Квазиуправляемость и оценки амплитуд переходных режимов в дискретных системах*

В.С. Козякин, А.В. Покровский

101447 Москва, Большой Каретный пер., 19
Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: kozyakin@nov.ippi.ras.ru

Ключевые слова: Управляемость, пик—эффект, устойчивость, грубость, переходные режимы, рассинхронизованные системы.

Аннотация

Изучаются геометрические характеристики совокупностей режимов систем управления, обладающих свойством квазиуправляемости, родственным свойству управляемости по Калману. Показывается, что взаимосвязи между устойчивостью, асимптотической устойчивостью и неустойчивостью указанных совокупностей аналогичны взаимосвязям между соответствующими свойствами совокупностей решений линейного дифференциального или разностного уравнения в случае простоты ведущего собственного значения матрицы, определяющей это уравнение. Предложен новый подход к оценке величины перерегулирования переходных режимов в квазиуправляемых системах, идейно близкий к принципу отсутствия ограниченных режимов в проблеме абсолютной устойчивости. Он заключается в получении априорных конструктивных оценок степени перерегулирования переходных режимов, получаемых в терминах так называемой меры квазиуправляемости.

Введение

Одним из необходимых атрибутов реальной системы управления считается такое ее свойство как устойчивость. При проектировании систем разработчики традиционно стремятся сделать систему управления “как можно более устойчивой”. При этом иногда упускается из виду то обстоятельство, что достаточно большой

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 97-01-00692.

запас устойчивости у системы еще не является гарантией ее “хорошего” поведения. Причина этого заключается в том, что свойство устойчивости характеризует лишь асимптотическое поведение системы, и в то же время практически не учитывает ее поведение во время так называемого “переходного режима”. В силу этого, например, состояние устойчивой системы может во время переходного процесса иметь очень большие выбросы — “пики”, приводящие к полной потере ее работоспособности.

Простейший и вместе с тем типичный пример подобной ситуации предоставляет линейная систем описываемая уравнениями

$$x_{n+1} = Ax_n + bx_n^1, \qquad x_n = \{x_n^1, x_n^2\} \in \mathbb{R}^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Здесь $b \in \mathbb{R}^2$ — вектор обратной связи подлежащий определению, а матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ \varepsilon & a \end{pmatrix}$$

зависит от малого параметра ε

С точки зрения “наилучшего асимптотического поведения” в качестве b следует взять вектор $(-2a, -\frac{a^2+\varepsilon^2}{\varepsilon})$. В этом случае оба собственных значения матрицы

$$A_* = \begin{pmatrix} -a & \varepsilon \\ -\frac{a^2}{\varepsilon} & a \end{pmatrix}$$

замкнутой системы

$$x_{n+1} = A_* x_n \equiv Ax_n + bx_n^1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

оказываются равными нулю, и векторы x_n попадают в нулевое положение равновесия уже при $n = 2$.

В то же самое время для малых ε амплитуда вектора x_1 при почти любом начальном условии x_0 оказывается “опасно большой” — порядка $\frac{1}{\varepsilon}\|x_0\|$. Другими словами, во время переходного режима системы (1) наблюдается “пик” порядка $\frac{1}{\varepsilon}\|x_0\|$.

Первые примеры линейных систем с пиками были упомянуты, по-видимому, в работах [3, 4] и [20]. Эти работы привлекли внимание специалистов к пик—эффекту. В [21, 22, 26, 27, 30] изучался пик—эффект в системах со скалярными входами или выходами. В [11] были разработаны некоторые методы синтеза линейных систем, реализующих переходные процессы с малыми пиками. В то же самое время в работах [6, 7, 9, 10, 23] было замечено, что когда в системе “объект—регулятор” регулятор выбирается с таким расчетом, чтобы обеспечить как можно более высокую степень устойчивости системы, то одновременно возрастают и выбросы переменного вектора состояния системы во время переходного режима, т.е. усиливается пик—эффект. Эта особенность систем с высокой степенью устойчивости была отмечена также в работах [25, 29] и др.

Вместе с тем в последнее время растет число примеров систем, которые практически постоянно работают как бы в переходном режиме. Это, например, гибкие производственные системы, системы адаптивного управления с большим уровнем внешних помех, так называемые рассинхронизованные или асинхронные распределенные системы [1, 12, 13] и многие другие. В связи с этим возникает необходимость в разработке эффективных и простых критериев, позволяющих оценивать амплитуды вектора состояния на всем временном интервале функционирования системы, включая как начальный интервал переходного режима, так и следующий за ним бесконечный интервал режима “стремления к положению равновесия”.

В настоящей работе разрабатывается подход, позволяющий достаточно эффективно и просто решить задачу оценки амплитуды вектора состояния системы на всем временном интервале. Оказалось, что значительную роль здесь играет так называемое свойство квазиуправляемости системы, близкое к понятию управляемости по Калману, но более слабое чем последнее. Степень квазиуправляемости системы может быть охарактеризована некоторой числовой величиной, называемой ниже мерой квазиуправляемости. Основной результат работы заключается в доказательстве (при достаточно общих предположениях) следующей альтернативы: квазиуправляемая система либо является неустойчивой, либо она устойчива и тогда нормы всех траекторий ее переменного вектора состояния выходящих из единичного шара в некоторой норме ограничены сверху величиной, обратной к мере квазиуправляемости. Учитывая, что мера квазиуправляемости может быть конструктивно вычислена, сформулированная альтернатива оказывается эффективным инструментом анализа переходных режимов систем управления.

В заключительной части работы выясняются взаимосвязи свойства квазиуправляемости со свойствами устойчивости и неустойчивости. Смысл этих взаимосвязей в том, что для квазиуправляемых систем свойства устойчивости и неустойчивости оказываются робастными по отношению к малым возмущениям параметров системы.

Настоящая работа содержит полные доказательства результатов, ранее анонсированных в [14–16]. Заметим также, что понятия, близкие к квазиуправляемости, были предложены и исследованы с алгебраических позиций в [2, 5].

1 Квазиуправляемые семейства матриц

В этом разделе вводится ключевое в работе понятие квазиуправляемости системы, близкое к понятию управляемости по Калману, но более слабое чем последнее. Степень квазиуправляемости характеризуется некоторой числовой величиной, называемой ниже мерой квазиуправляемости. Описываются основные свойства меры квазиуправляемости.

1.1 Определения и основные свойства

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_M\}$ — семейство (вещественных) квадратных матриц порядка N.

