

Algorithmic randomness and splitting of supermartingales

Andrej Muchnik*

Abstract

Randomness in the sense of Martin-Löf can be defined in terms of lower semicomputable supermartingales. We show that such a supermartingale cannot be replaced by a pair of supermartingales that bet only on the even bits (the first one) and on the odd bits (the second one) knowing all preceding bits.

1 Randomness and lower semicomputable supermartingales

The notion of algorithmic randomness (Martin-Löf randomness) for an infinite sequence of zeros and ones (with respect to uniform Bernoulli distribution and independent trials) can be defined using supermartingales. In this context, a *supermartingale* is a non-negative real-valued function m on binary strings such that

$$m(x) \geq \frac{m(x0) + m(x1)}{2}$$

for all strings x . Any supermartingale corresponds to a strategy in the following game. In the beginning we have some initial capital ($m(\Lambda)$, where Λ is the empty string). Before each round, we put part of the money on zero, some other part on one, and throw away the rest. Then the next random bit of the sequence is generated, the correct stake is doubled and the incorrect one is lost. In these terms, $m(x)$ is the capital after bit string x appears. (If the option to throw away a portion of money is not used, then the inequality becomes an equality, and the function m is a *martingale*.)

We say that a supermartingale m *wins* on an infinite sequence ω if the values of m on the initial segments of ω are unbounded. The set of all sequences where m wins is called its winning set.

Algorithmic probability theory often uses *lower semicomputable* supermartingales. This means that for each x the value $m(x)$ is a limit of a non-decreasing sequence of

*This work was done by Andrej Muchnik (1958–2007) in 2003. Soon after that, A. Chernov wrote a draft version of the paper based on a talk of Andrej Muchnik. Then An. Muchnik looked it through and planned to edit the text, but did not manage to do it. The current text is prepared by A. Chernov and A. Shen in 2007–2008; they are responsible for any possible errors and inaccuracies. Supported by RFBR and CNRS ANR grants.

non-negative rational numbers $M(x, 0), M(x, 1), \dots$, and the mapping $(x, n) \mapsto M(x, n)$ is computable.

The class of all lower semicomputable supermartingales has a maximal element (up to a constant factor). Its winning set contains winning sets of all lower semicomputable supermartingales; this set is called the set of *nonrandom* sequences. The complement of this set is the set of *random* sequences.

This definition is equivalent to the standard definition given by Martin-Löf (e.g., see [1]); sometimes it is called a criterion of Martin-Löf randomness in terms of supermartingales.

Some authors consider also a larger class of “computably random” sequences that one gets if lower semicomputable supermartingales are replaced by computable martingales (for simplicity, one can take rational-valued martingales). There is no maximal computable martingale, and a sequence is called computably random if *any* computable martingale is bounded on its initial segments. However, we keep Martin-Löf definition as the main one; in the rest of the paper “random” without additional adjectives means “Martin-Löf random”.

2 Odd/even decomposition of martingales

One can observe that for computable martingales it is sufficient to consider separately bets on odd steps only and bets on even steps only to get the definition of randomness. We say that a (super)martingale *bets only on even steps* (or, in other words, does not bet on odd steps) if $m(x) = m(x0) = m(x1)$ for all strings x of even length. (For instance, a martingale is not betting at the third step if after the third coin tossing the capital does not change, that is, if $m(x0) = m(x1) = m(x)$ for every x of length 2. In terms of the game this means that one half of the capital is put on zero and one half is put on one, and in any case the capital remains the same.) Similarly, a (super)martingale *bets only on odd steps* if $m(x0) = m(x1) = m(x)$ for every x of odd length.

Now let us give the precise formulation of the observation above: *for any computable martingale t there exist two computable martingales t_0 and t_1 such that t_0 bets only on even steps and t_1 bets only on odd steps, and the following holds: if t wins on some sequence ω , then either t_0 or t_1 wins on ω .*

This implies that the winning set of t is included in the union of the winning sets of t_0 and t_1 .

Proof: Adding a constant if necessary, we may assume that t is strictly positive everywhere. Then we construct two martingales t_0 and t_1 as follows: on even steps, t_0 divides its capital between zero and one in the same proportion as t does, and t_1 does not bet (puts equal stakes on zero and one); on odd steps, t_0 and t_1 change roles. Then the gain of t (the current capital divided by the initial capital) equals to the product of the gains of t_0 and t_1 . Therefore, if both t_0 and t_1 are bounded on prefixes of some sequence, so is t .

In other words, defining randomness with respect to computable martingales, we may restrict ourselves to martingales that bet every other step (on even or odd steps only). A similar statement is true for the Mises – Church definition of randomness (that uses selection rules, see [1]): it is enough to split a selection rule into two rules; one selects

only even terms, the other selects only odd terms.

It turns out, however, that for lower semicomputable supermartingales (and Martin-Löf random sequences) the analogous statement is wrong, and this is the main result of the paper.

Theorem. *There exists a Martin-Löf non-random sequence ω such that no supermartingale betting every other step (on even steps or on odd steps) wins on ω .*

This result will be proved in the next sections. Now let us point out its relations to the van Lambalgen theorem on randomness of pairs.

Any bit sequence α can be splitted into two subsequences of even and odd terms α_0 and α_1 . It is easy to see that for a (Martin-Löf) random sequence α , both sequences α_0 and α_1 are random. However, the converse statement is not true (trivial counterexample: even if $\alpha_0 = \alpha_1$ is random, the sequence with doubled bits is not).

A well-known theorem of M. van Lambalgen [2] gives a necessary and sufficient condition for the randomness of α : it is random if and only if α_0 is random with the α_1 -oracle and α_1 is random with the α_0 -oracle. (Informally, this means that even the player that can see any elements of α_1 before betting on α_0 and vice versa cannot win on any of these two sequences.) It would be natural to conjecture that there is no need to “look ahead” (choosing the stakes on the $(2n - 1)$ th step, one does not need to use the bits at positions $2n, 2n + 2, 2n + 4$, etc.). Surprisingly, this conjecture is wrong, as the theorem shows.

This can be considered as a paradox: imagine two referees who toss a coin during some tournament alternatively (for even and odd days respectively); we would expect that if each of them does her job well (her subsequence is “on-line random” in the context of the entire sequence, see [3]), then the entire sequence is random. The example constructed in this paper show that this is not the case if we define randomness in terms of supermartingales: it may happen the the entire sequence is flaw but the flaw cannot be attributed to one of the referees.

3 Construction of a game

We present the proof using a certain infinite game of two players called Mathematician (M) and Adversary (A).

Adversary constructs (enumerates from below) two supermartingales t_0 and t_1 (that make bets on even and odd steps, respectively). Mathematician constructs a supermartingale t . At each move, the players provide some approximations from below for their supermartingales; these approximations have only finitely many non-zero values and are itself supermartingales (betting on admissible steps only, for A’s supermartingales). The sequence of approximating supermartingales is non-decreasing (the players cannot decrease the values already announced). Thus the moves of the players are constructive objects (can be encoded by binary strings, etc.). The players move in turn and can see moves of each other (so we have a perfect information game). Additionally, the values of all the supermartingales on the empty string are required to be 1 (this normalization prevents infinite limit value on any string).

The game is an infinite sequence of moves of the players; it determines three limit supermartingales. M wins if there exists a sequence ω such that M’s supermartingale t

wins on ω (is unbounded on the prefixes of ω) and both A's supermartingales t_0 and t_1 do not win (are bounded on the prefixes of ω).

Main Lemma. *M has a computable winning strategy in the game.*

It is easy to see that this lemma implies the theorem. Actually, the standard argument (see [1]) shows that there are two maximal (up to a constant factor) lower semicomputable supermartingales t_0 and t_1 of the type considered (making bets every other step). Let us run M's winning strategy against the enumeration of these two supermartingales by A. (Note that in this case A does not use the information about M's moves.)

Since the strategies of both players are computable, the limit supermartingale t is lower semicomputable. Since M's strategy wins, there is a sequence ω such that t wins on ω but both t_0, t_1 (and therefore any other lower semicomputable supermartingale of the type considered) do not win on ω . The theorem follows.

It remains to prove the Lemma. In the next sections, we redefine this game as a game on an infinite binary tree and define versions of this game on a finite tree. Then we explain how to combine winning strategies for the games on finite trees into one winning strategy for the game on the infinite tree. Finally, we describe a winning strategy on a finite tree.

4 Games on finite and infinite trees

It is convenient to consider an infinite binary tree that is a "field" of the game described. The nodes of the tree are binary strings ($x0$ and $x1$ are children of x). The players increase the current values (approximations from below) of their supermartingales (one value per node for each supermartingale). "After the game ends" (the quotes are used since the game is infinite), a referee comes and looks for an infinite tree branch with the properties described in the winning conditions above.

