

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

СКОПЕНКОВ МИХАИЛ БОРИСОВИЧ

УДК 515.164.633

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А. Б. Скопенков

Москва — 2008

Оглавление

1	Введение и основные результаты	4
1.1	Введение	4
1.2	Многомерные зацепления и сингулярные зацепления	6
1.3	Классификация оснащенных зацеплений в многообразиях	10
1.4	Теория Рамсея для зацеплений и вложимость произведений графов	14
1.5	Препятствие Ван Кампена и аппроксимируемость путей вложениями	15
1.6	Структура работы	21
1.7	Благодарности	22
1.8	Соглашения и обозначения	22
2	Классификация зацеплений и сингулярных зацеплений	24
2.1	Классификация сингулярных зацеплений	24
2.2	Классификация зацеплений	32
3	Классификация оснащенных зацеплений в многообразиях	39
3.1	Оснащенные зацепления в многообразиях размерности не менее 4	39
3.2	Оснащенные зацепления в многообразиях размерности 3	45
4	Рамсеевская теория зацеплений и вложимость произведений графов	51

4.1	Доказательство для случая (1) и некоторые эвристические рассмотрения	51
4.2	Доказательство невлжжмостж в случае (2)	53
5	Препятствие Ван Кампена и аппроксжмруемость вложжнж-мж	59
5.1	Доказательство критеря аппроксжмруемостж вложжнжмж . .	59
5.2	Препятствие Ван Кампена	71
	Литература	77

Глава 1

Введение и основные результаты

1.1 Введение

Классической проблемой топологии является проблема классификации вложений данного пространства в данное многообразие (актуальные обзоры по данной теме можно найти в статьях [57, 74]). Эта проблема уже сыграла выдающуюся роль в развитии топологии. Для решения этой проблемы (а также близкой проблемы о существовании вложений) были созданы различные методы такими классиками как Дж. Александер, П.С. Александров, Е. Ван Кампен, К. Куратовский, С. Маклейн, Л.С. Понтрягин, Р. Том, Х. Уитни, Х. Хопф, и другими. В настоящее время исследование этой проблемы переживает новый расцвет.

Классическими результатами о вложениях являются теоремы классификации (в коразмерности по крайней мере 3) узлов, зацеплений и вложений высокосвязных многообразий (Р. Пенроуз, Дж.Г.К. Уайтхед, К. Зиман, М. Ирвин, Дж. Левин, С.П. Новиков, Дж. Хадсон, А. Хефлигер, М. Хирш). Проблема классификации вложений считается очень трудной, поскольку других случаев, для которых было бы получено полное явное описание (непустого) множества вложений замкнутого многообразия с точностью до изотопии, до последнего времени (например, [75]) не было известно, несмотря на наличие интересных подходов к данной проблеме (Левин–Новиков–Уолл, Гудвилли–Уайсс).

В данной работе рассматривается главным образом случай *зацеплений*, то есть вложений несвязного объединения сфер (возможно, различной размерности) в сферу. При этом мы в основном концентрируемся на случае коразмерности по крайней мере 3.

Проблемы существования и классификации вложений являются частными случаями общей проблемы о существовании и классификации отображений *с заданными ограничениями на самопересечения*: погружений, сингулярных зацеплений, почти вложений [19], а также вложений, аппроксимирующих данное отображение [56, 84]. Эту общую проблему естественно изучать в совокупности с проблемой вложений, поскольку они используют близкие методы, например, *препятствие Ван Кампена* и его обобщения. Поэтому в настоящей работе рассматриваются не только вложения, но и сингулярные зацепления, почти вложения, а также вложения, аппроксимирующие данное отображение.

Сингулярные зацепления были введены Р. Фоксом и Дж. Милнором. Инвариант Масси–Рольфсена сингулярных зацеплений (обобщающий *препятствие Ван Кампена*) применялся в работах У. Кайзера, У. Кошорке, У.С. Масси, В.М. Нежинского, Дж.П. Скотта, Д. Рольфсена и Н. Хабеггера.

В диссертации рассматриваются также такие разделы теории зацеплений, как теория оснащенных зацеплений и рамсеевская теория зацеплений.

Оснащенные зацепления были введены Л.С. Понтрягиным при исследовании гомотопической классификации отображений. Проблема классификации оснащенных зацеплений изучалась в работах Х. Хопфа, Н. Стинрода, В.Т. Ву, Р. Гомпфа, У. Кайзера.

Теория Рамсея для зацеплений берет свое начало в работах Дж. Конвея, К. Гордона и Х. Закса, и получила развитие в работах А.О. Ловаша, Дж. Сегала, С. Спеша, Н. Робертсона, П.П. Сеймора, Р. Томаса, С. Негами.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Простое доказательство и усиление формулы Хэвлигера для группы зацеплений (и формулы Хабеггера–Кайзера для группы сингулярных зацеплений);
2. Простое доказательство теоремы Понтрягина–Стинрода–Ву о классификации оснащенных зацеплений в многообразиях;
3. Развитие рамсеевской теории зацеплений и ее применение — доказательство гипотезы Менгера 1929 года о том, что произведение N копий полного графа на 5 вершинах не вложимо в евклидово пространство размерности $2N$;
4. Доказательство гипотезы Кавичиолли–Реповша–Скопенкова 1998 года о полноте препятствия Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями путей на плоскости.

Первый и второй из указанных результатов являются известными, но подходы к их доказательству являются новыми и содержат новые идеи. Третий и четвертый из указанных результатов являются новыми.

Следующие четыре пункта посвящены формулировке результатов диссертации.

1.2 Многомерные зацепления и сингулярные зацепления

Полиэдр N называется кусочно-линейно *вложимым* в многообразии M , если существует кусочно-линейное инъективное отображение $f : N \rightarrow M$. Гладкое компактное многообразие N называется гладко *вложимым* в многообразии M , если существует гладкое инъективное отображение $f : N \rightarrow M$, дифференциал которого df невырожден в каждой точке. Такое отображение f называется *вложением* N в M (в соответствующей категории). Два вложе-

ния $f, g : N \rightarrow M$ называются (объемлемо) *изотопными*, если существует такой гомеоморфизм на $F : M \times I \rightarrow M \times I$, что

1. $F(y, 0) = (y, 0)$ для любого $y \in M$,
2. $F(f(x), 1) = (g(x), 1)$ для любого $x \in N$, и
3. $F(M \times \{t\}) = M \times \{t\}$ для любого $t \in I$.

Обозначим через $L_{p,q}^m$ множество гладких вложений $S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ с точностью до гладкой изотопии. Обозначим через C_p^{m-p} множество гладких вложений $S^p \rightarrow S^m$ с точностью до гладкой изотопии. При $p, q \leq m - 3$ эти множества — коммутативные группы относительно операции ”покомпонентной связной суммы” [28].

Первый результат данной диссертации — новое короткое доказательство явной формулы для группы $L_{p,q}^m$ в терминах групп C_p^{m-p} , C_q^{m-q} и некоторых гомотопических групп:

Теорема 1.2.1. *Если $p \leq q \leq m - 3$ и $2p + 2q \leq 3m - 6$, то*

$$L_{p,q}^m \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1,M}) \oplus C_p^{m-p} \oplus C_q^{m-q}.$$

Здесь $V_{M+l,M}$ — многообразие Штифеля M -реперов в начале координат пространства \mathbb{R}^{M+l} , где число M достаточно велико. Многие группы $\pi_n(V_{M+l,M})$ и C_p^{m-p} явно вычислены [50, 27].

Пример 1.2.2. $L_{3,3}^6 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Теорема 1.2.1 является наиболее сильной известной *явной* классификацией 2-компонентных зацеплений в сферах. Однако для произвольных $p, q \leq m - 3$ имеется знаменитая точная последовательность, включающая группы $L_{p,q}^m$, некоторые гомотопические группы и отображения между ними, включающие произведения Уайтхеда (см. [28, Theorem 1.1] и [25]).

Теорема 1.2.1 была доказана в [28, Теоремы 10.7 и 2.4] (при более сильном ограничении $p \leq q$ и $p + 3q \leq 3m - 7$; однако, рассуждение Хэфлигера может быть обобщено, чтобы покрыть и наш диапазон размерностей, см. Замечание 2.2.7). Второе неравенство в Теореме 1.2.1 является точным (см. Замечание 2.2.6).

Мы сводим классификацию зацеплений к классификации сингулярных зацеплений, которая является интересной задачей и сама по себе [66, 37, 26].

Сингулярное зацепление — это непрерывное отображение $f : X \sqcup Y \rightarrow Z$ такое, что $fX \cap fY = \emptyset$. *Сингулярная гомотопия* — это непрерывное семейство сингулярных зацеплений $f_t : X \sqcup Y \rightarrow Z$. Обозначим через $LM_{p,q}^m$ множество сингулярных зацеплений $S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ с точностью до сингулярной гомотопии. При $p, q \leq m - 3$ это множество — коммутативная группа относительно операции 'покомпонентной связной суммы' (согласно [66, р. 187], [35, Remark 2.4] и теореме 'сингулярная конкордантность влечет сингулярную гомотопию', ссылка на которую приводится ниже в этом пункте).

Следующий результат данной диссертации — короткое доказательство следующей теоремы:

Теорема 1.2.3. [26] *Если $p, q \leq m - 3$ и $2p + 2q \leq 3m - 5$, то*

$$LM_{p,q}^m \cong \pi_{p+q-m+1}^S.$$

Данный изоморфизм — это α -инвариант (его определение дано в §2.2). Второе неравенство в данной теореме — точное [26].

Теорема 1.2.3 является самой сильной известной явной классификацией сингулярных зацеплений при $p, q \leq m - 3$. Однако при немного более слабом ограничении на размерности имеется точная последовательность, включающая группу $LM_{p,q}^m$ и некоторые группы бордизмов [37, Theorem A].

Наш подход к классификации зацеплений и сингулярных зацеплений основан на использовании отображения надстройки. *Отображение надстройки*

$$\Sigma : LM_{p,q}^m \rightarrow LM_{p+1,q}^{m+1}$$

определяется, как надстройка p -компоненты и включение q -компоненты. Легко видеть, что при достаточно большом M имеется изоморфизм $LM_{p+M,q}^{m+M} \cong \pi_{p+q-m+1}^S$ [35]. Таким образом, Теорема 1.2.3 следует из такого утверждения:

Теорема 1.2.4 (Теорема о надстройке для сингулярных зацеплений). [26] *Если $p, q \leq t - 3$, то отображение надстройки биективно при $2p + 2q \leq 3t - 5$ и сюръективно при $2p + 2q \leq 3t - 4$.*

Эта теорема была известна ранее только как следствие Теоремы 1.2.3. В диссертации приводится короткое прямое доказательство Теоремы 1.2.4, аналогичное доказательству Зимана многомерной гипотезы Пуанкаре, и использующее версию трюка Александра. Наше доказательство является практически самодостаточным, мы опираемся только на теорему ”конкордантность влечет изотопию”. В доказательстве Теоремы 1.2.1 мы используем надстроечные последовательности, принадлежащие У. Кошорке и А. Скопенкову (сравни также с последовательностью В. Нежинского [49]).

Мы будем использовать следующие понятия и соглашения.

Вложение $f : X \times I \rightarrow S^m \times I$ называется *конкордантностью*, если $X \times 0 = f^{-1}(S^m \times 0)$ и $X \times 1 = f^{-1}(S^m \times 1)$. В дальнейшем молчаливо используются факты, что в коразмерности по крайней мере 3 *конкордантность влечет изотопию* и *любая конкордантность или изотопия объемлема* [29].

Аналогично, *сингулярная конкордантность* — это непрерывное отображение $f : (X \sqcup Y) \times I \rightarrow S^m \times I$ такое, что $f(X \times I) \cap f(Y \times I) = \emptyset$, $(X \sqcup Y) \times 0 = f^{-1}(S^m \times 0)$ и $(X \sqcup Y) \times 1 = f^{-1}(S^m \times 1)$. В коразмерности по крайней мере 3 *сингулярная конкордантность влечет сингулярную гомото-*

нию, что было анонсировано в статье [43], сравни с [4, 40, 38], и доказано в статье [44].

Мы говорим, что сингулярное зацепление $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ *нуль-конкордантно*, если оно продолжается до сингулярного зацепления $D^{p+1} \sqcup D^{q+1} \rightarrow D^{m+1}$. Последнее сингулярное зацепление мы называем *нуль-конкордантностью*.

В статьях [12, 13] (сравни с [73]) разработанный подход применяется к классификации вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$.

1.3 Классификация оснащенных зацеплений в многообразиях

Пусть M — связное ориентированное замкнутое гладкое n -мерное многообразие. Обозначим через $L_1(M)$ множество 1-мерных оснащенных зацеплений в многообразии M с точностью до оснащенного кобордизма.

Проблема описания множества $L_1(M)$ появилась в исследованиях Понтрягина, связанных с вычислением гомотопических групп сфер и, в более общем случае, когомотопических множеств. *Когомотопическое множество* $\pi^{n-1}(M) = [M; S^{n-1}]$ — это множество непрерывных отображений $M \rightarrow S^{n-1}$ с точностью до гомотопии.

Согласно конструкции Понтрягина-Тома рассматриваемое множество находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $L_1(M)$. Заметим, что для многообразия M размерности 3 множество всех ненулевых векторных полей на M с точностью до гомотопии, так же как и множество всех ориентируемых полей плоскостей на M с точностью до гомотопии, находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $L_1(M)$, потому что каждое ориентируемое многообразие размерности 3 параллелизуемо.

В статьях [51, 81] (сравни с [18, §30.3]) описание множества $L_1(M)$ для многообразия M размерности не менее 4 было сведено к вычислению стин-

родовых квадратов, которое было проделано Ву (сравни с [18, §30.2.D]). В данной диссертации приводится простое доказательство этой классификационной теоремы Понтрягина-Стинрода-Ву и теоремы Понтрягина, описывающей это множество в случае, когда M — трехмерное многообразие.

Для формулировки основного результата этого пункта нам понадобятся определения *естественной ориентации* оснащенного зацепления и *степени* оснащенного зацепления. Зацепление L *естественно ориентировано*, если для каждой точки $x \in L$ касательный вектор ориентации вместе с $n - 1$ векторами оснащения образует положительно-ориентированный базис на многообразии M . *Степенью* $\deg L$ зацепления L называется гомологический класс (с целыми коэффициентами) естественно ориентированного зацепления L . Таким образом, определено отображение

$$\deg : L_1(M) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Z}).$$

Классическая теорема Хопфа-Уитни (1932-35) утверждает, что это отображение сюръективно.

Мы приводим простое доказательство следующей теоремы, описывающей инъективность этого отображения в стабильной размерности $n \geq 4$:

Теорема 1.3.1 (Л.С. Понтрягин, Н. Стинрод, В.Т. Ву). *Пусть M — связное ориентируемое замкнутое гладкое n -многообразие, $n \geq 4$. Тогда $\deg : L_1(M) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Z})$ является*

- 1-1 отображением (то есть биекцией), если $w_2(M) \cdot \rho_2 H_2(M; \mathbb{Z}) \neq 0$;*
- 2-1 отображением (то есть каждый элемент группы $H_1(M; \mathbb{Z})$ имеет ровно 2 прообраза) — иначе.*

Здесь $w_2(M)$ — класс Штифеля-Уитни и $\rho_2 : H_1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Z}_2)$ — приведение по модулю 2. В доказательстве этой теоремы удобнее заменить классы Штифеля-Уитни двойственными к ним гомологическими классами

(их геометрическое определение, принадлежащее Д. Реповшу и Ф. Спаджиари, приводится в главе 3). Ниже эти гомологические классы обозначаются теми же буквами w_i и \bar{w}_i , а \cdot обозначает пересечение $H_i(M) \times H_j(M) \rightarrow H_{i+j-n}(M)$. Заметим, что условие $w_2(M) \cdot \rho_2 H_2(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ в теореме 1.3.1 нельзя ослабить до $w_2(M) \neq 0$ (как показывает пример $M = \mathbb{R}P^4$). (Формулировка этой теоремы в [61, Теорема 1.a] содержит опечатку, исправленную в [11] и [10]).

Для полноты мы приводим также простое доказательство аналогичной теоремы, описывающая множество оснащенных зацеплений в 3-многообразиях:

Теорема 1.3.2 (Л.С. Понтрягин). *Пусть M^3 — связное ориентируемое замкнутое гладкое 3-многообразие. Тогда для каждого элемента $\alpha \in H_1(M^3; \mathbb{Z})$ имеется взаимно-однозначное соответствие между множествами $\deg^{-1} \alpha$ и $\mathbb{Z}_{2d(\alpha)}$, где $d(\alpha)$ — делимость проекции элемента α на свободную часть группы $H_1(M^3; \mathbb{Z})$.*

Пример 1.3.3. Множество всех отображений $f : S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ с точностью до гомотопии находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех четверок (p, q, r, t) , где $p, q, r \in \mathbb{Z}$ — степени ограничений отображения f на 2-мерные подторы, $t \in \mathbb{Z}$ при $p = q = r = 0$, и $t \in \mathbb{Z}_{2\gcd(p,q,r)}$, иначе.

Напомним, что *делимость* нуля считается равной нулю, и *делимость* ненулевого элемента $\alpha \in G$ равна $\max\{d \in \mathbb{Z} \mid \exists \beta \in G : \alpha = d\beta\}$. Мы обозначаем $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, в частности $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$.

В данной диссертации мы приводим короткое прямое доказательство Теоремы 1.3.2, полученное совместно с Д. Реповшем и М. Ценцелем. Эта теорема была впервые сформулирована в [52] без доказательства. На самом деле, Теорема 1.3.2 не была даже должным образом сформулирована в статье [52] непосредственно (работа была написана на английском языке), а только в ее

резюме (написанном на русском языке) без указаний к доказательству. Формулировка в указанном резюме не вполне однозначна, мы заимствовали свою формулировку из статьи [81].

Формулировка теоремы из статьи [81] утверждает, что существует взаимно-однозначное соответствие между множествами

$$\deg^{-1} \alpha \quad \text{и} \quad \frac{\mathbb{Z}}{2\alpha \cap H_2(M; \mathbb{Z})},$$

что по двойственности Пуанкаре эквивалентно нашей формулировке Теоремы 1.3.2. Есть причины полагать, что наше доказательство — это то самое доказательство, которое имел в виду Понтрягин, но не опубликовал, вместо этого обратившись к общему случаю, когда M — произвольный полиэдр.

Данная тематика представляет интерес и в настоящее время; на эту тему имеется много работ, например, см. [3, 5, 16, 23, 22, 32]. Заметим, что Предложение 4.1 статьи [23] эквивалентно нашей Теореме 1.3.2. Однако, несмотря на то, что в статье [23] приводится доказательство этого предложения, многие детали в нем опущены — в наших обозначениях (см. пункт ”Доказательство теоремы 1.3.2” в §3.2 ниже) там действительно проверены утверждение (1) о том, что инвариант h определен корректно, а также сюръективность инварианта h , в то время как доказательство его *инъективности*, которое не очевидно, отсутствует в [23].

Отметим также, что формулировки данного результата в статьях [5, Теорема 6.2.7] и [16, Предложение 1] ошибочны из-за другого определения числа $d(\alpha)$. (В указанных статьях $d(\alpha)$ считается равным нулю, если α — элемент кручения, а иначе полагается равным делимости элемента α в группе $H_1(M^3; \mathbb{Z})$. Это не эквивалентно нашему определению). Альтернативный подход к Теореме 1.3.2 на основе других методов приводится в статье [3]. набросок альтернативного доказательства приводится в статье [41, Предложение 2.1]. Более общий результат доказывается в статьях [32, Теорема 2.4.7] и [22,

Предложение 7].

1.4 Теория Рамсея для зацеплений и вложимость произведений графов

Следующий результат диссертации состоит в решении проблемы Менгера из статьи [45]: мы доказываем, что $(K_5)^N \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2N}$. Более того, для данного набора графов G_1, \dots, G_N мы находим минимальную размерность d , такую что $G_1 \times \dots \times G_N \hookrightarrow \mathbb{R}^d$. Мы обозначаем через K_n *полный граф* на n вершинах и через $K_{n,n}$ *полный двудольный граф* на $2n$ вершинах. Мы пишем $K \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, если полиэдр K кусочно линейно вкладывается в \mathbb{R}^d .

Топологическая проблема вложимости является очень важной (например, см. [83, 57, 1, 74]). Наш частный случай этой задачи интересен, потому что может быть получен и легко сформулирован полный ответ, при этом доказательство нетривиально и содержит интересные идеи.

Теорема 1.4.1. *Пусть G_1, \dots, G_n — связные графы, отличные от точки, I и S^1 . Минимальная размерность, такая что $G_1 \times \dots \times G_n \times (S^1)^s \times I^i \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, равна*

$$d = \begin{cases} 2n + s + i, & \text{если } i \neq 0 \text{ или некоторый граф } G_k \text{ планарен,} \\ 2n + s + 1, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Теорема 1.4.1 остается верной и в топологической категории. Мы сначала доказываем Теорему 1.4.1 в кусочно-линейной категории и затем выводим ее топологическую версию из кусочно-линейной.

Теорема 1.4.1 была установлена (без доказательства) в [21] (см. также [20]). Доказательство вложимости тривиально (см. начало главы 4). Невложимость была доказана ранее в некоторых частных случаях. Например, было известно, что $Y^n \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$, где Y — *триод* (символ 'Y'). Красивое доказательство этого фольклорного результата представлено в [74], сравни с [59]. Также было

известно, что $K_5 \times S^1 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (Том Таккер, частное сообщение). В [86] доказано, что $K_5 \times K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$; указанное доказательство содержит приблизительно 10 страниц вычислений, содержащее спектральные последовательности. Мы получаем более короткое геометрическое доказательство этого результата (см. Пример 4.1.2 и Лемма 4.2.1 ниже). Доказательство невлости в случае (2), а именно, Лемма 4.2.1, является главной частью Теоремы 1.4.1 (в то время как случай (1) легко сводится к результату Ван Кампена).

