Неразложимая фуксова система с разложимым представлением монодромии*

И.В.Вьюгин

Мы приводим пример разложимого представления $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$, которое, с одной стороны, является представлением монодромии некоторой фуксовой системы, а с другой стороны представление χ_2 является контрпримером к проблеме Римана-Гильберта. Эта система не может быть с помощью мероморфного калибровочного преобразования приведена к прямой сумме фуксовых систем, соответствующих подпредставлениям.

1 Введение

В связи с исследованием условий положительной разрешимости проблемы Римана-Гильберта возник вопрос о связи структуры представления монодромии и матрицы коэффициентов фуксовой системы, имеющей эту монодромию. В одну сторону эта связь имеет место. Действительно, если из системы можно выделить подсистему или разложить ее в прямую сумму систем, то представление монодромии будет, соответственно, приводимым или разложимым. С.Малеком [?] было показано, что фуксова система, имеющая приводимое представление монодромии, может быть мероморфно преобразована к системе с приводимой матрицей коэффициентов, но характер приводимости при этом не обязан совпадать.

В этой работе мы исследуем вопрос о связи разложимости в прямую сумму представления монодромии фуксовой системы и мероморфной эквивалентности системы прямой сумме систем. Мы даем отрицательный ответ на этот вопрос.

Если матрицы монодромии фуксовой системы имеют блочно-диагональный вид, то верно ли, что эта фуксова система мероморфно эквивалентна прямой сумме фуксовых систем (т.е. такой системе, матрица коэффициентов которой имеет такой же блочно-диагональный вид)?

Более точно, всякая ли система

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i} \right) y \qquad (1)$$

на сфере Римана с особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, чье представление монодромии

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}) \longrightarrow GL(p, \mathbb{C}) \qquad (2)$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов "Научные школы" НШ-457.2003.01 и РФФИ 03-01-22000

имеет вид

$$\chi = \chi_1 \oplus \chi_2, \tag{3}$$

преобразованием $f = \Gamma y$, где Γ – мероморфная в точках $a_1, \dots, a_n$ и голоморфно обратимая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ матричная функция, приводится к блочно-диагональному виду

$$\frac{df}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i'}{z - a_i} \right) f, \tag{4}$$

где $B_i' = B_i^1 \oplus B_i^2$, с блоками B_i^1 и B_i^2, соответствующими подпредставлениям χ_1 и χ_2?

Эта задача была поставлена А.А. Болибрухом [**?**, **?**]. Положительные решения в различных частных случаях были получены в работах [**?**, **?**, **?**], однако полное решение оставалось неизвестным. Формулировка результата была опубликована автором в [**?**].

2 Предварительные утверждения

Мы покажем, что существует фуксова система (**??**), имеющая разложимое в прямую сумму (**??**) представление монодромии (**??**), которая не является мероморфно эквивалентной системе (**??**), имеющей вид суммы двух систем.

Представление χ, которое доставляет искомый пример, является прямой суммой двумерного представления χ_1 и четырехмерного представления χ_2, которое не может быть реализовано как представление монодромии никакой фуксовой системы. Представление χ при этом может быть реализовано как представление монодромии фуксовой системы с пятью особыми точками.

Решение основано на подходе, связанном с расслоениями. Фуксова система интерпретируется как логарифмическая связность в голоморфном тривиальном расслоении. Связность в нетривиальном расслоении также задает систему дифференциальных уравнений, но определенную локально, в каждой координатной окрестности свою. Связность локально определяет базис горизонтальных сечений или, другими словами, фундаментальную систему решений соответствующей локальной системы. Базис называется *ассоциированным*, если он имеет минимальные асимптотики решений среди всех базисов.

Для изложения доказательства необходимо ввести следующие определения: Пусть E – подрасслоение расслоения F над базой B, в котором задана логарифмическая связность ∇. Тогда говорят, что подрасслоение E расслоения F стабилизируется связностью ∇, если $\nabla_v(\Gamma(E)) \subset \Gamma(E)$, где $\Gamma(E)$ – пучок локальных голоморфных сечений расслоения E, а v – голоморфное векторное поле, ∇_v – ковариантная производная вдоль v. Другими словами, если связность переводит локальные сечения подрасслоения E в локальные сечения того же подрасслоения с коэффициентами в дифференциальных 1-формах.

Определение. Стабильной парой называется пара: расслоение со связностью (F, ∇) такие, что для любого подрасслоения E расслоения F, которое стабилизируется связностью ∇, выполняется неравенство $\mu(E) < \mu(F)$, где $\mu(F)$ – наклон расслоения, то есть степень расслоения, деленная на его ранг.

