О ЗАУЗЛИВАНИИ МНОГООБРАЗИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ МЕНЬШЕ МЕТАСТАБИЛЬНОЙ

МИХАИЛ СКОПЕНКОВ

Классической проблемой топологии является *проблема заузливания*: описать множество вложений данного многообразия в евклидово пространство данной размерности. Актуальный обзор по данной теме можно найти в статье [16]. Эта проблема уже сыграла выдающуюся роль в развитии топологии. Для решения этой проблемы (а также близкой проблемы о существовании вложений) были созданы различные методы такими классиками как Дж. Александер, П.С. Александров, Е. Ван Кампен, К. Куратовский, С. Маклейн, Л.С. Понтрягин, Р. Том, Х. Уитни, Х. Хопф, и другими. В настоящее время исследование этой проблемы переживает новый расцвет.

Классическими результатами о вложениях являются теоремы классификации (в коразмерности по крайней мере 3) узлов, зацеплений и вложений высокосвязных многообразий (Р. Пенроуз, Дж.Г.К. Уайтхед, К. Зиман, М. Ирвин, Дж. Левин, С.П. Новиков, Дж. Хадсон, А. Хефлигер, М. Хирш). Проблема классификации вложений считается очень трудной, поскольку других случаев, для которых было бы получено полное явное описание (непустого) множества вложений замкнутого многообразия с точностью до изотопии, до последнего времени (например, [15]) не было известно, несмотря на наличие интересных подходов (Левин–Новиков–Уолл [20], Гудвилли–Уайсс [4]).

В данной работе напоминаются некоторые классические результаты, касающиеся проблемы заузливания, и приводятся формулировки нескольких недавних результатов, полученных автором.

Постановка проблемы. Гладким *вложением* компактного многообразия N в многообразие M называется гладкое инъективное отображение $f : N \to M$, дифференциал которого df невырожден в каждой точке. Два вложения $f, g : N \to M$ называются (объемлемо) *изотопными*, если существует такой диффеоморфизм $F : M \times I \to M \times I$, что

(1) $F(y, 0) = (y, 0)$ для любого $y \in M$,
(2) $F(f(x), 1) = (g(x), 1)$ для любого $x \in N$, и
(3) $F(M \times \{t\}) = M \times \{t\}$ для любого $t \in I$.

Обозначим через $E^m(N)$ множество изотопических классов вложений $N \to S^m$. *Проблема заузливания* состоит в описании множества $E^m(N)$.

Мы будем исследовать эту проблему только при условии *коразмерности по крайней мере* 3: $m \geq \dim N + 3$. В коразмерности меньше 3 получение *конкретных* результатов представляется на данный момент безнадежным.

Наоборот, *в стабильной* размерности $m \geq 2\dim N + 2$ проблема заузливания становится тривиальной: $|E^m(N)| = 1$. Мы увидим, что трудность проблемы заузливания коренным образом зависит от выполнения еще одного, *метастабильного*, неравенства.

Узлы. Самый простой частный случай проблемы заузливания — это случай *узлов*, то есть вложений $S^q \to S^m$. А. Хефлигер показал, что при $m \geq q + 3$ множество $E^m(S^q)$ является коммутативной группой относительно операции связной суммы. Он получил, в частности, следующие конкретные результаты:

Теорема 1. [8] (a) *Если* $m \geq \frac{3}{2}q + 2$, *то* $E^m(S^q) = 0$;
(b) $E^6(S^3) \cong \mathbb{Z}$, $E^7(S^4) \cong \mathbb{Z}_{12}$;
(c) *пусть* $m \geq q + 3$; *тогда* $E^m(S^q)$ *бесконечна* $\Leftrightarrow$ $m < \frac{3}{2}q + 2$ *и* $4|q + 1$.

Размерность $m = \frac{3}{2}q + 2$ называется *метастабильной*. Это определение имеет смысл для произвольного q-мерного многообразия N. Классификация узлов (а тем более вложений многообразия $N \neq S^q$) в пространстве размерности меньше метастабильной — сложная нерешенная задача. Поэтому получение даже частичных конкретных результатов представляет большой интерес.

В размерности меньше метастабильной близкая проблема существования вложений сложна в некотором точном *алгоритмическом* смысле [11]. Интересно было бы получить оценки алгоритмической сложности задачи распознавания изотопности двух данных вложений.

