_{M_2} соответственно определить число δ_2 и изотопии l_{2kt}, $k = 1, 2, 3$.

Такая же конструкция, что и выше, даст требуемую изотопию, тождественную вне $h\big(\widetilde{Q}^n \setminus (T'_2 \cup T_{M_2})\big)$ и перемещающую клетки в нужных областях. Гомеоморфизм $g_2 = g_{21}$ будет тождествен на $h(Q^n \cap T''_2)$, и гомеоморфизм $\check{h}_2 = g_{21}\check{h}_1$ будет там совпадать с $\check{h}_1$. Аналогично предыдущему $\check{h}_2 q^{n-1}_{M_2\beta} \subset P_{M_2\beta}$, $\check{h}_2 q'^{\,n-1}_{mj\beta 2} \subset P'_{mj\beta 2}$ и для внутренних клеток $\check{h}_2 \bar{q}^{\,n-1}_{mj\beta 2} \subset P_{mj\beta 2} \cup \cup (\widetilde{P}_{mj\beta 2} \cap \Pi_{M_1})$.

Для граничных и приграничных клеток вместо второго слагаемого нужно взять $\widetilde{\Pi}_{mj} \cap \cap (\widetilde{T}''_2 \cup \widetilde{T}_1) \cap \big(\bigcap_{m \neq s \neq i} \widetilde{T}_{sb_s}\big)$.

Это построение продолжается очевидным образом произвольное конечное число раз (с соответствующим уменьшением толщины ε_p областей Π_p и уменьшением числа δ_p).

В качестве требуемой изотопии b_{pt} мы можем взять композицию изотопий $g_{pt} \circ \ldots \circ g_{1t}$.

Заметим, что для точек на внутренних клетках траектории остаются в пределах $\widetilde{P}_{mj\beta 0} \cup \cup \widetilde{P}_{mj\beta 1}$ и диаметры этих траекторий не больше утроенного диаметра клеток $\widetilde{q}^{\,n}_{\beta k} = \bigcap_{s \neq i} \widetilde{T}_{sb_s} \cap \cap \widetilde{T}_k$, $k = 0, 1$.

Для граничных и приграничных клеток с каждым шагом длины траекторий могут увеличиться на утроенный диаметр одной клетки. Обозначая максимальный диаметр клетки через μ_c, мы можем написать, что диаметры траекторий точек граничных клеток не больше чем $f_{\mathrm{ex}}(p, n)\mu_c$, где $f_{\mathrm{ex}}(p, n)$ — фиксированная функция. Мы можем не уточнять ее вида, так как в дальнейшем построении мы будем отбрасывать граничные клетки, а число μ будет стремиться к нулю при итерации циклов.

Заметим также, что при достаточно малом μ_c, т.е. при достаточно большом N_c, построенная изотопия не выводит гомеоморфизма за пределы окрестности H_d. $\square$

Следующим шагом должно быть аналогичное построение одновременно во всех областях hT_{ij} для данного направления Ox^i. Однако это построение, проведенное для одной такой области hT_{ij}, использовало соседнюю область hT_{ij+1}. Если проводить его последовательно для всех областей в данном направлении, то для граничных клеток изотопия окажется слишком "большой", выводящей гомеоморфизм за пределы окрестности H_ω. Поэтому мы будем применять это построение к областям hT_{ij} через одну. Для того же, чтобы каждая область оказалась достаточно подразделенной, мы применим следующее дополнение к лемме 0).

ЛЕММА $0'$

Пусть плоскости L_0, L_1, L_2 и гомеоморфизм h даны, как в лемме 0.

Пусть еще даны p плоскостей K'_r, $1 \le r \le p$, между L_0 и L_1 (занумерованные от L_1 к L_0), делящие расстояние между ними на равные отрезки, и пусть $\widehat{\varepsilon} > 0$ — такое число, что замкнутые области $\Pi_{K'_r}$, определенные для K'_r, как выше, с помощью $\widehat{\varepsilon}$, попарно не пересекаются и не пересекают Π_0 и Π_1.

Пусть K''_r, $1 \le r \le p$, — p плоскостей, расположенные аналогично в T_1 и занумерованные от L_2 к L_1.

Мы не будем повторять для данного случая всех определений клеток и их окрестностей, подробно представленных выше. Назовем *вертикальными* клетки q^{n-1}, на которые кубы $Q'^{\,n-1}_r = K'_r \cap Q^n$, $Q''^{\,n-1}_r = K''_r \cap Q^n$ и $Q^{n-1}_1 = L_1 \cap Q^n$ делятся плоскостями L_{mj}, $m \neq i$, и *горизонтальными* клетки, расположенные между соседними плоскостями K'_r, K''_r, $1 \le r \le p$, и L_k, $k = 0, 1, 2$.

