О конструктивных условиях разрешимости проблемы Римана-Гильберта

И.В.Вьюгин*

В работе исследуются достаточные и необходимые условия положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта. Эти условия заключаются в проверке возможности построения стабильных и полустабильных пар (расслоений со связностью) по данной монодромии. Полученные результаты позволяют построить алгоритмы для проверки условий разрешимости проблемы Римана-Гильберта.
Библиография: 6 названий.

1 Введение

Проблема Римана-Гильберта состоит в построении фуксовой системы на сфере Римана с данными монодромией $\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \to GL(p, \mathbb{C})$ и особыми точками $a_1, \ldots, a_n$. В 1989 году А.А.Болибрухом [1] был построен контрпример к проблеме Римана-Гильберта. Таким образом, в общем случае проблема имеет отрицательное решение. Однако возникает вопрос, для каких представлений монодромии и наборов особых точек возможно построение фуксовой системы. Были построены различные достаточные условия положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта. Например, достаточным условием является неприводимость представления. Этот результат был получен независимо А.А.Болибрухом [1] и В.П.Костовым [5].

Общий подход к исследованию этого вопроса состоит в построении всех возможных голоморфных расслоений с логарифмическими связностями на сфере Римана, имеющими данную монодромию и набор особых точек (см. [1], [2]). Построение фуксовой системы сводится к отысканию тривиального расслоения в построенном семействе расслоений.

В работе А.А.Болибруха [3] показано, что разрешимость задачи существования стабильной пары (F, ∇) (определение см. в разделе 2) не зависит от расположения особых точек и влечет существование тривиального голоморфного расслоения с логарифмической связностью, то есть является достаточным условием положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта. Это условие, конечно, является наиболее широким из существующих. Кроме того, в работе [3] показано, что существование стабильной пары является критерием положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта в классе фуксовых систем с неприводимым набором коэффициентов, то есть систем, у которых нельзя выделить подсистему голоморфно обратимой

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта "Научные школы" НШ-457.2003.01

(в данном случае постоянной) заменой. Существование полустабильной пары (определение см. в разделе 2), напротив, является необходимым условием для проблемы Римана-Гильберта, так как тривиальное расслоение со связностью всегда образуют полустабильную пару. Таким образом мы получаем следующую цепочку следствий:

проблема Римана-Гильберта имеет положительное решение в классе фуксовых систем с неприводимым набором коэффициентов

$$\Updownarrow$$

существует стабильная пара

$$\Downarrow$$

проблема Римана-Гильберта имеет положительное решение

$$\Downarrow$$

существует полустабильная пара

Главной проблемой, рассматриваемой в данной работе, является построение конечного алгоритма проверки существования стабильной пары с данным представлением монодромии. Гипотеза о существования такого алгоритма была выдвинута А.А.Болибрухом [3]. Этот алгоритм даст возможность ответить на вопрос о существовании фуксовой системы с данным представлением монодромии (то есть положительного решения проблемы Римана-Гильберта) для более широкого класса представлений, чем позволяют сказать существующие достаточные условия. В работе также исследуется аналогичный вопрос для полустабильных пар. Этот вопрос также имеет интерес, так как такой алгоритм позволит проверять необходимое условие проблемы Римана-Гильберта и находить к ней контрпримеры.

Полностью эта задача решена лишь в частном случае, для конкретного класса представлений. Собственно алгоритму проверки существования стабильной, а также и полустабильной пары, посвящена пятая часть, а окончательный результат дается теоремой 4. Но основным результатом работы является теорема 1, которая позволяет, уже в общем случае, ограничить перебор расслоениями, имеющими нормирования, не превосходящие константы $N(n,p)$, зависящей только от ранга представления p и количества особых точек n. Численно эта константа дается следствием 1. Эта теорема может иметь следствия, не относящиеся к основной задаче. Следствие 2 гарантирует при условии, что существует какая-нибудь фуксова система с данной монодромией и неприводимым набором коэффициентов, существование фуксовой системы с достаточно небольшими показателями роста решений. В разделе 4 работы исследуются аналогичные вопросы об алгоритме проверки существования полустабильных пар. Там дается краткое доказательство теоремы 2 аналогичной теореме 1 только для полустабильных пар, но численной оценки для нее не получено. Теоремы аналогичные теоремам разделе 5 для полустабильных пар (расслоение с логарифмической связностью) тоже будут верны, но так как их формулировки и доказательства будут практически аналогичными, они не приводятся. Полученные алгоритмы проверки наличия стабильных и полустабильных пар могут быть эффективно применены к любым представлениям монодромии, при наличии описания подпредставлений данного представления, и некоторой информации о его образующих.