Определение 1.1 *Семейство $\mathfrak{A}$ назовем квазиуправляемым, если не существует собственного ненулевого подпространства пространства $\mathbb{R}^N$, инвариантного для всех матриц из $\mathfrak{A}$.*

Обозначим через $\mathfrak{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ множество всех конечных произведений матриц из $\mathfrak{A} \bigcup \{I\}$, содержащих не более k сомножителей. Через $\mathfrak{A}_k(x)$ обозначим множество всех векторов Lx, где $L \in \mathfrak{A}_k$; через $\mathrm{co}(W)$ и $\mathrm{span}(W)$ обозначим, соответственно, выпуклую и линейную оболочку множества векторов $W \in \mathbb{R}^N$; положим $\mathrm{absco}(W) = \mathrm{co}(W \bigcup -W)$ и назовем множество $\mathrm{absco}(W)$ абсолютно выпуклой оболочкой множества W. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^N$; шар радиуса t в соответствующей норме обозначим через $\mathbf{S}(t)$.

Теорема 1.2 *Пусть $p \geq N - 1$. Семейство матриц $\mathfrak{A}$ квазиуправляемо, если и только если для любого ненулевого $x \in \mathbb{R}^N$ верно соотношение $\mathrm{span}\{\mathfrak{A}_p(x)\} = \mathbb{R}^N$.*

Доказательство. Пусть семейство $\mathfrak{A}$ квазиуправляемо. Зададимся произвольным ненулевым $x \in \mathbb{R}^N$ и положим $\mathcal{L}_0 = \mathrm{span}\{x\}$, $\mathcal{L}_k = \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_k(x)\}$ $(k \geq 1)$. Тогда

$$\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{L}_p \subseteq \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Поэтому

$$1 \leq \dim \mathcal{L}_0 \leq \dim \mathcal{L}_1 \leq \ldots \leq \dim \mathcal{L}_p \leq N. \tag{3}$$

При этом

$$A_i \mathcal{L}_j \subseteq \mathcal{L}_{j+1} \qquad (A_i \in \mathfrak{A}, \quad 0 \leq j \leq p - 1). \tag{4}$$

Если $\dim \mathcal{L}_p = N$, то $\mathcal{L}_p = \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_p(x)\} = \mathbb{R}^N$. Если же $\dim \mathcal{L}_p < N$, то силу (3) и условия $p \geq N - 1$ при некотором $j \in [0, p - 1]$ выполняется равенство $\dim \mathcal{L}_j = \dim \mathcal{L}_{j+1}$. Тогда в силу (2) $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_{j+1}$, а в силу (4) $\mathcal{L}_j$ — ненулевое инвариантное относительно матриц из $\mathfrak{A}$ подпространство пространства $\mathbb{R}^N$; в силу квазиуправляемости семейства матриц $\mathfrak{A}$ это подпространство обязано совпадать с $\mathbb{R}^N$. Следовательно, $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_{j+1} = \ldots = \mathcal{L}_p = \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_p(x)\} = \mathbb{R}^N$.

Пусть теперь $\mathrm{span}\{\mathfrak{A}_p(x)\} = \mathbb{R}^N$, но семейство матриц $\mathfrak{A}$ не является квазиуправляемым. Тогда найдется инвариантное относительно матриц из $\mathfrak{A}$ ненулевое собственное подпространство $\mathcal{L}$ пространства $\mathbb{R}^N$. В этом случае для любого вектора $x \in \mathcal{L}$ имеет место соотношение $\mathrm{span}\{\mathfrak{A}_p(x)\} \subseteq \mathcal{L}$ и, значит, $\mathrm{span}\{\mathfrak{A}_p(x)\} \neq \mathbb{R}^N$. Полученное противоречие доказывает квазиуправляемость семейства $\mathfrak{A}$. Лемма доказана. $\square$

Определение 1.3 *Назовем p-мерой квазиуправляемости (в норме $\|\cdot\|$) семейства матриц $\mathfrak{A}$ число $\sigma_p(\mathfrak{A})$, определяемое равенством*

$$\sigma_p(\mathfrak{A}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N, \|x\|=1} \sup\{t : \mathbf{S}(t) \subseteq \mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_p(x)\}\}.$$

Теорема 1.4 *Пусть $p \geq N - 1$. Семейство матриц $\mathfrak{A}$ квазиуправляемо, если и только если $\sigma_p(\mathfrak{A}) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\sigma_p(\mathfrak{A}) \neq 0$. Тогда для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ верно включение $\mathbf{S}[\|x\|\sigma_p(\mathfrak{A})] \subseteq \mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_p(x)\}$, а значит, и равенство $\mathbb{R}^N = \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_p(x)\}$. Следовательно, по теореме 1.2 семейство матриц $\mathfrak{A}$ квазиуправляемо.

Пусть теперь семейство матриц $\mathfrak{A}$ квазиуправляемо, но $\sigma_p(\mathfrak{A}) = 0$. Тогда найдутся $x_n \in \mathbb{R}^N$ ($\|x_n\| = 1$) и $y_n \in \mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_p(x_n)\}$ такие, что $y_n \to 0$, $ty_n \notin \mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_p(x_n)\}$ при $t > 1$. Без ограничения общности можно считать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{\frac{y_n}{\|y_n\|}\}$ сходятся: $x_n \to x$, $\frac{y_n}{\|y_n\|} \to z$.

По теореме 1.2 линейная оболочка множества векторов $\{\mathfrak{A}_p(x)\}$ совпадает с $\mathbb{R}^N$. Поэтому найдутся такие матрицы $L_1, L_2, \ldots, L_N \in \mathfrak{A}_p$, для которых векторы $L_1x, L_2x, \ldots, L_Nx$ линейно независимы. Тогда при всех достаточно больших n линейно независимыми являются и векторы $L_1x_n, L_2x_n, \ldots, L_Nx_n$. Следовательно, при каждом n найдутся такие числа

$$\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \ldots, \theta_N^{(n)}, \qquad \sum_{i=1}^N \theta_i^{(n)} = 1,$$

при которых вектор

$$z_n = \sum_{i=1}^N \theta_i^{(n)} L_i x_n \tag{5}$$

коллинеарен вектору y_n, т.е. $z_n = \eta_n y_n$ ($\eta_n > 0$). Но так как

$$z_n \in \mathrm{absco}\{L_1x_n, L_2x_n, \ldots, L_Nx_n\} \subseteq \mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_p(x_n)\},$$

а ty_n по определению не принадлежит множеству $\mathfrak{A}_p(x_n)$ при $t > 1$, то $\eta_n \leq 1$. Отсюда и из условия $y_n \to 0$ следует, что и $z_n \to 0$. Переходя теперь к пределу в (5) (последовательности $\{\theta_1^{(n)}\}$, $\{\theta_2^{(n)}\}$, $\ldots$, $\{\theta_N^{(n)}\}$ при этом можно считать сходящимися к некоторым пределам $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$, соответственно), получаем:

$$\sum_{i=1}^N \theta_i L_i x = 0, \qquad \sum_{i=1}^N \theta_i = 1,$$

чего не может быть в силу линейной независимости векторов $L_1x, L_2x, \ldots, L_Nx$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.4.