Пусть $T_{K'_r}$ — замкнутая область между K'_r и K'_{r-1}, $p \ge r \ge 2$, T'_K — между L_0 и K'_p, $T_{K'_1}$ — между K'_1 и L_1 и аналогично $T_{K''_r}$ — замкнутая область между K''_r и K''_{r-1}, $p \ge r \ge 2$, T''_K — между L_1 и K''_p, $T_{K''_1}$ — между K''_1 и L_2.

Области Π, $\widetilde{T}$, $\widetilde{\Pi}$, $\widetilde{\widetilde{T}}$ и т.д. определяются соответственно с использованием числа $\widehat{\varepsilon}$,

$$\widehat{q}^{\,n-1}_{\beta K'_r} = K'_r \cap \left(\bigcap_{s\ne i} T_{sb_s}\right), \qquad \widehat{q}^{\,n-1}_{\beta K''_r} = K''_r \cap \left(\bigcap_{s\ne i} T_{sb_s}\right),$$

$$\widehat{q}^{\,n-1}_{mj\beta K'_r} = L_{mj} \cap T_{K'_r} \cap \left(\bigcap_{m\ne s\ne i} T_{sb_s}\right), \qquad \widehat{q}^{\,n-1}_{mj\beta K''_r} = L_{mj} \cap T_{K''_r} \cap \left(\bigcap_{m\ne s\ne i} T_{sb_s}\right),$$

$$\widehat{q}'^{\,n-1}_{mj\beta} = L_{mj} \cap T'_K \cap \left(\bigcap_{m\ne s\ne i} T_{sb_s}\right), \qquad \widehat{q}''^{\,n-1}_{mj\beta} = L_{mj} \cap T''_K \cap \left(\bigcap_{m\ne s\ne i} T_{sb_s}\right).$$

Лемма 0$'$. *Существует непрерывное отображение* $\widehat{\mathbf{B}}\colon H \times [0,1] \to \mathcal{H}$ *такое, что* $\widehat{\mathbf{B}}(H,0) = \mathbf{1}$ *и, обозначая* $\widehat{b}_{ht} = \widehat{\mathbf{B}}(h,t)$, $\widehat{b}_h = \widehat{b}_{h1}$, $\widehat{\hbar}_t = \widehat{b}_{ht}h$ $(\widehat{\hbar}_0 = h)$ *и* $\widehat{\hbar} = \widehat{\hbar}_1$, *имеем*

1) $\widehat{\hbar}_t \in H_d$;
2) $\widehat{b}_{ht}$ *тождественно вне* $\widetilde{Q}^n$ *и на* $h(Q^n \setminus (T_0 \cup T_1))$;
3) *для вертикальных клеток* $\widehat{\hbar}\widehat{q}^{\,n-1}_{\beta K'_r} \subset P_{\beta K'_r}$, $\widehat{\hbar}\widehat{q}^{\,n-1}_{\beta K''_r} \subset P_{\beta K''_r}$, $\widehat{\hbar}\widehat{q}^{\,n-1}_{\beta 1} \subset P_{\beta 1}$;
4) *для горизонтальных внутренних клеток* $\widehat{\hbar}\widehat{q}'^{\,n-1}_{mj\beta} \subset P'_{mj\beta}$, $\widehat{\hbar}\widehat{q}''^{\,n-1}_{mj\beta} \subset P''_{mj\beta}$, $\widehat{\hbar}\widehat{q}^{\,n-1}_{mj\beta K'_r} \subset$ $\subset P'_{mj\beta K'_r} \cup \big(\widetilde{P}'_{mj\beta K'_r} \cap \Pi_{K'_{r-1}}\big)$, $\widehat{\hbar}\widehat{q}^{\,n-1}_{mj\beta K''_r} \subset P''_{mj\beta K'_r} \cup \big(\widetilde{P}''_{mj\beta K''_r} \cap \Pi_{K''_{r-1}}\big)$;
5) *для горизонтальных граничных и приграничных клеток траектории “удлиняются”, как в лемме* 0.

Доказательство. Возьмем между L_0 и L_1 $2p+1$ плоскостей M_r (нумеруя их от L_1 к L_0) и для любого достаточно малого числа $\varepsilon' > 0$ построим с помощью леммы 0 изотопию b_{ht} со свойствами, указанными в формулировке леммы 0.

Пусть $\widehat{\delta} > 0$ — столь малое число, что $h\widetilde{Q}^n_{\widehat{\delta}} \subset \widetilde{Q}^n$, где $\widetilde{Q}^n_{\widehat{\delta}}$ — куб, определенный неравенствами $|x^m| \le 1 + \widehat{\delta}$.