Для доказательства нам потребуется следующая теорема, принадлежащая А. А. Болибруху [?].

Теорема 1 *Если представление (??) может быть реализовано как представление монодромии логарифмической связности ∇ в векторном расслоении F так, что пара (F, ∇) является стабильной, то проблема Римана-Гильберта для этого представления имеет положительное решение, то есть представление (??) является представлением монодромии некоторой фуксовой системы.*

Следующая техническая лемма также необходима для доказательства. Она дает явный вид ассоциированного с фильтрацией базиса, аналитически продолженного в фиксированную неособую точку $\widehat{O}$, понимаемую как точку на универсальном накрытии, построенном над $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Но предварительно необходимо описать сам способ построения голоморфных расслоений с логарифмическими связностями на сфере Римана, подробно описанный в [?].

Сначала строится голоморфное тривиальное расслоение с голоморфной связностью на проколотой сфере Римана, которая задается нулевыми формами. Проколотую в особых точках $a_1, \dots, a_n$ сферу покрывают связными и односвязными окрестностями со связными и односвязными пересечениями, а затем точку $O \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ соединяют путями без самопересечений с каждой окрестностью, то есть с некоторой выделенной точкой каждой окрестности, и пары окрестностей, имеющие непустое пересечение, тоже соединяют путями. Далее склеивающий коцикл в $U_i \cap U_j$ определяется как ветвление при движении по петле из O в окрестность U_i, из нее в U_j и затем обратно в O, при этом все передвижения осуществляются по выделенным путям. Затем, когда расслоение на проколотой сфере построено, его продолжают в особые точки с помощью склеивающего коцикла:

$$g_{i\alpha} = (z - a_i)^{\Lambda_i} (z - a_i)^{E'_i} S_i^{-1}, \tag{5}$$

где U_i – окрестность, содержащая особую точку a_i, а U_α – окрестность, содержащая a_i на границе. Форма связности в окрестности U_i при этом примет вид:

$$\omega_i = (\Lambda_i + (z - a_i)^{\Lambda_i} E'_i (z - a_i)^{-\Lambda_i}) \frac{dz}{z - a_i}. \tag{6}$$

При этом $E'_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \ln S_i^{-1} G_i S_i$, где S_i – матрицы приведения образующих монодромии G_i к верхнетреугольному виду, а ветвь логарифма выбрана с условием на собственные значения $0 \leq Re \rho_i^j < 1$ для всех i и j. Образующие монодромии G_i выбираются как образы петель, подходящих к особым точкам по тем же выделенным путям. Целочисленные диагональные матрицы нормирований Λ_i выбираются при этом так, чтобы матрица $z^{\Lambda_i} E'_i z^{-\Lambda_i}$ была голоморфной, и такая матрица Λ_i называется допустимой. Как показано в [?], таким образом задаются все возможные голоморфные расслоения с логарифмическими связностями, имеющие данный набор особых точек и монодромию.

Лемма 1 *Рассмотрим расслоение со связностью $(F^{\Lambda,S}, \nabla)$, построенное как продолжение в особые точки $a_1, \dots, a_n$ голоморфного расслоения на проколотой сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ по допустимым матрицам нормирований Λ_i и матрицам приведения S_i, как описано выше. Возьмем ассоциированный базис горизонтальных сечений связности в точке a_i, записанный как $Y_i(z) = (z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{E_i}$. Тогда этот базис, аналитически продолженный вдоль отмеченных путей в неособую точку O, будет иметь вид S_i, то есть $Y_i(\widehat{O}) = S_i$, где $\widehat{O}$ – точка на универсальном накрытии.*

Доказательство. Продолжим аналитически базис $Y_i = (z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{E_i}$ как базис горизонтальных сечений связности вдоль отмеченного пути, из окрестности U_i особой точки a_i в точку $\widehat{O}$. В результате аналитического продолжения получим:

$$Y_i(\widehat{O}) = g_{\alpha i} Y_i = S_i (z-a_i)^{-E'_i}(z-a_i)^{-\Lambda_i}(z-a_i)^{\Lambda_i}(z-a_i)^{E'_i} = S_i,$$

где индекс α указывает на окрестность U_α, которая содержит a_i на границе. Заметим, что при аналитическом продолжении из окрестности U_α в O вдоль отмеченных путей базис не изменился, так как коциклы и пути были выбраны соответствующим образом (перемещение из U_α происходит на одном листе универсального накрытия). $\square$

3 Контрпример к задаче о прямой сумме

В этом разделе мы построим искомый пример, то есть пример представления $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$, для которого проблема Римана-Гильберта имеет положительное решение, но при этом представление χ_2 не может быть реализовано как представление монодромии фуксовой системы, таким образом, он дает отрицательный ответ на вопрос задачи.