Зацепления. Перейдем к следующему частному случаю проблемы заузливания. Это случай *зацеплений*, то есть вложений $S^p \sqcup S^q \to S^m$. А. Хефлигер показал, что при $p, q \leq m - 3$ множество $E^m(S^p \sqcup S^q)$ является коммутативной группой относительно операции покомпонентной связной суммы. Он получил следующие формулы:

Теорема 2. (a) $E^m(S^p \sqcup S^q) \cong \pi^S_{m-p-q-1}$ *при* $m \geq \max\{\frac{3}{2}q+2, \frac{3}{2}p+2\}$.
(b) *Если* $p \leq q \leq m - 3$ *и* $m \geq \frac{2}{3}p + \frac{2}{3}q + 2$, *то*

$$E^m(S^p \sqcup S^q) \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1,M}) \oplus E^m(S^p) \oplus E^m(S^q).$$

(c) $E^6(S^3 \sqcup S^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Здесь $V_{M+l,M}$ — *многообразие Штифеля* M*-реперов* в начале координат пространства $\mathbb{R}^{M+l}$, где число M достаточно велико. Многие группы $\pi_n(V_{M+l,M})$ явно вычислены [13].

Теорема2.a относится к размерности не меньше метастабильной, ее доказательство несложно. Формулы 2.a и c — частные случаи формулы 2.b.

А. Хефлигер доказал теорему 2.b при более сильном ограничении $p \le q$ и $m > \frac{1}{3}p + q + 2$; его рассуждение может быть обобщено для случая $m > \frac{2}{3}p + \frac{2}{3}q + 2$. Автором было получено доказательство для граничного случая $m = \frac{2}{3}p + \frac{2}{3}q + 2$ (а заодно и более простое доказательство результата А. Хефлигера) [19]. Неравенство $m \ge \frac{2}{3}p + \frac{2}{3}q + 2$ в Теореме 2.b уже является точным. Новое доказательство основано на сведении классификации зацеплений к классификации сингулярных зацеплений, которая является интересной задачей и сама по себе [10, 6].

Теорема 2.b является наиболее сильной известной *явной* классификацией 2-компонентных зацеплений в сферах. Некоторые вычисления групп зацеплений с несколькими компонентами были проделаны В. Нежинским [12]. В коразмерности по крайней мере 3 имеется точная последовательность, включающая группы зацеплений и некоторые гомотопические группы, отображения между которыми задаются произведениями Уайтхеда [9, 5]. В последующей публикации автор планирует привести явный критерий конечности группы $E^m(S^p \sqcup S^q)$.

Заузленные торы. Следующий естественный случай проблемы заузливания — это классификация *заузленных торов*, то есть вложений $S^p \times S^q \to S^m$. Этот случай обобщает теорию 2-компонентных зацеплений одинаковой размерности. Ввиду теоремы о разбиении на ручки он может рассматриваться как следующий естественный шаг по направлению к классификации вложений произвольных многообразий. На этом пути получены даже некоторые точные результаты [15]. Многие известные контрпримеры в теории вложений — это именно вложения $S^p \times S^q \to S^m$.

А. Скопенков показал, что при $p \le q$ и $m > 2p + q + 2$ множество $E^m(S^p \times S^q)$ является группой относительно операции "S^p-параметрической связной суммы". Ему принадлежит классификация заузленных торов в размерности не меньше метастабильной:

Теорема 3. [14] *$E^m(S^p \times S^q) \cong \pi_q(V_{m-q,p})$ при $p \le q$ и $m \ge \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}q + 2$.*

А. Скопенковым был получен ряд конкретных результатов о заузленных торах в некотором диапазоне размерностей ниже метастабильной (а именно, $p + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2} \le m \le \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}q + 2$) [17]. Д. Реповшу, М. Ценцелю и автору принадлежит явный критерий конечности множества $E^m(S^p \times S^q)$ для еще меньшей размерности:

Теорема 4. [1, 2] *Пусть* $p+\frac{4}{3}q+2 < m < p+\frac{3}{2}q+2$ *и* $m > 2p+q+2$*; тогда* $E^m(S^p \times S^q)$ *бесконечно* $\Leftrightarrow$ $4|q+1$ *или* $4|p+q+1$.

В последующей публикации автор планирует привести явный критерий конечности множества $E^m(S^p \times S^q)$ при любом $m > 2p+q+2$.