2 Основные понятия

Как уже было сказано, общий подход к решению проблемы Римана-Гильберта состоит в построении всех возможных голоморфных расслоений с логарифмическими связностями имеющими данное представление монодромии $\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \to GL(p, \mathbb{C})$ с образующими $G_1, \ldots, G_n$ и особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ на сфере Римана. Существование фуксовой системы с данной монодромией и особыми точками эквивалентно существованию тривиального расслоения в построенном семействе, так как логарифмическая (фуксова) связность в тривиальном расслоении задает фуксову систему уравнений.

Все голоморфные расслоения с логарифмическими связностями могут быть описаны, как продолжения в особые точки $a_1, \ldots, a_n$ голоморфного расслоения с плоской голоморфной связностью на проколотой сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. В окрестности особой точки, в которой расслоение тривиально, связность задает систему дифференциальных уравнений, а базис пучка локальных горизонтальных сечений связности задается фундаментальной матрицей $Y(z)$ этой системы. Для фундаментальной матрицы решений, построенной по ассоциированному с фильтрацией в окрестности особой точки a_i базису, справедливо разложение:

$$Y_i(z) = U_i(z)(z - a_i)^{\Lambda_i}(z - a_i)^{E'_i},$$

где матрица $U(z)$ – однозначна и голоморфна в окрестности точки a_i, $\Lambda_i = diag(\psi_i^1, \ldots, \psi_i^p)$ – диагональная целочисленная матрица нормирований в точке a_i, диагональ которой образует допустимую последовательность, то есть матрица $(z - a_i)^{\Lambda_i} E'_i (z - a_i)^{-\Lambda_i}$ - голоморфна в точке a_i, $E'_i = \frac{1}{2\pi i} \ln S_i^{-1} G_i S_i$, и матрица $S_i^{-1} G_i S_i$ – верхнетреугольная, причем элемент e_{kl} матрицы E'_i равен нулю каждый раз, когда $\rho_i^k \neq \rho_i^l$ (см. теорему 5.1 в [2]). Особая точка a_i фуксова тогда и только, когда голоморфная матрица $U(z)$ является голоморфно обратимой в a_i (см. теорему 5.2 в [2]). Склеивающий коцикл в окрестности особой точки a_i может быть выбран равным фундаментальной системе решений $Y_i(z) S_i^{-1}$, который в случае фуксовой особой точки a_i эквивалентен коциклу

$$G_{0i} = (z - a_i)^{\Lambda_i}(z - a_i)^{E'_i} S_i^{-1}.$$

Формы связности в окрестности особой точки a_i примут вид:

$$\omega = (\Lambda_i + (z - a_i)^{\Lambda_i} E'_i (z - a_i)^{-\Lambda_i}) \frac{dz}{z - a_i},$$

где $(z - a_i)^{\Lambda_i} E'_i (z - a_i)^{-\Lambda_i}$ голоморфна в a_i по построению, и следовательно, форма связности имеет логарифмическую особенность. Таким образом, все голоморфные расслоения с логарифмическими связностями с данными особыми точками и монодромией строятся, как продолжения расслоения на проколотой сфере $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ в особые точки $a_1, \dots, a_n$ с помощью допустимых матриц нормирований $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ и матриц приведения $S_1, \dots, S_n$ с наложенными на них выше условиями.

Пусть E – подрасслоение расслоения F над базой B, в котором задана логарифмическая связность ∇. Тогда говорят, что подрасслоение E расслоения F стабилизируется связностью ∇, если $\nabla(\Gamma(E)) \subset \Gamma(\tau_{B^*} \otimes E)$, где $\Gamma(E)$ – пучок локальных голоморфных сечений расслоения E, а τ_B^* – кокасательное расслоение к B. Другими словами, если связность переводит локальные сечения подрасслоения E в локальные сечения того же подрасслоения с коэффициентами в дифференциальных 1-формах.

Определение. Стабильной парой называется пара: расслоение со связностью (F, ∇) такие, что для любого подрасслоения E расслоения F, которое стабилизируется связностью ∇ выполняется неравенство $\mu(E) < \mu(F)$, где $\mu(F)$ – наклон расслоения, то есть степень расслоения деленная на его ранг. Если же для всех подрасслоений E, которые стабилизируются связностью выполнены только неравенства $\mu(E) \leq \mu(F)$, то пара называется полустабильной.

Существование стабильной пары является достаточным, а полустабильной необходимым условием для положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта [3].

3 Существование стабильной пары с ограниченными нормированиями

Теорема 1 *Если существует стабильная пара (F, ∇), построенная по данному представлению монодромии $\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \to GL(p, \mathbb{C})$, то существует стабильная пара (F', ∇'), построенная по тому же представлению монодромии и такая, что $\psi_i'^{(1)} - \psi_i'^{(p)} < N(n, p)$, где n – количество особых точек, p – ранг представления, а $\psi_i'^{(1)}$, $\psi_i'^{(p)}$ – наибольшее и наименьшее нормирования пары (F', ∇') в особой точке a_i соответственно.*

Доказательство. Проведем доказательство поэтапно. Сначала рассмотрим случай, когда все собственные значения операторов локальной монодромии – положительные действительные числа.