Let us define an auxiliary game on a finite binary tree of a certain height h . As before, the players make their moves and increase the current values of their supermartingales (t for M and t_0, t_1 for A). The supermartingales t_0 and t_1 satisfy the same restrictions as before: t_0 bets on even steps, t_1 bets on odd steps. The values of all three supermartingales in the root (on the empty word) are equal to one all the time. In the other tree nodes, the supermartingales are equal to zero in the beginning and then the players increase them step by step.

The game on a finite tree is still infinite. "At the end" of this infinite game, we consider the limit values of the supermartingales at the leaves of the tree to determine the winner. The winning condition will be quite technical, but the idea is as follows: M wins if there exists a leaf where M's supermartingale t is substantially greater than 1, while on the entire path to this leaf both A's supermartingales t_0 and t_1 do not exceed 1 significantly (actually, this is a "finite version" of the winning condition on the infinite tree).

Let us assume for a while (later we will need to consider a more complicated game) that M has a winning strategy for the following version of the game: M can guarantee that in one of the leaves t is greater than 2 while t_0 and t_1 do not exceed 1 on the path to this leaf.

Then this winning strategy for M can be used as a building block for M's strategy on

the infinite tree. Indeed, we can start the second game on another finite tree whose root is the winning leaf in the first tree, but with twice more money. (This means that the actual M's moves on the subtree of the infinite tree are twice bigger than M's moves in the second finite game. In other words, we apply the winning strategy for the finite tree doubling all values of t .) In the limit, this second game gives a leaf (of the second finite tree) where M's supermartingale t exceeds $4 = 2^2$ and A's supermartingales t_0, t_1 still do not exceed 1 (on the whole path from the root of the infinite tree). One more copy of the game is then started from this leaf (with factor 4), it gives $8 = 2^3$ in some leaf etc. In the limit (where infinitely many finite games are combined), we get an infinite branch where t goes to infinity while t_0 and t_1 are bounded.

This description is oversimplified and ignores some important points. First of all, we should keep in mind that the game on the finite tree is infinite, and thus M must start the next round (on the second finite tree grown from the leaf of the first one) when the first game is still in progress (and therefore, the leaf chosen may be discredited later when values of t_0 and t_1 increase).

From the formulation of the winning condition on the finite tree, we see that the condition (for a certain leaf) can be fulfilled at some moment (t is large whereas t_0, t_1 are small yet), and then be violated (when A increases t_0 or t_1). Note that after that the winning condition cannot be fulfilled again, hence a leaf cannot become a winning candidate for the second time.

Starting a new subtree from the current winning candidate (and discarding this subtree when and if this leaf is discredited), we get a picture like Figure 1. The grey triangles

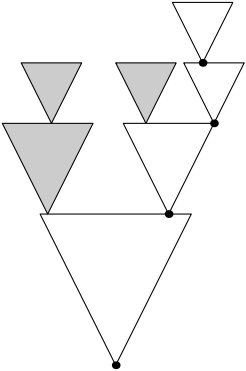


Figure 1: Active and discontinued games on finite trees

represent subtrees where the game was started and then cancelled (the candidate in their root was discredited); the white triangles represent active (currently) games. The dots represent current winning candidates. (We may allow several winning candidates in the same tree and start new subtree for all of them; however, in the picture above this is not shown. In fact, we postpone new games and add the next tree of the same level only when the previous one has been discarded.)

Note also that in reality M should play against A on the infinite tree (and not against many adversaries on finite trees). However, the moves of A on the infinite tree can be easily translated into moves of the adversaries in the active games on finite trees.

By the definition of the winning strategy on the finite tree, M's supermartingale t

doubles at each “level” compared to its value at the previous “level”; on the other hand, A’s supermartingales t_0, t_1 do not exceed 1 along the entire path through the winning leaves.

Let us see what happens with this picture in the limit. At the first level the winning candidate may change only finitely many times. Hence, at some moment some candidate will be “final” and will never be discredited. The game in the subtree starting from this candidate will never be discarded and a winning leaf should appear there (and stabilize after finitely many changes), and so on. In the limit, we get an infinite branch where M’s supermartingale t is unbounded while both A’s supermartingales t_0, t_1 are bounded.

5 Game on a finite tree

Informal discussion

We begin with some informal discussion, which may help to understand the idea behind the winning strategy for a finite tree game. However, the reader can safely proceed to the formal statement and proof (that uses a slightly different and more simple, but less intuitive, argument) if this informal introduction seems unclear.

Let us make several trivial observations. M wants to make the supermartingale t greater than 1 in some leaf. But this means that t must remain less than 1 in some other leaves (since the average, the root value, is 1). So what M really needs to do is to find leaves that are not “promising” and not to waste t on them, saving the money for the other leaves. In particular, M can skip the leaves that have already been discredited (t_0 or t_1 exceeds 1 on the path to these leaves). If we put some $C > 1$ in all the leaves except for some “discredited” one, then we are done: there exists some path on which both A’s supermartingales are bounded by 1 (indeed, at each vertex one of the supermartingales does not play and the other loses in some direction) and this path ends in a non-discredited leaf where we have put C . (To keep the average in the root not exceeding 1, we let $C = N/(N - 1)$ where N is the number of leaves.)

So, let us try to construct a strategy for M assuming additionally that A avoids discrediting leaves “in advance”. M starts by placing some $C > 1$ in the leftmost leaf x . Then A must discredit x by making one of t_0, t_1 greater than 1 in x or on the path to x . Note that if t_0 or t_1 is greater than 1 *below* x then some other leaves become discredited at the same time, and this should not happen according to our assumption. So A has to increase one of its supermartingales in x itself. Moreover, A has to increase the supermartingale that bets in x ’s parent u (say, t_0): the increase of the other supermartingale will mean its increase in u and therefore also on the way to x ’s brother y , so some leaf would become discredited before M spent money on it (and this should not happen according to our assumption).

At the second move, M places C in y . Now A cannot increase t_0 on the way to y , because then two more leaves (x ’s cousins z and p) would be discredited prematurely. Indeed, if t_0 exceeds 1 on the way to y , then (due to averaging in u ; note that t_0 exceeds 1 in x) it exceeds 1 in u and also in its father v , since t_0 does not play in v , which makes other two grandsons of v (z and p in the picture) discredited. Therefore, at some point t_1 exceeds 1 in y (or on the way to y) and therefore in u (or on the way to u).

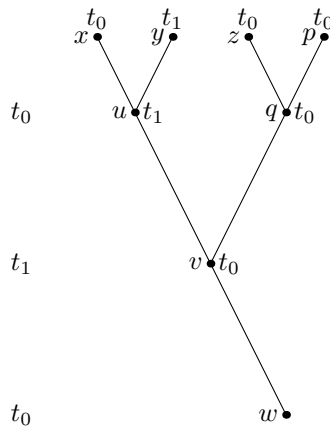


Figure 2: The start of the game. The left column indicates which of the supermartingales plays at a given level.

Then we place C in the third (from left to right) leaf z and wait until A makes one of the supermartingales t_0 and t_1 greater than 1 in z or on the way to z . It could be only t_0 for the same reasons as above (otherwise z 's brother p would be discredited). Next step is to place C in p and wait until one of t_0 and t_1 exceeds 1 in p or on the way to p . This could happen with t_0 only: indeed, if t_1 exceeds 1 on the way to p , then t_1 exceeds 1 in both u and q (p 's father) and therefore in v (averaging) and w (v 's father where t_1 does not play), which discredits four next leaves.

Continuing this process, we see that A is always forced to follow a certain pattern, if A wants to avoid spreading down the values of t_0 and t_1 and hence discrediting some leaves too early. To understand this pattern, we can imagine that each leaf contains a Boolean variable: its value (0 or 1) says which of t_0 and t_1 exceeds 1 in this leaf. Note that the values of these variables spread down by simple AND-OR rules: if the supermartingale bets in the node and exceeds 1 in *both* children of this node, it should exceed 1 in the node itself; the same is true if the supermartingale does not bet in this node and exceeds 1 in *at least one* of its children.

So the process resembles the evaluating of an AND-OR-tree whose leaves carry Boolean values and AND/OR-layers alternate. "Early discrediting" corresponds to the so called shortcut evaluation: unused variables correspond to the prematurely discredited nodes. It is easy to see that if A assigns values to the leaves of an AND/OR-tree (say, from left to right) and wants to avoid shortcut evaluation, there is only one way of doing so (except for the last variable). The same is true in the game: if A wants at any rate to avoid the cases where some leaves are discredited before M puts some value there, and M goes from left to right, A has essentially no choice (except for the last moment).