Пусть $\widehat{l}_{1t}$ — кусочно линейная изотопия, тождественная вне $\widetilde{Q}^n_{\delta} \cap (T_0 \cup T_1)$, сдвигающая точки параллельно оси Ox^i и переводящая серию $2p+1$ $(n-1)$-кубов $K'_r \cap Q^n$, $L_1 \cap Q^n$, $K''_r \cap Q^n$ в серию кубов $M_r \cap Q^n$.

Будем считать, что $\widehat{\delta}$ столь мало, что $hQ^n \subset \widetilde{Q}^n_{-\widehat{\delta}}$, где $\widetilde{Q}^n_{-\widehat{\delta}}$ — куб, определенный неравенствами $|x^m| \le 1 + \varepsilon - \widehat{\delta}$.

Пусть $\widehat{l}_{2t}$ — кусочно линейная изотопия, тождественная вне $\widetilde{Q}^n \cap (T_0 \cup T_1)$, сдвигающая точки параллельно оси Ox^i и переводящая каждую область $\Pi_{M_r} \cap \widetilde{Q}^n_{-\delta}$ в соответствующую область $\Pi_{K'_r} \cap \widetilde{Q}^n_{-\widehat{\delta}}$, $L_1 \cap \widetilde{Q}^n_{-\widehat{\delta}}$, $\Pi_{K'_r} \cap \widetilde{Q}^n_{-\widehat{\delta}}$.

В качестве требуемой изотопии $\widehat{b}_{ht}$ мы возьмем композицию изотопий $(\widehat{l}_{2t}\hbar\widehat{l}_{1t}\hbar^{-1}) \circ b_{ht}$. Выполнение нужных свойств этой изотопии проверяется непосредственно. $\square$

ЛЕММА 1

Наш общий план состоит в том, чтобы последовательно в циклическом порядке применять конструкцию лемм 0 и 0$'$ во всех n координатных направлениях. Гомеоморфизм h будет переходить последовательно в гомеоморфизмы $\hbar^{\nu}_h$, сходящиеся к требуемому гомеоморфизму, тождественному на Q^n_ω. Однако после применения ее к первому направлению Ox^1 в каждом из остальных направлений образы кубов Q^{n-1}_{ij}, $i \neq 1$, выйдут из областей Π_{ij} и не будут разделены плоскостями, что необходимо для итерации описанной конструкции. Кроме того, образы граничных и приграничных клеток распространялись в результате конструкции леммы 0 от L_0 до L_2 и к соседним клеткам.

Мы воспользуемся тем, что при построении b^i_{ht} для данного i образы *внутренних* горизонтальных клеток остаются в областях $\widetilde{\Pi}_{mj\beta r}$ и при этом области с индексами j и $j+4$ разделены плоскостью $L_{m\,j+2}$.

Поэтому мы поступим следующим образом. После i-го шага данного цикла мы выкинем для каждого $m \neq i$ из полученной на предыдущем шаге серии L_{mj} плоскости, оставляя только плоскости с номерами, кратными 4. При этом не будут выкинуты плоскости, входящие в серии, определяющие окрестность H_ω. Кроме того, мы отбросим крайние плоскости. Точнее говоря, мы заменим полученный на предыдущем шаге куб $Q^n_{d_i}$ на куб $Q^n_{d_{i+1}}$, определенный неравенствами $|x^i| \leq d_{i+1}$, где $d_{i+1} = d_i - \frac{d_i}{N_{d_i}}$. При этом будут устранены также приграничные клетки. Образы при гомеоморфизме $\widehat{\hbar}_i = b^i_{h1}h$ оставшихся (внутренних) клеток лежат в надлежащих областях $\widetilde{\Pi}_{mj\beta r}$, которые не пересекаются для каждого m. Благодаря этому мы сможем сжать эти области до нужной ширины.

Таким образом, после проведения этого построения в каждом координатном направлении от Ox^1 до Ox^n в каждом направлении будет в $\frac{p}{4^{n-1}}$ раз больше плоскостей, чем их было к началу цикла (и еще минус $2n$ граничных плоскостей), т.е. в k раз больше, если взять $p = 4^{n-1}k$. Значит, расстояние между плоскостями будет при повторении стремиться к нулю и возможно будет перейти к пределу.

Опишем один цикл в виде отдельной леммы.