Рассмотрим матрицу $E_i' = \frac{1}{2\pi i} \ln G_i'$, у которой выбрана ветвь $0 \leq Re\rho_i^j < 1$, и, где матрица $G_i' = S_i^{-1} G_i S_i$ имеет верхнетреугольный вид. Так как собственные значения матриц G_i – положительные действительные числа, то собственные значения матрицы E_i', с учетом выбранной ветви, имеют нулевые вещественные части. Степень расслоения, так как она является вещественным числом, в этом случае равна сумме нормирований в особых точках, так как вещественные части собственных значений матрицы E_i' равны нулю, то есть, $Re\beta_i^j = \psi_i^j + Re\rho_i^j = \psi_i^j$. Таким образом,

$$\deg F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (\psi_i^j + \rho_i^j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \psi_i^j.$$

Построим по паре (F, ∇) таблицу следующим образом:

ψ_1^1	$\dots$	ψ_n^1
$\dots$	ψ_i^j	$\dots$
ψ_1^p	$\dots$	ψ_n^p

в таблице по столбцам выписываются нормирования в особых точках, то есть в каждом столбце содержатся диагональные элементы соответствующей матрицы Λ_i. При этом получается, что степень расслоения равна сумме всех элементов таблицы. Пусть у расслоения F есть подрасслоение F_α размерности q, которое стабилизируется связностью ∇, тогда, как следует из результата А.Гладышева [4], наборам нормирований подрасслоения F_α в каждой точке соответствуют поднаборы нормирований расслоения F, то есть в каждой особой точке подрасслоению F_α соответствуют q нормирований из соответствующего столбца таблицы. Совокупность всех клеток таблицы, в которых стоят нормирования подрасслоения, будем называть подтаблицей соответствующей подрасслоению. Таким образом, подтаблица – это часть таблицы, состоящая из $q \times n$ клеток по q в каждом столбце.

Каждому подрасслоению расслоения F, которое стабилизируется связностью ∇, будет соответствовать подтаблица. Заметим, что подрасслоения, которые стабилизируются связностью, соответствуют подпредставлениям представления монодромии, то есть набор таких подрасслоений, зависит только от представления монодромии, а не от других данных, по которым построена пара (F, ∇). Степень данного подрасслоения будет равна сумме всех элементов, стоящих в клетках, соответствующей ему подтаблицы. Рассмотрим всю таблицу расслоения F и ее подтаблицы, соответствующие подпредставлениям монодромии, при этом не будем фиксировать содержимого таблицы. Заметим, что взаимная структура таблицы и подтаблиц зависит только от представления монодромии χ и от матриц приведения образующих монодромии к верхнетреугольному виду S_i. Заполнение таблицы, напротив, зависит только от элементов допустимых матриц Λ_i.

Из условия теоремы следует, что существует стабильная пара (F, ∇), построенная по данному представлению монодромии χ. Это означает, что можно так заполнить соответствующую таблицу и подтаблицы, чтобы выполнялись неравенства на стабильность, то есть среднее по любой подтаблице было меньше среднего по всей таблице. Таким образом, зафиксировав представление монодромии и матрицы приведения S_i, по которым оно построено, мы фиксируем и взаимную структуру таблицы и подтаблиц, которую мы можем заполнить с условием выполнения неравенств на стабильность.

Рассмотрим условия, которые накладываются на элементы таблицы – это условия допустимости матриц Λ_i. Это так, поскольку столбцы таблицы это допустимые наборы нормирований, то есть диагонали матриц Λ_i. Согласно принятому в работе описанию расслоений для допустимых наборов, должны выполняться неравенства: $\psi_i^k \geq \psi_i^l$, если элемент e_{kl} матрицы E_i' не равен нулю, но так как матрица E_i' верхнетреугольная, то это может быть выполнено, только если $k \leq l$.

Таким образом, чтобы найти стабильную пару, нужно найти заполнение данной таблицы, такое, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) Все столбцы должны быть допустимыми.

Это означает выполнение следующих условий: $\psi_i^k \geq \psi_i^l$, если элемент e_{kl} матрицы E_i' не равен нулю.

2) Должны выполняться неравенства на стабильность (среднее по подтаблицам меньше среднего по всей таблице).

Назовем искомую константу для случая положительных вещественных собственных значений монодромии N_0. Назовем *конфигурацией* следующую совокупность: таблица, соответствующие подпредставлениям подтаблицы, и накладываемые условия на допустимость столбцов таблицы (конфигурация не включает элементов таблицы).