The idea of the actual strategy of M is to use either the advantage that M can gain when A deviates from the pattern (and discredits some leaf prematurely) or to use the advantage that M can gain when A follows the pattern for the first $1/4$ of all leaves. For the first case, when M does not need to place anything in some prematurely discredited leaf M can safely place $C = N/(N - 1)$ in all the other leaves (where N is the number of leaves). Note that it is much less than 2 that we planned initially but still enough for our purposes as we see later. For the second case, let us consider the Boolean values in

the leaves that prevent shortcuts, i.e., the sequence 0100010101000100...¹ Every second place is occupied by a zero, that is, at every second leaf, t_0 is greater than 1. Hence, two levels below, t_0 is greater than $1/2$ in all the nodes. And it is easy to see that the sequence of labels is the same there: at every second node, t_0 is greater than 1 again. Therefore, four levels below the leaves, t_0 is greater than $3/4$ in all the nodes, and so on. The same works for t_1 , if we go through the “odd” levels (one, three, five,... levels below the leaves). Thus M can take any node, a sufficiently large subtree above it, and provide that, say, t_1 is close to 1 (though, may be, less than 1) in this node. Let the node be the leftmost grandchild of the root (where t_1 bets, but does not bet in the children of the root). Then t_1 is close to 1 in the left child of the root. Therefore it cannot exceed 1 significantly in the right child of the root, while t_0 does not exceed 1 there (since t_0 does not bet in the root). Now M concentrates on the right half of the subtree and can put, e.g., $4/3$ in all its leaves (recall that $1/4$ of all leaves remain free and the other $1/4$ carries only C). But A’s supermartingales do not exceed 1 significantly in the right child of the root and therefore the same is true for some path in the right half of the tree.

In both cases, M has achieved something, but these achievements differ. To reflect this, we have to change the definition of the finite game allowing two winning conditions for A. Let us now proceed with the details. (The motivation as explained above is not explicitly used in the sequel.)

Game on the finite tree: precise formulation

As we have explained, we do not achieve the earlier announced goal (M’s supermartingale exceeds 2 in some leaf whereas A’s supermartingales do not exceed 1 on the path to it). Let us explain what we can really achieve and how to use this for the winning strategy in the infinite game.

Admissible increase of the supermartingales

We are not able to guarantee that (for the game on the finite tree) there exists a leaf where t increases while both t_0, t_1 still do not exceed 1. Instead, we have to allow some small increase for t_0 and t_1 , limited by factor $(1 + \delta)$. These coefficients are multiplied along the tree chain, but we manage to have decreasing values of δ along the chain so the product is bounded by some constant.

On the other hand, we cannot guarantee also that t is multiplied at least by 2; only some smaller factor (depending on δ , as we will see) can be achieved. We have to ensure here that the product of these factors diverges to infinity.

More formally, for every finite subtree, a special version of lemma is used with appropriate factors (guaranteed increase for t and allowed increase for t_0 and t_1). The products of the corresponding factors for preceding subtrees (along the path from the root) are used as scaling factors for the current subtree. Note that scaling factors for M and A are different and are multiplied separately. The winning condition for the preceding games guarantees that the actual moves of A (divided by A’s scaling factor) do not violate the rules of the game on the finite tree, and the moves of M in the game on the finite

¹ For more information about this sequence see <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A035263> and <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A096268>.

tree (multiplied by M's scaling factor) do not violate the supermartingale property for the composite tree. (If the winning condition is violated, the corresponding subtree is discarded and M does not change t inside it anymore.)

Trees of variable height

The correction factors (possible increase of supermartingales in the game on finite tree) depend on the height of the finite tree the game is played on. These heights we may choose at our discretion, and we do this in such a way that the product of A's coefficients converges while the corresponding product of M's coefficients diverges.

Two winning cases

Unfortunately, even this scheme (two increase factors depending on the tree height) is not final. In the actual game on the finite tree, M wins in any of the two cases:

(1) either A's supermartingales t_0, t_1 do not increase at all on the path from the root to some leaf, whereas M's supermartingale t in this leaf increases (even a small increase in enough);

(2) or A's supermartingales t_0, t_1 increase, but this increase is small while M's supermartingale t increases substantially.

More formally, for a tree of height h there are two pairs of real numbers, $(M_1(h), m_1(h))$ and $(M_2(h), m_2(h))$. A leaf is called *winning* (at some step of the game) if the leaf has the label $i = 1$ or the label $i = 2$ (attached by M as explained below) and t is greater than $M_i(h)$ in the leaf whereas t_0, t_1 are not greater than $m_i(h)$ on the path to the leaf (here we speak about the current values of the supermartingales).

These pairs are:

$$\left(1 + \frac{1}{2^h - 1}, 1\right), \quad \left(\frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{2^{\lfloor (h-1)/2 \rfloor}}\right).$$

(The exact values are not so important, we need only the properties mentioned above in (1) and (2); in fact, we use only odd values of h .)

As mentioned above, we have one additional requirement: M must indicate the type of the winning leaf. Namely, M can attach labels $i = 1$ or $i = 2$ to leaves; once attached, the label cannot be removed; a leaf cannot carry both labels. Note that if the conditions for supermartingales are fulfilled, but the leaf has no label or "wrong" label, this leaf is not a winning leaf. (We need this to choose correctly the height of the next tree.)

At last, we are ready for an exact statement:

Main Lemma on games on finite trees. *For this game on a tree of any odd height $h \geq 3$, M has a winning strategy; this strategy guarantees that at least one winning leaf appears and remains winning forever.*

We prove the lemma in the next section. Now let us show how the lemma is used to construct a winning strategy on the infinite tree.

M starts to play on a tree of a certain height, say $h = 3$. When a winning leaf appears, M adds a new tree on top of this leaf (having it as a root). This new tree has the same height h if $i = 1$, and it has a larger height $h + 2$ if $i = 2$. When this second-level tree gets a winning leaf, M adds a new tree according to the same rule, and so on. For technical convenience, we will assume that there is only one winning leaf at any moment

postponing the others candidated until the current one is rejected. When a leaf is rejected we discard everything that grows from this leaf.

(Note that Figure refsupermart1 above does not show this adequately: as we go up, the heights of the trees grow; note also that the heights of trees of the same level may be different.)

Let us consider the infinite branch (it is unique under our assumption) obtained in the limit and the labels that appear along this branch. If there is only a finite number of labels $i = 2$ along it, then the heights of the trees along the branch are the same from some point, thus A's supermartingales t_0, t_1 do not increase after this point and M's supermartingale t increases every time by a small, but constant factor, hence t is unbounded.

Now consider the case of infinite number of $i = 2$ labels. For the trees where the winning leaf has the label $i = 2$, A's supermartingales t_0, t_1 increase at most by the factor

$$1 + 1/(2^{\lfloor (h-1)/2 \rfloor})$$

for odd h , and each h occurs only once. For the other trees, t_0, t_1 do not increase, thus they are bounded. On the other hand, each of the infinitely many leaves with $i = 2$ provides that M's supermartingale t increases by a factor of $3/2$, and for the other trees, t does not decrease (even increases a bit), hence t is not bounded. Therefore, in both cases, we get an infinite branch where A's supermartingales are bounded, whereas M's supermartingale is not.

Winning strategy

Let us describe M's winning strategy on a tree of some odd height h . Before the game starts, M selects some path from the root to one of the leaves, for example, the path that always goes left. Denote the nodes on this path A_0, A_1, A_2, \dots , and denote their brothers by B_1, B_2, \dots (A_0 denotes the root).

At the first move, M lets the value of supermartingale t to be $c = 2^h/(2^h - 1)$ in all the leaves above B_3, B_5, \dots (Fig. 3) and labels all these leafs with $i = 1$. Other leaves keep zero values. The values in the other (non-leaf) nodes are set so that t is a supermartingale, i.e. as the average over the leaves that are their descendants. (Recall that initially the value of t is zero everywhere except the root, where the value is 1 all the time.)

As a result of this move, several winning leaves appear. To avoid defeat, A has (at some point) to increase A's supermartingales: for each winning leaf, t_0 or t_1 must be made greater than 1 somewhere on the path to this leaf. Consider two variants: this happens either on the path to one of B_3, B_5, \dots or inside the subtrees rooted at B_3, B_5, \dots .

First case: One of A's supermartingales becomes greater than 1 in some A_i (note that if a node is on the path to B_j then this node is A_i for some i).

M's move: Set supermartingale t to be equal to c in all leaves except the leaf on the selected path (the leftmost leaf A_h in our case), and label all these leaves with $i = 1$. Below, t is adjusted by averaging (thus getting exactly 1 in the root).