Наше доказательство Теоремы 1.4.1 весьма элементарно, в частности, мы не используем абстрактной алгебраической топологии. Мы используем сведение к задаче так называемой *рамсеевской теории зацеплений* [64, 14, 69, 62, 63, 42, 48, 67, 85, 70, 54]. Классическая теорема Конвея-Гордона-Закса рамсеевской теории зацеплений утверждает, что у любого вложения K_6 в \mathbb{R}^3 есть пара (гомологически) зацепленных циклов. Другими словами, K_6 не может быть незацепленно вложен в \mathbb{R}^3 . Граф $K_{4,4}$ обладает тем же свойством (теорема Закса, доказанная в [64]). Обозначим через σ_n^m m -мерный остов n -мерного симплекса. Для полиэдра σ обозначим через σ^{*n} джойн n копий σ . В нашем доказательстве Теоремы 1.4.1 мы используем следующее многомерное обобщение теоремы Закса:

Лемма 1.4.2. *У любого вложения $(\sigma_3^0)^{*n} \rightarrow S^{2n-1}$ есть пара зацепленных $(n-1)$ -мерных сфер.*

Лемма 1.4.2 следует из Леммы 4.2.2 ниже. Многомерные обобщения теоремы Конвея-Гордона-Закса можно найти в [69, 67, 85].

1.5 Препятствие Ван Кампена и аппроксимируемость путей вложениями

Кусочно линейное отображение $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость *аппроксимируется вложениями*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует отображение

$f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ без самопересечений, ε -близкое к φ . В данной диссертации мы в основном рассматриваем случай, когда φ является путем или циклом, то есть, $K \cong I$ или $K \cong S^1$.

Пример 1.5.1. [71] Стандартная d -намотка $S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями в плоскость, если и только если $d \in \{-1, 0, 1\}$.

Можно доказать также, что симплициальное отображение $S^1 \rightarrow S^1$ аппроксимируется вложениями, если и только если его степень $d \in \{-1, 0, 1\}$ (см. Теорему 1.5.3). *Трансверсальным самопересечением* кусочно линейного отображения $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется пара непересекающихся дуг $i, j \subset K$, таких что φi и φj пересекаются на плоскости трансверсально.

Пример 1.5.2. Эйлеров путь или цикл в графе на плоскости аппроксимируется вложениями, если и только если он не имеет трансверсальных самопересечений (следовательно, у любого эйлерова графа на плоскости есть эйлеров цикл, аппроксимируемый вложениями).

Понятие аппроксимируемости вложениями появилось в исследованиях вложимости компактов в \mathbb{R}^2 (см. [71, 84], актуальные обзоры можно найти в статьях [55, §9], [8, §4], [56, §1], мы вернемся к этому вопросу еще раз в конце §1.5). Существует алгоритм проверки того, является ли данное симплициальное отображение аппроксимируемым вложениями (см. [72]). Более удобный для применения критерий аппроксимируемости вложениями симплициального пути на плоскости был доказан в статье [47] (Теорема 1.5.3.I ниже, обобщающая Пример 1.5.2). Следующий результат данной диссертации — аналогичный критерий для аппроксимируемости вложениями цикла на плоскости (Теорема 1.5.3.S ниже, также обобщающая Пример 1.5.2). Эти критерии утверждают, что, в некотором смысле, трансверсальное самопересечение — единственное препятствие к аппроксимируемости вложениями. Ясно,

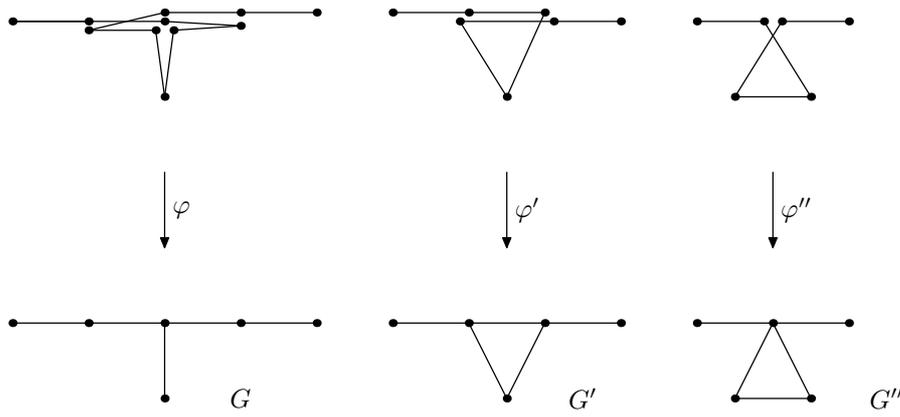


Рис. 1.1: Производные графов и путей

что буквально это не верно [71], и нет никакого критерия для рассматриваемой проблемы, аналогичного критерию Куратовского.

Мы формулируем наш критерий (Теорему 1.5.3) в терминах *производной* пути [46, 47] (*"операция d"*). Дадим определение этого понятия (см. иллюстрацию 1.1, где показаны не сами пути, а некоторые близкие к ним пути на плоскости). Сначала определим *производную* G' графа G (это — синоним для *реберного графа* и *двойственного графа*). Множество вершин графа G' находится в 1-1 соответствии с множеством ребер графа G . Для ребра $a \subset G$ обозначим через $a' \in G'$ соответствующую вершину. Вершины a' и b' в графе G' соединены ребром, если и только если ребра a и b являются смежными в графе G . Отметим, что производные G' и H' гомеоморфных, но не изоморфных графов G и H не обязательно гомеоморфны.

Теперь пусть φ — путь в графе G , заданный последовательностью своих вершин $x_1, \dots, x_k \in G$, где вершины x_i и x_{i+1} соединены ребром. Тогда $(x_1x_2)', \dots, (x_{k-1}x_k)'$ является последовательностью вершин графа G' . В этой последовательности заменим каждый отрезок вида

$$(x_i x_{i+1})', (x_{i+1} x_{i+2})', \dots, (x_{j-2} x_{j-1})', (x_{j-1} x_j)',$$

где $(x_i x_{i+1})' = (x_{i+1} x_{i+2})' = \dots = (x_{j-1} x_j)'$, единственной вершиной (то есть заменим несколько идущих подряд одинаковых вершин на одну вершину). Полученная последовательность вершин определяет путь в графе G' . Этот

путь φ' называют *производной* пути φ .

Любой 5-од (то есть конус над 5 точками) является планарным графом, чья производная является графом Куратовского, то есть непланарным графом. Но если $G \subset \mathbb{R}^2$, и путь φ не имеет трансверсальных самопересечений, то образ отображения φ' является плоским подграфом $G'_\varphi \subset G'$ (мы приводим построение естественного вложения $G'_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^2$ в §5.1, см. Определение производной утолщения). Заменяем граф G' на образ G'_φ , и отображение φ' — на ограничение $\varphi' : I \rightarrow G'_\varphi$. Определим k -ю производную $\varphi^{(k)}$ индуктивно. Для цикла φ определение *производной* φ' аналогично, и это будет снова некоторый цикл в графе на плоскости (который может вырождаться в точку).

Приведем пример, который будет использоваться в дальнейшем: $\varphi' = \varphi$ для стандартной d -намотки $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ с $d \neq 0$. Ясно, что φ' — вложение для любого эйлерового пути или цикла φ . Таким образом, Пример 1.5.2 — действительно частный случай следующей теоремы.

Теорема 1.5.3. *I) [47] Пусть $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным для некоторой триангуляции отрезка I с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i -я производная $\varphi^{(i)}$ не содержит трансверсальных самопересечений.*

S) Пусть $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным для некоторой триангуляции окружности S^1 с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i -я производная $\varphi^{(i)}$ не содержит трансверсальных самопересечений, и при этом не является стандартной намоткой степени $d \notin \{-1, 0, 1\}$.

Мы доказываем обе теоремы 1.5.3.I и 1.5.3.S в §5.1. Наше доказательство результата 1.5.3.I является более простым, чем приведенное в [47].

В §5.2 мы применяем Теорему 1.5.3 для получения следующего критерия.

Следствие 1.5.4. *Кусочно линейное отображение $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, если и только если выполнено любое из следующих двух эквивалентных условий:*

D) (свойство взрезанного произведения) Существует отображение

$$\{(x, y) \in I \times I : x \neq y\} \rightarrow S^1,$$

такое что его ограничение на множество $\{(x, y) \in I \times I : \varphi x \neq \varphi y\}$ гомотопно отображению, заданному формулой $\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\varphi x - \varphi y}{\|\varphi x - \varphi y\|}$;

V) препятствие ван Кампена (определенное в §5.2) $v(\varphi) = 0$.

Хотя Критерий 1.5.4.V и труднее сформулировать, но его легче применять, чем 1.5.3.I и 1.5.4.D. В Следствии 1.5.4 отрезок I нельзя заменить на окружность S^1 : стандартная 3-намотка является контрпримером [56]. Препятствия, подобные 1.5.4.D и 1.5.4.V, существуют и в близкой теории аппроксимиремости сингулярными зацеплениями (то есть, отображениями с непересекающимися образами связных компонент), но критерии, аналогичные 1.5.4.I и 1.5.4.DV для них не верны (Пример 5.2.3 ниже).

Гипотеза. *Кусочно-линейный путь $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, если и только если для любой пары дуг $I_1, I_2 \subset I$, такой что $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, пара ограничений $\varphi : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\varphi : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируется сингулярными зацеплениями.*

Интересно обобщить критерии 1.5.3 и 1.5.4 на кусочно линейные отображения $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$, где K — произвольный граф (см. частный случай в [79]).

Гипотеза. *Пусть $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным относительно некоторой триангуляции графа*

K с k вершинами. Тогда отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если $v(\varphi) = 0$ и для каждого $i = 0, \dots, k$ его i -я производная $\varphi^{(i)}$ (определенная в §5.1) не содержит стандартных намоток степени $d \notin \{-1, 0, 1\}$.

Если данная гипотеза верна, то кусочно-линейное отображение $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ дерева K аппроксимируется вложениями, если и только если $v(\varphi) = 0$ [8, Problem 4.5].

Завершим §1.5 несколькими замечаниями по поводу мотивировки понятия аппроксимируемости вложениями. Дадим определение разложения 1-мерного компакта в обратный предел и покажем, как понятие аппроксимируемости вложениями появляется при исследовании планарности этого компакта. (Мы не будем использовать это определение в нашей статье.) В качестве примера построим 2-адический соленоид Ван Данцига. Возьмем полноторие $T_1 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $T_2 \subset T_1$ — полноторие, обходящее дважды вдоль оси полнотория T_1 . Аналогично, возьмем полноторие $T_3 \subset T_2$, обходящее дважды вдоль оси полнотория T_2 . Продолжая далее подобным образом, мы получаем бесконечную последовательность полноторий $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots$. Пересечение всех полноторий T_i является 1-мерным компактом и называется 2-адическим соленоидом Ван Данцига. Обратным пределом бесконечной последовательности графов и симплициальных отображений между ними $K_1 \xleftarrow{\varphi_1} K_2 \xleftarrow{\varphi_2} K_3 \xleftarrow{\varphi_3} \dots$ мы называем компакт

$$C = \{ (x_1, x_2, \dots) \in l_2 : x_i \in K_i \text{ и } \varphi_i x_{i+1} = x_i \}.$$

Можно видеть из нашего построения, что для солоноида Ван Данцига все $K_i \cong S^1$ и все φ_i суть 2-намотки. Можно доказать, что любой 1-мерный компакт может быть представлен в виде обратного предела. Такое представление показывает, что любой 1-мерный компакт может быть вложен в \mathbb{R}^3 . Оно также предоставляет простое достаточное условие планарности данного

компакта: для каждого положительного целого числа i должно существовать вложение $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что отображение $f_i \circ \varphi_i$ аппроксимируется вложениями и f_{i+1} является 2^{-i} -близким к $f_i \circ \varphi_i$.

1.6 Структура работы

Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь разбиты на пункты. Теоремы, примеры, замечания и т.д. нумеруются в пределах пункта. После прочтения вводной главы 1 дальнейшие главы диссертации можно читать независимо друг от друга.

Глава 2 организована следующим образом. В §2.1 мы доказываем Теорему 1.2.4. В §2.2 мы выводим Теорему 1.2.1 из Теоремы 1.2.4. Разделы §2.1 и §2.2 можно читать независимо друг от друга.

План главы 3 таков. В §3.1 мы рассмотрим случай многообразия размерности не менее 4, а в §3.2 — случай трехмерного многообразия. В §3.1 мы приведем геометрическое определение классов Штифеля-Уитни, после чего докажем Теорему 1.3.1. В §3.2 мы сначала напомним красивое геометрическое определение нормального класса Эйлера, а потом докажем другую теорему классификации Понтрягина (см. Замечание после Леммы 3.2.1). Наконец, в конце §3.2 мы докажем Теорему 1.3.2. Пункты §3.1 и §3.2 можно читать независимо друг от друга.

В главе 4 приводится доказательство Теоремы 1.4.1. Сначала в §4.1 разбирается легкая часть этой теоремы — доказательство вложимости и доказательство невложимости в случае (1), затем в §4.2 излагается доказательство невложимости в случае (2).

Организация главы 5 следующая. В §5.1 мы доказываем обе теоремы 1.5.3.I и 1.5.3.S. В §5.2 мы выводим Критерий 1.5.4 из Теоремы 1.5.3.

1.7 Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Аркадия Борисовича Скопенкова за постановки задач и постоянное внимание к работе. Автор благодарен профессору, д.ф.-м.н. Юрию Петровичу Соловьёву, профессорам, д.ф.-м.н. П.М. Ахметьеву, А.В. Болсинову, У. Кайзеру, У. Кошорке, Г. Лауресу, В.М. Нежинскому, Д. Реповшу, Ф. Спаджиари, Дж. Сташефу и М. Ценцелю, и доцентам, к.ф.-м.н. Л.А. Алании, С.А. Мелихову за полезные обсуждения. Автор также признателен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений за теплую творческую атмосферу. Данная диссертация поддержана грантом ИНТАС 06-1000014-6277. Автор также благодарит за предоставление грантов Российский Фонд Фундаментальных Исследований и фонд поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса".

1.8 Соглашения и обозначения

Приведем список наиболее часто встречающихся обозначений.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	множества целых положительных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел, соответственно.
\mathbb{Z}_n	множество целых чисел по модулю n ; в частности, $\mathbb{Z}_0 \cong \mathbb{Z}$.
\mathbb{R}^n	n -мерное евклидово пространство; в частности, $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.
$I = [0; 1]$	единичный отрезок.
D^n	единичный диск или шар в \mathbb{R}^n , все точки на расстоянии не больше 1 от начала координат. В частности D^0 состоит из одной точки, так как $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

S^n	единичная сфера в \mathbb{R}^{n+1} , все точки на расстоянии 1 от начала координат. В частности S^0 состоит из двух точек, так как это граница диска D^1 .
∂M	граница множества или край многообразия M . В частности, $\partial D^n = S^{n-1}$ — граница n -мерного диска.
$\text{Int } M$	внутренность множества M .
$\text{Cl } M$	замыкание множества M .
$\text{sk}^n(A)$	n -й остов клеточного пространства A .
Id	тождественное отображение пространства в себя.
\sqcup	несвязное объединение множеств или пространств.
\times	произведение множеств или пространств
\cong	изоморфизм групп или гомеоморфизм пространств.
\simeq	гомотопическая эквивалентность пространств.
$ A $	мощность множества A .
$A \subset B$ или $B \supset A$	теоретико-множественное включение, не обязательно строгое
$A - B$	теоретико-множественная разность, все элементы множества A , не принадлежащие множеству B .

Глава 2

Классификация зацеплений и сингулярных зацеплений

2.1 Классификация сингулярных зацеплений

Мы доказываем Теорему 1.2.4 следующим образом. Сначала мы доказываем сюръективность в случае $p \leq q$. Затем мы доказываем аналогичным образом инъективность в случае $p \leq q$, и, наконец, мы выводим случай $p > q$ Теоремы 1.2.4 из случая $p \leq q$. (Заметим, что утверждение Теоремы 1.2.4 не симметрично относительно p и q).

Введем основное понятие, используемое в доказательстве, и сформулируем основную лемму.

Определение 2.1.1. (см. иллюстрацию 2.1) Пусть $S^k = D_+^k \cup (S^{k-1} \times I) \cup D_-^k$ — стандартное разбиение сферы, где $\partial D_+^k = S^{k-1} \times 0 = S^{k-1}$ — экватор сферы S^k . Будем говорить, что сингулярное зацепление $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ *стандартизовано*, если выполнены следующие 3 условия:

1. $fD_+^p \subset D_+^m$, $fD_-^p \subset D_-^m$, $f(S^{p-1} \times I) \subset S^{m-1} \times I$;
2. $fS^q \subset S^{m-1} \times I$;
3. $f(S^{p-1} \times I)$ *прямолинейно*, то есть $f(S^{p-1} \times I) = f(S^{p-1} \times 0) \times I$.

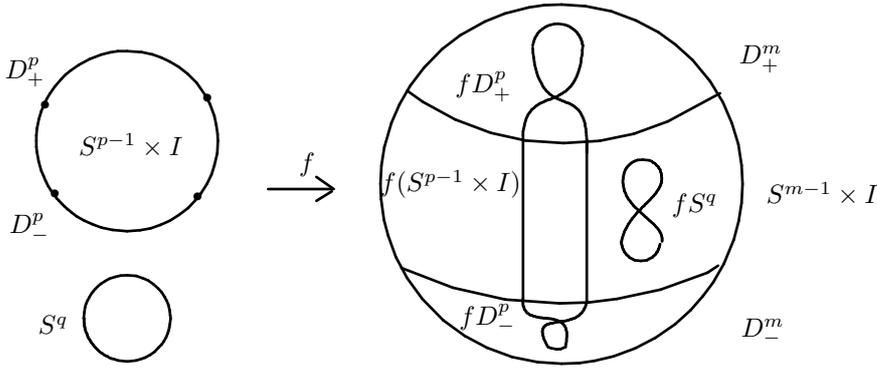


Рис. 2.1: Стандартизованное сингулярное зацепление

Лемма 2.1.2. *Предположим, что $p \leq q + 1$, $p \leq m - 3$ и $2p + 2q \leq 3m - 5$; тогда любое сингулярное зацепление $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ сингулярно гомотопно стандартизованному сингулярному зацеплению.*

Доказательство сюръективности в 1.2.4 по модулю 2.1.2 при $p \leq q$. (Коническая конструкция) Рассмотрим произвольное сингулярное зацепление $f : S^{p+1} \sqcup S^q \rightarrow S^{m+1}$. Наша цель — превратить его в надстройку с помощью сингулярной гомотопии.

По Лемме 2.1.2 мы можем предположить, что f стандартизовано.

Сдвинем образ fS^q вдоль образующих цилиндра $S^m \times I$, пока он не упадет в основание $S^m \times 0 = \partial D_+^{m+1}$. После этого продеформируем fD_+^{p+1} и $f(S^{p+1} - \text{Int } D_+^{p+1})$ в конусы над сферой $f\partial D_+^{p+1}$ внутри дисков D_+^{m+1} и $S^{m+1} - \text{Int } D_+^{m+1}$, соответственно (с помощью сингулярной гомотопии, прямой как внутри D_+^{m+1} , так и внутри $S^{m+1} - \text{Int } D_+^{m+1}$). Полученное сингулярное зацепление — надстройка над некоторым сингулярным зацеплением $S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$. Значит $f \in \text{Im } \Sigma$, что и требовалось. \square

Теперь мы переходим к доказательству Леммы 2.1.2. Сначала мы докажем ее для $p \leq q$, затем — для $p = q + 1$. Доказательства всех технических утверждений ниже могут быть пропущены при первом прочтении. С этого момента до конца §2.1 мы работаем в кусочно-линейной категории.

Доказательство Леммы 2.1.2 при $p \leq q$. Наша цель — сделать данное син-

гулярное зацепление общего положения $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ стандартизованным, производя подходящие гомеоморфизмы $S^p \rightarrow S^p$ и $S^m \rightarrow S^m$. (Формально, 'произвести гомеоморфизмы $h_p : S^p \rightarrow S^p$ и $h_m : S^m \rightarrow S^m$ ' означает 'произвести сингулярную гомотопию, превращающую f в $h_m \circ f \circ (h_p^{-1} \sqcup \text{Id})$ ').

(1) *Построение гомеоморфизма $S^p \rightarrow S^p$: разбиение сферы S^p .* (Метод поглощения Зимана, см. иллюстрацию 2.2 слева). Рассмотрим множество самопересечения p -компоненты: $S(f) = \text{Cl}\{x \in S^p : |f^{-1}fx| \geq 2\}$. Пусть A_+ — остов комплекса $S(f)$, сформированный симплексами размерности не больше $\frac{1}{2} \dim S(f)$ (в такой триангуляции сфер S^p , S^q и S^m , что отображение $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ симплицально). Пусть A_- — подкомплекс, двойственный к A_+ (то есть, A_- — подкомплекс, образованный всеми симплексами σ первого барицентрического подразделения комплекса $S(f)$ такими, что $\sigma \cap A_+ = \emptyset$).