В случае семейств матриц, зависящих от параметра, полезна следующая

Теорема 1.5 *Пусть $p \geq N-1$. Пусть $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$, $\ldots$, $A_M(\tau)$ — непрерывно зависящие в точке 0 от вещественного параметра τ квадратные матрицы порядка N. Пусть семейство матриц $\mathfrak{A}(\tau) = \{A_1(\tau), A_2(\tau), \ldots, A_M(\tau)\}$ квазиуправляемо при $\tau = 0$. Тогда это семейство квазиуправляемо при всех достаточно малых τ, и функция $\sigma_p[\mathfrak{A}(\tau)]$ непрерывна в точке $\tau = 0$.*

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях теоремы найдется такое число $\kappa > 0$, для которого

$$\sigma_p[\mathfrak{A}(\tau)] \geq \kappa \tag{6}$$

при всех достаточно малых значениях τ. Пусть это не верно. Тогда найдутся $\tau_n \to 0$, $x_n \in \mathbb{R}^N$ ($\|x_n\| = 1$) и

$$y_n \in \operatorname{absco}\{\mathfrak{A}_p(\tau_n, x_n)\}$$

такие, что

$$y_n \to 0, \qquad ty_n \notin \operatorname{absco}\{\mathfrak{A}_p(\tau_n, x_n)\} \quad t > 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{\frac{y_n}{\|y_n\|}\}$ сходятся: $x_n \to x$, $\frac{y_n}{\|y_n\|} \to z$.

По теореме 1.2 линейная оболочка множества векторов $\{\mathfrak{A}_p(0, x)\}$ совпадает с $\mathbb{R}^N$. Поэтому найдутся такие матрицы $L_1(0)$, $L_2(0)$, $\dots$, $L_N(0) \in \mathfrak{A}_p(0)$, для которых векторы $L_1(0)x$, $L_2(0)x$, $\dots$, $L_N(0)x$ линейно независимы. Тогда при всех достаточно больших n линейно независимыми являются и векторы $L_1(\tau_n)x_n$, $L_2(\tau_n)x_n$, $\dots$, $L_N(\tau_n)x_n$. Следовательно, при каждом n найдутся такие числа

$$\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \dots, \theta_N^{(n)}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \theta_i^{(n)} = 1,$$

при которых вектор

$$z_n = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^{(n)} L_i(\tau_n) x_n \tag{7}$$

коллинеарен вектору y_n, т.е. $z_n = \eta_n y_n$ ($\eta_n > 0$). Но так как

$$z_n \in \operatorname{absco}\{L_1(\tau_n)x_n, L_2(\tau_n)x_n, \dots, L_N(\tau_n)x_n\} \subseteq \operatorname{absco}\{\mathfrak{A}_p(\tau_n, x_n)\},$$

а ty_n по определению не принадлежит множеству $\mathfrak{A}_p(\tau_n, x_n)$ при $t > 1$, то $\eta_n \le 1$. Отсюда и из условия $y_n \to 0$ следует, что и $z_n \to 0$. Переходя теперь к пределу в (7) (последовательности $\{\theta_1^{(n)}\}$, $\{\theta_2^{(n)}\}$, $\dots$, $\{\theta_N^{(n)}\}$ при этом можно считать сходящимися к некоторым пределам θ_1, θ_2, $\dots$, θ_N, соответственно), получаем:

$$\sum_{i=1}^{N} \theta_i L_i(0) x = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 1,$$

чего не может быть в силу линейной независимости векторов $L_1(0)x$, $L_2(0)x$, $\dots$, $L_N(0)x$. Полученное противоречие завершает доказательство оценки (6).

Продолжим доказательство теоремы. Положим

$$\varphi = \varliminf_{\tau \to 0} \sigma_p[\mathfrak{A}(\tau)], \qquad \psi = \varlimsup_{\tau \to 0} \sigma_p[\mathfrak{A}(\tau)].$$

Пусть $\mathfrak{A}_p(\tau) = \{L_1(\tau), L_2(\tau), \dots, L_Q(\tau)\}$. Покажем сначала, что

$$\psi \le \sigma_p[\mathfrak{A}(0)]. \tag{8}$$

Зададимся произвольными векторами $x \in \mathbf{S}(1)$ и $y \in \mathbf{S}(\psi)$. Тогда найдутся последовательность $\tau_n \to 0$, последовательность $y_n \to y$ ($y_n \in \mathbf{S}\{\sigma_p[\mathfrak{A}(\tau_n)]\}$) и последовательности чисел $\theta_1^{(n)}$, $\theta_2^{(n)}$, ..., $\theta_Q^{(n)}$, для которых верны соотношения

$$y_n = \sum_{i=1}^{N} \theta_i^{(n)} L_i(\tau_n) x, \qquad \sum_{i=1}^{N} \theta_i^{(n)} \leq 1. \tag{9}$$

Без ограничения общности последовательности $\{\theta_1^{(n)}\}$, $\{\theta_2^{(n)}\}$, ..., $\{\theta_Q^{(n)}\}$ можно считать сходящимися:

$$\theta_1^{(n)} \to \theta_1, \quad \theta_2^{(n)} \to \theta_2, \quad \ldots \quad, \theta_Q^{(n)} \to \theta_Q.$$

Перейдем тогда в (9) к пределу:

$$y = \sum_{i=1}^{N} \theta_i L_i(0) x, \qquad \sum_{i=1}^{N} \theta_i \leq 1. \tag{10}$$

Мы получили, что для любого вектора $x \in \mathbf{S}(1)$ любой вектор $y \in \mathbf{S}(\psi)$ представим в виде (10). Отсюда вытекает справедливость соотношения (8).

Покажем теперь, что

$$\varphi \geq \sigma_p[\mathfrak{A}(0)]; \tag{11}$$

так как $\varphi \leq \psi$, то из (8) и (11) будет следовать утверждение теоремы 1.5.