Произвольные многообразия. Для более сложных многообразий известно немного конкретных результатов. Классификация вложений в пространство размерности *не меньше* метастабильной сводится к гомотопической задаче, которую иногда удается решить. Известны также конкретные результаты о классификации вложений в пространство размерности *меньше* метастабильной для произвольных многообразий размерности 3 и 4 [18, 3]. Отметим одну нерешенную задачу: *определить, какие множества* $E^m(N)$ *конечны.*

Проблемы существования и классификации вложений являются частными случаями общей проблемы о существовании и классификации отображений *с заданными ограничениями на самопересечения*: погружений, сингулярных зацеплений, почти вложений, а также вложений, аппроксимирующих данное отображение. Эту общую проблему естественно изучать в совокупности с проблемой вложений, поскольку они используют близкие методы.

Список литературы

[1] M. Cencelj, D. Repovš, M. Skopenkov, *Homotopy type of the complement to an immersion and classification of embeddings of tori*, Rus. Math. Surv. **62:5** (2007), p. 985–987, http://arxiv.org/abs/0803.4285v1[math.GT]

[2] M. Cencelj, D. Repovš, M. Skopenkov, *A new invariant of higher dimensional embeddings*, submitted. http://arxiv.org/abs/0811.2745v1 [math.GT]

[3] D. Crowley, A. Skopenkov *A classification of smooth embeddings of 4-manifolds in 7-space, II*, submitted, http://arxiv.org/abs/0808.1795v1 [math.GT]

[4] T. Goodwillie and M. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory, II*, Geometry and Topology **3** (1999), p. 103–118.

[5] N. Habegger, *Knots and links in codimension greater than 2*, Topol. **25:3** (1986), p. 253–260.

[6] N. Habegger, U. Kaiser, *Link homotopy in the 2-metastable range*, Topol. **37:1** (1998), p. 75–94.

[7] A. Haefliger, *Differentiable links*, Topology **1** (1962), p. 241–244.

[8] A. Haefliger, *Differentiable embeddings of* S^n *in* S^{n+q} *for* $q > 2$, Ann. Math., Ser.3 **83** (1966) p. 402–436.

[9] A. Haefliger, *Enlacements de spheres en codimension superiure a 2*, Comm. Math. Helv. **41** (1966-67), p. 51–72 (in French).

[10] U. Koschorke, *On link maps and their homotopy classification*, Math. Ann. **286:4** (1990), p. 753–782.

[11] J. Matoušek, M. Tancer, U. Wagner, *Hardness of embedding simplicial complexes in* $\mathbb{R}^d$, preprint http://arxiv.org/abs/0807.0336v1

[12] V. Nezhinsky, *Some computations in higher dimensional link theory*, Siberian Math. J. **24:4** (1982), p. 104–115 (in Russian).

[13] G.F. Paechter, *The groups* $\pi_r(V_{n,m})$, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, **7** (1956), p. 249–268.

[14] A. Skopenkov, *On the Haefliger-Hirsh-Wu invariants for embeddings and immersions*, Comment. Math. Helv. **77** (2002), p. 78–124.

[15] A. Skopenkov, *A new invariant and parametric connected sum of embeddings*, Fund. Math. **197** (2007), p. 253–269, http://arxiv.org/abs/math/0509621.

[16] A. Skopenkov, *Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces*, *in*: *Surveys in Contemporary Mathematics*, *Ed. N. Young and Y. Choi*, London Math. Soc. Lect. Notes **347** (2007), p. 248–342, http://arxiv.org/abs/math.GT/0604045.

[17] A. Skopenkov, *Classification of embeddings below the metastable dimension*, submitted, http://arxiv.org/abs/math.GT/0607422.

[18] A. Skopenkov, *A classification of smooth embeddings of 3-manifolds in 6-space*, Math. Zeitschrift **260** (2008), p. 647–672, http://arxiv.org/abs/math.GT/0603429v5.

[19] M. Skopenkov, *Suspension theorems for links and link maps*, Proc. AMS **137:1** (2009), p. 359–369. Перевод на русский язык: http://arxiv.org/abs/math.GT/0610320.

[20] C.T.C. Wall, *Unknotting spheres in codimension two and tori in codimension one*, Proc. Camb. Phil. Soc. **61** (1965), p. 659–664.