Утверждение 2.1.3. *Существуют подполиэдры $B_{\pm} \subset S^p$, такие что $B_{\pm} \supset A_{\pm}$ и $B_{\pm} \cong CA_{\pm}$.*

Доказательство. По общему положению $\dim S(f) \leq 2p - m$, таким образом, $\dim_{\pm} \leq p - \lceil \frac{m+1}{2} \rceil$. Возьмем продолжения общего положения $i_{\pm} : CA_{\pm} \rightarrow S^p$ включений $A_{\pm} \hookrightarrow S^p$. Они являются вложениями, потому что $2(p - \lceil \frac{m+1}{2} \rceil + 1) - p < 0$ ввиду предположения $p \leq m - 3$. Остается положить $B_{\pm} = i_{\pm} CA_{\pm}$. \square

Утверждение 2.1.4. *В общем положении $B_+ \cap B_- = \emptyset$ и $B_{\pm} \cap S(f) = A_{\pm}$.*

Доказательство. Это следует из неравенств $\dim(B_+ \cap B_-) \leq 2(p - \lceil \frac{m+1}{2} \rceil + 1) - p < 0$ и

$$\dim(B_{\pm} - A_{\pm}) \cap S(f) \leq (p - \lceil \frac{m+1}{2} \rceil + 1) + (2p - m) - p \leq \frac{1}{2}(2q + 2p - 3m + 4) < 0,$$

последнее из которых является следствием предположений $p \leq q + 1$ и $2p + 2q \leq 3m - 5$. \square

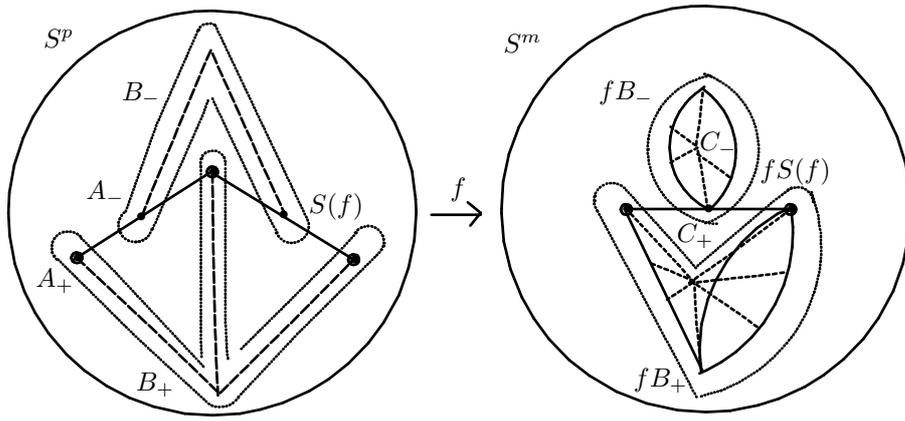


Рис. 2.2: Разбиения сфер S^p и S^m

Возьмем непересекающиеся регулярные окрестности полиэдров B_{\pm} в сфере S^p . Произведем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $S^p \rightarrow S^p$, переводящий эти окрестности в шары стандартного разбиения $S^p = D_+^p \cup (S^{p-1} \times I) \cup D_-^p$.

Гомеоморфизм $h^m : S^m \rightarrow S^m$, который мы собираемся построить, будет композицией двух гомеоморфизмов $S^m \rightarrow S^m$, определяемых следующим образом.

(2) *Построение 1-ого гомеоморфизма $S^m \rightarrow S^m$: разбиение сферы S^m .* (См. иллюстрацию 2.2 справа). Возьмем подполиэдры $C_{\pm} \subset S^m$ такие, что $C_{\pm} \supset fB_{\pm}$ и $C_{\pm} \cong CfB_{\pm}$ (они строятся аналогично полиэдрам B_{\pm} из Утверждения 2.1.3).

Утверждение 2.1.5. *В общем положении $C_+ \cap C_- = \emptyset$, $C_{\pm} \cap fS^p = fB_{\pm}$ и $C_{\pm} \cap fS^q = \emptyset$.*

Доказательство. Это следует из неравенств $2(p - [\frac{m+1}{2}] + 2) - m < 0$, которое выполняется в силу предположения $p \leq m - 3$, и $\dim(C_{\pm} - fB_{\pm}) \cap fS^p \leq (p - [\frac{m+1}{2}] + 2) + p - m < 0$, которое выполняется в силу предположений $p \leq q$ и $2p + 2q \leq 3m - 5$, и $\dim(C_+ \cap fS^q) \leq (p - [\frac{m+1}{2}] + 2) + q - m < 0$, которое эквивалентно $2p + 2q \leq 3m - 5$. (Это - единственное место в нашем доказательстве, в котором ограничение $2p + 2q \leq 3m - 5$ является

точным).

□

Возьмем непересекающиеся регулярные окрестности полиэдров $C_{\pm} \cup fD_{\pm}^p$ относительно $f\partial D_{\pm}^p$ в многообразии $S^m - fS^q$. Произведем гомеоморфизм $S^m \rightarrow S^m$, переводящий эти окрестности в шары стандартного разбиения $S^m = D_+^m \cup (S^{m-1} \times I) \cup D_-^m$. В силу Утверждения 2.1.5 полученное сингулярное зацепление удовлетворяет свойствам (1) и (2) стандартизованного сингулярного зацепления (см. Определение 2.1.1).

Чтобы удовлетворить свойству (3), произведем следующий гомеоморфизм $S^m \rightarrow S^m$.

(3) *Построение 2-ого гомеоморфизма $S^m \rightarrow S^m$: выпрямление множества $f(S^{p-1} \times I)$.*

Утверждение 2.1.6. *Существует гомеоморфизм $S(f) \cap (S^{p-1} \times I) \cong (S(f) \cap (S^{p-1} \times 0)) \times I$, переводящий $S(f) \cap (S^{p-1} \times j)$ в $(S(f) \cap (S^{p-1} \times 0)) \times j$ при каждом $j = 0, 1$.*

Доказательство. Возьмем первое барицентрическое подразделение триангуляции из шага (1) выше. Каждый симплекс $\sigma \subset S(f)$ такой, что $\sigma \not\subset A_+ \cup A_-$ является джойном пары симплексов $\sigma_+ \subset A_+$ и $\sigma_- \subset A_-$. Согласно Утверждению 2.1.4 полиэдры $\sigma \cap D_{\pm}^p$ являются регулярными окрестностями граней σ_{\pm} в симплексе σ . Таким образом, существует естественный гомеоморфизм $\sigma \cap (S^{p-1} \times I) \cong (\sigma \cap (S^{p-1} \times 0)) \times I$. Объединения такие гомеоморфизмы для всех симплексов $\sigma \subset S(f)$ таких, что $\sigma \not\subset A_+ \cup A_-$ (в порядке возрастания размерностей симплексов σ), мы получим требуемый гомеоморфизм $S(f) \cap (S^{p-1} \times I) \cong (S(f) \cap (S^{p-1} \times 0)) \times I$. □

Утверждение 2.1.7. *Существует гомеоморфизм $f(S^{p-1} \times I) \cong f(S^{p-1} \times 0) \times I$, переводящий $f(S^{p-1} \times j)$ в $f(S^{p-1} \times 0) \times j$ при каждом $j = 0, 1$.*

Доказательство. (Трюк Александера) Согласно Утверждению 2.1.6 включение $i : S(f) \cap (S^{p-1} \times I) \hookrightarrow S^{p-1} \times I$ является конкордантностью. Произведем объемлемую изотопию цилиндра $S^{p-1} \times I$, превращающую конкордантность i в изотопию. Так как любая изотопия является объемлемой, то существует гомеоморфизм $h : S^{p-1} \times I \rightarrow S^{p-1} \times I$, выпрямляющий множество $(S(f) \cap (S^{p-1} \times I))$, то есть такой, что $h(S(f) \cap (S^{p-1} \times I)) = h(S(f) \cap (S^{p-1} \times 0)) \times I$. Искомый гомеоморфизм $f(S^{p-1} \times I) \cong f(S^{p-1} \times 0) \times I$ является фактором гомеоморфизма h . (Аналогично доказательству 2.1.6 можно проверить, что при подходящем выборе гомеоморфизма из Утверждения 2.1.6 этот фактор определен корректно). \square

Утверждение 2.1.8. *Существует гомеоморфизм $S^{m-1} \times I$, выпрямляющий множество $f(S^{p-1} \times I)$.*

Доказательство. Согласно Утверждению 2.1.7 включение $i : f(S^{p-1} \times I) \hookrightarrow S^{m-1} \times I$ — конкордантность. Рассуждая, как в доказательстве Утверждения 2.1.7, мы получаем искомый гомеоморфизм. \square

Произведем гомеоморфизм $S^m \rightarrow S^m$, продолжающий гомеоморфизм из Утверждения 2.1.8. Полученное в результате сингулярное зацепление стандартизовано, тем самым при $p \leq q$ Лемма 2.1.2 доказана. \square

Доказательство Леммы 2.1.2 при $p = q + 1$. Доказательство аналогично доказательству в случае $p \leq q$, с той разницей, что конусы B_{\pm} и C_{\pm} заменяются коллапсируемыми подполиэдрами, предоставляемыми следующим утверждением (сравни с доказательствами теорем вложения в книге [29]). \square

Утверждение 2.1.9. *Существуют коллапсируемые подполиэдры $B_{\pm} \subset S^p$ и $C_{\pm} \subset S^m$, удовлетворяющие Утверждениям 2.1.4 и 2.1.5.*

Доказательство. (трюк Ирвина) Пусть \bar{B}_{\pm} — полиэдры, предоставляемые Утверждением 2.1.3. Определим подполиэдры \bar{C}_{\pm} аналогично. Эти подполи-

эдры удовлетворяют всем необходимым свойствам, кроме $\bar{C}_\pm \cap fS^p = f\bar{B}_\pm$. В силу неравенства $\dim(\bar{C}_\pm - f\bar{B}_\pm) \cap fS^p \leq (p - [\frac{m+1}{2}] + 2) + p - m \leq 0$ множество $(\bar{C}_\pm - f\bar{B}_\pm) \cap fS^p$ (если непусто) состоит из конечного числа точек, не принадлежащих $S(f)$. Соединим каждую из этих точек с полиэдром \bar{B}_\pm путем общего положения в сфере S^p . Пусть B_\pm — объединение этих путей и конуса \bar{B}_\pm . Аналогично, добавляя конусы над полиэдрами $f(B_\pm - \bar{B}_\pm)$ к полиэдру \bar{C}_\pm , мы получим коллапсируемый полиэдр $C_\pm \subset S^m$, для которого $\dim(C_\pm - \bar{C}_\pm) \leq 2$. Полиэдры B_\pm и C_\pm — искомые. \square

Инъективность в Теореме 1.2.4 доказывается с помощью относительной версии предыдущего рассуждения. *Стандартизованное* сингулярное зацепление $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow D^m$ определяется так же, как в 2.1.1, с той разницей, что мы фиксируем стандартное разбиение диска $D^k = D_+^k \cup (D^{k-1} \times I) \cup D_-^k$ вместо сферы. Обозначим через $D_\pm^{k-1} = D_\pm^k \cap \partial D^k$. Будем считать, что ∂D_+^{k-1} — экватор сферы ∂D^k .

Лемма 2.1.10. *Предположим, что $p \leq q + 1$, $p \leq m - 3$ и $2p + 2q \leq 3m - 5$; тогда любое сингулярное зацепление общего положения $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow D^m$, ограничение которого на край является надстройкой, сингулярно гомотопно относительно края стандартизованному сингулярному зацеплению.*

Доказательство инъективности в 1.2.4 по модулю 2.1.10 при $p \leq q$. Нам достаточно доказать, что если надстройка сингулярного зацепления $f_0 : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ нуль-гомотопна, то и само сингулярное зацепление f_0 нуль-гомотопно. Рассмотрим нуль-гомотопию $f : D^{p+2} \sqcup D^{q+1} \rightarrow D^{m+2}$ сингулярного зацепления Σf_0 . По Лемме 2.1.10 можно считать, что сингулярное зацепление f стандартизовано.

Сдвинем образ fD^{q+1} вдоль образующих цилиндра $D^{m+1} \times I$ по направлению к ∂D_+^{m+2} , пока оно не попадет в основание $\partial D_+^{m+2} - \partial D^{m+2}$. Ограничение полученного сингулярного зацепления на $(\partial D_+^{p+2} - \partial D^{p+2}) \sqcup D^{q+1}$ является

искомой нуль-гомотопией сингулярного зацепления f_0 . \square

Доказательство Леммы 2.1.10. Доказательство аналогично доказательству Леммы 2.1.2 со следующими изменениями. Пусть \hat{D}^k — шар, полученный из шара D^k приклеиванием двух конусов CD_{\pm}^{k-1} вдоль D_{\pm}^{k-1} . Пусть $\hat{f} : \hat{D}^p \sqcup \hat{D}^q \rightarrow \hat{D}^m$ — очевидное продолжение сингулярного зацепления $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow D^m$. Ясно, что достаточно сделать сингулярное зацепление \hat{f} стандартизованным (с помощью гомеоморфизмов дисков \hat{D}^p и \hat{D}^m , неподвижных на границе).

(1) *Построение гомеоморфизма $\hat{D}^p \rightarrow \hat{D}^p$ при $p \leq q$.* Пусть A_+ — объединение экватора ∂D_+^{p-1} и всех симплексов комплекса $S(f)$ размерности не больше $\frac{1}{2} \dim S(f)$.

Утверждение 2.1.11. *Существуют подполиэдры $B_{\pm} \subset D^p$, коллапсируемые на $B_{\pm} \cap D_{\pm}^{p-1}$ и удовлетворяющее Утверждению 2.1.4.*

Доказательство. Возьмем гомотопию общего положения $i_t : A_{\pm} \rightarrow D^p$, неподвижную на множестве $A_{\pm} \cap D_{\pm}^{p-1}$, такую что $i_0 : A_{\pm} \hookrightarrow D^p$ — включение и $i_1 A_{\pm} \subset D_{\pm}^{p-1}$. Пусть B_{\pm} — след гомотопии i_t . \square

Возьмем подходящие регулярные окрестности полиэдров $B_{\pm} \cup C(B_{\pm} \cap D_{\pm}^{p-1})$ в многообразии $D^p \cup CD_{\pm}^{p-1}$. Произведем гомеоморфизм $\hat{D}^p \rightarrow \hat{D}^p$, неподвижный на границе, переводящий эти окрестности в шары стандартного разбиения диска \hat{D}^p .

Шаги (2) и (3) из доказательства Леммы 2.1.2 видоизменяются аналогичным образом. \square

Таким образом, мы доказали Теорему 1.2.4 при $p \leq q$.

Доказательство Теоремы 1.2.4 при $p > q$. Отображение Σ сюръективно как композиция

$$LM_{p,q}^m \xrightarrow{\Sigma^{p-q}} LM_{p,p}^{m+p-q} \xrightarrow{\Sigma} LM_{p+1,p}^{m+p-q+1} \xrightarrow{(\Sigma^{p-q})^{-1}} LM_{p+1,q}^{m+1}$$

в которой все отображения корректно определены и сюръективны в силу случая $p \leq q$ Теоремы 1.2.4. Инъективность отображения Σ доказывается аналогично. \square

2.2 Классификация зацеплений

Мы доказываем Теорему 1.2.1 следующим образом. Сначала мы доказываем теорему о надстройке для зацеплений (Теорема 2.2.1), сводящую классификацию зацеплений к классификации *дисковых сингулярных зацеплений*. Потом мы упрощаем группу дисковых сингулярных зацеплений, и находим ее, пользуясь классификацией (сферических) сингулярных зацеплений. Формально, 1.2.1 следует из 1.2.4, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.5 и 5-леммы.

Введем некоторые обозначения. Всюду в §2.2 мы работаем в гладкой категории.

Обозначим через $\widehat{L}_{p,q}^m$ группу классов конкордантности вложений $S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$, ограничения которых на S^p и S^q незаузлены.

Назовем *почти зацеплением* сингулярное зацепление $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$, ограничение которого на S^q является незаузленным вложением. Назовем *почти конкордантностью* сингулярную конкордантность $(S^p \sqcup S^q) \times I \rightarrow S^m \times I$, ограничение которой на $S^q \times I$ является конкордантностью. Пусть $\overline{L}_{p,q}^m$ — множество почти зацеплений с точностью до почти конкордантности. При $p, q \leq m - 3$ это множество — коммутативная группа относительно операции 'покомпонентной связной суммы'. Нетрудно видеть, что эта группа изоморфна гомотопической группе $\pi_p(S^{m-q-1})$ (сравни с определением отображения λ ниже в этом пункте).

Дисковым сингулярным зацеплением мы называем собственное сингулярное зацепление $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow D^m$, ограничение которого на $(\partial D^p) \sqcup D^q$ является вложением, причем вложение $f : \partial D^p \rightarrow \partial D^m$ незаузлено. *Дис-*

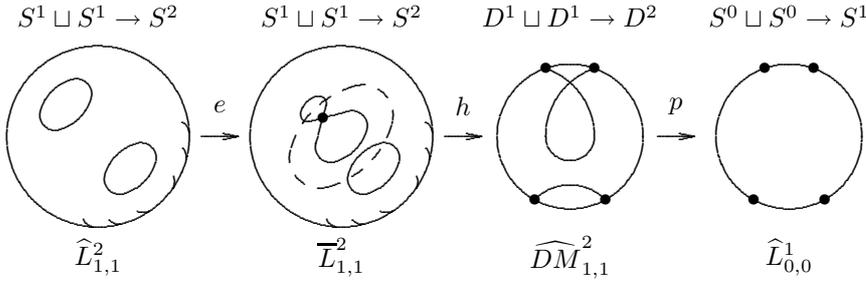


Рис. 2.3: Геометрическая ENP последовательность для зацеплений

ковой сингулярной конкордантностью мы называем собственную сингулярную конкордантность $(D^p \sqcup D^q) \times I \rightarrow D^m \times I$, ограничение которой на $(\partial D^p \sqcup D^q) \times I$ является конкордантностью. Пусть $\widehat{DM}_{p,q}^m$ — множество дисковых сингулярных зацеплений с точностью до дисковой сингулярной гомотопии. При $p, q \leq m - 3$ это множество обладает естественной структурой коммутативной группы.

Теорема 2.2.1 (Геометрическая ENP последовательность для зацеплений). (А. Скопенков, сравни с [49], см. иллюстрацию 2.3) При $p, q \leq m - 3$ имеется точная последовательность:

$$\dots \longrightarrow \widehat{L}_{p,q}^m \xrightarrow{e} \overline{L}_{p,q}^m \xrightarrow{h} \widehat{DM}_{p,q}^m \xrightarrow{p} \widehat{L}_{p-1,q-1}^{m-1} \longrightarrow \dots$$

Доказательство. Построение гомоморфизмов. Пусть e — очевидное отображение. Пусть p — отображение 'ограничения на край'. Отображение h является 'гомоморфизмом вырезания', определяемым следующим образом. Возьмем почти зацепление общего положения $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$. Возьмем пару точек общего положения $x \in fS^p$ и $y \in fS^q$, и соединим их путем l , пересекающим $f(S^p \sqcup S^q)$ только по ∂l . Пусть \bar{D}^m — дополнение к небольшой окрестности пути l в сфере S^m . Обозначим $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q = f^{-1}\bar{D}^m$. Положим $h(f)$ равным ограничению отображения f до отображения $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q \rightarrow \bar{D}^m$.

Доказательство точности. Мы имеем $\text{Im } p = \text{Ker } e$, поскольку зацепление $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ продолжается до дискового сингулярного зацепления

$D^{p+1} \sqcup D^{q+1} \rightarrow D^{m+1}$, если и только если оно почти конкордантно тривиальному зацеплению. Мы имеем $\text{Im } h = \text{Ker } p$, поскольку дисковое сингулярное зацепление $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow D^m$ продолжается без добавления новых самопересечений до почти зацепления $S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$, если и только если ограничение f на край нуль-конкордантно.

Чтобы доказать $\text{Im } e \subset \text{Ker } h$, возьмем собственное вложение $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow D^m$. Возьмем пару точек $x \in D^p$ и $y \in D^q$. Соединим fx и fy путем l , пересекающей $f(D^p \sqcup D^q)$ только по ∂l . Пусть \bar{D}^m — небольшая окрестность пути l в сфере S^m . Обозначим $\bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q = f^{-1}\bar{D}^m$. Ограничение $f : (D^p - \bar{D}^p) \sqcup (D^q - \bar{D}^q) \rightarrow (D^m - \bar{D}^m)$ — конкордантность. Согласно теореме 'конкордантность влечет изотопию' можно считать, что это ограничение сохраняет уровни. Тогда трюк Александера показывает, что вложение $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow D^m$ объемлемо изотопно ограничению $f : \bar{D}^p \sqcup \bar{D}^q \rightarrow \bar{D}^m$. Последнее ограничение тривиально, поэтому $h \circ e = 0$.

Чтобы доказать $\text{Ker } h \subset \text{Im } e$, возьмем произвольное почти вложение $f \in \bar{L}_{p,q}^m$ такое, что $h(f) = 0$. По определению, существует дисковая сингулярная конкордантность c между $h(f)$ и некоторым вложением. Можно считать, что ограничение c на край является изотопией. По теореме о продолжении изотопии [29] эта изотопия продолжается до объемлемой изотопии диска $S^m - \bar{D}^m$ (из определения отображения h выше). Таким образом, дисковая сингулярная конкордантность c может быть продолжена до почти конкордантности между f и некоторым зацеплением $f' \in \hat{L}_{p,q}^m$. Следовательно, $f = e(f')$. \square

Следствие 2.2.2. $L_{p,q}^m \cong C_p^{m-p} \oplus C_q^{m-q} \oplus \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \widehat{DM}_{p+1,q+1}^{m+1}$ при $p \leq q \leq m - 3$.

Доказательство. Согласно [28, Th. 2.4] мы имеем $L_{p,q}^m \cong \hat{L}_{p,q}^m \oplus C_p^{m-p} \oplus C_q^{m-q}$. Таким образом, достаточно показать, что при $p \leq q$ гомоморфизм $e : \hat{L}_{p,q}^m \rightarrow \bar{L}_{p,q}^m$ имеет правый обратный. Искомый правый обратный $\pi_p(S^{m-q-1}) \rightarrow \hat{L}_{p,q}^m$

построен в статье [28, Th. 10.1]: он отображает гомотопический класс отображения $\phi : S^p \rightarrow S^{m-q-1}$ в зацепление $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow D^{q+1} \times S^{m-q-1} \subset S^m$, заданное формулой $f(x \sqcup y) = (\frac{1}{2}x; \phi x) \sqcup (y; c)$, где точка $c \in S^{m-q-1}$ фиксирована. \square

Упростим группу $\widehat{DM}_{p,q}^m$. Пусть $\overline{DM}_{p,q}^m$ — группа собственных сингулярных зацеплений $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow D^m$, ограничение которых $f : \partial D^p \rightarrow \partial D^m$ является незаузленным вложением (с точностью до сингулярной конкордантности, ограничение которой на $\partial D^p \times I$ — конкордантность).