Лемма 1. *Пусть для некоторого числа $d > 0$ Q^n_d есть куб, определенный неравенствами $|x^i| \leq d$, $1 \leq i \leq n$; L_{dij}, $-N_d \leq j \leq N_d$, — серии плоскостей $x^i = j\frac{d}{N_d}$ для достаточно большого натурального числа N_d, и, как выше, с помощью этих плоскостей определены области T_{dij} и клетки $q^{n-1}_{dij\beta}$. Определим дополнительно n-мерные клетки $q^n_{d\beta} = \bigcap_s T_{dsb_s}$, заметим, что $Q^n_d = \bigcup_\beta q^n_{d\beta}$. Как выше, определены внутренние клетки, граничные и приграничные. Пусть $\varepsilon_d > 0$ — некоторое достаточно малое число и с помощью ε_d и плоскостей L_{dij} определены, как выше, куб $\widetilde{Q}^n_d$ и области Π_{dij}, $\widetilde{T}_{dij}$, $P_{dij\beta}$.*

Окрестность $H = H(d, N_d, \varepsilon_d)$ тождественного гомеоморфизма состоит из гомеоморфизмов h, для которых выполнено условие $(*)$: $hq^{n-1}_{dij\beta} \subset P_{dij\beta}$.

Пусть фиксировано достаточно большое число k, и пусть диаметры клеток $q^n_{d\beta}$ меньше некоторого числа μ.

Существует изотопия b^d_{ht}, непрерывно зависящая от h, тождественная вне $\widetilde{Q}^n_d$ и такая, что

1) *диаметры траекторий точек внутренних клеток $q^n_{d\beta}$ относительно b^d_{ht} не превосходят $f_{\mathrm{in}}(n)\mu$, а диаметры траекторий точек на приграничных клетках $q^n_{d\beta}$ меньше чем $f_{\mathrm{ex}}(n,k)\mu$, где $f_{\mathrm{in}}(n)$ и $f_{\mathrm{ex}}(n,k)$ — две фиксированные функции (в частности, диаметры траекторий равномерно стремятся к нулю вместе с μ при фиксированных n и k);*
2) *гомеоморфизм $\hbar^d_h = b^d_{h1}h$ принадлежит окрестности $H(d', N_{d'}, \varepsilon')$, определенной числами $d' = \frac{d+\omega}{2}$, $N_{d'}$, где $k\frac{d'}{N_{d'}} = \frac{d}{N_d}$, и достаточно малым $\varepsilon' > 0$.*

(Таким образом, для $\hbar^d_h$ выполнено условие $(*)$ относительно куба $Q^n_{d'}$, заданного неравенствами $|x^i| \leq d'$, серий плоскостей $L_{d'ij}$ и числа ε'. Расстояние между соседними плоскостями в каждой серии $L_{d'ij}$ в k раз меньше, чем в исходной серии, причем серия $L_{d'ij}$ содержит все те плоскости L_{dij} исходной серии, которые пересекают куб $Q^n_{d'}$.)

Доказательство. Мы опустим в доказательстве индекс d.

Согласно лемме $0'$ для каждой последовательной тройки $L_{i\,2\lambda}, L_{i\,2\lambda+1}, L_{i\,2\lambda+2}$ плоскостей из каждой серии L_{ij}, $1 \le i \le n$, и для произвольного конечного набора плоскостей K_r, заданных между $L_{i\,2\lambda}$ и $L_{i\,2\lambda+2}$, включающего $L_{i\,2\lambda+1}$ и делящего область между $L_{i\,2j}$ и $L_{i\,2j+2}$ на области равной ширины, возможно построить изотопию, назовем ее $b^{i\lambda}_{ht}$, тождественную вне куба $\widetilde{Q}^n$ и вне области между $hL_{i\,2\lambda}$ и $hL_{i\,2\lambda+2}$, которая переведет образ каждого куба $Q^{n-1}_{K_r} = K_r \cap Q^n$ в окрестность Π_{K_r} этого куба, построенную для произвольного малого числа, в качестве которого возьмем $\varepsilon' > 0$, и соответственно переведет каждую горизонтальную внутреннюю клетку $q^{n-1}_{mj\beta}$, определенную плоскостями K_r и L_{sk}, $s \ne i$, в соответствующую область $\widetilde{\Pi}_{mj\beta}$.

Поскольку изотопия $b^{i\lambda}_{ht}$ тождественна на $hL_{i\,2\lambda}$ и $hL_{i\,2\lambda+2}$, мы можем построить такие изотопии для двух соседних троек независимо друг от друга. Это значит, что для данного направления Ox^i существует изотопия b^i_{ht}, тождественная вне $\widetilde{Q}^n$ и на образах плоскостей L_{ij} с четными индексами j и такая, что для произвольного натурального числа p и для $\varepsilon' > 0$ между каждой парой плоскостей с четными индексами $L_{i\,2j}$, $L_{i\,2j+2}$ имеется $2p+1$ плоскостей K_{ijr} (включая $L_{i\,2j+1}$), делящих область между $L_{i\,2j}$ и $L_{i\,2j+2}$ на области равной ширины, так что гомеоморфизм $\widehat{\hbar}^i = b^i_{h1}\widehat{\hbar}^{i-1}$ ($\widehat{\hbar}^0 = h$) совпадает с h на плоскостях $L_{i\,2j}$ и переводит вертикальные клетки $q^{n-1}_{K_{ijr}\beta}$ в свои $P_{K_{ijr}\beta}$ и внутренние горизонтальные клетки $q^{n-1}_{mj\beta}$ в свои $\widetilde{P}_{mj\beta}$.