Если $\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] = 0$, то неравенство (11) очевидно. Поэтому будем считать, что $\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] > 0$ и зададимся произвольным $\gamma > 0$, для которого

$$\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma > 0. \tag{12}$$

Зафиксируем произвольный вектор $x \in \mathbf{S}(1)$ и покажем, что при выполнении условия

$$\|L_i(\tau) - L_i(0)\| \leq \frac{\gamma \kappa}{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma} \tag{13}$$

где κ — число из (6), будет выполняться включение

$$\mathbf{S}(\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma) \subseteq \operatorname{absco}\{\mathfrak{A}_p(\tau)x\}. \tag{14}$$

Действительно, пусть y — произвольный вектор из $\mathbf{S}(\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma)$. Тогда найдутся такие θ_1, θ_2, ..., θ_Q, что

$$y = \sum_{i=1}^{Q} \frac{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma}{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)]} \theta_i L_i(0) x,$$

$$\sum_{i=1}^{Q} \theta_i \leq 1. \tag{15}$$

Следовательно,
$$y = \sum_{i=1}^{Q} \frac{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma}{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)]} \theta_i L_i(\tau) x + z, \tag{16}$$
где
$$z = \sum_{i=1}^{Q} \frac{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma}{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)]} \theta_i (L_i(0) - L_i(\tau)) x.$$
В силу (13) и (15) для вектора z справедлива оценка
$$\|z\| \leq \frac{\gamma\kappa}{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma}.$$
Тогда в силу (6) найдутся такие $\eta_1(\tau)$, $\eta_2(\tau), \ldots, \eta_Q(\tau)$, что
$$z = \sum_{i=1}^{Q} \frac{\gamma}{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma} \eta_i(\tau) L_i(\tau) x, \qquad \sum_{i=1}^{Q} \eta_i(\tau) \leq 1. \tag{17}$$
Положив теперь
$$\theta_i(\tau) = \frac{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma}{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)]} \theta_i + \frac{\gamma}{\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma} \eta_i(\tau), \tag{18}$$
получаем из (16) и (17), что
$$y = \sum_{i=1}^{Q} \theta_i(\tau) L_i(\tau) x,$$
где в силу (15), (17) и (18)
$$\sum_{i=1}^{N} \theta_i(\tau) \leq 1.$$
Мы показали, что для всех τ, при которых выполнены условия (13), верно включение (14). Следовательно, при этих значениях τ
$$\sigma_p[\mathfrak{A}(\tau)] \geq \mathbf{S}(\sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma).$$
Отсюда, переходя к нижнему пределу при $\tau \to 0$, получаем, что
$$\theta \geq \sigma_p[\mathfrak{A}(0)] - \gamma.$$
Из полученного неравенства в силу произвольности $\gamma > 0$ следует неравенство (12).

Итак, верны неравенства (8) и (11), откуда и вытекает утверждение теоремы 1.5.

1.2 Примеры

Рассмотрим скалярную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ порядка N и векторы-столбцы $b, c \in \mathbb{R}^N$. Образуем с их помощью семейство $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(A, b, c)$, состоящее из матрицы A и матрицы $Q = (q_{ij}) = bc^T$ с элементами $q_{ij} = b_i c_j$, $i, j = 1, \ldots, N$.

Пример 1.6 *Семейство матриц $\mathfrak{A}(A, b, c)$ квазиуправляемо, если и только если пара (A, b) полностью управляема по Калману, а пара (A, c) полностью наблюдаема.*

Доказательство. Как нетрудно видеть, подпространство $E \subset \mathbb{R}^N$ инвариантно относительно матрицы Q тогда и только тогда, когда либо $b \in E$, либо $E \subset C^0$, где

$$C^0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} x^i c^i = 0 \right\}.$$

Заметим теперь, что матрица A может иметь собственное инвариантное подпространство E, содержащее вектор b, в том и только том случае, когда

$$\operatorname{span}\{b, Ab, \ldots, A^{N-1}b\} \subseteq E \neq \mathbb{R}^N,$$

т.е. в том и только том случае, когда пара (A, b) не является полностью управляемой. С другой стороны, матрица A может иметь собственное инвариантное подпространство E, содержащееся в подпространстве C^0, в том и только том случае, когда

$$\operatorname{span}\{c, A^T c, \ldots, (A^T)^{N-1} c\} \neq \mathbb{R}^N,$$

т.е. в том и только том случае, когда пара (A, c) не является полностью наблюдаемой.

Таким образом, матрицы A и Q могут иметь общее собственное инвариантное подпространство в том и только том случае, когда либо пара (A, b) не является полностью управляемой, либо пара (A, c) не является полностью наблюдаемой. Утверждение полностью доказано. □

Следующий пример важен в теории рассинхронизованных систем (см., например, [1, 12]). Рассмотрим скалярную квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ порядка N и образуем с ее помощью семейство матриц $\mathfrak{P}_1(A) = \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ вида

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} & \ldots & a_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Напомним, что матрица A называется *неразложимой*, если никакой перестановкой строк и соответствующих столбцов ее нельзя представить в блочно-треугольном виде

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Неразложимость матрицы A равносильна отсутствию у нее собственного инвариантного подпространства, натянутого на некоторое количество базисных векторов

$$e_i = \{0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Пусть норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^N$ определяется равенством $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_N|$. Положим

$$\alpha = \frac{1}{2N} \min\{\|(A - I)x\| : \|x\| = 1\}, \qquad \beta = \frac{1}{2} \min\{|a_{ij}| : i \neq j, a_{ij} \neq 0\}.$$

Пример 1.7 *Семейство матриц $\mathfrak{P}_1(A)$ квазиуправляемо, если и только если число 1 не является собственным значением матрицы A и матрица A неразложима. При этом $\sigma_N[\mathfrak{P}_1(A)] \geq \alpha\beta^{N-1}$.*

Доказательство. Пусть 1 — собственное значение матрицы A и ему отвечает собственный вектор x_*. Тогда x_* является собственным вектором, отвечающим собственному значению 1 и каждой матрицы A_1, A_2, …, A_N. Следовательно, в этом случае семейство матриц $\mathfrak{P}_1(A)$ не является квазиуправляемым.

Пусть матрица A разложима. В этом случае не ограничивая общности можно считать, что некоторое подпространство $E_p = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$, где $p < N$, инвариантно относительно матрицы A. Но тогда подпространство E_p инвариантно и относительно каждой из матриц A_1, A_2, …, A_N. Следовательно, и в этом случае семейство матриц $\mathfrak{P}_1(A)$ не является квазиуправляемым.

Докажем теперь, что семейство матриц $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1(A)$ квазиуправляемо, если число 1 не является собственным значением матрицы A и матрица A неразложима. Для этого достаточно показать, что для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^N$ справедливо равенство

$$\mathrm{span}\{\mathfrak{A}_N(x)\} = \mathbb{R}^N. \tag{20}$$

Зададимся произвольным вектором $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\| = 1$, и рассмотрим векторы $(A_1 - I)x, (A_2 - I)x, \ldots, (A_N - I)x \in \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_1(x)\}$. Так как

$$(A - I)x = (A_1 - I)x + (A_2 - I)x + \ldots + (A_N - I)x,$$

и число 1 не является собственным значением матрицы A, то по крайней мере один из векторов $(A_1 - I)x$, $(A_2 - I)x$, …, $(A_N - I)x$ отличен от нуля. Без ограничения общности можно считать, что $(A_1 - I)x \neq 0$, причем $\|(A_1 - I)x\| \geq \frac{1}{N}\|(A - I)x\| \geq 2\alpha$. Но так как

$$(A_i - I)x = \langle \tilde{a}_i, x\rangle e_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{21}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, а векторы $\tilde{a}_i$ имеют вид

$$\tilde{a}_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ii} - 1, \ldots, a_{iN}\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