Лемма 2.2.3. *Если $p, q \leq m - 3$, то естественное отображение $\widehat{DM}_{p,q}^m \rightarrow \overline{DM}_{p,q}^m$ биективно при $2p + 2q \leq 3m - 5$ и сюръективно при $2p + 2q \leq 3m - 4$.*

Доказательство. Сюръективность. Возьмем сингулярное зацепление общего положения $f \in \overline{DM}_{p,q}^m$. Пара $(D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p)$ является $(2m - 2p - 3)$ -связной, поскольку $H_i(D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p) \cong H^{m-i-1}(fD^p) = 0$ при $i \leq 2m - 2p - 3$ (потому что пространство fD^p гомотопически эквивалентно конусу отображения $f : S(f) \rightarrow fS(f)$, имеющему размерность не более $2p - m + 1$, сравни с [26, Lemma 4.2]). Таким образом, в силу предположений $q \leq m - 3$, $2p + 2q \leq 3m - 4$ и теоремы вложения из [29] ограничение $f|_{D^q} : (D^q, \partial D^q) \rightarrow (D^m - fD^p, \partial D^m - f\partial D^p)$ гомотопно вложению. Значит, f принадлежит образу естественного отображения $\widehat{DM}_{p,q}^m \rightarrow \overline{DM}_{p,q}^m$.

Инъективность. Возьмем сингулярную конкордантность общего положения $f : (D^p \sqcup D^q) \times I \rightarrow D^m \times I$, ограничение которой на $D^q \times \partial I \cup \partial D^p \times I$ является вложением. Достаточно устранить самопересечения цилиндра $D^q \times I$ с помощью сингулярной гомотопии, неподвижной на $(D^p \sqcup D^q) \times \partial I$. Это возможно в силу следующей теоремы, доказываемой аналогично теореме вложения из статьи [29], так как пара $(D^m \times I - f(D^p \times I), \partial D^m \times I - f(\partial D^p \times I))$ является $(2m - 2p - 3)$ -связной. \square

Теорема 2.2.4 (Теорема вложения). Пусть M^{m+1} , $Y^m \subset \partial M$ и $X^q \subset \partial D^{q+1}$ — компактные многообразия. Пусть $f : (D^{q+1}, X) \rightarrow (M, Y)$ — собственное отображение, такое что $f|_{\partial D^{q+1}-X}$ — вложение. Если $q \leq m - 3$ и пара $(M; Y)$ — $(2q - m + 2)$ -связна, то f собственно гомотопно $\text{rel } \partial D^{q+1} - X$ вложению.

Найдем группу $\overline{DM}_{p,q}^m$. Обозначим $n = p + q + 1 - m$. Мы собираемся определить гомоморфизм $\beta : \overline{DM}_{p,q}^m \rightarrow \pi_n(V_{M+m-p-1, M})$. Следующая теорема вместе с 5-леммой влечет биективность этого гомоморфизма.

Теорема 2.2.5. (А. Скопенков, сравни с [37, Th. 3.1], [34, Лемма 5.1], [35, Th. 4.8]) При $p, q \leq m - 3$ и $3p + q \leq 3m - 5$ имеется следующая диаграмма с точными строками, коммутативная с точностью до знака:

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{L}_{q,p}^m & \xrightarrow{e} & LM_{p,q}^m & \xrightarrow{h} & \overline{DM}_{p,q}^m & \xrightarrow{p} & \overline{L}_{q-1,p-1}^{m-1} \longrightarrow \dots \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \lambda \\ \pi_q(S^{m-p-1}) & \xrightarrow{E} & \pi_n^S & \xrightarrow{H} & \pi_n(V_{M+m-p-1, M-}) & \xrightarrow{P} & \pi_{q-1}(S^{m-p-1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Доказательство. Верхняя строка строится аналогично Теореме 2.2.1 (с аналогичным доказательством точности). Нижняя строка — стабильная ЕНР последовательность Джеймса, для которой мы используем следующее геометрическое построение [39, §1 и §4], сравни с [31, 82, 17].

Построение ЕНР последовательности. отождествим группы $\pi_q(S^{m-p-1})$ и π_n^S с группами оснащенных вложений и погружений, соответственно, замкнутых n -мерных многообразий в сферу S^q (с точностью до оснащенного кобордизма). Собственным погружением будем называть собственное оснащенное погружение n -мерного многообразия в диск D^q , ограничение которого на край является вложением. Собственным кобордизмом будем называть собственное оснащенное погружение $c : N^{n+1} \rightarrow D^q \times I$, ограничение которого на $c^{-1}(S^{q-1} \times I)$ является вложением. Согласно [39, Prop. 4.1] мы можем отождествить $\pi_n(V_{M+m-p-1, M})$ с группой собственных погружений с

точностью до собственного кобордизма.

Пусть $E : \pi_q(S^{m-p-1}) \rightarrow \pi_n^S$ — очевидное отображение. Далее, пусть $P : \pi_n(V_{M+m-p-1, M}) \rightarrow \pi_q(S^{m-p-1})$ — отображение ”ограничения на край”. Пусть $H : \pi_n^S \rightarrow \pi_n(V_{M+m-p-1, M})$ гомоморфизм ”вырезания”, определяемый вырезанием небольшого диска из погруженного n -мерного многообразия и его прообраза из сферы S^q .

Построение вертикальных гомоморфизмов. Удалим одну точку из сферы S^m и отождествим результат с \mathbb{R}^m . Для сингулярного зацепления $f : X \sqcup Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ определим отображение $\tilde{f} : X \times Y \rightarrow S^{m-1}$ формулой $\tilde{f}(x, y) = \frac{fx - fy}{|fx - fy|}$. Обозначим через $\text{pr} : X \times Y \rightarrow Y$ очевидную проекцию.

Определение отображения α . (сравни с [35]) Пусть $f : S^p \sqcup S^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ — сингулярное зацепление общего положения. Возьмем регулярное значение $v \in S^{m-1}$ отображения \tilde{f} . Пусть $\alpha(f)$ — класс кобордизма оснащенного погружения $\text{pr} : \tilde{f}^{-1}v \rightarrow S^q$. (Ясно, что α коммутирует с Σ , поэтому в силу 1.2.4 и [35, Th. 2.13] α — изоморфизм при $p, q \leq m - 3$ и $2p + 2q \leq 3m - 5$).

Определение отображения λ . (сравни с [28]) Возьмем сингулярное зацепление общего положения $f \in \bar{L}_{q,p}^m$. Дополнение $S^m - fS^p$ ретрагируется на сферу S^{m-p-1} , ограничивающую диск, нормальный к образу fS^p . Можно считать, что сфера S^{m-p-1} является стандартной (независимость от выбора изотопии, переводящей сферу S^{m-p-1} в стандартную, проверяется аналогично [28, Th. 7.1]). Поместим образ fS^q в сферу S^{m-p-1} с помощью подходящей сингулярной гомотопии $\text{rel } S^p$. Возьмем регулярное значение $v \in S^{m-p-1}$ отображения \tilde{f} . Пусть $\lambda(f)$ — класс кобордизма оснащенного вложения $\text{pr} : \tilde{f}^{-1}v \rightarrow S^q$.

Определение отображения β . (сравни с [37]) Возьмем дисковое сингулярное зацепление общего положения $f : D^p \sqcup D^q \rightarrow \mathbb{R}_+^m$, где \mathbb{R}_+^m — верхнее полупространство. С помощью собственной сингулярной гомотопии, ограничение которой на ∂D^p является изотопией, можно поместить образ $f\partial D^q$ в

стандартную сферу S^{m-p-1} . Возьмем регулярное значение $v \in S^{m-p-1}$ отображения \tilde{f} . Пусть $\beta(f)$ — класс собственного кобордизма собственного оснащенного погружения $\text{pr} : \tilde{f}^{-1}v \rightarrow D^q$.

Таким образом, требуемая диаграмма построена. Коммутативность с точностью до знака проверяется непосредственно. \square

Замечание 2.2.6. Ограничение $2p + 2q \leq 3m - 6$ в Теореме 1.2.1 — наилучшее, формула перестает быть верной при $2p + 2q = 3m - 5$. Например, возьмем $m = p + 4 = 4k - 1$, $k \geq 5$, $q = 2k + 1$. Тогда группа $LM_{p+1, q+1}^{m+1}$ бесконечна [37, р. 755-756]. Таким образом, в силу 2.2.3 и 2.2.5 $\text{rk } \widehat{DM}_{p+1, q+1}^{m+1} \geq \text{rk } \overline{DM}_{p+1, q+1}^{m+1} > \text{rk } \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1, M})$. Поэтому, согласно 2.2.2 ранг левой части в формуле 1.2.1 больше, чем ранг правой части.

Замечание 2.2.7. Рассуждение статьи [28] можно обобщить, чтобы доказать Теорему 1.2.1 по крайней мере для всех размерностей, удовлетворяющих неравенству $2p_1 + 2p_2 \leq 3m - 7$ (здесь мы пользуемся обозначениями статьи [28]). Действительно, единственный шаг указанного доказательства, для которого это ограничение не является достаточным, — это утверждение [28, Proposition 10.2]. Данное утверждение следует из того, что группа $\Lambda_{p_1}^{(q)}$ (соответственно, $\Pi_{m-2}^{(q)}$) порождается всеми элементами $\theta_k(i_1, i_2)$ (соответственно, $[[i_2, i_1], i_2]$ и $\theta_{k+1}(i_1, i_2)$), для которых $kp_1 + p_2 \geq (k+1)(m-2)$. Возможная причина, почему это усиление не было замечено в статье [28], состоит в том, что ограничение $2p_1 + 2p_2 \leq 3m - 7$ не возникало естественным образом в разрабатываемой там теории вложений в отличие от ограничения $3p_1 + p_2 \leq 3m - 7$.

Глава 3

Классификация оснащенных зацеплений в многообразиях

В данной главе мы работаем в гладкой категории.

3.1 Оснащенные зацепления в многообразиях размерности не менее 4

Геометрическое определение гомологических классов Штифеля–Уитни (Д. Реповш и Ф. Спаджиари).

Рассмотрим систему s касательных векторных полей общего положения на M . Пусть $\Sigma \subset M$ — множество точек, в которых данные векторные поля линейно зависимы. По трансверсальности [15, §10.3] Σ является псевдомногообразием в M . Класс Штифеля–Уитни $w_{n+2-s}(L) \in H_{s-1}(M; \mathbb{Z}_2)$ — это гомологический класс псевдомногообразия Σ (это первое препятствие к существованию системы s линейно независимых касательных векторных полей на M).

Данное определение легко обобщается на случай, когда касательные векторные поля на M заменяются на сечения произвольного векторного расслоения с базой M . Для подмногообразия $L \subset M$ классы Штифеля–Уитни нормального расслоения к L в M и ограничения TM на L определяются аналогично и обозначаются через $\bar{w}_i(L)$ и $w_i(M)|_L$, соответственно.

Мы будем использовать также относительные классы Штифеля–Уитни.

Они определяются следующим образом. Пусть $L \subset M \times I$ — l -мерный (неоснащенный) кобордизм между оснащенными подмногообразиями L_1 и L_2 . Продолжим оснащение f края $\partial L = L_1 \cup L_2$ до системы $m - l - 1$ нормальных векторных полей общего положения на L . Определим относительный класс Штифеля-Уитни $\bar{w}_2(L, f) \in H_{l-2}(L; \mathbb{Z}_2)$ как класс $(l-2)$ -псевдомногообразия, в точках которого построенные векторные поля линейно зависимы (это первое препятствие к продолжению оснащения ∂L на L). Мы будем опускать f из обозначения классов Штифеля-Уитни в случае, когда это не приведет к неоднозначному прочтению.

Начало доказательства теоремы 1.3.1. Рассмотрим элемент $\alpha \in H_1(M; \mathbb{Z})$. Наша цель — выяснить, сколько существует попарно некобордантных оснащенных зацеплений L_i таких, что $\deg L_i = \alpha$.

Пусть $L_1, L_2 \subset M$ — пара оснащенных зацеплений (1-подмногообразий), таких что $\deg L_1 = \deg L_2 = \alpha$. Обозначим через $[L_1]$ и $[L_2]$ их классы в $H_1(M)$. Так как L_1 и L_2 гомологичны, по общему положению существует вложенный ориентированный (неоснащенный) кобордизм между ними

$$L \subset M \times I, \partial L = L_1 \sqcup L_2.$$

Ясно, что $[L_1] = [L_2]$, если и только если для некоторого такого L заданное оснащение ∂L продолжается на L . Так как M связно, мы можем считать L связным.

Покажем, что *оснащение края ∂L продолжается на все L если и только если относительный класс Штифеля-Уитни $\bar{w}_2(L) = 0$* . Согласно геометрическому определению выше это условие необходимо. Докажем его достаточность. Предположим, что $\bar{w}_2(L) = 0$. Стандартными методами теории препятствий можно показать, что тогда первые $n - 1$ векторных полей оснащения продолжаются до ортонормированной системы векторных полей на L (так как $n \geq 3$ и $\dim L = 2$ [18]). Так как L и $M \times I$ ориентируемы, а L_1 и L_2

естественно ориентированы, то в нормальном расслоении к L есть естественная ориентация, индуцирующая естественные ориентации L_1 и L_2 . Дополним построенную ортонормированную систему $n - 1$ нормальных векторов в каждой точке многообразия L единичным вектором до ортонормированного базиса, ориентированного положительно. В результате получим требуемое оснащение многообразия L . Тем самым утверждение, выделенное курсивом, доказано.

Завершение доказательства теоремы 1.3.1 в случае $w_2(M) \cdot \rho_2 H_2(M, \mathbb{Z}) \neq 0$. Нам достаточно показать, что в этом случае любые два оснащенных зацепления одинаковой степени оснащено кобордантны. Предположим, от противного, что L_1 и L_2 — пара (оснащено) некобордантных зацеплений, L — неоснащенный кобордизм между ними. Если $\bar{w}_2(L) = 0$, то сразу получаем противоречие (см. выделенное утверждение в начале доказательства теоремы 1.3.1). Поэтому предположим, что $\bar{w}_2(L) = 1$. Здесь $\bar{w}_2(L) \in H_0(L; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, так как L связно. Построим тогда новый кобордизм L' между теми же оснащенными зацеплениями L_1 и L_2 , для которого $\bar{w}_2(L') = 0$. Рассмотрим элемент $\beta \in H_2(M; \mathbb{Z})$, такой что $w_2(M) \cdot \rho_2 \beta = 1$. Пусть $K \subset M \times \frac{1}{2}$ — связное ориентируемое 2-подмногообразие общего положения, реализующее класс β . Тогда

$$\bar{w}_2(K) = w_2(M)|_K = w_2(M) \cdot [K] = w_2(M) \cdot \rho_2 \beta = 1 \pmod{2}.$$

Действительно, первое равенство в данной цепочке равенств следует из формулы Ву для классов Штифеля-Уитни суммы двух расслоений: $w_2(M)|_K = w_2(K) + w_1(K) \cdot \bar{w}_1(K) + \bar{w}_2(K)$, в которой $w_2(K) = w_1(K) = 0$, так как K — ориентируемое 2-многообразие. (Первое равенство может быть также доказано и непосредственно.) Второе равенство следует из геометрического определения классов Штифеля-Уитни, поскольку K связно.

Положим $L' = L \sharp K$ ($L \cap K = \emptyset$ по общему положению). Тогда $\bar{w}_2(L') =$

$\bar{w}_2(L) + \bar{w}_2(K) = 0$ (см. несложное утверждение 3.1.1 ниже). Тем самым L' можно оснастить. Полученное противоречие доказывает теорему 1.3.1. \square

Утверждение 3.1.1. Пусть $K^2, L^2 \subset M^{n+2}$ — пара непересекающихся связных ориентируемых подмногообразий с краем, причем на ∂K and ∂L заданы оснащения. Тогда

$$\bar{w}_2(K\sharp L) = \bar{w}_2(K) + \bar{w}_2(L),$$

где группы $H_0(X; \mathbb{Z}_2)$ отождествляются с \mathbb{Z}_2 для $X = K\sharp L, K$ и L .

Доказательство утверждения 3.1.1. Рассмотрим пару малых 2-дисков $k \subset K$ и $l \subset L$. Пусть $kl \cong S^1 \times I$ — узкая трубка, для которой $\partial kl = \partial k \sqcup \partial l$ и kl касается дисков k и l . Фиксируем тривиальные оснащения дисков k и l (и, следовательно, их границ ∂k и ∂l). Из геометрического определения выше легко видеть, что $\bar{w}_2(K\sharp L) = \bar{w}_2(K - k) + \bar{w}_2(kl) + \bar{w}_2(L - l)$. С другой стороны, аналогично можно проверить, что $\bar{w}_2(K) = \bar{w}_2(K - k) + \bar{w}_2(k)$ и $\bar{w}_2(L) = \bar{w}_2(L - l) + \bar{w}_2(l)$. Так как $\bar{w}_2(kl) = \bar{w}_2(k) = \bar{w}_2(l) = 0$, то из этих трех равенств получаем требуемое $\bar{w}_2(K\sharp L) = \bar{w}_2(K) + \bar{w}_2(L)$. \square

Завершение доказательства теоремы 1.3.1 в случае $w_2(M) \cdot \rho_2 H_2(M, \mathbb{Z}) = 0$. Нам достаточно показать, что для фиксированного $[L_1]$ отображение $[L_2] \mapsto w_2(L)$ определено корректно и дает биекцию $\deg^{-1} \alpha \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Корректность определения отображения $[L_2] \mapsto w_2(L)$. Пусть L'_1 и L'_2 — пара оснащенных зацеплений в M , оснащено кобордантных L_1 и L_2 соответственно. Пусть L' — (неоснащенный) кобордизм между ними. Достаточно показать, что $w_2(L) = w_2(L')$, причем только для случая, когда L_1 и L'_1, L_2 и L'_2, L и L' находятся в общем положении. Будем считать также, что $L_1, L'_1 \subset M \times 1, L_2, L'_2 \subset M \times 0$ и $L, L' \subset M \times [0, 1]$. Изменим знак первого векторного поля оснащений зацеплений L'_1 и L'_2 . Обозначим полученные оснащенные зацепления через $-L'_1$ и $-L'_2$ соответственно. Обозначим через $\bar{w}_2(-L')$ относительный класс Штифеля-Уитни для многообразия

L' с обращенными оснащениями границы $\partial L'$ (они построены выше). Тогда $\bar{w}_2(-L') = -\bar{w}_2(L')$. Далее, как $L_1 \sqcup (-L'_1)$, так и $L_2 \sqcup (-L'_2)$ оснащено кобордантно нулю, то есть пустому зацеплению. Пусть $L_+ \subset M \times [1, +\infty)$ и $L_- \subset M \times (-\infty, 0]$ — соответствующие оснащенные кобордизмы. Тогда по определению $\bar{w}_2(L_+) = \bar{w}_2(L_-) = 0$. По общему положению $L \cap L' = \emptyset$. Рассмотрим многообразие $K = L \cup L_+ \cup L' \cup L_-$. Из геометрического определения легко видеть, что

$$\bar{w}_2(K) = \bar{w}_2(L) + \bar{w}_2(L_+) + \bar{w}_2(-L') + \bar{w}_2(L_-) = \bar{w}_2(L) - \bar{w}_2(L').$$

Для доказательства корректности нам остается показать, что $w_2(K) = 0$. Спроектируем K на M с помощью "вертикальной" проекции $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Пусть β — целочисленный гомологический класс образа многообразия K при данной проекции. Но $\bar{w}_2(K) = \bar{w}_2(M) \cdot \rho_2 \beta = 0$. Корректность нашего определения доказана.

Инъективность отображения $[L_2] \mapsto w_2(L)$. Пусть L'_2 — оснащенное зацепление, L' — связный (неоснащенный) кобордизм между L_1 и L'_2 . Достаточно доказать, что если $\bar{w}_2(L) = \bar{w}_2(L')$, то $[L_2] = [L'_2]$. В самом деле, можно считать, что $L_1 \subset M \times 0$, $L_2 \subset M \times 1$, $L'_2 \subset M \times (-1)$, $L \subset M \times [0, 1]$ и $L' \subset M \times [-1, 0]$. Тогда $L \cup L'$ будет (неоснащенным) кобордизмом между L_2 и L'_2 . Согласно геометрическому определению выше $\bar{w}_2(L \cup L') = \bar{w}_2(L) + \bar{w}_2(L') = 0$, что доказывает требуемую инъективность.

Сюръективность отображения $[L_2] \mapsto w_2(L)$. Достаточно показать, что некоторый класс $[L_2]$ отображается в 1. Можно считать $L_1 \cong S^1$. Фиксируем данный гомеоморфизм. Так как M ориентируемо, то существует оснащение f_1 кривой L_1 . Обозначим через $f_1(x)$ репер оснащения в точке $x \in S^1$. Возьмем отображение $\varphi : S^1 \rightarrow SO(n)$, реализующее образующую $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}_2$ (что справедливо ввиду $n \geq 3$). Определим новое оснащение f_2 кривой L_1 формулой $f_2(x) = \varphi(x)f_1(x)$. Полученное оснащенная кривая L_2 — кривая L_1

с оснащением f_2 — искомая. Проверим это. Возьмем $L = L_1 \times I$. Легко видеть, что $\bar{w}_2(L) = 1$. Действительно, предположим противное. Тогда оснащения f_1 и f_2 продолжаются до оснащений цилиндра $L_1 \times I$. Это оснащение задает гомотопию между φ и постоянным отображением $S^1 \rightarrow SO(n)$, что противоречит выбору φ . Полученное противоречие завершает доказательство. \square

3.2 Оснащенные зацепления в многообразиях размерности 3

Предварительные замечания

Мы собираемся использовать следующее *геометрическое определение* нормального класса Эйлера, эквивалентное другим определениям (приводимые ниже определения принадлежат Д. Реповшу и М. Ценцелю). Пусть M^4 — ориентируемое замкнутое связное 4-многообразие. Пусть L^2 — связное ориентируемое многообразие, погруженное в многообразие M^4 . Пусть $\nu(L)$ — нормальное расслоение многообразия L в многообразии M . отождествим L с нулевым сечением расслоения $\nu(L)$. Введем естественную ориентацию расслоения $\nu(L)$. Возьмем сечение общего положения L' расслоения $\nu(L)$. *Нормальный класс Эйлера* $\bar{e}(L) = \bar{e}(\nu(L)) \in \mathbb{Z}$ — это разность между числом положительных и числом отрицательных точек пересечения сечений L и L' . Далее будем обозначать через $X \cap Y$ разность между числом положительных и числом отрицательных точек пересечения многообразий X и Y .