Мы будем строить изотопии b^i_{ht} последовательно и изотопию b^d_{ht} построим как композицию изотопий b^i_{ht}. Однако, прежде чем переходить к следующему направлению Ox^{i+1}, мы должны сделать два дополнения к построению, проведенному на предыдущем i-м шаге. Во-первых, нужно отбросить некоторые плоскости из каждой серии и, во-вторых, произвести поджатия полученных областей Π.

Пусть фиксировано достаточно большое число p.

Для $i = 1$ возьмем построенную только что с помощью лемм 0 и $0'$ изотопию b^1_{ht}. Положим $\widehat{\hbar}^1_h = b^1_{h1}h$. Количество плоскостей направления Ox^1, для которых $(n-1)$-кубы, полученные их пересечением с Q^n, переводятся гомеоморфизмом $\widehat{\hbar}^1_h$ в соответствующую область Π, увеличилось в p раз по сравнению с h. Мы заново нумеруем эти плоскости в серию L^1_{1j}. (Верхний индекс отвечает направлению, в котором мы применяем лемму 0.)

Для каждого из направлений Ox^i, отличных от Ox^1, мы оставляем одну плоскость из каждых четырех последовательных плоскостей L_{ij}. Мы заново нумеруем оставшиеся плоскости, получая серию L^1_{ij}, в которой стало в четыре раза меньше плоскостей.

Кроме того, мы отбрасываем крайние плоскости, т.е. мы заменяем куб Q^n_d на куб $Q^n_{d'}$, где $d' = d - \frac{d}{N_d}$, который мы обозначим Q^n_1.

Расширенные области $\widetilde{\Pi}^1_{ij}$ для плоскостей новой серии L^1_{ij} для каждого $i \ne 1$ не пересекаются. Воспользуемся этим, чтобы произвести сжатие их до ширины $2\varepsilon'$. Пусть Π^1_{ij} — замкнутая область между плоскостями, отстоящими с двух сторон от L^1_{ij} на расстояние ε'. Считаем, что ε' достаточно мало, так что $\Pi^1_{ij} \subset \widetilde{\Pi}^1_{ij}$. Пусть $\overline{\Pi}^1_{ij}$ — область, ограниченная плоскостями, содержащая $\widetilde{\Pi}^1_{ij}$, причем эти области для разных j не пересекаются. Пусть $\delta > 0$ — столь малое число, что куб $\widetilde{Q}^n_{-\delta}$, определенный неравенствами $|x^k| \le d' + \varepsilon - \delta$ для всех k, содержит $\hbar^1_h Q^n_1$.

Теперь можно для каждой пары ij построить изотопию l^1_{ij}, $i > 1$, неподвижную вне $\overline{\Pi}^1_{ij}$ и вне $\widetilde{Q}^n$, которая смещает точки параллельно оси Ox^i и переводит $\widetilde{\Pi}^1_{ij} \cap \widetilde{Q}^n_{-\delta}$ в $\Pi^1_{ij} \cap Q^n_{-\delta}$. Эти изотопии для всех j при данном i можно провести независимо. Обозначим через $l^1_i(t)$ изотопию, являющуюся их композицией, и через $l^1(t)$ композицию изотопий $l^1_i(t)$. Сохраним обозначение $b^1_h(t)$ для композиции $l^1 \circ b^1_h$ и $\widehat{\hbar}^1_h$ для суперпозиции $l^1(1)\widehat{\hbar}^1_h$.

Аналогичным образом мы произведем сжатие до такой же ширины и областей Π^1_{1j} для $i = 1$.

Мы можем определить, как раньше, с помощью серий L^1_{ij} и числа ε' клетки $q^{1\,n-1}_{ij\beta}$, области $T^1_{ij\beta}$, $\widetilde{T}^1_{ij\beta}$ и окрестности $P^1_{ij\beta}$. Заметим, что мы имеем $\widehat{\hbar}^1_h q^{1\,n-1}_{ij\beta} \subset \operatorname{Int} P^1_{ij\beta}$, т.е. условие $(*)$ выполнено для полученного гомеоморфизма и новых серий плоскостей.

Теперь обратимся к направлению Ox^2 и повторим наше построение в этом направлении. Мы получим изотопию b^2_h (включая композицию с "сжимающей" изотопией l^2), порождающую гомеоморфизм $\widehat{\hbar}^2_h = b^2_h\widehat{\hbar}^1_h$. Этот гомеоморфизм также будет удовлетворять условию $(*)$ для клеток, определенных новыми сериями плоскостей L^2_{ij}. Число этих плоскостей для направления Ox^2 увеличится в p раз, а для других направлений уменьшится в четыре раза. Кроме того, надо снова отбросить крайние плоскости.