Явно привести пример такого представления нам не удастся, однако, мы приведем систему с регулярными особыми точками, чье представление монодромии мы возьмем в качестве представления χ_2. Эта система из работы [?].

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dz} = \Bigg(&\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \frac{1}{z+1} + \\
&+ \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{3}{16} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \frac{1}{z-1} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{16} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \frac{1}{z+i} + \\
&+ \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{16} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \frac{1}{z-i} \Bigg) y
\end{aligned} \tag{7}$$

Эта система имеет лишь регулярную особую точку в нуле. В [?] показано, что представление монодромии этой системы не может быть представлением монодромии фуксовой системы. В [?] показано, что представление χ_2 системы (**??**):

1) приводимо и имеет ровно одно двумерное неприводимое подпредставление χ_2', это следует и из вида системы;

2) образующая этого представления в нуле G_0 имеет вид

$$G_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

а жорданова нормальная форма образующих монодромии в других точках состоит из одного жорданового блока с собственным значением $\exp(13\pi i/8)$.

В качестве представления χ_1 мы возьмем представление с образующими:

$$G_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, G_{-1}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G_i^1 = G_{-i}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в точках 0, 1, -1, i, $-i$ соответственно.

Для доказательства нам потребуется вычислять степени расслоений. Напомним, что степень расслоения равна сумме показателей асимптотик β_i^j горизонтальных сечений связности, взятых для ассоциированного базиса, где $\beta_i^j = \varphi_i^j + \rho_i^j$, и φ_i^j – j-е нормирование в точке a_i, а ρ_i^j являются собственными значениями матрицы $E_i' = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \ln S_i^{-1} G_i S_i$, где S_i – матрицы приведения образующих монодромии G_i к верхнетреугольному виду, а ветвь логарифма выбрана с условием $0 \leq Re\rho_i^j < 1$ для всех i и j. Подробно это изложено в [?].

Теорема 2 *Представление $\chi = \chi_1 \oplus \chi_2$ может быть реализовано как представление монодромии фуксовой системы.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы мы используем теорему **??**, которая утверждает, что если существует стабильная пара (F, ∇) с данным представлением монодромии, то проблема Римана-Гильберта имеет положительное решение, то есть существует фуксова система, имеющая данное представление монодромии. Мы построим стабильную пару по представлению χ. Для того, чтобы задать пару (расслоение со связностью), нужно задать представление монодромии χ, набор особых точек $D = \{0, 1, -1, i, -i\}$ (где $i = \sqrt{-1}$) и локальные данные: допустимые наборы матриц нормирований $\Lambda = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_{-1}, \Lambda_i, \Lambda_{-i}\}$ и матриц приведения к верхнетреугольному виду $S = \{S_0, S_1, S_{-1}, S_i, S_{-i}\}$. Эти данные однозначно определяют локальные формы связности и функции склейки согласно формулам (**??**),(**??**). Сначала зададим локальные данные для всех особых точек, кроме нуля, следующим образом:

$$\Lambda_1 = \Lambda_{-1} = \Lambda_i = \Lambda_{-i} = diag(0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

а матрицы приведения S_1, S_{-1}, S_i, S_{-i} зададим произвольным допустимым образом, например, как матрицы приведения к жордановой нормальной форме соответствующих образующих представления монодромии. Левелевские базисы этих точек

$e_1^\alpha, \dots, e_6^\alpha$, где $\alpha = \pm 1, \pm i$, записанные в точке $\widehat{O}$, в таком случае являются жордановыми для соответствующих образующих монодромии. Это следует из леммы **??**.