Назовем все конфигурации $K_1, K_2, \ldots, K_M$. Мы можем это сделать, так как число возможных конфигураций ограничено. Действительно, нам не важно количество подпредставлений, которым соответствует данная подтаблица. Важно лишь, есть ли для данной подтаблицы хотя бы одно соответствующее ей подпредставление. Отсюда следует, что число возможных подтаблиц, а значит, и число их комбинаций, ограничено. Число возможных комбинаций условий на допустимость также ограничено. Таким образом, получаем, что число возможных конфигураций ограничено.

Выберем из всех конфигураций те, для которых возможно такое заполнение элементами, чтобы выполнялись неравенства на стабильность. Пусть это конфигурации $\tilde{K}_1, \ldots, \tilde{K}_m$. Назовем *модулем* конфигурации следующую величину: для всех "стабильных" заполнений $\{{}^s\psi_i^j\}$ конфигурации K_s

$$mod(K_s) = \min_{{}^s\psi_i^j} \max_{1 \leq i \leq n} ({}^s\psi_i^{(1)} -^s \psi^{(p)}),$$

где ${}^s\psi_i^{(1)}$, ${}^s\psi^{(p)}$ – наибольшее и наименьшее нормирования в столбце с номером i, соответственно. Заметим, что модуль конфигурации определен тогда и только тогда, когда конфигурацию можно заполнить, при условии выполнения неравенств на стабильность. Но для конфигураций $\tilde{K}_s$ модуль корректно определен, а конфигурация, построенная по данной в условии теоремы стабильной паре (F, ∇), как раз лежит в множестве $\{\tilde{K}_s\}$. Теперь в качестве константы N_0 возьмем следующую величину:

$$N_0 = \max_{1 \leq s \leq m} \tilde{K}_s.$$

Действительно, эта константа N_0 зависит лишь от количества особых точек n и ранга представления p (от размеров исходной таблицы). Какую бы мы не взяли стабильную пару (F, ∇) в условии теоремы, построенная по ней конфигурация будет лежать в множестве $\{\tilde{K}_s\}$, и, следовательно, для нее N_0 будет верной оценкой из условия теоремы.

Теперь рассмотрим случай произвольных собственных значений. Проведенное в первом случае рассуждение с конфигурациями в этой форме не применимо, так как к нормированиям в таблице добавляются ненулевые вещественные части собственных значений матриц E_i, $0 \leq Re\rho_i^j < 1$, которые не меняются вместе с нормированиями, и, следовательно, являются неотъемлемыми частями конфигураций, которых в силу этого становится бесконечно много, и максимума по ним априори может не существовать.

Докажем, что из существования стабильной пары с $Re\rho_i^j \neq 0$ следует возможность заполнения таблицы, построенной по той же конфигурации, с выполненными неравенствами на стабильность, но без ρ_i^j. Для этого воспользуемся идеей Малека [6] и построим по данной стабильной паре другую с нормированиями в особых точках, равными $\psi_i^{j'} = Q\psi_i^j + [Re(Q-1)\rho_i^j]$, с подходящим Q (см. аналогичное рассуждение в [3]). При достаточно больших Q можно добиться того, чтобы в новой паре неравенства на наклоны (стабильность) уже выполнялись с заданным запасом. Выберем Q достаточно большим, чтобы неравенства на наклоны в новой стабильной паре выполнялись уже с запасом n. Тогда, если мы в построенной по этой паре таблице удалим ρ_i^j, неравенства на стабильность останутся выполненными, следовательно, это и есть требуемое заполнение.

Пусть имеется представление, по которому можно построить стабильную пару. Построим по нему таблицу. Так как существует "стабильное" заполнение таблицы с ненулевыми $Re\rho_i^j$, то по уже доказанному, существует и заполнение без ρ_i^j. Раз существует "стабильное" заполнение данной таблицы и подтаблиц, то существует "стабильное" заполнение с разностями нормирований в особых точках меньше N_0 (по первому пункту доказательства). Но, как известно, наклоны расслоения и подрасслоений суть рациональные числа со знаменателями не более p, а значит неравенства на наклоны выполняются с запасом более $\frac{1}{p^2}$. Тогда умножим все элементы таблицы на np^2 и неравенства начнут выполняться уже с запасом n, а тогда, добавив вновь ρ_i^j, мы сохраним неравенства. Следовательно, пара (F', ∇'), построенная по допустимым матрицам – столбцам таблицы, будет стабильной, и разница нормирований в каждой из особых точек не будет превышать $N(n,p) = np^2 N_0(n,p)$. $\square$

Предложение 1 *В качестве константы N_0 (из теоремы 1) можно взять* $N_0(n,p) = \frac{np^2}{4}(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{np^3})^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{np}}$.