Why this helps: Both A's supermartingales are not greater than 1 in the root. There exists a path where they both do not increase (let us construct this path from the root: the supermartingale that does not bet in the node does not change, and we choose the direction where the betting one does not increase). Hence, there is a leaf such that

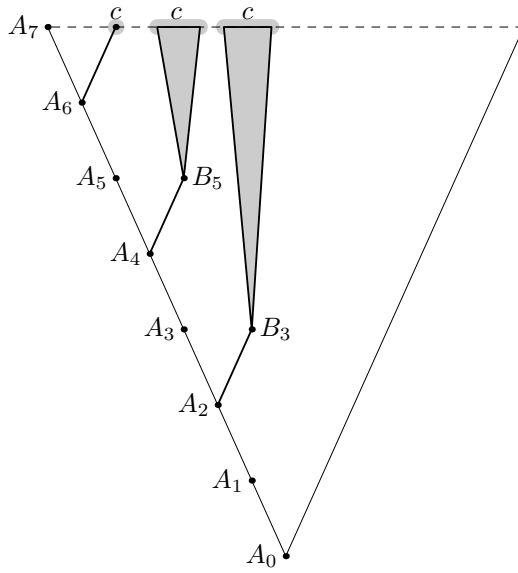


Figure 3: The first move of M

on the path to it both t_0, t_1 are not greater than 1. This cannot be M's selected path (the leftmost one in our case), since it goes through all A_i , including the “bad” one. But in all other leaves, M's supermartingale t is equal to c , thus one of them is winning.

Second case: In all the subtrees above B_3, B_5, \dots , A has increased t_0 or t_1 . Therefore, in all the nodes B_3, B_5, \dots , either t_0 or t_1 is greater than 1 (otherwise one can find a path from B_j to a leaf where both t_0, t_1 are not greater than one, i. e. a winning leaf).

Actually, we may assume here that the supermartingale that is greater than 1 in B_j does not bet in B_j and bets in the previous node A_{j-1} : the other possibility is covered by the first case, since the supermartingale that does not bet in A_{j-1} would have the same value (greater than 1) in A_{j-1} as in B_j . Hence, one supermartingale is greater than 1 in all B_3, B_5, \dots . To be definite, we say that it is the “odd” supermartingale t_1 (this is literally true for first, third, and all the games on finite trees with the odd numbers, where t_1 bets in the roots; for the games with even numbers, t_0 and t_1 switch their roles).

Lower bound. We can obtain lower bounds for the values of t_1 in all A_i , going down along M's selected path. The supermartingale t_1 does not bet in half of the nodes (and keeps its value) while in the other half the lower bound is averaged with a value greater than 1. Thus we get a bound as in Fig. 4 (the figure is for the tree of height 7). Since the supermartingale t_1 is not greater than 1 in the root and bets there, we get an upper bound for its value in B_1 : $9/8$ for the case in the figure and $1 + 1/2^{(h-1)/2}$ in general.

M's second move: In all the leaves above B_1 , the value of t is set to $3/2$, and the leaves are labeled with $i = 2$. Below, t is adjusted by averaging (it is easy to check that the value in the root does not exceed 1: in the second quarter of the leaves, t is zero, and in the first quarter, t is slightly greater than 1 in some leaves only).

Why this helps: In B_1 , both A's supermartingales are not greater than $1 + 1/2^{(h-1)/2}$ (we have shown this for t_1 ; since t_0 does not bet in the root, it does not exceed 1 also in B_1), and this holds along some path to a leaf above B_1 . But M's supermartingale t is $3/2$ there.

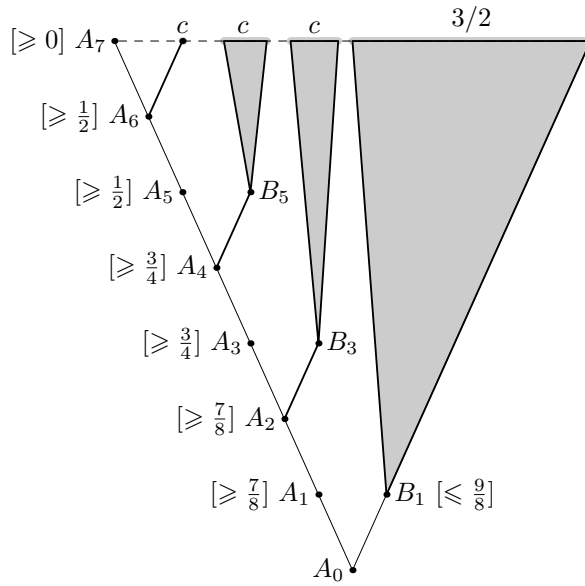


Figure 4: Lower bounds for t_1 along the M's selected path, and his second move

The construction of the winning strategy for the game on the finite tree (and thus the proof of the theorem) is completed.

6 Non-uniform measures

Recall that martingales and supermartingales can be interpreted as a capital during a game. So far we have considered a game where the coin is symmetric. If the next bit is guessed correctly, the stake is doubled. But we can consider other distributions where the declared probabilities of 0 and 1 are not equal. In this case it is fair that a stake on a less probable outcome wins more than a stake on a more probable outcome. These “non-symmetric games” correspond to (super)martingales with respect to a measure. A non-negative function μ on binary strings is called a *measure* (probability distribution) if $\mu(\Lambda) = 1$ and

$$\mu(x) = \mu(x0) + \mu(x1)$$

for all strings x . A *supermartingale with respect to measure μ* is a non-negative function m on binary strings that satisfies the inequality

$$m(x) \geq m(x0) \frac{\mu(x0)}{\mu(x)} + m(x1) \frac{\mu(x1)}{\mu(x)}$$

for all strings x . (For the uniform measure $\lambda(x) = 2^{-\text{length}(x)}$, we get our previous definition of supermartingales.)

When lower semicomputable supermartingales are considered, it is usually required that the measure is computable. The definition of Martin-Löf randomness is extended to the case of arbitrary computable measures in a natural way, and the randomness criterion based on lower semicomputable supermartingales works for the general case too.

We stated our main theorem for supermartingales with respect to the uniform measure. But it holds for a wider class of computable measures.

Theorem. *Let μ be a computable measure such that the conditional probabilities for the next bit are separated from zero:*

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x [\mu(x0)/\mu(x) > \varepsilon \text{ and } \mu(x1)/\mu(x) > \varepsilon].$$

Then there exist a Martin-Löf non-random with respect to μ sequence ω such that no μ -supermartingale that bets every other step (only on even steps or only on odd steps) wins on ω .

The proof follows the same line with minimal changes: one should adjust thresholds in the winning conditions and select the path A_0, A_1, A_2, \dots used in the winning strategy with some caution.

References

- [1] V.A. Uspensky, A.L. Semenov, A.Kh. Shen. Can an individual sequence of zeros and ones be random? *Russian Math. Surveys*, **45**(1), 121–189 (1990).
- [2] M. van Lambalgen. Von Mises' notion of random sequence reconsidered. *Journal of Symbolic Logic*, **52**(3), 725–755 (1987).
- [3] A. Chernov, A. Shen, N. Vereshchagin, V. Vovk. On-line Probability, Complexity and Randomness. In: Y. Freund, L. Györfi, G. Turán, T. Zeugmann (eds.), ALT 2008. LNSC(LNAI), vol. 5254, pp. 138–153. Springer, Heidelberg (2008).

Алгоритмическая случайность и разбиение супермартингалов

Ан. А. Мучник*

Аннотация

Одно из (эквивалентных) определений случайности последовательности в смысле Мартин-Лёфа использует перечислимые снизу супермартингалы. Мы показываем, что не всякий такой супермартингал можно заменить двумя, делающими ставки только на чётных и только на нечётных членах последовательности.

1 Случайность и перечислимые снизу супермартингалы

Одно из определений алгоритмической случайности для бесконечной последовательности нулей и единиц (относительно бернуллиевского распределения с независимыми испытаниями и вероятностью успеха $1/2$) использует так называемые супермартингалы. В алгоритмической теории вероятностей *супермартингалом* называется функция, определённая на всех двоичных словах, принимающая неотрицательные действительные значения и удовлетворяющая неравенству

$$m(x) \geq \frac{m(x0) + m(x1)}{2}$$

для любого слова x . Такая функция соответствует стратегии для игры, в которую мы вступаем с некоторым начальным капиталом $m(\Lambda)$ (где Λ — пустая строка), и перед каждым испытанием (бросанием монеты) часть имеющихся на данный момент денег ставим на нуль, часть на единицу, а часть выбрасываем. Проигравшая ставка (на неправильный исход) теряется, а выигравшая возвращается в двойном размере. В этой терминологии $m(x)$ — наш капитал после того, как выпали биты слова x . (Если возможность выбросить часть денег не используется, то неравенство обращается в равенство, и мы получаем определение *мартингала*.)

*Работа была выполнена Андреем Альбертовичем Мучником (1958–2007) в 2003 году, тогда же он рассказал о ней А. В. Чернову, который подготовил предварительный текст статьи. Этот текст был просмотрен Ан. А. Мучником, который предполагал работать над ним дальше, но изменений внести не успел. Окончательный текст подготовили А. В. Чернов и А. Шень в 2007–2008 годах; указанные лица несут всю ответственность за возможные ошибки в тексте. Работа поддержана грантами РФФИ и Sysomog (ANR, CNRS, France).

Мы говорим, что (супер)мартингал t *выигрывает* на последовательности ω , если его значения на начальных отрезках этой последовательности не ограничены сверху.