Теперь приступим к заданию локальных данных в особой точке ноль. Зададим следующие данные:

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_0 = diag(\varphi_0^1, \varphi_0^2, \varphi_0^3, \varphi_0^4, \varphi_0^5, \varphi_0^6) = diag(10, 10, 0, 0, 0, 0)$$

Видим, что S_0 есть матрица приведения образующей

$$G_0^\chi = G_0^1 \oplus G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

монодромии χ к верхнетреугольному виду, так как образующая G_0^χ уже имеет верхнетреугольный вид и коммутирует с S_0. Таким образом, согласно лемме **??**, левелевский базис в точке ноль $e_1^0, \dots, e_6^0$, записанный в точке $\widehat{O}$ состоит из столбцов матрицы приведения S_0. Заметим, что этот базис является жордановым для G_0^χ, но лишь одним из многих. Теперь покажем, что заданное расслоение со связностью образует стабильную пару. Найдем наклоны всех подрасслоений, которые стабилизируются связностью, и наклон всего расслоения. Сначала необходимо установить, какие подрасслоения расслоения F стабилизируются связностью ∇. Для этого нужно найти все инвариантные подпространства монодромии.

Лемма 2 *Представление χ имеет только четыре нетривиальных подпредставления: $\chi_1, \chi_2, \chi_2', \chi_{12} = \chi_1 \oplus \chi_2'$.*

Доказательство. Пусть χ_{inv} – подпредставление представления χ. Покажем, что $\chi_{inv} = \chi_{inv}^1 \oplus \chi_{inv}^2$, где χ_{inv}^1 и χ_{inv}^2 – подпредставления представлений χ_1 и χ_2 соответствено. Это следует из того факта, что спектры образующих представлений χ_1 и χ_2 во всех особых точках, кроме нуля, например в точке один, не пересекаются (нет общих собственых значений). Следовательно, любое инвариантное относительно χ подпространство расщепляется на собственные подпространства для оператора $G_1^\chi = G_1^1 \oplus G_1$ (G_1^1 – образующая χ_1, а G_1 – образующая χ_2 в точке a_1), каждое из которых принадлежит либо к χ_1, либо к χ_2.

Теперь, когда известно, что χ_{inv}^1 – подпредставнение представления χ_1, оказывается, что оно либо нулевое, либо совпадает с ним. Действительно, χ_1 неприводимо, так как не имеет одномерных инвариантных подпространств, то есть общих у всех образующих собственных векторов. Аналогично, χ^2_{inv} – есть либо нулевое, либо χ_2', либо все χ_2. $\square$

Назовем отвечающие подпредставлениям $\chi_1, \chi_2, \chi_2', \chi_{12} = \chi_1 \oplus \chi_2'$ подрасслоения F_1, F_2, F_2', F_{12}, а X_1, X_2, X_2', X_{12} – соответствующие им инвариантные подпространства, соответственно. Найдем степени подрасслоений. Для этого воспользуемся тем свойством, что степень расслоения равна сумме показателей асимптотик горизонтальных сечений связности в особых точках. Вычислим сначала показатели асимптотик в расслоении F.

Таблица асимптотик левелевского базиса

особые точки	0	1	-1	i	$-i$
1-я асиммтотика	10	0	$\frac{1}{6}$	0	0
2-я асимптотика	10	0	$\frac{5}{6}$	0	0
3-я асимптотика	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$
4-я асимптотика	0	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$
5-я асимптотика	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$
6-я асимптотика	0	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$

В таблице по столбцам выписаны асимптотики в левелевском базисе. Эти показатели асимптотик получены из соотношения $\beta_i^j = \varphi_i^j + \rho_i^j$, а $\rho_i^j = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \ln \lambda_i^j$ с выбранной ветвью $0 \le Re\rho_i^j < 1$, где λ_i^j – собственные значения образующих монодромии. Нормирования φ_i^j по построению равны нулю, кроме $\varphi_0^1 = \varphi_0^2 = 10$. Таким образом, находим наклон расслоения F:

$$\mu(F) = \frac{\deg F}{6} = \frac{10 + 10 + 1 + 1/2 + 1/2 + 16 \times \frac{13}{16}}{6} = \frac{35}{6}$$

как сумму всех элементов таблицы, деленную на ранг (количество строк). Затем вычислим наклоны четырех подрасслоений. Как показано в [?] подрасслоению, которое стабилизируется связностью, соответствует поднабор показателей расслоения в каждой особой точке. Выясним, какие показатели из этого набора отвечают подрасслоениям. Во всех особых точках, кроме нуля, все нормирования – нулевые и, следовательно, асимптотики находятся как нормализованные логарифмы собственных значений, а значит, F_1 соответствуют первые две строки таблицы, F_2 – последние четыре, F_2' – третья и четвертая, и F_{12} – первые четыре строки.