Доказательство. Пусть все элементы таблицы – неизвестные $x_{1,1}, \ldots, x_{p,n}$. Тогда все условия, накладываемые на матрицы нормирований, можно записать через неизвестные целочисленными неравенствами. Причем два вида условий (на допустимость матриц и на стабильность) будут задавать неравенства двух видов.

1) $x_{i,j_1} - x_{i,j_2} > 0$, $j_1 < j_2$ – условие на допустимость,

2) $\frac{1}{p}\sum_{i,j} x_{i,j} - \frac{1}{l}\sum_{0\le t\le l} x_{i_t,j} > 0$, если переписать это условие с целыми коэффициентами, то получится $(l-p)\sum_{0\le t\le l} x_{i_t,j} + l\sum_{t>l} x_{i_t,j} > 0$.

Пусть имеется некоторое количество таких условий, то есть система неравенств данного вида. Из существования какой-либо стабильной пары следует разрешимость этой системы. Данные неравенства задают полупространства, отсекаемые гиперплоскостями, содержащими ноль, которые имеют общую точку, а значит и общий конус. Так вопрос оценки N_0 сводится к вопросу о нахождении целой точки в данном конусе, а точнее, оценке расстояния, на котором заведомо существует хотя бы одна целая точка. Если в конус можно вписать шар радиуса $R = \frac{\sqrt{np}}{2}$, то в нем находится хотя бы одна целая точка. Чтобы оценить расстояние от центра вписанного шара, надо сдвинуть все гиперплоскости параллельно самим себе в сторону положительного решения неравенств на R и найти любое решение получившейся системы неравенств, а "минимальное" из таких решений и будет в точности центром вписанного шара. При сдвиге в правой части неравенств вместо нуля появится $R\sqrt{\sum a_{i,j}}$, где $a_{i,j}$ коэффициенты при $x_{i,j}$ в неравенстве. Новые неравенства:

1) $x_{i,j_1} - x_{i,j_2} > R\sqrt{2}$, $j_1 < j_2$ – условие на допустимость,

2) $(l-p)\sum_{0\le t\le l} x_{i_t,j} + l\sum_{t>l} x_{i_t,j} > R\sqrt{(p-l)lnp}$.

Теперь задача сводится к оценке минимального решения системы неравенств. Сколько бы не было неравенств, значимых из них будет не более np (то есть размерности пространства), а остальные будут их следствиями. Пусть всего имеется L значимых неравенств, тогда минимальным решением будет точка пересечения этих гиперплоскостей (или целое пространство размерности $(np-L)$), то есть решение соответствующей системы. Верхняя оценка решения этой системы будет оценкой для N_0. Запишем систему в виде: $AX = Y$, преобразуем ее к виду $X = A^{-1}Y$, и, следовательно, $\|X\| = \|A^{-1}Y\|$ (здесь под нормой понимается максимум модуля компонентов).

Оценим сверху величину $\|A^{-1}Y\|$ с помощью формул Крамера.

$$A = (a_{ij}), A^{-1} = (a'_{ij}), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_L \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_L \end{pmatrix}$$

Выразим решение системы по формуле Крамера через алгебраические дополнения – миноры A_{ij}:

$$X = A^{-1}Y = \frac{(A_{ji})Y}{\det A}$$

Откуда получаем:

$$x_k = \frac{\sum_{1\le j\le L} A_{jk}y_j}{\det A} \le L\max_j |A_{jk}| \max_j |y_j| \le L\max_{i,j} |A_{ij}| \max_j |y_j|.$$

Миноры A_{ij} представляют собой определители порядка $L-1$, элементы которых по модулю не превосходят p, а значит оцениваются $A_{ij} \le p^{L-1}(L-1)!$. Элементы правой части системы y_j оцениваются в свою очередь $y_j \le R\frac{\sqrt{np^3}}{2}$. Таким образом, верна оценка:

$$x_k \le Lp^{L-1}(L-1)!R\frac{\sqrt{np^3}}{2} < p^L L^L \frac{np^2}{4}.$$

Теперь оценим значение L. Заведомо известно, что $L \le np$, так как количество значимых неравенств не превосходит числа неизвестных. Но, так как данные L плоскостей образуют конус в пространстве, то сумма углов между нормалями к этим плоскостям должна быть меньше 2π. Оценим снизу угол между нормалями к этим плоскостям через их скалярное произведение. Можно заметить, что минимальный угол между плоскостями бывает, когда эти плоскости соответствуют подтаблицам одного ранга и различаются только в одном элементе. Проведем соответствующие вычисления. Назовем нормальные вектора к плоскостям n_1 и n_2.

$$\|n_1\|^2 = \|n_2\|^2 = ln(l-p)^2 + (np-nl)l^2 = lnp(p-l)$$

Здесь и далее под нормой понимается обычная норма – сумма квадратов. Вычислим теперь скалярное произведение n_1 и n_2.

$$(n_1, n_2) = (np - nl - 1)l^2 + (nl - 1)p^2 + 2p(l - p) = \|n_1\|\|n_2\| - p^2$$

Теперь оценим косинус угла между плоскостями α.