Через n шагов число плоскостей будет для каждого направления увеличено в p раз и уменьшено в 4^{n-1} раз (и еще минус $2n$ за счет отбрасывания крайних плоскостей). Мы заменим Q^n на новый куб $Q^n_{\bar{d}}$, полученный после n-кратного применения операции отбрасывания крайних плоскостей. Композицию построенных изотопий мы обозначаем b^d_h (она включает изотопии "поджатий"). Мы получаем гомеоморфизм $\hbar^d_h = \widehat{\hbar}^n_h = b^d_{h1}h$, удовлетворяющий условию $(*)$ для клеток q, определенных новыми плоскостями $L^n_{ij} = L_{\bar{d}ij}$ и числом ε'. Заметим, что если p выбиралось достаточно большим, то расстояние между соседними плоскостями в новой серии $L_{\bar{d}ij}$ для каждого i может быть сделано меньше любого положительного числа, скажем в k раз меньше, чем расстояние между плоскостями в исходной серии, и при этом ширина каждой области $\Pi_{\bar{d}ij}$ сделана меньше ε'.

Это доказывает лемму 1. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Мы будем строить для каждого гомеоморфизма $h \in H_\alpha$ бесконечную последовательность изотопий $b^\nu_h(t)$, каждая из которых строится согласно лемме 1. Композиционным пределом этой последовательности будет требуемая изотопия $e_h(t) = \mathbf{E}(h \times t)$, переводящая h по H_ω в гомеоморфизм, тождественный на кубе Q^n_ω.

Именно, мы разбиваем отрезок $[0,1]$ последовательностью точек c_ν ($c_\nu < c_{\nu+1}$, $c_1 = 0$), сходящейся к 1, и переносим изотопию $b^\nu_h(t)$ на отрезок $[c_\nu, c_{\nu+1}]$, т.е. полагаем на этом отрезке $e_h(t) = b^\nu_h\big(\frac{t-c_\nu}{c_{\nu+1}-c_\nu}\big)e_h(c_\nu)$ $(e_h(0) = \mathbf{1})$, причем $\widehat{h}_h = e_h(1)h = \lim_{t\to 1} e_h(t)h = \lim_{\nu\to\infty}(b^\nu_h(1)b^{\nu-1}_h(1)\dots b^1_h(1))h$ будет гомеоморфизмом $\mathbb{R}^n$, тождественным на кубе Q^n_ω. Нужно будет проверить непрерывность $e_h(t)$ при $t = 1$ и также то, что изотопия e_h непрерывно зависит от h.

Изотопии b^ν_h строятся с помощью индукции по параметру ν.

Пусть $d_\nu = \frac{\alpha+(2^\nu-1)\omega}{2^\nu}$, $\nu \geq 0$, — монотонно убывающая последовательность чисел, стремящаяся к ω, $d_0 = \alpha$. (Число $d_{\nu+1}$ делит пополам отрезок между d_ν и ω.) Каждый куб Q^n_ν ($|x^i| \leq d_\nu$, $1 \leq i \leq n$) подразделяется плоскостями L^ν_{ij}, равномерно распределенными в каждом направлении. Их число $2N_\nu$ в каждом направлении выбирается так, что $\frac{d_{\nu+1}}{N_{\nu+1}} = k\frac{d_\nu}{N_\nu}$, где $k > 2$ — фиксированное натуральное число. При этом можно допустить, что плоскости L^ω_{ij}, определяющие окрестность $H(\omega, N_\omega, \varepsilon_\omega)$, входят в соответствующие серии L^ν_{ij} для всех ν.

Пусть ε_ν — монотонно стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Определены окрестности $H_\nu = H(d_\nu, N_\nu, \varepsilon_\nu)$. Очевидно, все они лежат в $H(\omega, N_\omega, \varepsilon_\omega)$.

Изотопии b^ν_h будут построены индуктивно так, что каждый гомеоморфизм $\hbar^\nu_h = (b^\nu_h(1)b^{\nu-1}_h(1)\dots b^1_h(1))h$ будет входить в окрестность H_ν, т.е. будет удовлетворять условию $(*)$ для куба Q^n_ν, числа ε_ν и для соответствующих серий плоскостей L^ν_{ij}. Кроме того, при всех t гомеоморфизмы $b^\nu_h(t)\hbar^{\nu-1}_h$ должны лежать в H_ω.

Пусть $\nu = 1$. В качестве $b^1_h(t)$ мы возьмем изотопию $b^d_h(t)$, построенную в лемме 1, приняв $\alpha = d_0$ за d леммы. Эта изотопия переведет h по H_ω в гомеоморфизм $\hbar^1_h = b^1_h(1)h$, удовлетворяющий условию $(*)$ для клеток q, определенных новыми плоскостями, которые обозначим $\widehat{L}^1_{ij}$.