то $\langle \tilde{a}_1, x\rangle e_1 \neq 0$, $\langle \tilde{a}_1, x\rangle e_1 \in \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_1(x)\}$, причем $\|\langle \tilde{a}_1, x\rangle e_1\| \geq 2\alpha$. Отсюда следует, что

$$e_1 \in \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_1(x)\} \tag{22}$$

а вектор $\frac{1}{2}\langle\tilde{a}_1, x\rangle e_1 = \frac{1}{2}A_1x - \frac{1}{2}x$ принадлежит $\mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_1(x)\}$, а значит и множеству $\mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_N(x)\}$. Следовательно,

$$\alpha e_1 \in \mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_N(x)\}.$$

В силу неразложимости матрицы A подпространство $\mathrm{span}\{e_1\}$ не является инвариантным относительно матрицы A. Поэтому по крайней мере одна координата вектора Ae_1 с номером, не равным 1, отлична от нуля; без ограничения общности можно считать отличной от нуля вторую координату вектора Ae_1. Но вторая координата вектора Ae_1 совпадает со второй координатой вектора A_2e_1, а значит, и вектора $(A_2 - I)e_1$. Следовательно, $(A_2 - I)e_1 \neq 0$, а в силу (22) $(A_2 - I)e_1 \in \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_2(x)\}$. Отсюда в силу (21) следует, что

$$e_2 \in \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_2(x)\}$$

а вектор $\frac{1}{2}a_{21}e_2 = \frac{1}{2}\langle\tilde{a}_2, e_1\rangle e_2 = \frac{1}{2}A_2e_1 - \frac{1}{2}e_1$ принадлежит $\mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_2(e_1)\}$, а значит и $\mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_N(e_1)\}$. Следовательно,

$$\alpha\beta e_2 \in \mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_N(x)\}.$$

Продолжая аналогичные построения из неразложимости матрицы A нетрудно вывести, что при подходящей перенумерации базисных векторов e_1, e_2, e_3, $\ldots$, e_N будут выполняться включения

$$e_i \in \mathrm{span}\{\mathfrak{A}_i(x)\}, \quad \alpha\beta^{i-1}e_i \in \mathrm{absco}\{\mathfrak{A}_N(x)\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{23}$$

Из соотношений (23) вытекает равенство (20), а также оценка

$$\sigma_N[\mathfrak{P}_1(A)] \geq \alpha\beta^{N-1};$$

утверждение примера полностью доказано. □

Рассмотрим еще один пример, на который обратил внимание авторов Е. Кажкуревич. Пусть семейство $\mathfrak{V}(A)$ состоит из матриц A, D_1A, D_2A,$\ldots$, D_NA. Здесь A — скалярная $N \times N$ матрица с элементами a_{ij}, а D_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — диагональные матрицы вида

$$D_i = \mathrm{diag}\{d_{1i}, d_{2i}, \ldots, d_{ii}, \ldots, d_{Ni}\},$$

где $d_{ij} = 1$ при $i \neq j$, $d_{ij} = -1$ при $i = j$.

Пусть снова норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^N$ определяется равенством $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_N|$. Положим

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{N}\min\{\|Ax\|: \ \|x\| = 1\}, \qquad \tilde{\beta} = \min\{|a_{ij}|: \ i \neq j, a_{ij} \neq 0\}.$$

Пример 1.8 *Семейство матриц $\mathfrak{V}(A)$ квазиуправляемо, если и только если число 0 не является собственным значением матрицы A и матрица A неразложима. При этом $\sigma_N[\mathfrak{V}(A)] \geq \tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{N-1}$.*

2 Квазиуправляемость и пик—эффект

В разделе показывается, как свойство квазиуправляемости влияет на устойчивость, неустойчивость и переходные режимы динамических систем, описываемых линейными разностными уравнениями вида

$$x(n+1) = A(n)x(n). \tag{24}$$

Предлагается идейно простой и эффективный способ оценки норм решений разностных уравнений на всем временном интервале их существования, включая как начальный интервал переходного режима, так и следующий за ним бесконечный интервал режима “стремления к положению равновесия”.

2.1 Априорная оценка меры перерегулирования

Определение 2.1 *Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство квадратных матриц порядка N. Уравнение (24) называется абсолютно устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{A}$, если найдется такое число $\mu < \infty$, что при любой последовательности матриц $A(n) \in \mathfrak{A}$ для каждого решения $x(\cdot)$ соответствующего уравнения справедлива оценка*

$$\sup_{n \geq 0} \|x(n)\| \leq \mu \|x(0)\|. \tag{25}$$

Определение 2.2 *Наименьшее число μ, при котором справедливы оценки (25) назовем мерой перерегулирования уравнения (24) в классе правых частей $\mathfrak{A}$ и обозначим через $\chi(\mathfrak{A})$.*

Теорема 2.3 *Если уравнение (24) абсолютно устойчиво в квазиуправляемом классе $\mathfrak{A}$, то*

$$\chi(\mathfrak{A}) \leq \inf_{p \geq N-1} \frac{1}{\sigma_p(\mathfrak{A})}. \tag{26}$$

Приведенная теорема является центральным результатом статьи, её доказательство вынесено в раздел 3. Здесь же обсудим некоторые приложения неравенства (26). Очевидно, абсолютная устойчивость по Ляпунову уравнения (24) в классе правых частей $\mathfrak{A}$ равносильна абсолютной устойчивости по Ляпунову разностного включения

$$x(n+1) \in F_{\mathfrak{A}}(x(n)). \tag{27}$$

где многозначное отображение $F_{\mathfrak{A}}(\cdot)$ определяется равенством

$$F_{\mathfrak{A}}(x) = \mathrm{co}\{Ax : A \in \mathfrak{A}\}.$$

Это дает возможность при оценке меры перерегулирования систем управления комбинировать классические методы теории абсолютной устойчивости с теоремой 2.3. Укажем лишь самые простые примеры такого рода.

Следствие 2.4 *Пусть семейство $\mathfrak{A}$ квазиуправляемо и пусть каждое равномерно ограниченное решение $\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ включения (27) тождественно равно нулю. Тогда для любого $p \geq 1$ каждое решение x_n, $n = 0, 1, \ldots$, включения (27) удовлетворяет неравенству $\|x_n\| \leq \sigma_p^{-1}(\mathfrak{A})\|x_0\|$.*

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из теоремы 2.3 и из принципа отсутствия ограниченных решений в теории абсолютной устойчивости (см., например, [17, 18]). □

Рассмотрим теперь разностное уравнение

$$x_{n+1} = Ax_n + bu_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{28}$$

где $b \in \mathbb{R}^N$, а скалярные управления u_n удовлетворяют при некотором фиксированном $c \in \mathbb{R}^N$ неравенству

$$|u_n| \leq \gamma|\langle c, x_n\rangle|$$

с некоторым вещественным параметром γ (здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает эвклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$). Уравнения такого рода типичны в теории управления, см., например, [19].