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} \le \cos\alpha = \frac{(n_1, n_2)}{\|n_1\|\|n_2\|} = 1 - \frac{p^2}{\|n_i\|^2} = 1 - \frac{p}{nl(p-l)} \le 1 - \frac{4}{np}$$

Из разложения Тейлора для косинуса получается оценка $\alpha \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{np}}$. Следовательно, всего плоскостей $L \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{np}$. Таким образом, получаем

$$N_0 = \frac{np^2}{4}(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{np^3})^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{np}}.$$

□

Следствие 1 *В качестве константы N (из теоремы 1) можно взять $N(n,p) = \frac{n^2p^4}{4}(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{np^3})^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{np}}$.*

Замечание. Данная оценка верна для всех нормирований, но можно заметить, что для почти всех нормирований верна другая, гораздо меньшая, оценка. В рассуждении мы положили равными нулю все $np - L$ свободных неизвестных. Это означает, что центр шара, в котором находится искомая целая точка, имеет координату ноль почти по всем осям, а значит, и искомая точка имеет по этим осям координату не более R по модулю. В итоге получаем, что как минимум $np - L \le np - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{np}$ нормирований оцениваются константой $np^2R = \frac{\sqrt{n^3p^5}}{2}$ по модулю и только остальные L оцениваются константой N.

Следствие 2 *Если по представлению монодромии χ можно построить какую-нибудь фуксову систему с неприводимым набором коэффициентов, то по той же монодромии χ можно построить фуксову систему с ограниченными некоторой константой показателями (асимптотиками решений) $Re\beta_i^j < C(n,p)$, при этом $Im\beta_i^j = Im\rho_i^j$.*

Это следствие легко выводится из теоремы 1 и из следствия 1 из [3].

4 Существование полустабильной пары с ограниченными нормированиями

Следующая теорема аналогична теореме 1 только для полустабильных пар. Доказательство теоремы 1 не проходит для теоремы 2, так как идея С.Малека, которая помогла свести случай представления с вещественными положительными собственными значениями образующих к случаю любых представлений, в данном случае неприменима. Здесь придется проводить доказательство сразу для всех представлений. Близкое доказательство может быть проведено в теореме 1, но оно хуже приведенного в разделе 3, так как практически не позволяет находить численные оценки для константы.

Теорема 2 *Если существует полустабильная пара (F, ∇), построенная по данному представлению монодромии $\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \to GL(p, \mathbb{C})$, то существует полустабильная пара (F', ∇'), построенная по тому же представлению монодромии и такая, что $\psi_i'^{(1)} - \psi_i'^{(p)} < M(n, p)$, где n – количество особых точек, p – ранг представления, а $\psi_i'^{(1)}$, $\psi_i'^{(p)}$ – наибольшее и наименьшее нормирования пары (F', ∇') в особой точке a_i соответственно.*

Доказательство. Выпишем в таблицу все нормирования в особых точках аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 1. Только добавим в таблицу еще и вещественные части собственных значений ρ_i^j матриц $E_i = \frac{1}{2\pi i} \ln G_i$, у которых выбрана ветвь $0 \le Re\rho_i^j < 1$. Таким образом, получаем, что в таблице стоят вещественные части показателей. Когда речь будет идти о степенях подрасслоений мы не будем учитывать мнимые части показателей, так как сумма мнимых частей по любому подрасслоению равна нулю. При этом изменяться в таблице смогут только нормирования, то есть целые части элементов.

$\psi_1^1 + Re\rho_1^1$	$\dots$	$\psi_n^1 + Re\rho_n^1$
$\dots$	$\psi_i^j + Re\rho_i^j$	$\dots$
$\psi_1^p + Re\rho_1^p$	$\dots$	$\psi_n^p + Re\rho_n^p$

В каждой особой точке каждому подрасслоению, которое стабилизируется связностью, будет соответствовать некоторый набор нормирований из тех, которые принимаются в этой точке во всем расслоении (см. [4]). Выпишем условия, которые накладываются на элементы таблицы, то есть условия на допустимость и на полустабильность. Это будут опять условия тех же двух видов, как в доказательстве теоремы 1.:

1) $\psi_i^k \ge \psi_i^l$, если элемент e_{kl} матрицы E_i' отличен от нуля.

2) Должны выполняться неравенства на полустабильность (среднее по подтаблицам не превосходит среднего по всей таблице).