В алгоритмической теории вероятностей часто рассматривают *перечислимые снизу* супермартингалы: это означает, что $t(x)$ есть предел неубывающей последовательности неотрицательных рациональных чисел $M(x, 0), M(x, 1), \dots$, и функция $(x, n) \mapsto M(x, n)$ вычислима.

Среди всех перечислимых снизу супермартингалов имеется наибольший (с точностью до постоянного множителя); его выигрышное множество (наибольшее по включению среди выигрышных множеств перечислимых снизу супермартингалов) называется множеством *неслучайных* последовательностей, а дополнение этого множества — множеством *случайных* последовательностей.

Это определение эквивалентно классическому определению Мартин-Лёфа (см., например, [1]), поэтому его можно назвать также критерием случайности по Мартин-Лёфу в терминах супермартингалов.

Замечание. Иногда рассматривают также и большее множество последовательностей, которое получится, если в этом определении заменить перечислимые снизу супермартингалы на вычислимые мартингалы (для простоты будем считать, что их значения — рациональные числа); среди вычислимых мартингалов нет наибольшего, так что последовательность называют случайной, если *все* вычислимые мартингалы на ней ограничены.

2 Чётные и нечётные шаги

Для вычислимых мартингалов имеет место такое простое наблюдение: при определении случайности можно ограничиться мартингалами, которые делают ставки либо только на чётных шагах, либо только на нечётных шагах. Будем говорить, что (супер)мартингал *делает ставки только на чётных шагах*, если $t(x) = t(x_0) = t(x_1)$ для всех слов x чётной длины. (Например, отказ от ставки на третьем шаге означает, что после третьего бросания капитал не меняется, то есть $t(x_0) = t(x_1) = t(x)$ при двухбитовых x .)

Аналогичным образом (супер)мартингал *делает ставки только на нечётных шагах*, если $t(x) = t(x_0) = t(x_1)$ для всех слов нечётной длины. (Говоря об отсутствии ставки, мы имеем в виду, что капитал делится поровну между нулём и единицей, и мы в любом случае остаёмся «при своих».)

Сформулируем точно упомянутое выше наблюдение: *для любого вычислимого мартингала t существуют два вычислимых мартингала t_0 и t_1 , первый из которых делает ставки только на чётных шагах, а второй — на нечётных, и выполнено такое свойство: если t выигрывает на некоторой последовательности ω , то хотя бы один из мартингалов t_0 и t_1 выигрывает на ω .* Отсюда следует, что выигрышное множество мартингала t содержится в объединении выигрышных множеств мартингалов t_0 и t_1 .

Доказательство: добавив константу, можно считать, что мартингал t всюду положителен. Построим два мартингала t_0 и t_1 так: на чётных шагах t_0 делит капитал между нулём и единицей в той же пропорции, что t , а t_1 не делает ставок (=ставит поровну на нуль и единицу), а на нечётных шагах — наоборот. Тогда выигрыш t (в

процентах от начального капитала) равен произведению выигрышей t_0 и t_1 , так что если эти два мартингала ограничены на начальных отрезках какой-то последовательности ω , то и t ограничен на них.

Другими словами можно сказать так: при определении случайности относительно вычислимых мартингалов можно ограничиться мартингалами, которые делают ставки только через раз (либо только на чётных шагах, либо только на нечётных). Аналогичное замечание (также почти очевидное) можно сделать и для определения случайности по Мизесу – Чёрчу (с помощью правил выбора, см. [1]): достаточно разбить правило выбора на два, одно выбирает только члены подпоследовательности с чётными индексами, другое — только с нечётными.

Основной результат работы состоит в том, что для перечислимых снизу супермартингалов (и случайных по Мартин-Лёфу последовательностей) аналогичное утверждение неверно.

Теорема. *Существует неслучайная по Мартин-Лёфу последовательность ω , на которой не выигрывает ни один перечислимый снизу супермартингал, делающий ставки только на чётных шагах, а также ни один перечислимый снизу супермартингал, делающий ставки только на нечётных шагах.*

Доказательство этого результата будет дано в следующих разделах статьи. Сейчас мы отметим его связь с теоремой Ламбальгена о случайности пары.

Каждую последовательность нулей и единиц α можно разбить на две подпоследовательности (чётные и нечётные члены) и тем самым сопоставить с ней пару последовательностей α_0 и α_1 . Несложно понять, что для случайной (в смысле Мартин-Лёфа) последовательности α обе эти последовательности (α_0 и α_1) будут случайны, однако это условие хотя и необходимо, но не достаточно (очевидный контрпример: $\alpha_0 = \alpha_1$).

Известная теорема М. Ламбальгена [2] говорит, что мы получим необходимое и достаточное условие, если потребуем случайности α_0 с оракулом α_1 и наоборот. Неформально говоря, это соответствует тому, что игрок имеет возможность просматривать (любые) члены последовательности α_1 , делая ставки на α_0 , и наоборот. Можно было бы предположить, что нет необходимости в «просмотре вперёд» (когда мы, делая ставку на некоторый нечётный бит, просматриваем чётные, *идущие после него*, и наоборот) — но, как показывает сформулированная теорема, это не так.

Получается парадокс: представим себе, что двое судей бросают монеты перед началом игр какого-то турнира, но делают это по очереди (один по чётным дням, другой по нечётным). Было бы естественно ожидать, что если каждый из них делает это добросовестно (соответствующая подпоследовательность случайна в контексте всей последовательности, см. [3]), то и вся последовательность будет случайна. Оказывается, что если определять случайность с помощью супермартингалов, то это не так: результирующая последовательность может быть неслучайной, но вину за это нельзя возложить ни на одного из судей.

3 Построение игры, соответствующей теореме

Доказательство теоремы удобно изложить в виде некоторой бесконечной игры двух лиц, которые будут именоваться «мы» и «противник».

Противник постепенно строит два супермартингала t_0 и t_1 (делающие ставки на чётных и нечётных шагах соответственно); мы строим один супермартингал t . Построение состоит в том, что на каждом шаге игроки указывают некоторое приближение снизу к этим супермартингалам, которое имеет лишь конечное число ненулевых значений и само является супермартингалом требуемого вида; в процессе игры эти супермартингалы могут только расти (игроки не могут уменьшить уже заявленные значения). Каждый ход любого из игроков, таким образом, можно считать конструктивным объектом (закодировать двоичным словом и т. п.); игроки ходят по очереди и видят ходы друг друга (игра с полной информацией). Дополнительно мы требуем, чтобы значения всех супермартингалов на пустом слове равнялись единице (нормировка, необходимая для того, чтобы значения не уходили в бесконечность).

Партия представляет собой бесконечную последовательность чередующихся ходов; в результате партии возникает три предельных супермартингала. Считается, что мы выиграли в такой (бесконечной) партии, если существует последовательность ω , на которой наш супермартингал t выигрывает (не ограничен на начальных отрезках ω), в то время как оба супермартингала противника t_0 и t_1 не выигрывают (ограничены на начальных отрезках).

Основная лемма. *Существует вычислимая стратегия в этой игре, гарантирующая нам выигрыш.*

Несложно заметить, что этой леммы достаточно для доказательства теоремы. В самом деле, стандартным образом можно доказать, что существуют два максимальных (с точностью до ограниченного множителя) перечислимых снизу супермартингала t_0 и t_1 описанного вида (делающих ставки только на чётных/нечётных шагах). Запустим стратегию, используя в качестве противника перечисление снизу этих двух супермартингалов. Поскольку стратегия вычислима, то и даваемый ей супермартингал t будет перечислим снизу. Поскольку стратегия выигрывающая, то найдётся последовательность ω , на которой t выигрывает, а t_0 и t_1 (и, значит, любые перечислимые снизу супермартингалы указанного вида) не выигрывают, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Осталось доказать лемму. Это будет сделано в следующих двух разделах: мы определим версии этой игры на конечном дереве и предъявим стратегию, гарантирующую выигрыш в этих версиях (в некотором точном смысле), а затем объясним, как из этих конечных стратегий собрать стратегию для бесконечной игры.

4 Игры на конечных и бесконечных деревьях

Рассмотренную нами игру удобно представлять себе на бесконечном дереве, вершинами которого являются двоичные слова. Игроки увеличивают оценки своих супермартингалов для вершин этого дерева, а после окончания бесконечной партии (если можно так выразиться) приходит арбитр и ищет бесконечную ветвь с требуемыми в определении игры свойствами.

Мы будем рассматривать также похожие игры на конечных деревьях. Полем такой игры является полное двоичное дерево некоторой высоты h . Как и раньше, игроки ходят по очереди, увеличивая текущие значения своих супермартингалов (t для нас, t_0 и t_1 для противника). Условия на t_0 и t_1 те же: t_0 может делать ставки только

на чётных шагах, t_1 — только на нечётных. Значения супермартингалов (всех трёх) в корне всегда равны единице; в остальных вершинах изначально супермартингалы равны нулю и постепенно увеличиваются игроками.