Мы также собираемся использовать следующее *геометрическое определение* относительного нормального класса Эйлера. Введем естественную ориентацию многообразия $M^3 \times [0; 1]$. Пусть $L_1 \subset M \times 1$ и $L_2 \subset M \times 0$ — пара оснащенных зацеплений, и пусть $L \subset M \times [0; 1]$ — кобордизмом (неоснащенный) между ними. Введем естественную ориентацию на многообразии L , то есть ориентацию, индуцирующую естественные ориентации на L_1 и L_2 . Введем также естественную ориентацию $\nu(L)$. Первое векторное поле оснащений на L_1 и L_2 можно рассматривать как сечение расслоения $\partial\nu(L)$. Пусть L' — продолжение общего положения этого сечения до сечения расслоения $\nu(L)$. *Относительный нормальный класс Эйлера* $\bar{e}(L) \in \mathbb{Z}$ — это разность между числом положительных и числом отрицательных точек пересечения сечений L и L' . Если мы обратим ориентацию многообразия $M^3 \times [0; 1]$ (и, следова-

тельно, многообразия L , потому что L ориентировано естественно), то знак целого числа $\bar{e}(L)$ изменится.

Можно показать, что класс $\bar{e}(L)$ является полным препятствием к продолжению оснащения границы ∂L до оснащения всего кобордизма L .

Лемма 3.2.1. (Д. Реповш и М. Ценцель) Пусть L^2 и M^4 — пара связных ориентируемых многообразий (M может иметь край). Предположим, что многообразия L погружены в многообразия M . Обозначим через $[L] \in H_2(M; \mathbb{Z})$ класс многообразия L . Обозначим через σ разность между числом положительных и числом отрицательных точек самопересечения многообразия L . Тогда

$$\bar{e}(L) = [L] \cdot [L] - 2\sigma,$$

где мы отождествляем группу $H_0(M; \mathbb{Z})$ с \mathbb{Z} . В частности, если $M = N^3 \times I$ для некоторого 3-многообразия N^3 , то $\bar{e}(L) = -2\sigma$.

Замечание 3.2.2. В частности, эта известная лемма влечет Теорему 1.2b из [61].

Доказательство Леммы 3.2.1. Пусть π — естественная проекция окрестности многообразия L в расслоении $\nu(L)$ на трубчатую окрестность многообразия L в многообразии M . Возьмем сечение общего положения L' расслоения $\nu(L)$, близкое к нулевому. Тогда лемма следует из равенства

$$\bar{e}(L) = L \cap L' = \pi L \cap \pi L' - 2\sigma = [L] \cdot [L] - 2\sigma.$$

□

Доказательство Теоремы 1.3.2

Чтобы построить взаимно однозначное соответствие $h : \deg^{-1} \alpha \rightarrow \mathbb{Z}_{2d(\alpha)}$, возьмем оснащенную окружность L_1 , для которой $\deg L_1 = \alpha$ (ясно, что такая окружность существует). Рассмотрим теперь произвольное оснащенное

зацепление L_2 , такое что $\deg L_2 = \alpha$. Так как L_1 и L_2 гомологичны, то существует (не оснащенный) кобордизм L между ними. По определению, положим $h(L_2) = \bar{e}(L) \pmod{2d(\alpha)}$. (Можно проверить, что этот инвариант совпадает с инвариантом Гомпфа, если $\alpha = 0$ и L_1 оснащено кобордантно пустому подмногообразию).

Из следующих утверждений (1) и (2) будет следовать, что отображение h определено корректно:

- (1) $h(L_2)$ не зависит от выбора L ; и
- (2) если L_2 и L'_2 оснащено кобордантны, то $h(L_2) = h(L'_2)$.

Докажем сначала утверждение (2). Предположим, что $L_1 \subset M \times 1$, $L_2 \subset M \times 0$, $L'_2 \subset M \times (-1)$, $L \subset M \times [0, 1]$. Пусть $L' \subset M \times [-1, 0]$ — оснащенный кобордизм между L_2 и L'_2 . По геометрическому определению относительного нормального класса Эйлера получаем, что $\bar{e}(L \cup L') = \bar{e}(L) + \bar{e}(L')$. Так как кобордизм L' — оснащенный, то $\bar{e}(L') = 0$. Таким образом, $\bar{e}(L \cup L') = \bar{e}(L)$, и мы получаем необходимое равенство $h(L_2) = h(L'_2)$.

Докажем теперь утверждение (1). Возьмем другой кобордизм общего положения L' между L_1 и L_2 . Предположим, что $L_2 \subset M \times 0$, две копии окружности L_1 содержатся в $M \times (\pm 1)$, и $L, L' \subset M \times [0, 1]$. Пусть $-L' \subset M \times [-1, 0]$ — кобордизм, симметричный кобордизму L' (мы рассматриваем симметрию $x \times t \rightarrow x \times (-t)$ на $M \times \mathbb{R}$). Возьмем оснащенную окружность L'_1 общего положения, такую что объединение $L_1 \cup L'_1$ оснащено кобордантно нулю, то есть пустому подмногообразию. Обозначим через Δ данный оснащенный нуль-кобордизм. Предположим, что две копии L'_1 содержатся в $M \times (\pm 1)$, и что $\Delta \subset [1; +\infty)$.

Обозначим

$$K = (-L') \cup L \cup \Delta \cup (L'_1 \times [-1, 1]) \cup (-\delta).$$

По геометрическому определению относительного нормального класса Эйле-

ра мы получаем

$$\bar{e}(K) = \bar{e}(-L') + \bar{e}(L) + \bar{e}(\Delta) + \bar{e}(L'_1 \times [-1, 1]) + \bar{e}(-\Delta).$$

Кобордизмы Δ , $-\Delta$ и $L'_1 \times [-1; 1]$ — оснащенные, поэтому $\bar{e}(\Delta) = \bar{e}(-\Delta) = \bar{e}(L'_1 \times [-1, 1]) = 0$. Так как симметрия $x \times t \rightarrow x \times (-t)$ обращает ориентацию многообразия $M \times [-1; 1]$, то по геометрическому определению относительного нормального Эйлера класса $\bar{e}(-L') = -\bar{e}(L')$. Таким образом, $\bar{e}(K) = \bar{e}(L) - \bar{e}(L')$. Теперь (1) следует из равенства

$$\bar{e}(K) = -2\sigma = 2(-L' \cup L) \cap (L'_1 \times \mathbb{R}) = 2K \cap (L''_1 \times \mathbb{R}) = 2[pK] \cdot \alpha = 0 \pmod{2d(\alpha)}.$$

Здесь σ — разность между числом положительных и числом отрицательных точек самопересечения многообразия K , а первое равенство следует из Леммы 3.2.1. Второе равенство следует из построения многообразия K . Далее, $L''_1 \subset M$ — окружность общего положения, близкая к окружности L'_1 и гомологичная ей. По общему положению L'_1 и L''_1 не пересекаются. Таким образом, $(-L' \cup L) \cap (L'_1 \times [-1, 1]) = K \cap (L''_1 \times [-1, 1])$.

Так как $-\Delta$ получается из Δ симметрией $x \times t \rightarrow x \times (-t)$, то $K \cap (L''_1 \times [1, +\infty)) = -K \cap (L''_1 \times (-\infty, -1])$, откуда получаем третье равенство. Обозначим через $p : M \times I \rightarrow M$ естественную проекцию. Тогда по общему положению мы получим четвертое равенство, потому что гомологический класс L''_1 совпадает с α . Последнее равенство следует из определения числа $d(\alpha)$. Итак, доказательство утверждения (1) закончено.

Инъективность отображения h . Пусть L_2 и L'_2 — пара оснащенных зацеплений, для которых $h(L_2) = h(L'_2)$. Докажем, что L_2 и L'_2 оснащено кобордантны. Пусть $L_2 \subset M \times 1$, $L_1 \subset M \times 0$ и $L'_2 \subset M \times (-1)$. Пусть $L \subset M \times [0, 1]$ и $-L' \subset M \times [-1, 0]$ — кобордизмы между парами зацеплений L_1 и L_2 , L_1 и L'_2 соответственно. Так как $h(L_2) = h(L'_2)$, то $\bar{e}(L) = -\bar{e}(-L') \pmod{2d(\alpha)}$. Поэтому $\bar{e}(-L' \cup L) = 2d(\alpha)y$ для некоторого $y \in \mathbb{Z}$.

По двойственности Пуанкаре существует элемент $\beta \in H_2(M; \mathbb{Z})$, такой что $\alpha \cap \beta = d(\alpha)$. Пусть $K \subset M \times 0$ — связное ориентируемое подмногообразие общего положения, реализующее класс $y\beta$. Заметим, что $\bar{e}(K) = 0$ по Лемме 3.2.1. Обозначим через K' связанную сумму многообразий $(-L' \cup L)$ и K в $M \times [-1; 1]$. По геометрическому определению относительного нормального класса Эйлера $\bar{e}(K') = \bar{e}(-L' \cup L) + \bar{e}(K) = 2d(\alpha)y$.

Разность между числом положительных и числом отрицательных точек самопересечения многообразия K' равна $y\beta \cap \alpha = d(\alpha)y$. Пусть K'' — новый кобордизм между L_2 и L'_2 , полученный из K' устранением точек самопересечения. (Здесь мы используем преобразование в окрестности каждой точки самопересечения, аналогичное преобразованию, переводящему пару плоскостей $x = 0, y = 0$ и $z = 0, t = 0$ в поверхность

$$\begin{cases} x(\tau, \varphi) = \tau \cos \varphi, \\ y(\tau, \varphi) = \tau \sin \varphi, \\ z(\tau, \varphi) = (1 - \tau) \cos \varphi, \\ t(\tau, \varphi) = (1 - \tau) \sin \varphi; \end{cases}$$

в \mathbb{R}^4 с координатами (x, y, z, t)). Пользуясь геометрическим определением нормального класса Эйлера, легко доказать, что устранение каждой точки самопересечения уменьшает число $\bar{e}(K')$ на ± 2 , в зависимости от знака точки (так как наше преобразование локально, то данное утверждение достаточно доказать для замкнутого многообразия K' , а этот случай следует из Леммы 3.2.1). Значит, $\bar{e}(K'') = \bar{e}(K') - 2d(\alpha)y = 0$. Таким образом, кобордизм K'' можно оснастить, следовательно, зацепления L_2 и L'_2 оснащено кобордантны.

Сюръективность отображения h . Построим последовательность оснащенных 1-подмногообразий $L_1, L_2, \dots, L_{2d(\alpha)}$, такую чтобы для каждого целого $j = 1, \dots, 2d(\alpha)$ выполнялось равенство $h(L_j) = j - 1$. Возьмем неко-

торый гомеоморфизм $L_1 \cong S^1$. Обозначим через f_1x базисный вектор фиксированного оснащения зацепления L_1 в точке $x \in S^1$. Возьмем отображение $\varphi : S^1 \rightarrow SO(2)$, реализующее образующую группы $\pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$. Для $j = 2, \dots, 2d(\alpha)$ определим оснащение f_j окружности L_1 формулой $f_j(x) = \varphi^{j-1}(x)f_1x$. Пусть L_j — подмногообразие L_1 с оснащением f_j . Без потери общности можно считать, что $h(L_2) \geq 0$.

Докажем, что $h(L_2) = 1$. Тогда аналогично можно будет показать, что $h(L_j) = j - 1$. Рассмотрим кобордизм $L = L_1 \times I$. Достаточно построить нормальное векторное поле общего положения на L , продолжающее первое векторное поле оснащений на L_1 и L_2 и имеющее единственную особую точку. Нормальное расслоение к L в $M \times \mathbb{R}$ тривиально. отождествим это расслоение с $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L$ и обозначим через $p_1, p_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times L \rightarrow \mathbb{R}$ проекции на первый и второй сомножители, соответственно. Далее, обозначим через f_2 первое векторное поле оснащения f_2 . Ясно, что функция p_1f_2x , где $x \in L_2$, имеет в точности два нуля. Соединим их некоторой дугой $A \subset L$.

Аналогично, соединим дугой B пару нулей функции p_2f_2x . Ясно, что мы можем выбрать дуги A и B пересекающимися трансверсально в единственной точке. Возьмем нормальное векторное поле общего положения F_1 на L , продолжающее векторные поля p_1f_2, p_1f_1 , и такое что $p_2F_1 = 0, p_1F_1|_A = 0$. Аналогично, продолжим векторные поля p_2f_2 и p_2f_1 до нормального векторного поля F_2 таким образом, чтобы выполнялись равенства $p_1F_2 = 0, p_2F_2|_B = 0$. Сумма $F_1 + F_2$ с единственным нулем в точке $A \cap B$ — искомое векторное поле. \square

Глава 4

Рамсеевская теория зацеплений и вложимость произведений графов

В данной главе мы работаем в кусочно-линейной категории, за исключением случаев, когда явно оговорено обратное.

4.1 Доказательство для случая (1) и некоторые эвристические рассуждения

Сначала докажем все утверждения Теоремы 1.4.1, кроме утверждения о невложимости в случае (2).

Доказательство вложимости в Теореме 1.4.1. Нам потребуются следующие два простых результата:

(*) Если полиэдр $K \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ и $d > 0$, то $K \times I, K \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ (это утверждение достаточно доказать для $K = \mathbb{R}^d \cong \text{Int } D^d$, для которого оно тривиально).

(**) Для любого d -полиэдра K^d цилиндр $K^d \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ [60].

Положим $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. По общему положению $G \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. Если $i \neq 0$, то согласно утверждению (**) имеем $G \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. И если, скажем, $G_1 \subset D^2$, то согласно (**) получаем $D^2 \times G_2 \times \cdots \times G_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, откуда $G \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Применяя утверждение (*) достаточное количество раз, мы получаем доказательство утверждения вложимости во всех случаях. \square

Доказательство невложимости в случае (1). Заметим, что любой связный граф, отличный от точки, I и S^1 , содержит триод Y . Таким образом доста-

точно показать, что $Y^n \times I^{s+i} \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+s+i-1}$. Так как $CK \times CL \cong C(K * L)$ и $K * \sigma_0^0 = CK$ для любых полиэдров K и L , то

$$Y^n \times I^{s+i} = (C\sigma_2^0)^n \times (C\sigma_0^0)^{s+i} \cong \underbrace{C \dots C}_{s+i+1 \text{ раз}} (\sigma_2^0)^{*n}.$$

Если полиэдр $K \not\hookrightarrow S^d$, то конус $CK \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ (потому что мы работаем в кусочно-линейной категории). Таким образом, невложимость в случае (1) следует из $(\sigma_2^0)^{*n} \not\hookrightarrow S^{2n-2}$ [33] (а также из $Y^n \not\hookrightarrow S^{2n-1}$ [74]). \square

Таким образом, нам осталось доказать невложимость в случае (2). Чтобы сделать наше рассуждение более понятным, мы предварим его эвристическим рассмотрением трех простейших случаев.

Пример 4.1.1. Докажем сначала, что граф Куратовского K_5 не планарен. Предположим, что $K_5 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть O — вершина графа K_5 и D — малый диск с центром O . Тогда пересечение $K_5 \cap \partial D$ состоит из 4 точек. Обозначим их через A, B, C, D , в порядке следования на границе ∂D (по часовой стрелке). Отметим, что пары A, C и B, D являются концами двух непересекающихся дуг, содержащихся в $K_5 - \text{Int } D$, и, следовательно, в $\mathbb{R}^2 - \text{Int } D$. Поэтому циклы $OAC, OBD \subset K_5$ пересекают друг друга трансверсально ровно в одной точке O , что невозможно на плоскости. Значит, $K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

Пример 4.1.2. Теперь обрисует в общих чертах доказательство того, что $K_5 \times K_5 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$. (Другое доказательство дано в [86]). Напомним, что если K — полиэдр и $O \in K$ является вершиной, то звезда $\text{St}O$ есть объединение всех замкнутых клеток полиэдра K , содержащих O , а линк $\text{Lk}O$ есть объединение всех замкнутых клеток звезды $\text{St}O$, не содержащих O . В нашем предыдущем примере $\text{Lk}O$ состоял из 4 точек, и доказательство было основано на том факте, что есть две пары точек линка $\text{Lk}O$, зацепленных в ∂D . Теперь возьмем $K = K_5 \times K_5$. Мы получаем $\text{Lk}O \cong K_{4,4}$. Следовательно, по теореме Закса, приведенной во введении, у любого вложения $\text{Lk}O \hookrightarrow \partial D^4$ есть пара

зацепленных циклов $\alpha, \beta \in \text{Lk}O$. Таким образом, мы можем доказать, что $K \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$ аналогично Примеру 4.1.1, если мы построим две непересекающиеся поверхности в полиэдре $K - \text{St}O$ с краями α и β соответственно. Это построение несложно, детали приведены в доказательстве Леммы 4.2.1 ниже. Аналогично этому можно показать, что $\sigma_6^2 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^4$ (другое доказательство дано в [33]).

Пример 4.1.3. Докажем, что $K_5 \times S^1 \not\hookrightarrow \mathbb{R}^3$. (Другое доказательство было дано Томом Таккером; этот факт можно доказать также аналогично Примеру 4.1.2). Предположим, что $K_5 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$; тогда согласно утверждению (*) получаем $K_5 \times S^1 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Но $S^1 \times S^1 \supset K_5$, таким образом $K_5 \times K_5 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$, что противоречит Примеру 4.1.2.

4.2 Доказательство невложимости в случае (2)

Доказательство невложимости в случае (2) по модулю некоторых лемм. Будем говорить, что кусочно линейное отображение $f : K \rightarrow L$ между двумя полиэдрами K и L с фиксированными триангуляциями является *почти вложением*, если для любых двух *непересекающихся* замкнутых клеток $a, b \subset K$ мы имеем $fa \cap fb = \emptyset$ [19].

Лемма 4.2.1. (для $n = 2$ [86]) Полиэдр $(K_5)^n$ не является почти вложимым в \mathbb{R}^{2n} .

Доказательство невложимости в случае (2) Теоремы 1.4.1 по модулю 4.2.1. Согласно критерию Куратовского планарности графов любой непланарный граф содержит подграф, гомеоморфный либо K_5 , либо $K_{3,3}$. Таким образом, мы можем предположить, что каждый G_k является либо графом K_5 , либо графом $K_{3,3}$. Рассуждая аналогично Примеру 4.1.3 мы можем свести все к случаю $s = 0$. Будем считать, что $s = 0$. Теперь мы собираемся заменить все графы $K_{3,3}$ на K_5 .

Отметим, что граф K_5 почти вложим в граф $K_{3,3}$ (иллюстрация 4.1). Действительно, отобразим вершину графа K_5 в середину ребра графа $K_{3,3}$, а остальные четыре вершины — на четыре вершины графа $K_{3,3}$, не принадлежащих этому ребру. Отобразим каждое ребро e графа K_5 на кратчайшую (в смысле числа вершин) дугу в $K_{3,3}$, соединяющую образы концов ребра e . Требуемое почти вложение построено.

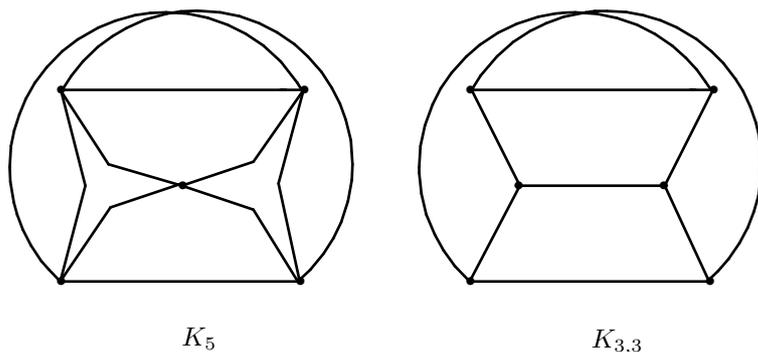


Рис. 4.1: Почти вложение графа K_5 в граф $K_{3,3}$

Теперь заметим, что произведение почти вложений является почти вложением, и композиция почти вложения и вложения является почти вложением. Значит, невложимость в случае (2) Теоремы 1.4.1 следует из Леммы 4.2.1. \square

Для доказательства Леммы 4.2.1 нам потребуется следующее понятие. Пусть A, B — пара кусочно-линейных n -мерных многообразий с краем, и пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, g : B \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — пара кусочно-линейных отображений, таких что $f\partial A \cap g\partial B = \emptyset$. Возьмем пару кусочно-линейных отображений $\bar{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и $\bar{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ общего положения, близких к f и к g , соответственно. Тогда $\text{mod } 2$ -индексом пересечения $fA \cap gB$ назовем число точек $\text{mod } 2$ в множестве $\bar{f}A \cap \bar{g}B$. Мы собираемся использовать следующий простой результат:

(***) если A и B — замкнутые многообразия, то $fA \cap gB = 0$.

(Это следует из обращения в нуль гомологической формы пересечения пространства \mathbb{R}^{2n}). Лемма 4.2.1 будет выведена из следующего обобщения

Леммы 1.4.2:

Лемма 4.2.2. Пусть $L = (\sigma_3^0)^{*n}$. Тогда для любого почти вложения $CL \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ найдутся две непересекающиеся $(n - 1)$ -мерные сферы $\alpha, \beta \subset L$, такие что индекс пересечения $fC\alpha \cap fC\beta = 1$.