Существенно изменятся как раз условия второго типа (условия на полустабильность). В неравенства добавятся еще и вещественные части собственных значений. Несмотря на это покажем, что таких комбинаций условий может быть только конечное число. Каждое условие – это замкнутое полупространство в $n \times p$-мерном пространстве с координатами $(\psi_1^1, \psi_1^2, \dots, \psi_n^p) \in \mathrm{R}^{np}$, а, соответственно, комбинация условий задает выпуклую замкнутую область в R^{np}, но, в отличие от доказательства предложения 1, здесь плоскости могут и не проходить через ноль. Данные условия выглядят следующим образом:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^k (\psi_i^{t_i^l} + \rho_i^{t_i^l})}{k} \le \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\psi_i^j + \rho_i^j)}{p},$$

где k – ранг подрасслоения, $t_i^1, \dots, t_i^k$ – номера тех нормирований, которые соответствуют данному подрасслоению в особой точке a_i. Заметим, что коэффициенты в этих условиях – рациональные числа, причем их числители и знаменатели – ограниченные целые числа.

Не вдаваясь в детали скажем, что всего комбинаций таких условий конечное число. Тех комбинаций условий, при которых возможно построение полустабильной пары, не больше чем общее число комбинаций, а значит их количество тоже ограничено. Таким образом, можно рассмотреть все комбинации условий, при которых возможно построение полустабильной пары и взять для каждой такой комбинации минимальное "полустабильное" заполнение таблицы и рассмотреть ограничивающую нормирования константу M_i, а потом взять максимум по всем комбинациям условий $M = \max_i M_i$. Это и будет искомая константа, не зависящая от представления χ, а зависящая только от числа особых точек – n и ранга представления – p. $\square$

5 Условия существования стабильных пар в терминах представлений

Теорема 3 *Пусть у представления монодромии* $\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \to GL(p, \mathbb{C})$ *с образующими* $G_1, \dots, G_n$ *имеется только конечное количество подпредставлений, и все они известны. Тогда можно за конечное число шагов выяснить, является ли пара* (F, ∇)*, построенная по данному представлению монодромии* χ*, допустимым матрицам* $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ *и матрицам приведения* $S_1, \dots, S_n$*, стабильной парой.*

Доказательство. Проведем снова аналогию с таблицей. Для ответа на интересующий вопрос надо понять, какая из возможных конфигураций (конфигурация, в данном случае это набор подтаблиц, соответствующих наборам нормирований, отвечающих подпредставлениям) реализуется в данном представлении.

Фиксируем ассоциированные базисы $v_i^1, \dots, v_i^p$ для каждой из особых точек a_i соответственно, записанные в неособой точке O, то есть базисы, как функции продолжаются в точку $\widehat{O}$ вдоль некоторого пути, где $\widehat{O}$ – это точка на универсальном накрытии, построенном над проколотой сферой $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. То есть решения системы являются однозначными функциями на этом накрытии. Теперь для того, чтобы проверить, реализуется ли данная конфигурация, то есть могут ли данным подпредставлениям соответствовать данные подтаблицы, можно проверить это отдельно для каждого подпредставления, так как по условию всего подпредставлений конечное число. Для этого надо определить, какие нормирования принимаются на базисе общего инвариантного подпространства, соответствующем данному подпредставлению. Для этого запишем сначала какой-либо базис этого инвариантного подпространства, выразив его элементы через фиксированный ассоциированный базис в точке

$$w^l = \beta^1 v_i^1 + \dots + \beta^p v_i^p, l = 1, \dots, k,$$

где k – ранг подпредставления. Причем нормирование вектора w^l равно минимуму из нормирований векторов v_i^j, участвующих в разложении, что следует из ассоциированности базиса $v_i^1, \dots, v_i^p$ и свойств нормирования. Затем нужно найти ассоциированный базис подпространства, то есть тот, на котором принимаются все возможные нормирования с учетом кратностей. Чтобы найти ассоциированный базис, нужно последовательно находить базисы факторпространств инвариантного подпространства X_i/X_{i+1}, где X_i – подпространство с нормированиями не меньше i. Таким образом, получится ассоциированный с фильтрацией базис.