Игра по-прежнему бесконечна, хотя число вершин и конечно; для данной (бесконечной) партии мы рассматриваем предельные значения всех трёх супермартингалов в листьях дерева и формулируем условие выигрыша в их терминах. Это условие по техническим причинам довольно сложное, но смысл его такой: мы хотим, чтобы в одном из листьев дерева наш супермартингал t был заметно больше 1, в то время как на пути к этому листу оба супермартингала противника не превосходили бы единицы, или в крайнем случае очень ненамного превосходили единицу (по сути, это неасимптотический вариант условия на бесконечном дереве, требующего, чтобы t стремилось к бесконечности, а t_0, t_1 были ограничены).

Представим себе на минуту, что нам удалось этого достичь в следующей (более сильной, чем мы сможем на самом деле, но об этом потом) форме: в одном из листьев наш супермартингал больше 2, а оба супермартингала противника по-прежнему меньше 1. Такую стратегию можно использовать как составную часть при построении выигрышной стратегии на бесконечном дереве: над выигрышным листом мы можем построить новое такое же поддереве, где начать ту же самую игру, но уже имея двукратную фору. (Это значит, что ходы в игре на бесконечном дереве вдвое больше ходов на конечном дереве второй игры, и что мы применяем выигрышную стратегию для этого конечного дерева, умножая ходы на два.) В пределе получим лист, где наш супермартингал больше $4 = 2^2$, а оба супермартингала противника по-прежнему не больше 1. На нём можно вырастить ещё одну копию дерева, где получить уже $2^3 = 8$, и так далее — и в пределе получится бесконечная ветвь, где наш супермартингал стремится к бесконечности, а супермартингалы противника ограничены.

Это описание является упрощённым и игнорирует некоторые моменты. Прежде всего надо иметь в виду, что игра на конечном дереве не заканчивается, поэтому мы должны начинать следующие игры (на присоединённых поддеревьях), не дожидаясь её конца и будучи готовыми к тому, что выбранный лист впоследствии окажется не выигрышным. Из нашего описания выигрыша в игре на конечном дереве видно, что условие выигрыша в данном листе может сначала выполняться (наш супермартингал станет большим, а у противника оба супермартингала пока малы), а потом нарушиться (когда супермартингал противника увеличится), но после этого уже вновь выполняться не сможет — так что повторно ни один лист в кандидаты не попадает.

Выпуская поддереве из текущего кандидата (и бракуя его и всех потомков, когда кандидат будет отброшен), мы получаем картину вроде следующей (рис. 1). Серые треугольники изображают поддеревья, где игра была запущена, а потом оказалось, что зря (кандидат под ними был отменён); светлые треугольники изображают действующие (на некоторый момент) игры. Точками изображены кандидаты, в которых (на данный момент) выигрышная ситуация. (Мы будем считать, что в каждый момент в каждом поддереве выбирается какой-то один из возможных кандидатов, над которым строится поддереве следующей игры, и пока этот кандидат не отброшен, над другими деревья не строятся. В принципе можно было бы строить деревья следующего уровня над всеми кандидатами.)

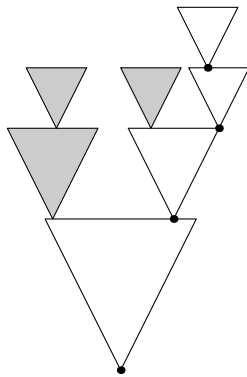


Рис. 1: Активные и отменённые игры на конечных деревьях

Заметим, что на самом деле нам нужно играть против одного противника на бесконечном дереве (а не против разных противников на конечных поддеревьях). Однако ходы противника на бесконечном дереве естественно переводятся в ходы в играх на (активных в данный момент) конечных деревьях.

По определению выигрыша на каждом следующем уровне наш супермартиггал возрастает в два раза по сравнению с его значением на предыдущем уровне; с другой стороны, по тому же определению вдоль всего пути, проходящего по выигрышным листьям, супермартигалы противника не превосходят 1.

Посмотрим, что произойдёт в пределе с этой картинкой. На первом уровне возможно только конечное число изменений кандидатов, поэтому в некоторый момент появится “окончательный кандидат”, который никогда не отменится. С этого момента игра над ним будет активной, в ней тоже будет только конечное число изменений и так далее. В итоге мы получим бесконечную ветвь, на которой наш супермартиггал неограничен, а оба супермартиггала противника ограничены.

5 Игра на конечном дереве

Идея конструкции

Начнём с неформального объяснения “причин”, по которым в игре на конечном дереве существует выигрышная стратегия. Читатель, которому эти объяснения покажутся непонятными, может сразу перейти к точным формулировкам и доказательствам в следующих разделах, которые на эти объяснения не опираются.

Начнём с очевидных замечаний. Мы хотим, чтобы в некотором листе дерева наш супермартиггал t был больше 1. Это означает, что в каких-то других листьях он должен быть меньше 1 (поскольку среднее значение супермартиггала в листьях не превосходит значения в корне, которое равно 1). Таким образом, нам нужно как-то найти листья, на которые можно не тратить денег попусту, тем самым сэкономя деньги для других листьев. Одна из возможностей — не тратить деньги на “бесперспективные” листья, на пути к которым один из супермартигалов противника уже превысил единицу. Если мы поставим некоторое $C > 1$ во все остальные листья, кроме этого бесперспективного, то это гарантирует нам выигрыш: на некотором пути из

корня оба супермартингала противника не превосходят единицы (в каждой вершине один из супермартингалов не играет, а второй при одном из исходов проигрывает), и путь этот закончится в одном из листьев, где мы поставили C . (Чтобы не превысить среднее значение для нашего супермартингала в корне, можно взять $C = N/(N - 1)$, где N — число листьев.)

Что же делать, если противник не совершает таких ошибок и не создаёт бесперспективных листьев, в которых мы ещё ничего не поставили? Начнём с того, что поместим C в самый левый лист x .

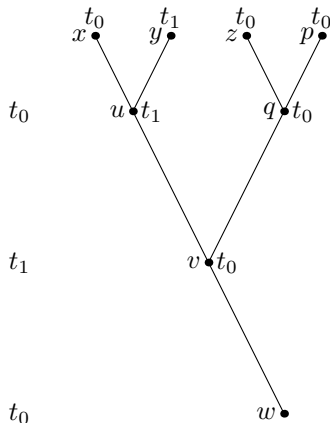


Рис. 2: Начало игры. В левой колонке указан супермартингал, играющий на данном уровне.

Противник должен рано или поздно на это ответить, сделав один из своих супермартингалов t_0, t_1 бóльшим единицы в x или на пути к нему. Заметим, что во втором случае он уже совершит ошибку, о которой мы говорили (появится бесперспективный лист y — брат x).

Поэтому мы можем считать, что один из супермартингалов противника больше единицы в самом листе x . Более того, можно считать, что таковым оказался супермартингал, который делает ставки в отце x (обозначим эту вершину u); пусть, скажем, это будет t_0 . (В противном случае значение этого супермартингала в u было бы больше единицы и y оказался бы бесперспективным, хотя мы туда ещё ничего не поставили.)

Нашим следующим ходом мы помещаем C в y . В ответ противник должен увеличить на пути в y один из своих супермартингалов. Это не может быть t_0 , поскольку тогда появятся бесперспективные листья. (Если t_0 превышает 1 в y , то и в u есть превышение, поскольку в u происходит усреднение, а в x превышение уже было. Если есть превышение в u , то есть превышение и в его отце v , поскольку в v супермартингал t_0 ставок не делает.)

Таким образом, в некоторый момент супермартингал t_1 превысит 1 в вершине y или на пути к ней. Поскольку на последнем шаге супермартингал t_1 не играет, то это превышение произойдёт уже в u или на пути к u .

После этого мы помещаем C в следующий (третий слева) лист z ; противник должен сделать один из супермартингалов бóльшим единицы в z или на пути к z , и это

может быть только супермартиггал t_0 , иначе следующий лист p станет бесперспективным. Затем мы помещаем C в p ; один из супермартиггалов противника должен превысить единицу на пути в p , и это может быть только t_0 , иначе t_1 превысит единицу в u и q (отце p), а следовательно, и в v (усреднение), а потому и в предшествующей вершине w (где t_1 не играет), и появятся сразу четыре бесперспективных листа.

Продолжая этот процесс, мы видим, что на каждом шаге у противника есть только одно возможное действие, если он хочет избежать преждевременной отбраковки вершин, и потому мы знаем, какой из его супермартиггалов должен превысить единицу в каждом из листьев (кроме последнего). Эту закономерность можно пояснить аналогией. Представим себе, что в каждом листе имеется булева переменная, значение которой (0 или 1) определяет, какой из супермартиггалов противника (t_0 или t_1) превышает единицу в данном листе. Значения этой переменной распространяются вниз (к корню) по простым И-ИЛИ-правилам: если супермартиггал играет в вершине и его значение превосходит единицу в *обоих* сыновьях этой вершины, то он превосходит единицу и в этой вершине; если же он не играет в вершине, то достаточно превосходить единицу в *одном* из сыновей.