Следствие 2.5 *Пусть пара (A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема, и пусть $\max_{|\omega|=1} \gamma|\langle c, (\omega I - A)^{-1}b\rangle| < 1$. Тогда для любого $p \geq 1$ каждое решение x_n, $n = 0, 1, \ldots$, уравнения (28) удовлетворяет неравенству $\|x_n\| \leq \sigma_p^{-1}(\mathfrak{A}_*)\|x_0\|$, где $\mathfrak{A}_* = \{A - \gamma\, bc^T, A + \gamma\, bc^T\}$.*

Доказательство. Как показано в примере 1.6 класс $\mathfrak{A}_*$ квазиуправляем. Тогда утверждение настоящего следствия непосредственно вытекает из теоремы 2.3 и кругового критерия абсолютной устойчивости (см., например, [17, 19]). □

В заключение настоящего раздела рассмотрим одно приложение теоремы 2.3 к анализу устойчивости рассинхронизованных систем, т.е. многокомпонентных систем с несинхронно взаимодействующими компонентами (см., например. [1, 12, 13]). Примерами такого рода систем являются системы с ошибками в каналах передачи данных, многопроцессорные вычислительные и телекоммуникационные системы, гибкие производственные системы и пр. Как оказывается, при слабых и естественных предположениях такие системы обладают рядом сильных свойств типа робастности. В приложениях робастность часто интерпретируется как устойчивость функционирования системы по отношению к широкому спектру возмущений — например, к изменению со временем параметров системы, искажениям в каналах передачи данных и т.п.

Напомним основные понятия теории рассинхронизованных систем. Рассмотрим систему S состоящую из N подсистем $S_1, S_2, \ldots, S_N$ взаимодействующих лишь в некоторые дискретные моменты времени $\{T^n\}$, $-\infty < n < \infty$. Моменты взаимодействия могут определяться некоторым детерминистическим или стохастическим законом, но в общем случае они заранее неизвестны. Пусть, наконец, вектор состояния каждой подсистемы S_i постоянен внутри каждого временного интервала $[T^n, T^{n+1})$ и равен величине $x_i(n)$, $-\infty < n < \infty$.

Допустим, что в каждый момент времени $T^n \in \{T^k : \ -\infty < k < \infty\}$ лишь одна из подсистем S_i (например, с индексом $i = i(n) \in \{-\infty < k < \infty\}$) может изменять своё состояние, причем закон изменения состояния линеен:

$$x_i(n+1) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j(n), \qquad i = i(n).$$

Тогда динамика системы S будет описываться разностным уравнением

$$x(n+1) = A_{i(n)} x(n), \qquad -\infty < n < \infty, \tag{29}$$

с матрицами A_i определяемыми равенствами (19). Описанная система называется *рассинхронизованной линейной системой.*

Теорема 2.6 *Пусть* 1 *не является собственным значением матрицы* $A = (a_{ij})$ *и пусть матрица* A *неприводима. Пусть, кроме того, рассинхронизованная система (29) устойчива при любом выборе последовательности* $\{i(n)\}$ *изменения состояния её подсистем (или, что равносильно, уравнение (24) абсолютно устойчиво в классе правых частей* $\mathfrak{P}_1$*). Тогда*

$$\chi(\mathfrak{P}_1) \le \frac{1}{\alpha\beta^{N-1}}.$$

Доказательство. Немедленно вытекает из теоремы 2.3 и примера 1.7. □

3 Доказательство теоремы 2.3

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2.3, приведем два вспомогательных утверждения. Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество всех конечных произведений матриц из $\mathfrak{A}$. *Длиной* матрицы $R \in \mathfrak{R}$ назовем наименьшее число сомножителей $A_1, A_2, \ldots, A_q \in \mathfrak{A}$ в представлении $R = A_1 A_2 \ldots A_q$.

Лемма 3.1 *Пусть семейство матриц* $\mathfrak{A}$ *квазиуправляемо. Если при некоторых* $x_* \in \mathbb{R}^N$ $(x_* \ne 0)$, $p \ge N-1$, $R \in \mathfrak{R}$ *имеют место неравенства*

$$\|Rx_*\| > \mu \frac{1}{\sigma_p(\mathfrak{A})} \|x_*\|, \qquad \mu > 1, \tag{30}$$

то для любого $x \in \mathbb{R}^N$, $x \ne 0$, *найдется такая матрица* $R_x \in \mathfrak{R}$, *что* $\|R_x x\| \ge \mu\|x\|$. *При этом длина матрицы* R_x *не превосходит увеличенной на* p *длины матрицы* R.

Доказательство. Зададимся произвольным $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$. По определению меры квазиуправляемости вектор $\sigma_p(\mathfrak{A})x_*$ принадлежит абсолютно выпуклой оболочке векторов $\mathfrak{A}_p(\frac{\|x_*\|}{\|x\|}x)$. Поэтому найдутся такие числа θ_1, θ_2, $\ldots$, θ_Q,

$$\sum_{i=1}^{Q} |\theta_i| \leq 1, \tag{31}$$

и матрицы $L_1, L_2, \ldots, L_Q \in \mathfrak{A}_p$, что

$$\sum_{i=1}^{Q} \theta_i \frac{\|x_*\|}{\|x\|} L_i x = \sigma_p(\mathfrak{A}) x_*.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{Q} \theta_i R L_i x = \sigma_p(\mathfrak{A}) \frac{\|x\|}{\|x_*\|} R x_*,$$

откуда в силу (30)

$$\sum_{i=1}^{Q} \|\theta_i L_i R x\| \geq \mu \|x\|.$$

Но тогда (см. (31)) найдется такой индекс i, $1 \leq i \leq Q$, при котором для матрицы $R_x = L_i R$ верна оценка $\|R_x x\| \geq \mu \|x\|$.

Осталось заметить, что так как $L_i \in \mathfrak{A}_p$, то независимо от x длина матрицы $R_x = L_i R$ не превосходит увеличенной на p длины матрицы R. Лемма доказана.