Заметим, что расстояние между крайними плоскостями кубов Q^n_ν уменьшается в геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}$, а расстояние между соседними плоскостями в каждой серии уменьшается со знаменателем $\frac{1}{k}$, где $k > 2$. Поэтому можно считать, что для каждого ν куб $\widehat{Q}^n_\nu$, полученный в результате построения очередного цикла, содержит следующий куб $Q^n_{\nu+1}$.

Поэтому мы можем отбросить дополнительно несколько крайних плоскостей из серии $\widehat{L}^1_{ij}$ так, чтобы оставшаяся серия, которую мы обозначим L^2_{ij}, состояла из тех плоскостей этой серии, которые пересекают Q^n_2. Нам удобно считать, что плоскости $x^i = \pm d_2$, образующие куб Q^n_2, принадлежат новому семейству плоскостей L^2_{ij} (при необходимости этот куб можно заменить несколько меньшим).

Теперь мы можем перейти ко второму циклу с $\nu = 2$, повторяя применение леммы 1. Полученный гомеоморфизм $\hbar^1_h$ удовлетворяет условию $(*)$ для серий L^2_{ij}, определенных достаточно малым числом $\varepsilon_2 < \bar{e}p_2$.

Заметим, что в таком случае образ дополнения к кубу Q^n_1 при гомеоморфизме $\hbar^1_h$ лежит вне куба $\widetilde{Q}^n_2$, т.е. в области, на которой следующая изотопия будет тождественной.

Мы находимся в условиях, аналогичных исходным, и можем провести аналогичным образом построение леммы 1, получив изотопию $b^2_h(t)$ и гомеоморфизм $\hbar^2_h = b^2_h(1)\hbar^1_h$, удовлетворяющий условию $(*)$ для клеток q^{n-1} и областей P, которые определены плоскостями $\widehat{L}^2_{ij}$, построенными в результате второго цикла, и числом ε_3.

Продолжая это построение, мы придем к требуемой последовательности изотопий и гомеоморфизмов.

В самом деле, для каждого $\nu > 1$ гомеоморфизм $\hbar^{\nu-1}_h$ отображает дополнение к кубу $Q^n_{\nu-1}$ в дополнение к кубу $\widetilde{Q}^n_\nu$. Так как изотопия $b^\nu_h(t)$ (как и все последующие изотопии) тождественна на дополнении к $\widetilde{Q}^n_\nu$, то предельная изотопия $e_h(t)$ определена и непрерывна вне куба Q^n_ω.

С другой стороны, точка x, лежащая в кубе Q^n_ω, при любом ν принадлежит внутренней клетке $q^n_{\nu\beta}$ и, значит, траектория точки $\hbar^\nu_h x$ относительно изотопии $b^{\nu+1}_h$ отстоит от x на расстояние не более трех диаметров областей $\widetilde{k}^n_{\nu\beta}$ и это расстояние стремится к нулю при увеличении ν. Следовательно, предел изотопии $e_h(t)h$ при $t \to 1$ существует в точках Q^n_ω и совпадает там с тождественным гомеоморфизмом.

Покажем, что $e_h(t)h$ оказывается непрерывной изотопией, т.е. непрерывно как отображение $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ в $\mathbb{R}^n$.

Как сказано, непрерывность имеет место в точках $(\mathbb{R}^n \setminus Q^n_\omega) \times [0,1]$. Кроме того, это отображение непрерывно в точках $\mathbb{R}^n \times [0,1)$, поскольку композиция конечного числа непрерывных изотопий непрерывна.

В силу указанной выше оценки траекторий точек изотопия $e_{hT}h$ непрерывна также и в точках $x \times 1$, где x принадлежит Q^n_ω. Действительно, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется меньшая параллелепипедальная окрестность $V(x)$, ограниченная четными плоскостями системы L^ν_{ij} для некоторого ν, причем такая, что ее ε^ν-расширение также лежит в $U(x)$. Тогда образ при гомеоморфизме $\hbar^\nu_h$ окрестности $V(x)$ лежит в $U(x)$ и там же останется образ $V(x)$ при всех гомеоморфизмах $e_h(t)h$ для $t > c_\nu$.

Итак, для каждого h из H_α деформация $e_h(t)h$ является непрерывной изотопией, переводящей h по окрестности H_ω в гомеоморфизм, тождественный на кубе Q^n_ω.

Нам осталось показать, что полученная изотопия $e_h(t)$ непрерывно зависит от h.