Преждевременная бесперспективность листа соответствует при этой аналогии тому, что называется сокращением вычислений (short-cut evaluation) в языках программирования: если одна из частей конъюнкции ложна (или одна из частей дизъюнкции истинна), отпадает надобность в вычислении другой. Противник, присваивающий значения переменным в листьях И-ИЛИ-дерева слева направо, и желающий, чтобы значение каждой следующей переменной (при известных предыдущих) могло повлиять на значение выражения, также не имеет выбора (до последнего момента).

Идея выигрышной стратегии: либо мы пользуемся преимуществом, которое даёт нам преждевременно дискредитированный лист (нам не надо тратить на него деньги), либо используем преимущества, которые возникают после того, как противник обслужит первую четверть всех листьев. В первом случае мы сможем поставить $C = N/(N-1)$ на все листья, кроме одного (преждевременно дискредитированного); здесь N обозначает число листьев. Во втором случае посмотрим на последовательность булевских значений, при которой не происходит сокращения вычислений, то есть 0100010101000100...¹ Каждый второй член в этой последовательности нулевой, то есть в каждом втором листе супермартиггал t_0 превышает единицу. Поэтому двумя уровнями ниже все значения t_0 не меньше $1/2$, и подчиняются тому же закону, так что в половине из них t_0 не меньше 1. Ещё двумя уровнями ниже все значения t_0 не меньше $3/4$, а половина не меньше 1, и так далее. Аналогичное рассуждение применимо к t_1 со сдвигом на уровень. Поэтому мы можем взять любую вершину, над которой достаточно большое поддерево, и рассчитывать на то, что в ней (скажем) t_1 если и меньше 1, то ненамного. Возьмём в качестве этой вершины самого левого из четырёх внуков корня (в котором t_1 делает ставки; в детях корня он их не делает). Тогда t_1 будет только чуть-чуть меньше 1 и в левом сыне корня. А значит, t_1 не может быть сильно больше 1 в правом сыне корня, и если мы сосредоточим остатки денег на листьях правой половины дерева (на каждый лист придётся примерно $4/3$, поскольку четверть листьев остаются свободными и ещё в одной четверти в них

¹Эта последовательность рассматривается в <http://www.research.att.com/njas/sequences/A035263> и <http://www.research.att.com/njas/sequences/A096268>.

стоит C). С другой стороны, оба супермартингала противника лишь немного могут превосходить 1 в правом сыне корня, и это свойство распространяется снизу вверх хотя бы в один лист.

В обоих случаях мы достигаем некоторого преимущества над противником, но преимущества эти различны, и точное определение конечной игры должно это учитывать. Перейдём к формальному описанию этой игры (которое не зависит от изложенных выше неформальных соображений).

Игра на конечном дереве: точное определение

Как мы упоминали, сформулированная нами для примера цель игры (добиться, чтобы наш супермартингал был равен 2 в вершине, на пути к которой супермартингалы противника не превышают 1) сформулирована слишком сильно: мы сможем достичь меньшего, но этого окажется достаточно.

Разрешённый рост для супермартингалов

В игре на конечном дереве нам не удастся гарантировать, что в одном из листьев (и на пути к нему) оба супермартингала противника будут в точности не больше 1; некоторый их рост (в $1 + \delta$ раз) придётся разрешить. Эти коэффициенты ($1 + \delta$) перемножаются для деревьев цепочки и накапливаются, но если произведение их ограничено константой, это не страшно.

С другой стороны, нам не удастся и гарантировать увеличение нашего субмартингала в 2 раза, а лишь в некоторое меньшее число раз (на каждом уровне, как мы увидим, своё). В этом случае нам, напротив, необходимо, чтобы произведение этих коэффициентов стремилось к бесконечности.

Говоря более формально, для каждого из конечных поддеревьев мы применяем лемму с соответствующим поправочными множителями для значения супермартингалов в корне. Таких множителей два: для нас и для противника, и они перемножаются отдельно. Условие выигрыша в предыдущих листьях гарантирует, что реальные ходы противника не превысят разрешаемых в игре на конечном дереве (с поправкой), и что наши ходы не нарушат условие супермартингалности. (Как только один из листьев на пути перестаёт быть выигрышным, мы прекращаем изменения в поддереве.)

Деревья переменного размера

Сказанное об изменении коэффициентов возрастания (для нашего супермартингала и для супермартингалов противника) предполагает, естественно, что высоты конечных деревьев, на которых ведутся игры, различны. Эти высоты мы можем выбирать по своему усмотрению, стремясь достичь нашей цели (расходимости произведения наших коэффициентов и сходимости произведения коэффициентов противника).

Двухвариантный выигрыш

К сожалению, и эта картина (два коэффициента увеличения — для нас и для противника, — зависящие от высоты) является упрощённой. На самом деле у нас бу-

дет два варианта выигрыша; для данной высоты h дерева будут две пары чисел $(M_1(h), m_1(h))$ и $(M_2(h), m_2(h))$. Выигрышным листом считается такой, в котором (для некоторого $i \in \{1, 2\}$) наш супермартиггал превосходит $M_i(h)$, в то время как оба супермартиггала противника в этом листе и на пути к нему не превосходят $m_i(h)$.

Эти пары будут такими:

$$\left(1 + \frac{1}{2^h - 1}, 1\right), \quad \left(\frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{2^{\lfloor (h-1)/2 \rfloor}}\right).$$

Конкретный вид этих формул не так важен. Существенно то, что для выигрыша нам достаточно существования листа, в котором выполнено одно из двух: либо

(1) наш супермартиггал умножается (по сравнению с корнем) на некоторый коэффициент, хотя бы ненамного больший 1, в то время как супермартиггалы противника не увеличиваются, либо

(2) наш супермартиггал существенно увеличивается (в $3/2$ раза) ценой небольшого (и быстро убывающего с ростом h) увеличения у противника.

При этом есть ещё одно уточнение: мы обязаны указывать, какой вид выигрыша мы планируем в данном листе. Это означает, что в ходе игры мы можем ставить на листьях (нестираемые и несовместные друг с другом) пометки “1” и “2” (вид выигрыша), и должны обеспечить, чтобы в пределе существовал лист с пометкой, в котором достигается указанный тип выигрыша. (Пометка на листе определяет высоту следующего дерева, растущего из этого листа.)

Итак, мы готовы к окончательной формулировке:

Основная лемма об играх на конечных деревьях. *Для любого нечётного $h \geq 3$ в игре на дереве высоты h у нас есть стратегия, гарантирующая один из двух указанных видов выигрыша.*

Покажем, как из этой леммы вытекает существование выигрышной стратегии на бесконечном дереве. (Доказательство леммы мы отложим до следующего раздела).

В самом деле, начнём играть на дереве некоторой высоты, например, 3. Если у него появляется выигрышный лист, то над ним мы строим новое дерево — той же высоты 3, если лист первого рода, и большей высоты, скажем, 5, если лист второго рода. Если у этого дерева второго уровня появляется выигрышный лист, то мы строим над ним следующее дерево — не меняя высоту, если лист первого рода, и увеличивая высоту на 2, если второго рода. (Как мы уже говорили, можно считать, что в каждый момент выигрышный лист только один, откладывая использование следующего до тех пор, пока предыдущий окажется негодным. Когда лист становится негодным, всё построенное над ним также отбрасывается.)

(Отметим, что приведённый выше рисунок 1 становится неадекватным: высота деревьев растёт снизу вверх, а не убывает, как нарисовано, и, кроме того, высота разных деревьев одного уровня может быть разной.)

Посмотрим, что может получиться в пределе на бесконечной ветви. В ней либо конечное число выигрышных листьев второго рода, либо бесконечное. Если конечное, то высоты деревьев в этой ветви стабилизируются, супермартиггалы противника с некоторого момента не растут (и потому ограничены), а наш супермартиггал с этого же момента умножается на постоянный коэффициент (и потому неограничен). Если бесконечное, то при каждом переходе второго рода супермартиггалы противника

умножаются на

$$1 + 1/(2^{\lfloor (h-1)/2 \rfloor})$$

с очередным h , а в промежутках не растут, так что в целом последовательность органичена. С другой стороны, каждый переход второго рода увеличивает наш супермартиггал в $3/2$ раза, а в промежутках он не уменьшается (и даже немного увеличивается, но это не важно), так что в целом он не ограничен.

Таким образом, в обоих случаях мы получаем бесконечную ветвь, где супермартигалы противника ограничены, а наш — нет.