Теперь нужно просто посмотреть, какие нормирования принимаются на этом базисе, какой подтаблице это подпредставление соответствует. Таким образом, можно выяснить, какая конфигурация реализуется. Для нее, как следует из теоремы 1, возможен конечный перебор всех возможных нормирований. □

Теорема 4 *Для представлений* $\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \to GL(p, \mathbb{C})$ *с образующими* $G_1, \dots, G_n$, *где каждому собственному значению матриц* G_i *соответствует ровно одна жорданова клетка для* $i = 1, \dots, n$, *существует алгоритм, который за конечное число шагов, выясняет, возможно ли построения стабильной пары с данной монодромией.*

Доказательство. В этом случае жорданов базис является слабо левелевским, а следовательно и ассоциированным. Доказательство теоремы 3 может быть проведено для этого случая, где под базисом $v_i^1, \dots, v_i^p$ понимается как раз жорданов базис оператора G_i. Подпредставлений у такого представления может быть только конечное число, причем все они элементарно находятся. Конечность количества подпредставлений следует из конечности количества инвариантных подпространств у одного оператора, у которого имеется только одна жорданова клетка на каждое собственное значение. Как уже было показано, этот ассоциированный базис (жорданов базис) не зависит от матриц приведения. Следовательно, можно провести доказательство теоремы 3 сразу для всех возможных матриц приведения, так как зависимость от них в доказательстве сводится к зависимости от них ассоциированных базисов, но в данном случае эта зависимость отсутствует.

Кратко, схема алгоритма выглядит следующим образом:

1) Выбираем S_i, как матрицы приведения образующих G_i к жордановой нормальной форме, а жорданов базис G_i обозначим $v_1, \dots, v_p$.

2) Рассматриваем все инвариантные подпространства, отвечающие подпредставлениям, и для каждого из них определяем, какие нормирования из набора $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_p)$ соответствуют данному подпространству в точке a_i. В данном случае, базисы инвариантных подпространств будут поднаборами векторов жорданового базиса, состоящими из начал цепочек присоединенных векторов. Соответствие нормирований здесь определяется очевидным образом. Составляем такое соответствие для каждой особой точки и определяем соответствующую подтаблицу.

3) Выписываем неравенства на наклоны и неравенства на допустимость, считая при этом элементы таблицы ψ_i^j неизвестными. Если полученная система неравенств имеет целочисленное решение, то построение стабильной пары по данному представлению будет возможно, если же целочисленных решений нет, то построение стабильной пары невозможно. □

Заметим, что описанный выше алгоритм может быть применен и к представлениям произвольного вида. Однако, для его применения нужно знать структуру подпредставлений данного представления и уметь определять, можно ли привести образующие представления к вехнетреугольному виду с помощью сопряжения матрицами определенного вида. Если заменить строгие неравенства на не строгие, то получится алгоритм проверки возможности построения полустабильной пары с данной монодромией.

6 Существование специальных полустабильных пар как достаточное условие положительной разрешимости проблемы

Как уже упоминалось, существование полустабильной пары является необходимым, но не является достаточным условием положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта. Однако, существование полустабильных пар специального вида все же влечет положительную разрешимость проблемы. Как и возможность построения какой-либо полустабильной пары, возможность построения полустабильной пары такого вида тоже может быть проверена конструктивно.

Теорема 5 *Если существует полустабильная пара* (F, ∇)*, построенная по представлению монодромии* $\chi : \pi_1(\overline{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \to GL(p, \mathbb{C})$ *с нормированиями в какой-либо особой точке* a_i*, попарно различающимися не менее чем на* $(n-2)(p-1)$*, то для представления* χ *проблема Римана-Гильберта имеет положительное решение.*

Доказательство этой теоремы очень близко к доказательству теоремы 10.4 из [2] о том, что любое неприводимое представление реализуется как представление монодромии фуксовой системы.

Добавив к системе неравенств в теореме 2 соответствующие линейные условия: $|\psi_i^{j_1} - \psi_i^{j_2}| \geq (n-2)(p-1)$ для $1 \leq j_1, j_2 \leq p$ к условиям допустимости и полустабильности, получатся условия, которые также можно проверять, но это уже будут условия существования полустабильных пар данного вида. Таким образом, и это достаточное условие положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта может быть проверено конструктивно.

Я посвящаю эту работу светлой памяти моего научного руководителя Андрея Андреевича Болибруха. Его постоянная поддержка и внимание позволили мне сделать эту работу.

Список литературы

[1] Болибрух А.А. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем М.: Наука, 1994. (Тр. МИАН; Т. 206).

[2] Болибрух А.А. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения М.: МЦНМО, 2000.

[3] Болибрух А.А. Проблема Римана-Гильберта на компактной римановой поверхности // Тр. МИРАН. 2002. Т. 238. С. 55-69.

[4] Gladyshev A.I. On the Rieman-Hilbert Problem in dimention 4 // J. Dyn. Control Syst. 2000. V. 6. N. 2, P. 219-264.

[5] Kostov V.P. Fuchsian systems on $\mathbb{C}P^1$ and the Riemann-Hilbert Problem // C.R. Acad. Sci. Paris. 1992. Ser 1. 315. P. 143-148.

[6] Malek S. Systemes fuchsiens a monodromie reductible // C.r. Acad. sci. Paris. 2001. Ser. 1. V. 332. N. 8. P. 691-694.