Теперь рассмотрим точку ноль. Левелевский базис для этой точки, записаный в $\widehat{O}$, имеет вид S_0 (записан по столбцам этой матрицы). Исходный базис $\delta_1, \dots, \delta_6$ (δ_i – на i-ом месте 1, остальные нули) выражается через $e_1^0, \dots, e_6^0$, как S_0^{-1}. Значит,

$$\delta_1 = e_1^0 - e_4^0, \delta_2 = e_2^0 - e_6^0, \delta_i = e_i^0, i = 3, \dots, 6.$$

Таким образом показатели пространств в нуле вычисляются через переход к базису $\delta_1, \dots, \delta_6$. Показатель соответствующий вектору δ_i равен минимуму из показателей векторов участвующих в его разложении по ассоциированному базису $e_1^0, \dots, e_6^0$. Подпространству X_1 соответствуют показатели ${}^1\beta_0^1 = \beta_0^4 = 0$, ${}^1\beta_0^2 = \beta_0^6 = 0$, подпространству X_2 соответствуют ${}^2\beta_0^i = \beta_0^{i+2} = \frac{1}{2}$ для $i = 1, 3$ и ${}^2\beta_0^i = \beta_0^{i+2} = 0$ для $i = 2, 4$, подпространству X_2' тоже, только $i = 1, 2$. Таким образом подрасслоениям F_1, F_2 и F_2' соответствуют только нулевые нормирования. Выпишем их наклоны.

$$\mu(F_1) = \frac{\deg F_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mu(F_2) = \frac{\deg F_2}{4} = \frac{1/2 + 1/2 + 16 \times \frac{13}{16}}{4} = \frac{7}{2}$$

$$\mu(F_2') = \frac{\deg F_2'}{2} = \frac{1/2 + 8 \times \frac{13}{16}}{2} = \frac{7}{2}$$

У каждого из них наклоны сильно меньше наклона F.

Теперь рассмотрим подрасслоение F_{12} и соответствующее ему инвариантное подпространство X_{12}. Левелевским у него будет базис $e_1^0, \delta_2, \delta_3, \delta_4$. Соответствующие ему показатели ${}^{12}\beta_0^1 = \beta_0^1 = 10$, ${}^{12}\beta_0^2 = \beta_0^6 = 0$, ${}^{12}\beta_0^3 = \beta_0^3 = \frac{1}{2}$ и ${}^{12}\beta_0^4 = \beta_0^4 = 0$. Значит наклон F_{12} равен

$$\mu(F_{12}) = \frac{\deg F_{12}}{4} = \frac{10 + 1 + 1/2 + 8 \times \frac{13}{16}}{4} = \frac{9}{2},$$

что также меньше наклона F. Следовательно, наклон расслоения больше наклонов всех подрасслоений, и пара (F, ∇) стабильна. $\Box$

Пример показывает, что рассмотренная задача в общем случае имеет отрицательное решение, однако, открытым остается следующий вопрос: *всякое ли представление может быть представлено как прямое слагаемое в представлении монодромии некоторой фуксовой системы?*

Список литературы

[1] Болибрух А.А. Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения М.: МЦНМО, 2000.

[2] Болибрух А.А. К вопросу о существовании фуксовых систем с данными асимптотиками // Тр. МИРАН. 1997. Т. 216. С. 32-44.

[3] Болибрух А.А. Проблема Римана-Гильберта на компактной римановой поверхности // Тр. МИРАН. 2002. Т. 238. С. 55-69.

[4] Болибрух А.А. 21-я проблема Гильберта для фуксовых линейных систем // Тр. МИРАН. 1994. Т. 206.

[5] Болибрух А.А. Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений // Математические события XX века. М.: Фазис, 2004. С. 53-79

[6] Gladyshev A.I. On the Reiman-Hilbert Problem in dimention 4 // J. Dyn. Control Syst. 2000. Vol 6. No. 2, pp. 219-264

[7] Malek S. On Fuchsian systems with decomposable monodromy // Proceedings of the Steklov Institut of Mathematics. 2002. Vol. 238.

[8] Malek S. Fuchsian systems with reducible monodromy are meromorphically equivalent to reducible Fuchsian systems. // Proceedings of the Steklov Institut of Mathematics. 2002. Vol 236.

[9] Malek S. On reducible monodromies realized by reducible Fuchsian systems. // J. Dyn. Control Syst. 1999. Vol. 5, No. 4.

[10] Esnault H., Hertling C. Semistable bundles on curves and reducible representation of the fundamental group // arXiv:math.AG/0101194v1. 2001.

[11] Вьюгин И.В. О фуксовых системах с разложимой монодромией // Тезисы докладов XXVI Кофнеренции молодых ученых МГУ. 2004. С. 32-33.