Выигрышная стратегия: подробности

Опишем выигрышную стратегию на дереве нечётной высоты h . Выберем путь из корня в один из листьев, например, путь, идущий всё время налево. Вершины вдоль этого пути обозначим A_0, A_1, A_2, \dots . Мы начнём игру с того, что рассмотрим братьев B_3, B_5, \dots и в деревьях над ними напишем число $c = 2^h/(2^h - 1)$ (рис. 3). Под ними мы тоже должны увеличить значение нашего супермартиггала, положив его в каждой вершине среднему значению в листьях-потомках. (Напомним, что изначально все значения нашего супермартиггала равны нулю, кроме единицы в корне, которая так и остаётся единицей на протяжении игры.)

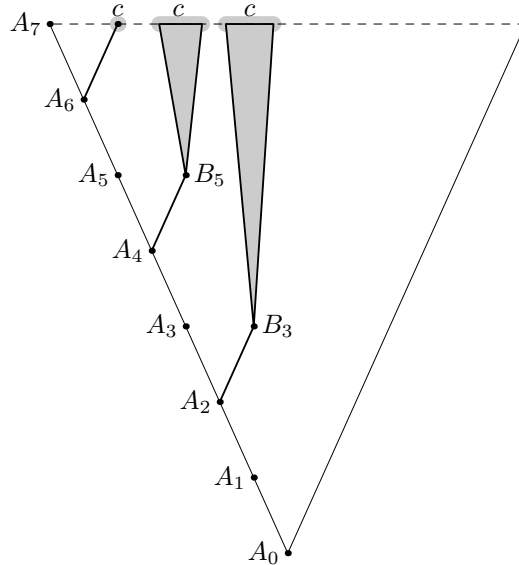


Рис. 3: Наш первый ход

В результате этого появляется сразу несколько вершин, где наш супермартиггал не меньше c . Противник, чтобы избежать проигрыша (по первому варианту), должен сделать один из своих супермартиггалов больше единицы на пути в любой из листьев, в которых стоит c . Он может делать это либо в деревьях над B_3, B_5, \dots , либо ниже их. Начнём со второго варианта.

Случай А. Противник сделал один из своих супермартиггалов больше 1 в одной из вершин A_i (только эти вершины встречаются на пути к B_i не доходя до них).

Наши действия: увеличиваем наш супермартиггал во всех вершинах, кроме самой левой, до c . (В остальных вершинах производим усреднение; в корне это усреднение даёт как раз единицу.)

Почему этого достаточно: поскольку оба супермартиггала противника в корне не больше 1, то найдётся лист, на пути к которому они оба не больше 1 (ищем лист из корня вверх, в каждой вершине один из супермартиггалов делает ставку, идём вверх так, чтобы он не возрос — а второй заведомо не изменится). Этот лист не может быть самым левым (на пути к нему один из супермартиггалов противника бывает больше единицы), а в остальных у нас стоит c .

Случай Б. Противник увеличил свои супермартиггалы в деревьях над B_3, B_5, \dots , закрыв все вершины, где мы поставили c . В этом случае во всех вершинах B_3, B_5, \dots один из супермартиггалов противника больше единицы. (В самом деле, иначе из этой вершины можно было бы протянуть путь вверх, вдоль которого оба супермартиггала противника не превосходят единицы.)

Нижняя оценка. Можно считать без ограничения общности, что превосходит единицу тот из супермартиггалов, который перед этим играл (поскольку другой супермартиггал не меняется, другой вариант покрывается случаем А). Таким образом, можно считать, что “нечётный” супермартиггал противника больше 1 во всех вершинах B_3, B_5, \dots .

В этом случае можно получить нижнюю оценку на значения нечётного супермартиггала в вершинах A_i , идя сверху вниз. В половине случаев он не делает ставок и потому не изменяется; в оставшейся половине мы производим усреднение с числом, большим 1. Получаем такую оценку, как на рисунке 4 (где она показана для дерева высоты 7): Поскольку в корне нечётный супермартиггал не больше 1, то в B_1 он не

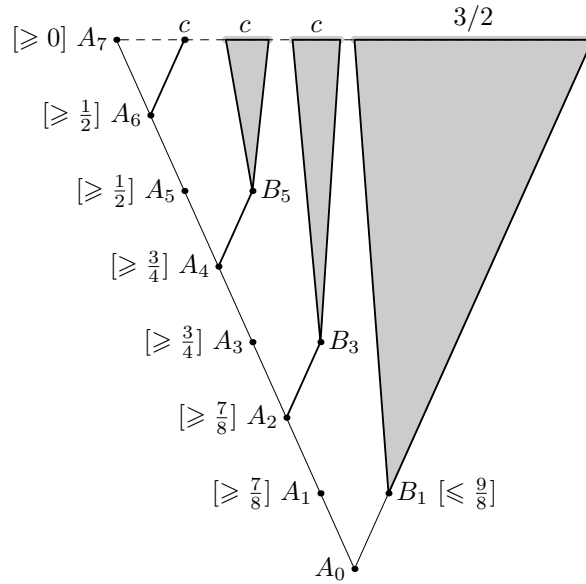


Рис. 4: Нижние оценки для t_1 вдоль избранного пути и второй ход

больше $9/8$ для нашего рисунка, а в общем случае — не больше $1 + 1/2^{(h-1)/2}$.

Наши действия: во всех листьях над B_1 мы полагаем наш супермартиггал равным $3/2$, ниже по усреднению (легко проверить, что мы не превысим единицы в

корне, так как вторая четверть листьев не использована вообще, а в первой четверти значение лишь чуть больше 1 и не во всех вершинах).

Почему этого достаточно: так как в B_1 оба супермартингала противника не больше $1 + 1/2^{(h-1)/2}$ (а один даже не превосходит единицы, но это неважно), то это же верно на пути к одному из листьев над B_1 . А наш супермартингал в любом таком листе равен $3/2$.

Заметим, что требование декларировать тип выигрыша выполняется легко: вершины с s мы декларируем как вершины первого типа, а вершины с $3/2$ декларируем как вершины второго типа.

Построение выигрышной стратегии в игре на конечном дереве (и тем самым доказательство теоремы) завершено.

6 О неравномерных мерах

Супермартингалы соответствуют изменению капитала в ходе игры. До сих пор мы предполагали, что игра использует симметричную монету, и тогда ставка на угаданный бит удваивается. Если монета предполагается несимметричной, то и правила игры должны соответственно измениться: менее вероятный исход даёт большее увеличение ставки. Это отражено в определении супермартингала относительно заданной меры. Неотрицательная функция μ на двоичных словах называется (вероятностной) *мерой*, если $\mu(\Lambda) = 1$ (где Λ — пустое слово) и

$$\mu(x) = \mu(x0) + \mu(x1)$$

для любого x . *Супермартингалом относительно μ* называется неотрицательная функция t на двоичных словах, для которой

$$t(x) \geq t(x0) \frac{\mu(x0)}{\mu(x)} + t(x1) \frac{\mu(x1)}{\mu(x)}$$

при всех x . (Для равномерной меры, где $\lambda(x) = 2^{-n}$ для слова x длины n , получаем прежнее определение.)

Когда говорят о перечислимых снизу супермартингалах, обычно предполагают, что мера μ вычислима. В этом случае сохраняет силу критерий случайности по Мартин-Лёфу в терминах перечислимых снизу супермартингалов.

Основной результат этой статьи был сформулирован для случая равномерной меры, но он переносится и на более широкий класс вычисляемых мер:

Теорема. *Пусть μ — вычисляемая мера, для которой условные вероятности появления нуля и единицы после любого слова x отделены от нуля, то есть не меньше некоторого положительного ε , не зависящего от x . Тогда найдётся последовательность, не случайная по мере μ , на которой ограничен любой перечислимый снизу супермартингал, делающий ставки только на чётных или только на нечётных ходах.*

Доказательство следует той же схеме, только надо изменить численные значения параметров выигрыша на конечном дереве, а также подходящим образом выбирать путь A_0, A_1, A_2, \dots для выигрышной стратегии.

Список литературы

- [1] Успенский В. А., Семёнов А. Л., Шень А., Может ли (индивидуальная) последовательность нулей и единиц быть случайной? *Успехи математических наук*, 1990, т. 45, вып. 1 (271), с. 105–162. English translation: Uspenskii V. A., Semenov A. L., Shen' A. Kh., Can an individual sequence of zeros and ones be random? *Russian Math. Surveys*, 1990, v. 45, no. 1, pp. 121–189.
- [2] M. van Lambalgen. Von Mises' notion of random sequence reconsidered. *Journal of Symbolic Logic*, 1987, vol. 52, no.3, pp. 725–755 (1987).
- [3] A. Chernov, A. Shen, N. Vereshchagin, V. Vovk. On-line Probability, Complexity and Randomness. In: Y. Freund, L. Györfi, G. Turán, T. Zeugmann (eds.), ALT 2008. LNSC(LNAI), vol. 5254, pp. 138–153. Springer, Heidelberg (2008).