Доказательство Леммы 4.2.1 по модулю Леммы 4.2.2. Предположим, что существует почти вложение $f : K = K_5 \times \dots \times K_5 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Пусть $O = O_1 \times \dots \times O_n$ — вершина полиэдра K . По известной формуле для линка вершины

$$\text{Lk}O \cong \text{Lk}O_1 * \dots * \text{Lk}O_n \text{ и } \text{St}O = C\text{Lk}O \cong C(\sigma_3^0)^{*n}.$$

Пусть $\alpha, \beta \subset \text{Lk}O$ — пара $(n - 1)$ -мерных сфер, предоставляемых Леммой 4.2.2. отождествим $\text{Lk}O$ и $\text{Lk}O_1 * \dots * \text{Lk}O_n$. Так как α и β не пересекаются, то для каждого $k = 1, \dots, n$ множества $\alpha \cap \text{Lk}O_k$ и $\beta \cap \text{Lk}O_k$ не пересекаются, и каждое из них состоит ровно из 2 точек. По определению положим $\{A_k, C_k\} := \alpha \cap \text{Lk}O_k$ и $\{B_k, D_k\} := \beta \cap \text{Lk}O_k$. Рассмотрим два n -мерных тора

$$T_\alpha = O_1 A_1 C_1 \times \dots \times O_n A_n C_n \text{ и } T_\beta = O_1 B_1 D_1 \times \dots \times O_n B_n D_n,$$

содержащихся в полиэдре K .

Ясно, что $T_\alpha \supset C\alpha$, $T_\beta \supset C\beta$ и $T_\alpha \cap T_\beta = O$. Так как f — почти вложение, то $fT_\alpha \cap fT_\beta = fC\alpha \cap fC\beta$. Значит, $fT_\alpha \cap fT_\beta = 1$ по выбору α и β . Тем самым мы получаем противоречие с утверждением (***). Таким образом, $K \not\hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. \square

Доказательство Леммы 4.2.2. Доказательство аналогично доказательству теоремы Конвея-Гордона-Закса и основано на ключевой идее работы [33], только мы используем более тонкое препятствие. Читатель может ограничиться рассмотрением случая $n = 2$, и получить таким образом альтернативное доказательство теоремы Закса. (Доказательство для $n > 2$ полностью аналогично таковому для $n = 2$).

Мы покажем, что для любого $(n - 1)$ -мерного симплекса c полиэдра L и любого почти вложения $f : CL \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ существует пара непересекающихся $(n - 1)$ -мерных сфер $\alpha, \beta \subset L$, таких что $\alpha \supset c$ и индекс пересечения $fC\alpha \cap fC\beta = 1$.

Для почти вложения $f : CL \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ обозначим через $v(f) = \sum(fC\alpha \cap fC\beta) \bmod 2$ препятствие Ван Кампена к незацепленной вложимости. Здесь сумма берется по всем парам непересекающихся $(n - 1)$ -мерных сфер $\alpha, \beta \subset L$, таких что $c \subset \alpha$. Достаточно доказать, что $v(f) = 1$. Наше доказательство состоит из 2 шагов: сначала мы покажем, что $v(f)$ не зависит от f , а потом вычислим $v(f)$ для некоторого "стандартного" вложения $f : CL \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.

Докажем, что $v(f)$ не зависит от f (сравни с [33, 14]). Возьмем любые два почти вложения $F_0, F_1 : CL \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. По общему положению в кусочно линейной категории, существует гомотопия $F : I \times CL \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ между ними, такая что

1) существует только конечное число *особых* моментов времени t , то есть моментов $t \in I$, таких что F_t не есть почти вложение;

2) для каждого особого t найдется ровно одна пара непересекающихся $(n - 1)$ -мерных симплексов $a, b \subset L$, таких что $F_tCa \cap F_tCb \neq \emptyset$;

3) пересечение $F_tCa \cap F_tCb$ является "трансверсальным во времени", то есть пересечение $F(t \times Ca) \cap F([t - \varepsilon, t + \varepsilon] \times b)$ трансверсально для некоторого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим особый момент t . Свойство 3) означает, что индекс пересечения $F_tCa \cap F_tCb$ пары непересекающихся $(n - 1)$ -мерных сфер $\alpha, \beta \subset L$ изменяется при увеличении t , если и только если либо $\alpha \supset a$, и $\beta \supset b$, либо $\alpha \supset b$ и $\beta \supset a$. Такие пары (α, β) , удовлетворяющие дополнительному условию $\alpha \supset c$, мы назовем *критическими*. Если $c \cap (a \cup b) = \emptyset$, то существуют ровно 2 критические пары. Действительно, мы имеем $\alpha \supset a \cup c$ или $\alpha \supset b \cup c$. Каждый из этих двух условий определяют единственную критиче-

скую пару. Если же $c \cap (a \cup b) \neq \emptyset$, то существуют две различные вершины $v, w \in L - (a \cup b \cup c)$, принадлежащие одной и той же копии σ_3^0 в рассматриваемом джойне. Тем самым найдется инволюция на множестве критических пар, не имеющая неподвижных точек. Действительно, \mathbb{Z}_2 действует на множество вершин L , меняя местами v и w , что определяет действие на множестве критических пар, потому что $v, w \notin a \cup b \cup c$. Значит, число критических пар четно, поэтому $v(F_0) = v(F_1)$.

Теперь докажем, что $v(f) = 1$ для некоторого "стандартного" вложения $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (см. иллюстрацию 4.2). Определим стандартное вложение $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Возьмем набор n прямых общего положения в пространстве $\mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Для каждого $k = 1, \dots, n$ возьмем четверку σ_k точек на k -й прямой. Рассматривая джойн всех четверок σ_k , мы получим вложение $L \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$. Стандартное вложение $f : CL \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ определяется как конус над построенным вложением. В дальнейшем мы будем опускать f для обозначений f -образов. Ясно, что для пары непересекающихся $(n-1)$ -мерных сфер $\alpha, \beta \subset L$ мы имеем $C\alpha \cap C\beta = \text{lk}(\alpha, \beta) \pmod 2$. Покажем, что $\text{lk}(\alpha, \beta) = 1 \pmod 2$, если и только если для каждого $k = 1, \dots, n$ 0-мерные сферы $\alpha \cap \sigma_k$ и $\beta \cap \sigma_k$ зацеплены на k -й прямой \mathbb{R}^1 . Действительно, пусть I — отрезок, соединяющий пару точек $\alpha \cap \sigma_1$. Обозначим $D_\alpha = I * (\alpha \cap \sigma_2) * \dots * (\alpha \cap \sigma_n)$, тогда $\partial D_\alpha = \alpha$. Пересечение $D_\alpha \cap \beta$ не пусто $\pmod 2$, если и только если 0-мерные сферы $\alpha \cap \sigma_1$ и $\beta \cap \sigma_1$ зацеплены на первой прямой \mathbb{R}^1 . Это пересечение трансверсально, если и только если $\alpha \cap \sigma_k$ и $\beta \cap \sigma_k$ зацеплены на всех остальных прямых \mathbb{R}^1 . Теперь очевидно, что существует ровно одна пара α, β , такая что $\alpha \supset c$ и $C\alpha \cap C\beta = 1 \pmod 2$. Значит, $v(f) = 1$, что доказывает лемму. \square

В заключение приводим доказательство Теоремы 1.4.1 в топологической категории (принадлежащее рецензенту журнала *Fundamenta Mathematicae*):

Доказательство Теоремы 1.4.1 в топологической категории. Для коразмер-

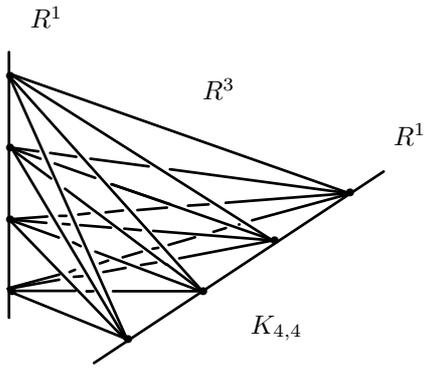


Рис. 4.2: Построение 'стандартного' почти вложения $CK_{4,4} \rightarrow \mathbb{R}^4$

ности ≥ 3 утверждение Теоремы 1.4.1 в топологической категории следует из утверждения этой теоремы в кусочно линейной категории, ввиду результата Брианта [6]. Аналогично Примеру 4.1.3, мы сводим случаи коразмерности 1 и 2 к случаю коразмерности 3. \square

Глава 5

Препятствие Ван Кампена и аппроксимируемость вложениями

5.1 Доказательство критерия аппроксимируемости вложениями

Теорема 1.5.3 следует из Примера 1.5.1 и Лемм 5.1.1, 5.1.2 (для $K \cong I, S^1$) и 5.1.3, которые интересны и сами по себе.

Лемма 5.1.1. (для $K \cong I$ [47]) *Предположим, что симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ графа $K \cong S^1$ или $K \cong I$ не имеет трансверсальных самопересечений. Тогда если φ' аппроксимируется вложениями, то и φ аппроксимируется вложениями.*

Лемма 5.1.2. А) [47] *Если симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, то и отображение φ' аппроксимируется вложениями.*

V) *Если симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется mod 2-вложениями, то отображение φ' аппроксимируется mod 2-вложениями.*

Здесь mod 2-вложение — это отображение общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что для каждой пары a, b непересекающихся ребер графа K множество $fa \cap fb$ состоит из четного числа точек. Определение производной для симплициального отображения произвольного графа K приводится ниже.

Лемма 5.1.3. Пусть $\varphi : S^1 \rightarrow G$ — кусочно линейное отображение, которое является симплициальным для некоторой триангуляции окружности S^1 с k вершинами. Тогда либо область определения отображения $\varphi^{(k)}$ пуста, либо $\varphi^{(k)}$ является стандартной намоткой степени $d \neq 0$.

Это число d можно рассматривать как обобщение степени для любого симплициального отображения $S^1 \rightarrow G$. Таким образом, интересно получить решение следующей задачи (оно может также сделать применение Критериев 1.5.3 более удобным): найти простой алгоритм для вычисления степени намотки $\varphi^{(\infty)}$ для данного кусочно линейного отображения $\varphi : S^1 \rightarrow G$.

Далее мы используем следующее обобщение определения производной (для пути), данного в §1.5.

Определение 5.1.4 (Производная симплициального отображения). [47] (см. иллюстрацию 1.1, а также часть иллюстрации 5.3 ниже) Пусть дано симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G$. Сначала построим граф K'_φ , который будет областью определения производной φ' . Под φ -компонентой графа K мы подразумеваем любую связную компоненту α множества $\varphi^{-1}a$, отображаемую на a , для некоторого ребра $a \subset G$. Множество вершин графа K'_φ находится в 1-1 соответствии с множеством всех φ -компонент. Для φ -компоненты $\alpha \subset K$ обозначим через $\alpha' \in K'_\varphi$ соответствующую вершину. Две вершины α' и β' соединены ребром в графе K'_φ , если и только если $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Производная $\varphi' : K'_\varphi \rightarrow G'$ — это симплициальное отображение, определенное на вершинах графа K'_φ формулой $\varphi'\alpha' = (\varphi\alpha)'$. В дальнейшем заменим φ' на сюръективное ограничение $\varphi' : K'_\varphi \rightarrow \varphi'K'_\varphi$. (В оригинальном определении статьи [47] граф G' обозначается как $D(G)$, производная φ' как $d[\varphi]$, и граф K'_φ как $D(\varphi, K)$.)

Доказательство Леммы 5.1.3. Будем говорить, что симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G$ является *сильно невырожденным*, если для каждого ребра

$a \subset K$ образ φa является ребром G (а не вершиной) и для каждой пары $a, b \subset K$ смежных ребер мы имеем $\varphi a \neq \varphi b$. Обозначим через $|K|$ число вершин в графе K . Ясно, что если $K \cong S^1$, то $|K'_\varphi| \leq |K|$, причем $|K'_\varphi| = |K|$, только если φ является сильно невырожденным. Поэтому лемму достаточно доказать только в последнем случае (потому что случаи, когда $K'_\varphi \cong I$ или граф K'_φ является точкой, тривиальны). В случае сильно невырожденного отображения лемма очевидна, но мы приводим доказательство для полноты.

Докажем, что если сильно невырожденное сюръективное симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G$ графа $K \cong S^1$ не является стандартной намоткой степени, отличной от нуля, то $|G'| > |G|$. Заметим, что для сильно невырожденного отображения $\varphi : S^1 \rightarrow G$ граф G не содержит висящих вершин. Если степень каждой вершины графа G равна двум, то φ является сильно невырожденным симплициальным отображением $S^1 \rightarrow S^1$, следовательно, φ является стандартной намоткой, вопреки нашему предположению. Значит, граф G содержит вершину степени по крайней мере 3. Тогда, по доказанному выше, число ребер графа G больше числа вершин, следовательно, $|G'| > |G|$. Поскольку для симплициального на отображения $\varphi : K \rightarrow G$ мы имеем $1 \leq |G| \leq |K|$, то $|G|, |G'|, \dots, |G^{(k)}| \leq k$ (напомним, что по определению отображение φ' сюръективно). Таким образом, есть только две возможности: любой одна (а значит, и k -я тоже) из производных $\varphi, \dots, \varphi^{(k)}$ — стандартная намотка ненулевой степени, либо $|G^{(k)}| = 0$, то есть область определения отображения $\varphi^{(k)}$ пуста. \square

Теперь приведем обещанное в §1.5 построение вложения $G'_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^2$. Нам будет удобнее рассматривать *утолщения* графов, а не вложения графов в плоскость. В этом смысле обещанное построение эквивалентно построению *производной утолщения* (см. определение утолщения N' ниже). Далее мы предполагаем, что фиксировано *утолщение* N графа G на плоскости (то

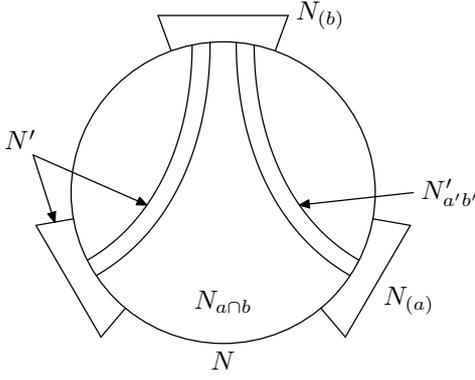


Рис. 5.1: Производная утолщения графа

есть, регулярная окрестность графа $G \subset \mathbb{R}^2$). Мы также предполагаем, что также фиксировано разложение на ручки (обозначаемое через S')

$$N = \bigcup_{x \in \text{множество вершин графа } G} N_x \cup \bigcup_{a \in \text{множество ребер графа } G} N_{(a)},$$

соответствующее графу G , где N_x обозначают 2-мерные диски, а $N_{(a)}$ — присоединенные к ним ленточки. Обозначим через N_a ограничение $N_x \cup N_{(a)} \cup N_y$ утолщения N на ребро $a = xy$. Фактически, мы не используем планарность N в последующих рассуждениях. Можно считать, что утолщение N является всего лишь ориентируемым (ориентируемость необходима для утверждения Примера 1.5.1). Дадим определение производной N' утолщения N . Это утолщение N' зависит от симплициального отображения $\varphi : K \rightarrow G \subset N$ и определено корректно, только если φ не содержит трансверсальных самопересечений. Кроме того, в случае произвольного графа K мы должны также предположить, что не существует пары дуг $i, j \subset K$ (не обязательно непересекающихся!), таких что пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ трансверсально.

Определение 5.1.5 (Производная утолщения графа, см. иллюстрацию 5.1).

Пусть $\varphi : K \rightarrow G \subset N$ — симплициальное отображение, такое что для любой пары дуг $i, j \subset K$ пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ (возможно пустое) не трансверсально. Возьмем по диску $N'_{a'}$ для каждой вершины $a' \in G'$ и по ленточке $N'_{(a'b')}$ для каждого ребра $a'b' \subset G'$. Тогда N' вместе с его разложением ручки S' определяется формулой $N' = \bigcup N'_{a'} \cup \bigcup N'_{(a'b')}$. Здесь мы полагаем $N'_{(a'b')} = N_{(a)}$

для каждого ребра $a \subset G$. Для каждой пары $a, b \subset G$ смежных ребер, для которых $(\varphi')^{-1}(a'b') \neq \emptyset$, мы соединяем два диска N'_a и N'_b узкой ленточкой $N'_{(a'b')}$ в $N_{a \cap b}$. Поскольку пересечение дуг $a \cup b$ и $c \cup d$ не трансверсально ни для какой пары смежных ребер $c, d \subset K$, то мы можем выбрать ленточки $N'_{(a'b')}$ так, чтобы они не пересекались для различных ребер $a'b'$.

Это определение можно рассматривать как построение вложения $N' \rightarrow N$, а также вложения $G'_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^2$. Заметим, что разбиение на ручки S' и топологический тип утолщения N' не зависят от выбора ленточек $N'_{(a'b')}$ в нашем определении. Альтернативное определение производной $D(N)$ утолщения N из статьи [47] не зависит также от выбора отображения φ . Утолщение N' в нашей статье является подутолщением утолщения $D(N)$ (определение которого приводится в статье [47]), соответствующим подграфу $G'_\varphi \subset G'$.

Ясно, что для исследования аппроксимируемости вложениями симплициальных отображений $K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ достаточно рассматривать только приближения $f : K \rightarrow N$. Теперь мы собираемся свести задачу аппроксимируемости вложениями данного отображения к задаче существования вложения, близкого к нему в некотором смысле (S -близкого).

Определение 5.1.6 (S -аппроксимация). [47] Отображение $f : K \rightarrow N$ называется S -аппроксимацией отображения φ , или, отображение f S -близко к φ , если выполняются следующие условия:

- (i) $fx \subset N_{\varphi x}$ для каждой вершины или ребра x графа K ;
- (ii) $x \cap f^{-1}N_{(\varphi x)}$ связно для каждого ребра x графа K с невырожденным образом φx .

Согласно Утверждению 2.9 статьи [47], отображение $\varphi : K \rightarrow G$ аппроксимируется вложениями, если и только если существует вложение $f : K \rightarrow N$, S -близкое к φ .

Кусочно линейное отображение $\varphi : K \rightarrow N$ называется *вырожденным*,

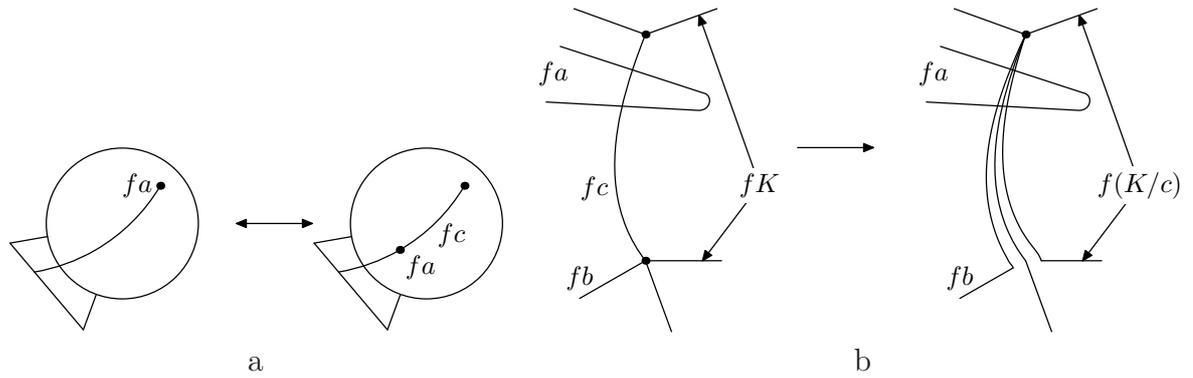


Рис. 5.2: Перестройки вырожденных отображений

если φc является точкой для некоторого ребра $c \subset K$. Докажем следующее несложное Утверждение о стягивании ребра 5.1.7, которое в некотором смысле позволяет считать, что в Леммах 5.1.1 и 5.1.2 отображение φ является невырожденным.

Утверждение 5.1.7 (О стягивании ребра). Пусть $\varphi : K \rightarrow G$ — симплициальное отображение, такое что φc является точкой для некоторого ребра $c \subset K$. Пусть K/c — граф, полученный из графа K стягиванием ребра c , и пусть $\varphi/c : K/c \rightarrow G$ — соответствующее отображение. Тогда

$$D) K'_{\varphi/c} = K'_\varphi, G'_\varphi = G'_{\varphi/c} \text{ и } (\varphi/c)' = \varphi'.$$

A) для $K \cong S^1$ или $K \cong I$ отображение φ/c аппроксимируется вложениями, если и только если φ аппроксимируется вложениями.

K) для произвольного графа K , если φ аппроксимируется вложениями, то φ/c аппроксимируется вложениями.

V) Если φ аппроксимируется mod 2-вложениями, то φ/c аппроксимируется mod 2-вложениями.

Доказательство Утверждения 5.1.7. D) очевидно.

A) Докажем прямую импликацию. Пусть $f : K/c \rightarrow N$ — вложение, S -близкое к φ/c . Пусть $a \subset K$ — ребро, смежное с c (если c — связная компонента графа K , то требуемое утверждение очевидно). Добавим новую вершину к ребру a графа K/c (иллюстрация 5.2.a). Так как $K \cong S^1$ или $K \cong I$, то

полученный граф изоморфен K и вложение $f : K \rightarrow N$ — искомое. Обратная импликация — частный случай утверждения К).

К) Пусть $f : K \rightarrow N$ — вложение, S -близкое к φ . Сделаем перестройку, показанную на иллюстрации 5.2.b. Получим вложение $\bar{f} : K/c \rightarrow N$, S -близкое к φ/c .

В) Пусть f — mod 2-вложение, S -близкое к φ . Сделаем перестройку, показанную на иллюстрации 5.2.b. Получим S -близкое к φ/c отображение $\bar{f} : K/c \rightarrow N$. Достаточно доказать, что $|\bar{f}a \cap \bar{f}b| = 0 \pmod{2}$ для каждой пары непересекающихся ребер $a, b \subset (K/c)$. Действительно, a и b являются ребрами также и в графе K , причем по крайней мере одно из них не смежно с c (потому что a и b являются непересекающимися в K/c). Если ни a , ни b не смежно с c , то $|\bar{f}a \cap \bar{f}b| = |fa \cap fb| = 0 \pmod{2}$. Если, например, $b \subset K$ смежно с c и a не смежно с c , то $|\bar{f}a \cap \bar{f}b| = |fa \cap fb| + |fa \cap fc| = 0 \pmod{2}$, что доказывает утверждение. \square

Вырожденные отображения появляются в нашем доказательстве Лемм 5.1.1 и 5.1.2, даже если исходное отображение $\varphi : K \rightarrow G$ является невырожденным. Мы собираемся построить граф \bar{K}'_φ и пару (вырожденных) симплициальных отображений $G \xleftarrow{\bar{\varphi}} \bar{K}'_\varphi \xrightarrow{\bar{\varphi}'} G'$, которые могут быть получены из отображений φ и φ' , соответственно, операцией из Утверждения о стягивании ребра 5.1.7 (при некоторых дополнительных предположениях относительно φ , детали представлены ниже). Вместе с построением вложения $N' \rightarrow N$ (см. определение утолщения N' выше), это немедленно влечет утверждение Леммы 5.1.1 (см. иллюстрации 5.3, 5.4, 5.5).