□

Определение 3.2 *Уравнение (24) назовем абсолютно экспоненциально неустойчивым (с показателем $\lambda > 1$) в классе $\mathfrak{A}$, если при некотором $\kappa > 0$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, найдется такая последовательность матриц $A(n) \in \mathfrak{A}$, что для решения $x(n)$ соответствующего уравнения (24), удовлетворяющего начальному условию $x(0) = x$, справедлива оценка*

$$\|x(n)\| \geq \kappa \lambda^n \|x(0)\|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Лемма 3.3 *Пусть семейство матриц $\mathfrak{A}$ ограничено. Тогда в условиях леммы 3.1 уравнение (24) абсолютно экспоненциально неустойчиво в классе $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Зададимся произвольным вектором $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, и построим вспомогательную последовательность векторов $\{z(m)\}$, $m = 0, 1, \ldots$, полагая $z(0) = x$,

$$z(m) = R_{z(m-1)} z(m-1), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

где $R_{z(m)}$ — матрицы определяемые леммой 3.1 по соответствующим векторам. Тогда в силу леммы 3.1 справедливы оценки

$$\|z(m)\| \geq \mu^m \|z(0)\|, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

По определению, для матриц $R_{z(m)}$, $m=0,1,\ldots$, справедливо представление

$$R_{z(m)} = A_{m,l(m)},\ldots,A_{m,2},A_{m,1}, \qquad A_{m,j}\in\mathfrak{A},$$

где $l(m)$ — длина матрицы $R_{z(m)}$. Обозначим через $\{A(n)\}$, $n=0,1,\ldots$, последовательность матриц

$$A_{0,1},A_{0,2},\ldots,A_{0,l(0)},A_{1,1},A_{1,2},\ldots,A_{1,l(1)},\ldots,A_{m,1},A_{m,2},\ldots,A_{m,l(m)},\ldots,$$

и рассмотрим решение $x(n)$ соответствующего уравнения (24), удовлетворяющее начальному условию $x(0)=x$. Тогда будут справедливы соотношения

$$x(q_m)=z(m), \qquad m=0,1,\ldots,$$

где $q_0=0$,

$$q_m=\sum_{i=0}^{m-1} l(i), \qquad m=1,2,\ldots.$$

Из оценок (33) теперь получаем, что

$$\|x(n)\|\ge \mu^m\|x(0)\|, \quad n=q_m, \qquad m=0,1,\ldots. \tag{34}$$

Так как нормы матриц из семейства $\mathfrak{A}$ по условию леммы равномерно ограничены и в силу леммы 3.1 верны оценки

$$q_m-q_{m-1}=l(m-1)\le K \qquad m=1,2,\ldots, \tag{35}$$

то неравенство (34), несколько ослабив, можно распространить на значения n из промежутка $(q_{m-1},q_m]$:

$$\|x(n)\|\ge \nu\mu^m\|x(0)\|, \qquad \nu>0,\ q_{m-1}<n\le q_m,\ m=0,1,\ldots. \tag{36}$$

Учитывая теперь, что в силу (35) $q_m\le mK$, $m=0,1,\ldots$, из (36) при подходящем выборе чисел $\kappa>0$ и $\lambda>1$ получим оценку (32). Лемма 3.3 доказана. □

Приступим теперь к доказательству теоремы 2.3. Если утверждение теоремы не верно, то найдется последовательность матриц $\{A(n)\in\mathfrak{A},\ n=0,1,\ldots\}$ и решение $x(n)$ соответствующего уравнения (24), для которого при некоторых $n_0\ge 1$, $p\ge N-1$, выполняется неравенство

$$\|x(n_0)\|>\frac{1}{\sigma_p(\mathfrak{A})}\|x(0)\|,$$

а с ним — и неравенство

$$\|A(n_0-1)\ldots A(1)A(0)x(0)\|>\frac{1}{\sigma_p(\mathfrak{A})}\|x(0)\|.$$

Тогда в силу леммы 3.3 уравнение (24) абсолютно экспоненциально неустойчиво в классе правых частей $\mathfrak{A}$, а значит и подавно не является абсолютно устойчивым в этом классе правых частей. Полученное противоречие доказывает теорему 2.3.

3.1 Робастность неустойчивости

Рассмотрим разностное уравнение (24), в котором матрицы $A(n)$ принадлежат некоторому семейству матриц $\mathfrak{A}(\tau) = \{A_1(\tau), A_2(\tau), \ldots, A_M(\tau)\}$, зависящих от некоторого параметра τ (который не ограничивая общности можно считать вещественным). Возникает вопрос об изменении свойств разностного уравнения (24) при изменении параметра τ.

Теорема 3.4 *Пусть семейство матриц $\mathfrak{A}(\tau)$ квазиуправляемо и непрерывно в точке $\tau = 0$. Если уравнение (24) не является абсолютно устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{A}(0)$, то оно не является абсолютно устойчивым (более того — оно абсолютно экспоненциально неустойчиво) в классе $\mathfrak{A}(\tau)$ при всех достаточно малых значениях τ.*

Доказательство. Пусть уравнение (24) не является абсолютно устойчивым в классе правых частей $\mathfrak{A}(0)$. Тогда найдутся такие матрицы $A(n,\tau) \in \mathfrak{A}(\tau)$, $n = 0, 1, \ldots$, которым при $\tau = 0$ отвечает решение $x(\cdot)$ соответствующего уравнения (24), удовлетворяющее при некотором $n_0 > 0$ неравенству

$$\|x(n_0)\| > \frac{1}{\sigma_{N-1}[\mathfrak{A}(0)]}\|x(0)\|.$$

Поэтому

$$\|A(n_0-1,0)\ldots A(1,0)A(0,0)x(0)\| > \frac{1}{\sigma_{N-1}[\mathfrak{A}(0)]}\|x(0)\|.$$

А тогда в силу непрерывности в точке $\tau = 0$ матриц $\{A(n,\tau)\}$ и функции $\sigma_{N-1}[\mathfrak{A}(\tau)]$ (см. теорему 1.5) при всех достаточно малых τ будут выполняться неравенства

$$\|A(n_0-1,\tau)\ldots A(1,\tau)A(0,\tau)x(0)\| > \frac{1}{\sigma_{N-1}[\mathfrak{A}(\tau)]}\|x(0)\|.$$

Следовательно, по лемме 3.3 при всех достаточно малых τ уравнение (24) абсолютно экспоненциально неустойчиво в классе $\mathfrak{A}(\tau)$. Теорема 3.4 доказана. □

В некоторых случаях полезно следующее следствие из теорем 1.5, 2.3 и 3.4.

Следствие 3.5 *Пусть квазиуправляемое семейство $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_M\}$ является пределом семейств матриц $\mathfrak{A}_m = \{A_{1,m}, A_{2,m}, \ldots, A_{M,m}\}$. Если уравнение (24) абсолютно устойчиво в классах правых частей $\mathfrak{A}_m$, $m = 1, 2, \ldots$, то оно абсолютно устойчиво и в классе правых частей $\mathfrak{A}$. При этом семейства матриц $\mathfrak{A}_m$ квазиуправляемы, а меры перерегулирования $\chi(\mathfrak{A}_m)$ равномерно ограничены.*

Как показывают следующие два примера утверждение следствия 3.5 не верно без предположения о квазиуправляемости семейства $\mathfrak{A}$.