Рассмотрим сначала конечные композиции изотопий $b^\nu_h(t) \circ \ldots \circ b^1_h(t)$. Их построение зависело от выбора плоскостей для построения стандартных кусочно линейных изотопий и достаточно малых чисел δ для носителей этих изотопий. Эти выборы очевидным образом можно делать в непрерывной зависимости от h.

Рассмотрим для каждого ν окрестность H_ν, состоящую из гомеоморфизмов, удовлетворяющих условию $(*)$ для куба Q^n_ν и соответствующих серий плоскостей L^ν_{ij} с порождаемыми ими клетками q^{n-1}_ν и областями P^ν и $\widetilde{P}^\nu$. Для каждого гомеоморфизма $\hbar$ из этой окрестности мы выбираем в непрерывной зависимости от $\hbar$ число $\delta(\hbar)$ и по этому числу строим каноническим образом изотопию $b^\nu_\hbar$, которая переводит гомеоморфизм $\hbar$ в окрестность $H_{\nu+1}$, причем диаметр каждой траектории этой изотопии оказывается не более диаметра объединения трех соседних областей P^ν.

Конечная композиция $\varphi^\nu_h = b^\nu_h \circ \ldots \circ b^1_h$ изотопий b^k_h, переводящая h в окрестность H_ν, непрерывно зависит от h, и мы можем найти такую малую окрестность $\mathbf{U}(h)$, что соответствующие композиции изотопий переводят любой гомеоморфизм h' из этой окрестности в H_ν. Более того, мы можем допустить, что для данного $\eta > 0$ траектория каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$ для произвольного гомеоморфизма $h' \in \mathbf{U}(h)$ относительно соответствующей изотопии $\varphi^\nu_{h'}(t)h'$ лежит в η-окрестности траектории этой точки относительно изотопии $\varphi^\nu_h(t)h$ (т.е. расстояние между $\varphi^\nu_{h'}(t)h'(x)$ и $\varphi^\nu_h(t)h(x)$ в любой момент t меньше η).

С другой стороны, для любого $\eta > 0$ мы можем найти такое ν, что для каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$ диаметр части траектории этой точки относительно изотопии $e_{h'}(t)$ на интервале $[c_\nu, 1]$ меньше η.

В самом деле, для данного ν если точка x лежит вне куба $\widetilde{Q}^n_\nu$, то она неподвижна для $e_{h'}(t)$ при $t \in [c_\nu, 1]$. Если точка x лежит в Q^n_ω, то она внутренняя для каждого ν и ее траектория относительно всех $b^{\nu'}_{h'}$ при $\nu' > \nu$ лежит в окрестности x, диаметр которой меньше $f_{\mathrm{in}}(k)\mu_\nu$, т.е. меньше η при достаточно большом ν.

Аналогично, если x лежит в $\widetilde{Q}^n_\nu \backslash Q^n_\omega$, ее траектория относительно изотопий $b^{\nu'}_{h'}$, $\nu' > \nu$, будет лежать в окрестности x, диаметр которой меньше $f_{\mathrm{in}}(k)\mu_\nu$, пока эта точка остается внутренней. Когда она окажется в (при)граничной клетке, ее траектория будет меньше $f_{\mathrm{ex}}(k,n)\mu_\nu$ для соответствующей изотопии $b^{\nu'}_{h'}$ и ее образ будет неподвижным для последующих изотопий. Таким образом, если взять ν достаточно большим, т.е. μ_ν достаточно малым, то траектории всех точек для изотопии $e_{h'}(t)$ при $t \in [c_\nu, 1]$ и h' из H_ν будут иметь диаметр меньше η.

Итак, для данного ν гомеоморфизмов h' из достаточно малой окрестности h траектории точек при изотопии $e_{h'}$ будут отличаться меньше, чем на η, на отрезке $[0, c_\nu]$, и при достаточно большом ν все траектории будут меньше η на отрезке $[c_\nu, 1]$.

Это доказывает непрерывную зависимость построенной изотопии e_h от h.

Для завершения доказательства теоремы теперь достаточно построить композицию полученной изотопии $e_h(t)$ с изотопией Александера $\varphi_h(t) = k_{(1-t)^{-1}} h k_{1-t}$, где k_s есть гомотетия с коэффициентом s.

Эта изотопия очевидным образом проводит каждый гомеоморфизм, тождественный на Q^n_ω, по окрестности H_ω в тождественный гомеоморфизм $\mathbf{1}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков С.П.* О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях (классы Понтрягина, гладкости, многомерные узлы) // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30, №1. С. 207–246.
2. *Kirby R.C.* Stable homeomorphisms and the annulus conjecture // Ann. Math. 1969. V. 89. P. 575–582.
3. *Чернавский А.В.* Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов многообразия // Мат. сб. 1969. Т. 79, №3. С. 307–356.
4. *Kirby R.C., Siebenmann L.C.* On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 742–749.