Определение 5.1.8 (Полупроизводная симплициального отображения, см. иллюстрацию 5.3). Предположим, что отображение φ является невырожденным, и K не имеет вершин степени 0. Возьмем несвязное объединение всех φ -компонент графа K (см. Определение производной φ' выше). Соеди-

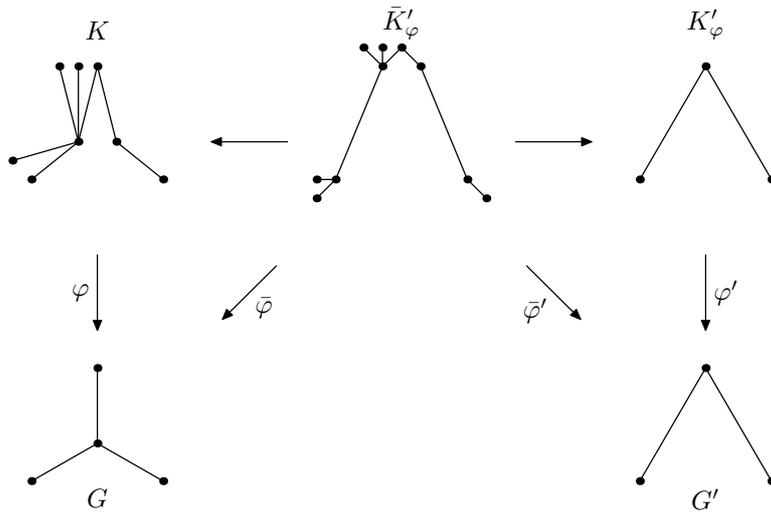


Рис. 5.3: Полупроизводные симплициального отображения

ним ребром любые две вершины, принадлежащие различным φ -компонентам и отвечающие одной и той же вершине графа K . Обозначим полученную *полупроизводную* графа K через \bar{K}'_φ . Таким образом, φ -компонента $\alpha \subset K$ является также подграфом графа \bar{K}'_φ , обозначаемым через $\bar{\alpha}'$. В дальнейшем мы отождествляем точки графов α и $\bar{\alpha}'$. Определим симплициальные отображения $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}'$ (*полупроизводные* отображения φ) как очевидные проекции $\bar{K}'_\varphi \rightarrow G$ и $\bar{K}'_\varphi \rightarrow G'$, соответственно, заданные на вершинах формулами $\bar{\varphi}x = \varphi x$ и $\bar{\varphi}'x = (\varphi\alpha)'$, где вершина $x \in \bar{K}'_\varphi$ принадлежит φ -компоненте $\bar{\alpha}'$.

Доказательство Леммы 5.1.1. Согласно Утверждению 5.1.7.D отображение φ может считать невырожденным. Мы также можем считать, что граф K не имеет вершин степени 0. Легко видеть, что φ и φ' могут быть получены из $\bar{\varphi}$ и некоторого сужения $\bar{\varphi}'$, соответственно, операцией из Утверждения о стягивании ребра 5.1.7. Если любые две φ -компоненты имеют не более одной общей точки, то φ' может быть получен таким образом непосредственно из $\bar{\varphi}$. Но для $K \cong S^1$ последнее условие выполнено всегда, кроме случая, когда граф K состоит из ровно двух φ -компонент. Очевидно, отображение φ аппроксимируется вложениями в указанном случае. Таким образом, достаточно доказать следующее утверждение:

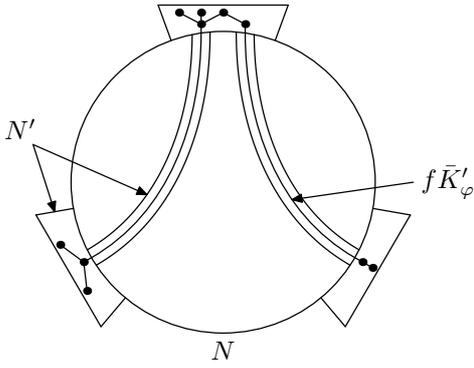


Рис. 5.4: Построение S -аппроксимации

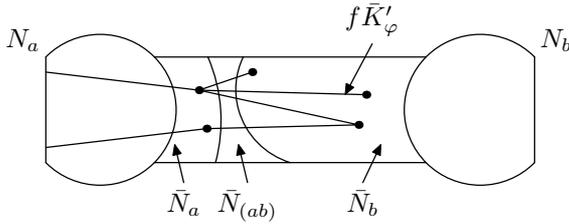


Рис. 5.5: Построение разбиения на ручки

(*) если $\bar{\varphi}'$ аппроксимируется вложениями, то $\bar{\varphi}$ аппроксимируется вложениями.

Докажем утверждение (*) для произвольного графа K . Если $\bar{\varphi}'$ аппроксимируется вложениями, то найдется вложение $\bar{K}'_\varphi \rightarrow N'$, S' -близкое к $\bar{\varphi}'$. Определим вложение $f : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N$ как композицию этого вложения и вложения $N' \rightarrow N$, построенного в определении утолщения N' (см. иллюстрацию 5.4, где это построение применяется к отображению φ с иллюстрации 5.3). Ясно, что существует новое разложение на ручки $N = \bigcup \bar{N}_a \cup \bigcup \bar{N}_{(ab)}$ утолщения N , обозначаемое \bar{S} , такое что f будет \bar{S} -аппроксимацией отображения $\bar{\varphi}$ (см. иллюстрацию 5.5, сравни с [47], Утверждение 4.9) Тогда $f : \bar{K}'_\varphi \rightarrow \bar{N}$ (где \bar{N} обозначает утолщение N с новым разложением ручки \bar{S}) — вложение, \bar{S} -близкое к отображению $\bar{\varphi}$. Лемма доказана. \square

Та же самая идея используется в доказательстве Лемм 5.1.2.A,V. Рассматривается отображение $f : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N$ общего положения, S -близкое к $\bar{\varphi}$ и строится *полупроизводная* $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N'$, S -близкая к $\bar{\varphi}'$ (см. иллюстрацию 5.6). Потом проверяется, что если f — вложение, то \bar{f}' — также вложение (см.

иллюстрацию 5.7).

Определение 5.1.9 (Полупроизводная S -аппроксимации). (см. иллюстрацию 5.6, где приведенное ниже построение применяется к отображению φ , изображенному на иллюстрации 5.3) Пусть K — граф без вершин степени 0. Пусть $\varphi : K \rightarrow G \subset N$ — невырожденное симплициальное отображение без трансверсальных самопересечений. Пусть $f : K \rightarrow N$ — S -аппроксимация отображения φ . Тогда *полупроизводная* отображения f есть S' -аппроксимация $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N'$ отображения φ' , и строится следующим образом. Для каждого ребра $a \subset G$ выберем гомеоморфизм $h_a : N_a \rightarrow N'_a$ таким образом, что для каждого любого ребра b , смежного с a , мы имеем $h_a(N_a \cap N_{(b)}) \subset N'_{(a'b')}$. Определим \bar{f}' на каждой φ -компоненте $\bar{\alpha}' \subset \bar{K}'_\varphi$ формулой $\bar{f}'|_{\bar{\alpha}'} = h_{\varphi\alpha} f|_\alpha$. Теперь определим \bar{f}' на каждом ребре $xy \subset \bar{K}'_\varphi$, соединяющем две различные φ -компоненты \bar{X}' и \bar{Y}' . Возьмем ребро $a \subset \bar{X}'$, содержащее вершину x . отождествим \bar{X}' с X (см. Определение полупроизводной симплициального отображения $\bar{\varphi}'$). Тогда a будет отождествлено с некоторым ребром графа K , а x — с некоторой вершиной графа K . Обозначим через \bar{x} дугу $a \cap f^{-1}N_{\varphi x}$. Определим дугу \bar{y} аналогично. Разрежем ребро xy в три отрезка xx_1 , x_1y_1 и y_1y . Пусть \bar{f}' гомеоморфно отображает отрезок xx_1 на $h_{\varphi X} f\bar{y}$, отрезок y_1y — на $h_{\varphi Y} f\bar{x}$, а отрезок x_1y_1 — на прямолинейный отрезок в диске $N'_{(\varphi X \varphi Y)}$, соединяющий точки $\bar{f}'x_1$ и $\bar{f}'y_1$. Таким образом, отображение $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N'$ построено.

Заметим, что если f — вложение, то есть более простое альтернативное построение отображения \bar{f}' , в некотором смысле обратное к построению из доказательства Леммы 5.1.1. Но это альтернативное построение неприменимо к доказательству Леммы 5.1.2.V, поэтому мы не пользуемся им в данной статье. Мы собираемся доказать Лемму 5.1.2.A,V только в случае, когда производная N' определена корректно, то есть K не содержит пар дуг i, j , для

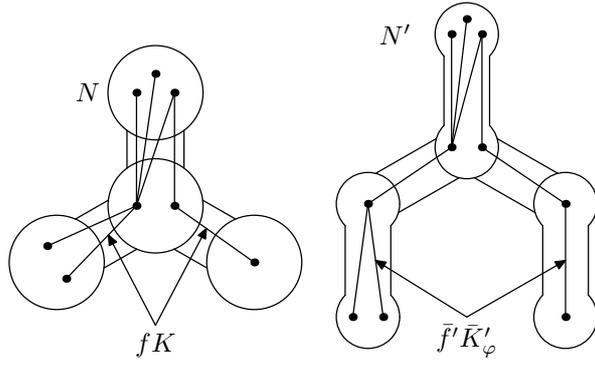


Рис. 5.6: Полупроизводная S -аппроксимации

которых пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ трансверсально. Этого достаточно для доказательства Теоремы 1.5.3. В общем случае доказательство аналогично, но необходимо всюду вместо N' пользоваться производной $D(N)$, определенной в статье [47].

Доказательство Леммы 5.1.2.А. Согласно Утверждению 5.1.7.К можно считать, что φ невырождено. Возьмем некоторое вложение $f : K \rightarrow N$, S -близкое к φ . Тогда достаточно показать, что отображение \bar{f}' (см. Определение полупроизводной S -аппроксимации \bar{f}') является вложением.

Рассмотрим пару различных ребер xy, zt графа K'_φ . Обозначим множество $\bar{f}'(xy) \cap \bar{f}'(zt)$ через i . Достаточно показать, что $i = \bar{f}'(xy \cap zt)$. Обозначим $a' = \varphi'x, b' = \varphi'y, c' = \varphi'z$ и $d' = \varphi't$. Без ограничения общности возможны следующие 3 случая.

1) a', b', c' и d' попарно различны. Так как \bar{f}' является S' -аппроксимацией, то $\bar{f}'xy \subset N'_{a'b'}$ и $\bar{f}'zt \subset N'_{c'd'}$, следовательно $i = \emptyset$.

2) $(a' = c' \text{ и } b' \neq d')$ или $(a' = b' = c' = d')$. Тогда $i \subset N'_{a'}$, следовательно, $i = h_a(f\bar{x} \cap f\bar{z})$ (см. определение h_a и \bar{x} в Определении полупроизводной S -аппроксимации \bar{f}' , дуга \bar{z} определяется аналогично \bar{x}). Если $y \neq t$, то \bar{x} и \bar{z} не пересекаются, так что $f\bar{x} \cap f\bar{z} = \emptyset$ и $i = \emptyset$. Если же $y = t$, то $i = h_a(fy) = \bar{f}'(xy \cap zt)$.

3) $a' = c', b' = d'$ и $a' \neq b'$. В этом случае как xy , так и zt , соединяют

вершины из различных φ -компонент. Докажем, что xy и zt не пересекаются. Например, пусть $y = t$. Тогда все вершины x, y, z и t графа \bar{K}'_φ отвечают одной и той же вершине графа K . Обозначим ее через w . Обозначим через X и Z те φ -компоненты множества $\varphi^{-1}a = \varphi^{-1}c$, для которых $x \in \bar{X}'$ и $z \in \bar{Z}'$. Таким образом, у φ -компонент X и Z есть общая точка w , следовательно $X = Z$. Значит, $x, z \in \bar{X}' = \bar{Z}'$ отвечают одной и той же вершине w , следовательно, $x = z$. Мы получаем, что $y = t$ и $x = z$, тогда по построению графа \bar{K}'_φ мы получаем $xy = zt$, что противоречит выбору этих ребер. Значит, xy и zt не пересекаются.

Покажем, что в случае (3) $|i| = 0 \pmod{2}$. В дальнейшем будем опускать \bar{f}' в обозначениях всех образов при отображении \bar{f}' . Заметим, что гомеоморфизм $h_a \circ h_b^{-1}$ отображает y_1y и t_1t на \bar{x} и \bar{z} , соответственно (иллюстрация 5.7). Из этого следует, что $|i| = |I \cap J|$, где $I = \bar{x} \cup xy_1$ и $J = \bar{z} \cup zt_1$. Из этого также следует, что две пары точек ∂I и ∂J не зацеплены на окружности $\partial(h_a N_{a \cap b} \cup N'_{(a'b')})$. Так как $I, J \subset h_a N_{a \cap b} \cup N_{(a'b')}$, то $|i| = |I \cap J| = 0 \pmod{2}$. Таким образом, остается доказать, что $|I \cap J| \leq 1$, тогда $I \cap J = \emptyset$. Последнее утверждение следует из равенства

$$\bar{x} \cap \bar{z} = h_a(f\bar{x} \cap f\bar{z}) = \emptyset \quad xx_1 \cap zz_1 = h_a(f\bar{y} \cap f\bar{t}) = \emptyset \quad \text{и} \quad |x_1y_1 \cap z_1t_1| \leq 1,$$

потому что x_1y_1 и z_1t_1 — прямолинейные отрезки в диске $N_{(a'b')}$. Лемма доказана. \square

Доказательство Леммы 5.1.2.V. Согласно Утверждению о стягивании ребра 5.1.7.V нам достаточно доказать, что если $f : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N$ является $\text{mod } 2$ -вложением, S -близким к φ , то его полупроизводная \bar{f}' также является $\text{mod } 2$ -вложением.

Возьмем пару непересекающихся ребер xy, zt графа \bar{K}'_φ и рассмотрим те же три случая, что и в доказательстве Леммы 5.1.2.A. Случай 1) тривиален.

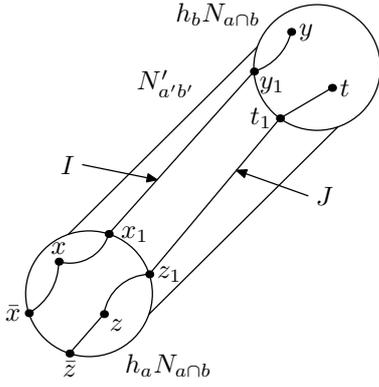


Рис. 5.7: Подсчет количества точек пересечения

В случае 2) мы имеем $f(xy) \cap f(zt) \subset N_a$, следовательно, $|i| = |h_a(f\bar{x} \cap f\bar{z})| = |h_a(f(xy) \cap f(zt))| = |f(xy) \cap f(zt)| = 0 \pmod{2}$. В доказательстве Леммы 5.1.2.A мы уже показали, что в случае 3) выполнено равенство $|i| = 0 \pmod{2}$. Таким образом, Лемма 5.1.2.V доказана. \square

5.2 Препятствие Ван Кампена

Препятствие Ван Кампена было придумано Ван Кампеном при исследовании вложимости полиэдров в \mathbb{R}^{2n} [8, 19, 33, 55, 56]. Дадим определение препятствия ван Кампена к аппроксимируемости вложениями симплициальных путей. Наше построение более наглядно, чем построение препятствия Ван Кампена к вложимости. Пусть $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — симплициальный путь (на иллюстрации 5.8 приведенная ниже конструкция применяется к пути, показанному на иллюстрации 1.1). Обозначим через x_1, \dots, x_k вершины графа I в порядке их расположения на дуге I , и обозначим ребро $x_i x_{i+1}$ через i . Пусть $I^* = \bigcup_{i < j-1} i \times j$ — *врезанный квадрат* графа I . Раскрасим в красный цвет ребра $x_i \times j, j \times x_i$, и клетки $i \times j$ врезанного квадрата I^* , такие что $\varphi x_i \cap \varphi j = \emptyset, \varphi i \cap \varphi j = \emptyset$. Обозначим через $I^{*\varphi}$ красное множество. Возьмем отображение общего положения $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, достаточно близкое к φ . В каждую клетку $i \times j$ "таблицы" I^* поставим число $v_f(i \times j) = |fi \cap fj| \pmod{2}$. Разрежем I^* вдоль красных ребер. Пусть C_1, C_2, \dots, C_n — все компоненты связности полученной

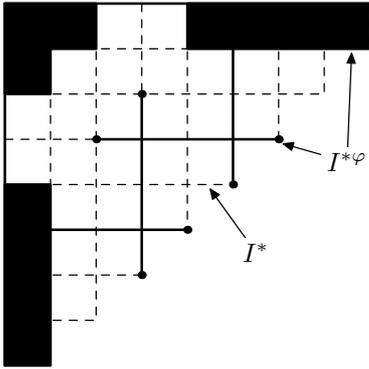


Рис. 5.8: Препятствие Ван Кампена

фигуры, для которых $\partial C_k \cap \partial I^* \subset I^{*\varphi}$. Обозначим $v_f(C_k) = \sum_{i \times j \in C_k} v_f(i \times j)$. Препятствие Ван Кампена (с \mathbb{Z}_2 -коэффициентами) для аппроксимируемости вложениями — это вектор $v(\varphi) = (v_f(C_1), v_f(C_2), \dots, v_f(C_n))$.

Несложно проверить, что $v(\varphi)$ не зависит от выбора отображения f [56], таким образом, $v(\varphi) = 0$ является необходимым условием для аппроксимируемости вложениями. Легко проверить, что $v(\varphi) \neq 0$ для кусочно линейного пути $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, содержащего трансверсальное самопересечение. Таким образом, Следствие 1.4.V следует из 1.5.3, 5.1.2.V и 5.2.1.

Утверждение 5.2.1. Препятствие $v(\varphi) = 0$, если и только если существует S -близкое к отображению $\varphi \pmod 2$ -вложение общего положения.

Доказательство Утверждения 5.2.1. Обратная импликация очевидна. Доказательство прямой импликации следует идеям статьи [33]. Мы собираемся использовать когомологическую формулировку препятствия Ван Кампена (детали можно найти в абзаце перед Утверждением 5.2.2 ниже). Пусть $f : K \rightarrow N$ — любая S -аппроксимация отображения φ общего положения. 'Движение Райдемайстера', показанное на иллюстрации 5.9.a, добавляет к коциклу v_f кограницу $\delta[x \times y]$ элементарной коцепи из группы $B^2(\tilde{K})$. Так как $v(\varphi) = 0$, то с помощью нескольких таких 'шагов' мы можем получить отображение $f : K \rightarrow N$, для которого $v_f = 0$. Тогда отображение f необходимо является $\pmod 2$ -вложением, потому что $v_f = 0$ означает, что $|fa \cap fb| = 0$

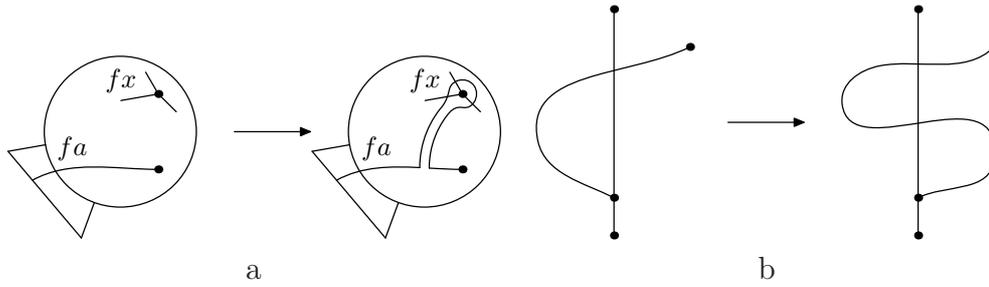


Рис. 5.9: "Движение Райдемайстера"

(mod 2) для любой пары непересекающихся ребер a, b графа K . □

Теперь мы собираемся доказать, что условия 1.5.4.V и 1.5.4.D эквивалентны (Утверждение 5.2.2). Утверждение 5.2.2 означает только, что 1.5.4.D \implies 1.5.4.V, но это достаточно для доказательства Следствия 1.5.4. Мы доказываем Утверждение 5.2.2 в более общей формулировке, поэтому нам потребуется еще несколько определений.

Пусть K — произвольный граф. Пусть $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ — симплициальное отображение. Обозначим через σ и τ любые ребра графа K . *Взрезанным квадратом* графа K мы называем множество $\tilde{K} = \bigcup \{ \sigma \times \tau : \sigma \cap \tau = \emptyset \}$. Пусть $K^* = \tilde{K} / \mathbb{Z}_2$ — фактор построенного полиэдра относительно антиподального \mathbb{Z}_2 -действия. Пусть $\tilde{K}^\varphi \subset \tilde{K}$ — подмножество, определяемое формулой $\tilde{K}^\varphi = \{ \sigma \times \tau : \varphi\sigma \cap \varphi\tau = \emptyset \}$. Пусть $K^{*\varphi} = \tilde{K}^\varphi / \mathbb{Z}_2$. Для отображения общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, близкого к отображению φ , определим коцепь $v_f \in C^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_f(\sigma \times \tau) = f\sigma \cap f\tau \pmod{2}$. Класс $v(\varphi) = [v_f] \in H^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ этой коцепи не зависит от отображения f и называется *препятствием Ван Кампена* к аппроксимируемости вложениями отображения φ . Мы говорим, что отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет *свойству взрезанного квадрата*, если отображение $\tilde{\varphi} : \tilde{K}^\varphi \rightarrow S^1$, заданное формулой $\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\varphi x - \varphi y}{\|\varphi x - \varphi y\|}$, продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \rightarrow S^1$. Очевидно, данное определение свойства взрезанного квадрата эквивалентно 1.5.4.D в случае $K \cong I$.