Пример 3.6 *Рассмотрим последовательность семейств матриц $\mathfrak{E}_m = \{E_m\}$, каждое из которых состоит из единственной матрицы*

$$E_m = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{m} & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

Предельное для $\{\mathfrak{E}_m\}$ семейство $\mathfrak{E}$ состоит из матрицы

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и потому не является квазиуправляемым. И хотя уравнение (24) эспоненциально устойчиво в классах правых частей $\mathfrak{E}_m$, оно но не является устойчивым в классе $\mathfrak{E}$.

Пример 3.7 *Рассмотрим последовательность семейств матриц $\mathfrak{F}_m = \{F_m\}$, каждое из которых состоит из единственной матрицы*

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 - \frac{1}{m^2} \end{pmatrix}.$$

Предельное для $\{\mathfrak{F}_m\}$ семейство матриц $\mathfrak{F}$ состоит из тождественной матрицы I, и потому не является квазиуправляемым. При этом уравнение (24) устойчиво как в классе правых частей $\mathfrak{F}$, так и в классах правых частей $\mathfrak{F}_m$, $m = 1, 2, \ldots$. В то же время меры перерегулирования $\chi(\mathfrak{F}_m)$ не ограничены в совокупности.

Список литературы

[1] Асарин Е.А., Козякин В.С., Красносельский М.А., Кузнецов Н.А. Анализ устойчивости рассинхронизованных систем. М., “Наука”, 1992. 3, 9, 13

[2] Berger M.A. and Wang Y. (1992). Bounded semigroups of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **166**, 21–27. 3

[3] Bongiorno J. and Youla D. (1968). On observers in multivariable control systems. *Intern. J. Control*, **8**, 3, 221–243. 2

[4] Bongiorno J. and Youla D. (1970). Discussion of “On observers in multi-variable control systems”. *Intern. J. Control*, **12**, 1, 183–190. 2

[5] Daubechies L. and Lagaris J. (1992). Set of matrices all infinite products of which converge. *Linear Algebra and its Applications*, **161**, 227-263. 3

[6] Izmaylov R.N. (1987a). The peak effect in stationary linear systems with scalar inputs and outputs. *Automation and Remote Control*, **48**, 8, 1018–1024. 2

[7] Izmaylov R.N. (1987b). Eigenvectors of asymptotic identifier matrices. *Automation and Remote Control*, **48**, 12, 1586–1592. 2

[8] Измайлов Р.Н. (1987c). О переходных режимах в автономных линейных системах. *Доклады АН СССР*, **297**, №5, 1068–1071.

[9] Izmaylov R.N. (1988). The peak effect in stationary linear systems with multivariable inputs and outputs. *Automation and Remote Control*, **49**, 1, 40-47. 2

[10] Измайлов Р.Н. (1989). Каноническое представление идентификатора состояния и оптимизация переходных режимов. *Автоматика и телемеханика*, №4, 59-64. 2

[11] Kimura H. (1981) A new approach to the perfect regulation and the bounded peaking in linear multivariable control systems. *IEEE Transact. Automat. Control*, **AC-26**, 1, 253–270. 2

[12] Kleptsyn A.F., Krasnoselskii M.A., Kuznetsov N.A. and Kozjakin V.S. (1984). Desynchronization of linear systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, **26**, 423–431. 3, 9, 13

[13] Kozyakin V.S. (1991). Equivalent norms technique for stability analysis of linear discrete event systems. *Proceedings of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event System Theory and Applications in Manufacturing and Social Phenomena, June 25–27, 1991*, Shenyang, China, International Academic Publishers, A Pergamon - CNPIEC Join Venture, 290–295. 3, 13

[14] Kozyakin V.S., Kuznetsov N.A., Pokrovskii A.V. (1993). Transients in quasi-controllable systems. Overshooting, Stability and instability. *12th World Congress IFAC, Sydney, Australia, 18-23 July 1993. Preprint of papers*, **8**, 465-468. 3

[15] Козякин В.С., Покровский А.В. (1992). Роль свойств типа управляемости в изучении устойчивости рассинхронизованных динамических систем, *Доклады АН СССР*, **324**, 1, 60-64.

[16] Kozyakin V., Pokrovskii A. (1996). Estimates of amplitudes of transient regimes in quasi-controllable discrete systems. *Deakin University, Geelong, Australia, CADSEM Report*, **96-005**, 1-21. 3

[17] Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы, М., "Наука", 1985. 13

[18] Красносельский М.А., Покровский А.В. (1978). Об абсолютной устойчивости систем с дискретным временем и сходимости некоторых итерационных процедур. *Автоматика и телемеханика*, №2, 42–52. 13

[19] Liao X, Absolute Stability of Nonlinear Control Systems, Kluwer Academic Publishen, 1993. 13

[20] Mita T. (1976). A note on a relation between zeros and initial response. *Transact. Soc. Instr. and Contr. Eng.*, **12**, 2, 235–236. 2

[21] Mita T. (1977). On zeros and responses of linear regulators and linear observers. *IEEE Transact. Automat. Control*, **AC-22**, 3, 423–428. 2

[22] Mita T. (1978). On responses and linear structure of regulators and observers. *Transact. Soc. Instr. and Contr. Eng.*, **14**, 1, 19–25. 2

[23] Mita T. and Yoshida H. (1980). Eigenvector assignability and responses of the closed loop systems. *Transact. Soc. Instr. and Contr. Eng.*, **16**, 4, 477–483. 2

[24] Narendra K.S. and Cho Y.S. (1968). Stability analysis of nonlinear and time-varying discrete systems, *SIAM J. Control*, **6**, No 4, 625–646.

[25] Olbrot A. and Cieslik J. (1988). A qualitative bound in robustness of stabilization by state feedback. *IEEE Transact. Automat. Control*, **AC-33**, 12, 1165–1166. 2

[26] Polotskii V.N. (1978). On maximal error of asymptotic state identifier. *Automation and Remote Control*, **39**, 8, 1126–1129. 2

[27] Polotskii V.N. (1980). Estimating the state of linear one-input systems by observers. *Automation and Remote Control*, **41**, 12, 1640–1648. 2

[28] Пятницкий Е.С., Рапопорт Л.Б. (1991). Периодические режимы и критерий абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем. *Avtomatika i telemekhanika*, №10, 63–72.

[29] Soroka E. and Shaked U. (1984). On the robustness of *LQ* regulators. *IEEE Transact. Automat. Control*, **AC-29**, 7, 664–665. 2

[30] Zeitz M. (1983). Transfer characteristics of extremely fast state feedback and observer systems. *Intern. J. Systems Sci.*, **14**, 2, 169–177. 2