Утверждение 5.2.2. Если кусочно линейное отображение $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ удовлетворяет свойству взрезанного квадрата, то препятствие Ван Кампена $v(\varphi) = 0$.

Доказательство Утверждения 5.2.2. Возьмем отображение общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, близкое к φ , и определим эквивариантное отображение $\tilde{f} : \tilde{K}^\varphi \cup \text{sk}^1 \tilde{K} \rightarrow S^1$ формулой $\tilde{f}(x, y) = \frac{fx - fy}{|fx - fy|}$. По общему положению получаем, что \tilde{f} определено корректно. Так как отображение f близко к отображению φ , то $\tilde{f}|_{\tilde{K}^\varphi}$ гомотопно $\tilde{\varphi}$. Очевидно, если $\tilde{\varphi}$ продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \rightarrow S^1$, то $\tilde{f}|_{\tilde{K}^\varphi}$ продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \rightarrow S^1$.

Рассмотрим клетку $\sigma \times \tau \subset \tilde{K} - \tilde{K}^\varphi$, где $\sigma, \tau \subset K$ являются 1-мерными клетками. Если отображение \tilde{f} продолжается на клетку $\sigma \times \tau$, то $\deg \tilde{f}|_{\partial(\sigma \times \tau)} = 0$. Можно показать, что

$$\deg \tilde{f}|_{\partial(\sigma \times \tau)} = f\sigma \cap f\tau = v_f(\sigma \times \tau) \pmod{2}.$$

Поэтому если отображение \tilde{f} продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \rightarrow S^1$, то $v_f = 0$.

Теперь пусть $g : \tilde{K}^\varphi \cup \text{sk}^1 \tilde{K} \rightarrow S^1$ — эквивариантное отображение, такое что $gx = \tilde{f}x$ для каждого $x \in \tilde{K}^\varphi \cup \text{sk}^0 \tilde{K}$. Определим коцепь $v_g \in C^2(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_g(\sigma) = \deg g|_{\partial\sigma}$ для каждой 2-мерной клетки σ . Пусть $\sigma \subset \tilde{K} - \tilde{K}^\varphi$ — клетка размерности 1. Возьмем несвязное объединение $\sigma \sqcup \sigma'$ двух копий σ и приклеим σ к σ' по границе $\partial\sigma = \partial\sigma'$. Пусть d_σ — отображение полученной 1-мерной сферы в S^1 , заданное формулой $d_\sigma x = fx$ для всех $x \in \sigma$ и $d_\sigma x = gx$ для всех $x \in \sigma'$. Определим коцепь $v_{fg} \in C^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_{fg}(\sigma) = \deg d_\sigma$. Тогда, очевидно, $v_g - v_f = \delta v_{fg}$.

Полученная формула означает, что когомологический класс $[v_g]$ не зависит от выбора эквивариантного отображения $g : \tilde{K}^\varphi \cup \text{sk}^1 \tilde{K} \rightarrow S^1$ и совпадает с

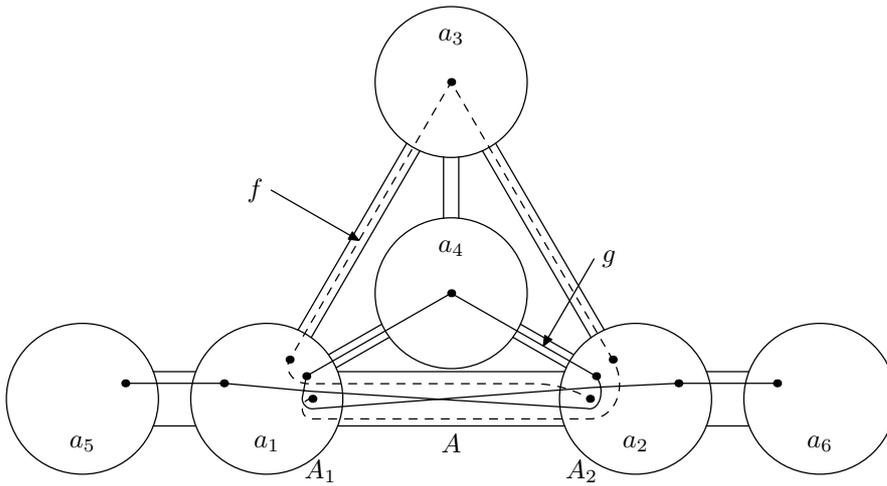


Рис. 5.10: Пара отображений, не аппроксимируемая сингулярными зацеплениями

препятствием Ван Кампена $v(\varphi)$. Это доказывает наше утверждение. \square

Пример 5.2.3. (сравни с [80, 2]) Существует пара кусочно линейных путей $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (см. иллюстрацию 5.10, где изображена пара путей f, g , близких к данным), не аппроксимируемых сингулярными зацеплениями (то есть, отображениями с непересекающимися образами), удовлетворяющих следующим условиям:

V) Препятствие Ван Кампена $v(\varphi, \psi) = 0$.

D) Отображение $\Phi : \{ (x, y) \in I \times I \mid \varphi x \neq \psi y \} \rightarrow S^1$, заданное формулой $\Phi(x, y) = \frac{\varphi x - \psi y}{\|\varphi x - \psi y\|}$, гомотопически продолжается до отображения $I \times I \rightarrow S^1$.

I) Пара φ', ψ' аппроксимируется сингулярными зацеплениями.

Доказательство Примера 5.2.3. Пусть $K, L \cong I$ — графы с вершинами k_1, \dots, k_5 и l_1, \dots, l_7 , и пусть G — граф с вершинами a_1, \dots, a_6 и ребрами $a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4$ и a_2a_6 . Требуемые симплициальные отображения φ, ψ задаются формулами $\varphi k_1 = a_1, \varphi k_2 = a_2, \varphi k_3 = a_3, \varphi k_4 = a_1, \varphi k_5 = a_2$ и $\psi l_1 = a_5, \psi l_2 = a_1, \psi l_3 = a_2, \psi l_4 = a_4, \psi l_5 = a_1, \psi l_6 = a_2, \psi l_7 = a_6$.

Рассмотрим пару S -аппроксимаций f и g отображений φ и ψ , соответственно, показанную на иллюстрации 5.10. Легко видеть, что $|fi \cap gj| = 0 \pmod{2}$ для любой пары ребер $i \subset K, j \subset L$. Это влечет выполнение обоих

свойств 5.2.3.V и 5.2.3.D (что доказывается аналогично доказательству следствия 1.5.4, см. также Утверждение 5.2.1). Доказательство свойства 5.2.3.I — прямое вычисление.

Докажем, что пара φ, ψ не аппроксимируется сингулярными зацеплениями. Предположим противоположное утверждение. Пусть $K_{13}, K_{35} \subset K$ и $L_{14}, L_{47} \subset L$ — дуги между точками k_1 и k_3 , k_3 и k_5 , l_1 и l_4 , l_4 и l_7 , соответственно. Возьмем малую окрестность графа $\varphi K \cup \psi L$ на плоскости и выберем ее разложение ручки S . Обозначим через A_1, A_2 и A диски разложения на ручки S , соответствующие вершинам a_1, a_2 и ребру $a_1 a_2$, соответственно. По аналогу Предложения Минца (см. абзац после Определения S -аппроксимации в §5.1) найдутся S -аппроксимации f, g отображений φ и ψ , соответственно, с непересекающимися образами. Так как $fK_{13} \cap gL = \emptyset$, то пары точек $gL_{14} \cap \partial(A_1 \cup A)$ и $gL_{47} \cap \partial(A_1 \cup A)$ не зацеплены на окружности $\partial(A_1 \cup A)$. Аналогично, $gL_{14} \cap \partial A_2$ и $gL_{47} \cap \partial A_2$ не зацеплены на окружности ∂A_2 . Значит, $gL_{14} \cap \partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$ и $gL_{47} \cap \partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$ не зацеплены на окружности $\partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$. Тогда g не может быть S -аппроксимацией отображения ψ . Полученное противоречие показывает, что φ и ψ не аппроксимируются сингулярными зацеплениями. \square

Литература

- [1] P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov, *Embedding products of low-dimensional manifolds in \mathbb{R}^m* , Topol. Appl. **113** (2001), p. 7–12.
- [2] P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov, *Obstructions to approximating maps of n -surfaces to \mathbb{R}^{2n} by embeddings*, Topol. Appl. **123:1** (2002), p. 3–14.
- [3] D. Auckly and L. Kapitanski, *Analysis of the Faddeev model*, preprint, arXiv:math-ph/0403025.
- [4] A. Bartels, P. Teichner, *All two dimensional links are null homotopic*, Geom. Topol. **3** (1999), p. 235–252.
- [5] R. Benedetti and C. Petronio, *Branched Standard Spines of 3-Manifolds*, Lect. Notes Math. **1653**, Springer-Verlag, Berlin.
- [6] J. L. Bryant, *Approximating embeddings of polyhedra in codimension 3*, Trans. Amer. Math. Soc. **170** (1972), p. 85–95.
- [7] A. Blakers and W. Massey, *Homotopy groups of a triad II*, Ann. Math. (1952).
- [8] A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Open problems on graphs, arising from geometric topology*, Topol. Appl. **84** (1998), p. 207–226.
- [9] M. Cencelj, D. Repovš and M. Skopenkov, *Classification of framed links in 3-manifolds*, Preprint Series Univ. of Ljubljana **41:906** (2003).
- [10] M. Cencelj, D. Repovš and M. Skopenkov, *Classification of framed links in 3-manifolds*, preprint, [arXiv:math-gt/0705.4166v1](https://arxiv.org/abs/math-gt/0705.4166v1).

- [11] M. Cencelj, D. Repovš and M. Skopenkov, *Classification of framed links in 3-manifolds*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **117:3** (2007), 301–306, [arXiv:0705.4166v2](#)[math.GT]
- [12] M. Cencelj, D. Repovš, M. Skopenkov, *Homotopy type of the complement to an immersion and classification of embeddings of tori*, Rus. Math. Surv. **62:5** (2007), p. 985–987, [arXiv:0803.4285v1](#)[math.GT]
- [13] M. Cencelj, D. Repovš, M. Skopenkov, *Knotted tori and the beta-invariant*, preprint.
- [14] J. Conway and C. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, Jour. Graph Theory **7** (1983), p. 445–453.
- [15] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия: методы и приложения*, Наука, Москва (1979).
- [16] E. Dufraine, *Classes d'homotopie de champs de vecteurs Morse-Smale sans singularite sur les fibres de Seifert*, Enseign. Math. (2) **51:1–2** (2005), p. 3–30.
- [17] P. Eccles, *Multiple points of codimension one immersions*, Lect. Notes Math. **788** (1980), p. 23–38.
- [18] А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, Москва (1989).
- [19] M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner, *Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in \mathbb{R}^4* , Math. Res. Letters **1** (1994), p. 167–176.
- [20] M. Galecki, *On embeddability of CW-complexes in Euclidean space*, preprint Univ. of Tennessee, Knoxville (1992).

- [21] M. Galecki, *Enhanced Cohomology and Obstruction Theory*, Doctoral Dissertation, Univ. of Tennessee, Knoxville (1993).
- [22] E. Giroux and N. Goodman, *On the stable equivalence of open books in three-manifolds*, *Geom. Topol.* **10** (2006), p. 97–114.
- [23] R. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, *Ann. of Math. (2)* **148** (1998), p. 619–693.
- [24] M. Gromov, *Partial differential relations*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, Springer Verlag, Berlin-New York (1986).
- [25] N. Habegger, *Knots and links in codimension greater than 2*, *Topol.* **25:3** (1986), p. 253–260.
- [26] N. Habegger, U. Kaiser, *Link homotopy in the 2-metastable range*, *Topol.* **37:1** (1998), p. 75–94.
- [27] A. Haefliger, *Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$* , *Ann. Math., Ser.3* **83** (1966) p. 402–436.
- [28] A. Haefliger, *Enlacements de spheres en codimension superieure a 2*, *Comm. Math. Helv.* **41** (1966-67), p. 51–72 (in French).
- [29] J. F. P. Hudson, *Piecewise-linear topology*, Benjamin, New York-Amsterdam 1969.
- [30] J. F. P. Hudson, *Concordance, isotopy and diffeotopy*, *Ann. Math.* **91:3** (1970), p. 425–448.
- [31] I. M. James, *On the iterated suspension*, *Quart. J. Math. Oxford* **5** (1954), p. 1–10.
- [32] U. Kaiser, *Link Theory in Manifolds*, *Lect. Notes Math.* **1669**, Springer-Verlag, Berlin.

- [33] E. R. van Kampen, *Komplexe in euklidische Raumen* , Abb. Math. Sem. Hamburg **9** (1932), p.72–78, berichtigung dazu, 152–153.
- [34] M. Kervaire, *An interpretation of G. Whitehead's generalization of H. Hopf's invariant*, Ann. Math. **69** (1959), p. 345–362.
- [35] U. Koschorke, *Link maps and the geometry of their invariants*, Manuscripta Math. **61:4** (1988), p. 383–415.
- [36] U. Koschorke, *Multiple point invariants of link maps*, Lect. Notes Math., Springer-Verlag **1350** (1988), p. 44–86.
- [37] U. Koschorke, *On link maps and their homotopy classification*, Math. Ann. **286:4** (1990), p. 753–782.
- [38] U. Koschorke, *A generalization of Milnor's μ -invariants to higher dimensional link maps*, Topology **36:2** (1997), p. 301–324.
- [39] U. Koschorke, B. Sanderson, *Geometric interpretation of the generalized Hopf invariant*, Math. Scand. **41** (1977), p. 199–217.
- [40] V. Krushkal, P. Teichner, *Alexander duality, gropes and link homotopy*, Geom. Topol. **1** (1997), p. 51–69.
- [41] G. Kuperberg, *Noninvolutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, Duke Math. Journal **84:1** (1996), p. 83–129.
- [42] A. O. Lovasz and A. Schrijver, *A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs* , Proc. of AMS **126:5** (1998), p.1275–1285.
- [43] S. Melikhov, *Pseudohomotopy implies homotopy for singular links of codimension ≥ 3* , Uspekhi Mat. Nauk **55:3** (2000), p. 183–184 (in Russian). English transl: Russian Math. Surv. **55:3** (2000).

- [44] S. Melikhov, *Link concordance implies link homotopy in codimension ≥ 3* , preprint.
- [45] K. Menger, *Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nicht plättbarer Graphen*, Ergebnisse Math. Kolloq. **2** (1929), p. 30–31.
- [46] P. Minc, *On simplicial maps and chainable continua*, Topol. Appl. **57** (1994), p. 1–21.
- [47] P. Minc, *Embedding simplicial arcs into the plane*, Topol. Proc. **22** (1997), p. 305–340.
- [48] S. Negami, *Ramsey-type theorem for spatial graphs*, Graphs and Comb. **14** (1998), p. 75–80.
- [49] V. Nezhinsky, *A suspension sequence in link theory*, Izv. Akad. Nauk **48:1** (1984), p. 126–143 (in Russian).
- [50] G.F. Paechter, *The groups $\pi_r(V_{n,m})$* , Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, **7** (1956), p. 249–268.
- [51] L. S. Pontryagin, *Classification des transformations d'un complexe $(n+1)$ -dimensionnel dans une sphere n -dimensionnelle*, C. R. Paris **206** (1938), p. 1436–1438.
- [52] L. S. Pontryagin, *A classification of mappings of the 3-dimensional complex into the 2-dimensional sphere*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) **9:51** (1941), p. 331–363.
- [53] Л. С. Понтрягин, *Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий*, Наука, Москва 1976.
- [54] V. Prasolov and M. Skopenkov, *Ramsay theory of knots and links*, Matematicheskoe Prosveschenie 3rd series **9** (2005), p. 108–115 (in Russian).

- [55] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces*, Proc. Steklov Math. Inst. **212** (1996), p. 163–178.
- [56] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *A deleted product criterion for approximability of maps by embeddings*, Topol. Appl. **87** (1998), p. 1–19.
- [57] D. Repovš and A. Skopenkov, *New results on embeddings of polyhedra and manifolds into Euclidean spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **54:6** (1999), p. 61–109 (in Russian). English transl.: Russ. Math. Surv. **54:6** (1999), p. 1149–1196.
- [58] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *The obstruction theory for beginners*, Mat. Prosv. **4** (2000), p. 154–180 (in Russian).
- [59] D. Repovš and A. Skopenkov, *On contractible n -dimensional compacta, non-embeddable into \mathbb{R}^{2n}* , Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), p. 627–628.
- [60] D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin, *On embeddability of $X \times I$ into Euclidean space*, Houston J. Math **21** (1995), p. 199–204.
- [61] D. Repovš, M. Skopenkov and F. Spaggiari, *On the Pontryagin–Steenrod–Wu theorem*, Israel J. Math. **145** (2005), p. 341–348. Перевод на русский язык: [arXiv:0808.1209v1](https://arxiv.org/abs/0808.1209v1)[math.GT].
- [62] N. Robertson, P. P. Seymour and R. Thomas, *Linkless embeddings of graphs in 3-space*, Bull. Am. Math. Soc. **28:1** (1993), p. 84–89.
- [63] N. Robertson, P. P. Seymour and R. Thomas, *Sachs’s linkless embedding conjecture*, Jour. of Comb. Theory, Series B **64** (1995), p. 185–227.
- [64] H. Sachs, *On spatial representation of finite graphs*, in ”Finite and infinite sets”, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai **37** (1981).
- [65] K. S. Sarkaria, *A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski’s graph planarity criterion*, Israel J. Math. **73** (1991), p. 79–89.

- [66] G. P. Scott, *Homotopy links*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **32** (1968), p. 186–190.
- [67] J. Segal, A. Skopenkov and S. Spiez, *Embeddings of polyhedra in \mathbb{R}^m and the deleted product obstruction*, Topol. Appl. **85** (1998), p. 335–344.
- [68] J. Segal and S. Spiez, *On transversely trivial maps*, Questions and Answers in General Topology **8** (1990), p. 91–100.
- [69] J. Segal and S. Spiez, *Quasi-embeddings and embedding of polyhedra in \mathbb{R}^m* , Topol. Appl. **45** (1992), p. 275–282.
- [70] M. Shirai, K. Taniyama, *A large complete graph in a space contains a link with large link invariant*, J. of Knot Theory and Its Ramifications **12:7** (2003), p. 915–919.
- [71] K. Sieklucki, *Realization of mappings*, Fund. Math. **65** (1969), p. 325–343.
- [72] A. Skopenkov, *A geometric proof of the Neuwirth theorem on thickenings of 2-polyhedra*, Mat. Zametki **56:2** (1994), p. 94–98 (in Russian). English transl.: Math. Notes **58:5** (1995), p. 1244–1247.
- [73] A. Skopenkov, *Classification of embeddings below the metastable dimension*, submitted, [arXiv:math/0607422v2](https://arxiv.org/abs/math/0607422v2)[math.GT].
- [74] A. Skopenkov, *Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces*, in: *Surveys in Contemporary Mathematics*, Ed. N. Young and Y. Choi, London Math. Soc. Lect. Notes **347** (2007), p. 248–342, [arXiv:math/0604045v1](https://arxiv.org/abs/math/0604045v1)[math.GT].
- [75] A. Skopenkov, *A new invariant and parametric connected sum of embeddings*, Fund. Math. **197** (2007), p. 253–269, [arXiv:math/0509621](https://arxiv.org/abs/math/0509621)[math.GT].

- [76] M. Skopenkov, *Suspension theorems for links and link maps*, Proceedings of the American Mathematical Society, **137** (2009), 359–369, Опубликовано в электронной версии журнала: <http://www.ams.org/proc/2009-137-01/S0002-9939-08-09455-0/home.html>, Перевод на русский язык: [arXiv:math/0610320v2](https://arxiv.org/abs/math/0610320v2)[math.GT].
- [77] M. Skopenkov, *A formula for the group of links in the 2-metastable dimension*, Algebraic Topology: old and new. M.M. Postnikov memorial conference. Abstracts. Bedlewo (2007), p. 28.
- [78] M. Skopenkov, *Embedding products of graphs into Euclidean spaces*, Fundamenta Mathematicae **179** (2003), p. 191–197. Перевод на русский язык: [arXiv:0808.1199v1](https://arxiv.org/abs/0808.1199v1)[math.GT].
- [79] M. Skopenkov, *On approximability by embeddings of cycles in the plane*, Topology and Its Applications **134:1** (2003), p. 1–22. Перевод на русский язык (только §§1–3): [arXiv:0808.1187v1](https://arxiv.org/abs/0808.1187v1)[math.GT].
- [80] S. Spież and H. Toruńczyk, *Moving compacta in \mathbb{R}^m apart*, Topol. Appl. **41** (1991), p. 193–204.
- [81] N. Steenrod, *Products of cocycles and extensions of mappings*, Ann. math. **48:2** (1947), p. 290–320.
- [82] A. Szücs, *Cobordism group of l -immersions*, Acta Math. Hungar. **28** (1976), p. 93–102 (in Russian).
- [83] E. V. Ščepin, *Soft mappings of manifolds*, Russian Math. Surveys **39:5** (1984), p. 209–224 (in Russian).
- [84] E. V. Ščepin and M. A. Štanko, *A spectral criterion for embeddability of compacta in Euclidean space*, Proc. Leningrad Int. Topol. Conf., Nauka, Leningrad (1983), p. 135–142 (in Russian).

- [85] K. Taniyama, *Higher dimensional links in a simplicial complex embedded in a sphere*, Pacific Jour. of Math. **194:2** (2000), p. 465–467.
- [86] B. R. Ummel, *The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space*, Trans. Amer. Math. Soc. **242** (1978), p. 319–328.