

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

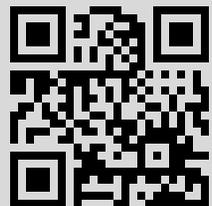
В. В. Вьюгин, В. П. Маслов, Теоремы о концентрации для энтропии и свободной энергии, *Пробл. передачи информ.*, 2005, том 41, выпуск 2, 72–88

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 93.80.227.54

25 июня 2019 г., 18:35:49



УДК 621.391.1:519.2

© 2005 г. В.В. Вьюгин, В.П. Маслов

## ТЕОРЕМЫ О КОНЦЕНТРАЦИИ ДЛЯ ЭНТРОПИИ И СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ<sup>1</sup>

Теорема Джейнса о концентрации энтропии утверждает, что для большинства слов  $\omega_1 \dots \omega_N$  длины  $N$ , для которых имеет место  $\sum_{i=1}^N f(\omega_i) \approx vN$ , эмпирические частоты значений функции  $f$  близки к значениям вероятностей, которые максимизируют энтропию Шеннона при фиксированном математическом ожидании  $f$ , равном  $v$ . Рассматривается понятие алгоритмической энтропии, и на его основе вводятся понятия энтропии для моделей Бозе и Ферми неупорядоченных наборов данных. Рассматриваются варианты теоремы Джейнса для этих моделей, доказаны свойства концентрации для свободной энергии в случае неизолированной системы изотермического типа. Получены точные представления алгоритмической энтропии и свободной энергии в точках экстремума, и на их основе представлены оценки возможных флуктуаций энергетических уровней в равновесном состоянии.

### § 1. Введение

Пусть задана некоторая функция  $f(a)$ , принимающая числовые значения  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  на всех буквах некоторого алфавита  $B$ . Для каждой последовательности букв  $\omega_1 \dots \omega_N$  алфавита  $B$  рассматривается сумма  $E = \sum_{i=1}^N f(\omega_i)$ , которая может иметь различный физический, информационный или экономический смысл. Например, это внутренняя энергия физической системы или стоимость передачи сообщения, или затраты (доход) при данном распределении финансовых вложений по позициям  $\omega_1, \dots, \omega_N$ . В нетривиальных физических и экономических задачах рассматриваются также нелинейные функции энергии (см. § 2).

Характер распределения суммы  $E$  по  $n$  энергетическим состояниям или финансовым позициям  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  характеризуется энтропией<sup>2</sup>  $H = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ , где  $p_i$  – вероятность, с которой источник генерирует букву  $a$  алфавита  $B$ , для которой  $f(a) = \epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Рассматривается случай, когда распределение вероятностей  $p_i$  не известно, задано лишь среднее  $\sum_{i=1}^n \epsilon_i p_i = v$ . Принцип максимума энтропии предсказывает, что при фиксированном среднем равновесное состояние физической системы или финансового рынка достигается при вероятностях букв алфавита  $B$ ,

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета поддержки научных школ при Президенте Российской Федерации (номера проектов НШ-358.2003.1; НШ-1678.2003.1), Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 03-01-00475) и РФФИ-CNRS (номер проекта 02-02-22001).

<sup>2</sup> Далее  $\log$  обозначает логарифм  $r$  по основанию 2.

приводящих к максимуму величины  $H$  при заданном ограничении (см. [1–3]). Этот принцип также рассматривался в форме задачи поиска оптимального соотношения между стоимостью информации и пропускной способностью канала передачи данных [4]. Принцип максимума энтропии происходит из статистической физики, где он, в частности, применяется для получения численных характеристик идеальных газов, находящихся в равновесном состоянии [5].

В качестве некоторого возможного обоснования применимости принципа максимума энтропии для вероятностного прогнозирования и индуктивного вывода рассматривается теорема Джейнса [1] о концентрации энтропии, которая утверждает, что для большинства слов  $\omega_1 \dots \omega_N$  длины  $N$ , на которых сумма  $\sum_{i=1}^N f(\omega_i)$  “не сильно” отклоняется от величины  $vN$ , эмпирические частоты значений функции  $f$  близки к значениям вероятностей, которые максимизируют энтропию Шеннона при фиксированном математическом ожидании  $f$ , равном  $v$ .

Наряду с задачей максимизации энтропии также рассматривается задача минимизации величины

$$F = \beta \sum_{i=1}^n \epsilon_i p_i - H,$$

называемой свободной энергией<sup>3</sup>, где  $H$  – энтропия, а  $\beta$  – константа. По аналогии с термодинамикой в физических приложениях величина  $\beta^{-1}$  называется температурой (а  $\beta$  – обратной температурой). Заметим, что в задаче максимизации энтропии при заданных ограничениях величина  $\beta$  является одним из вычисляемых множителей функционала Лагранжа. В отличие от первой задачи во второй система не является изолированной, и задача минимизации свободной энергии  $F$  рассматривается при заранее заданной фиксированной температуре. В этой постановке внутренняя энергия  $E$  является производной величиной; мы покажем далее, что в точке минимума свободной энергии она необходимо имеет стохастический характер. Мы также рассмотрим аналог теоремы Джейнса для свободной энергии и приведем аргументы в пользу применения принципа минимума свободной энергии при индуктивном выводе.

Некоторые авторы отмечают аналогию между термодинамикой и экономикой [6, 7]. В [7] рассматривается задача максимизации “финансовой суммы”  $\beta \sum_{i=1}^n \epsilon_i N_i + NH$ , которая состоит из двух частей – дохода от суммы размера  $N$ , распределенной по депозитам или ценным бумагам  $n$  типов:  $N = N_1 + \dots + N_n$  ( $\epsilon_i$  – процент дохода с суммы  $N_i$ ), и “дохода от информации” о состоянии финансового рынка; здесь  $\beta$  – покупательная способность денежной единицы<sup>4</sup>. Целью вкладчиков является максимизация дохода по депозитам в различных банках в условиях неустойчивого финансового рынка. В финансовых приложениях  $\beta^{-1}$  характеризует волатильность финансового рынка. Особенность стратегии вложения денег для массового вкладчика следующая: чем ниже доверие к финансовой системе (чем ниже покупательная способность денежной единицы  $\beta$  или выше волатильность финансового рынка  $\beta^{-1}$ ), тем больше желание основной массы вкладчиков диверсифицировать свои финансовые вложения, вкладывая деньги в более надежные банки или ценные бумаги, дающие низкий процент дохода. Наиболее вероятное распределение депозитов по финансовым учреждениям  $n$  типов, отличающимся процентом дохода по этим депозитам, может быть вычислено путем максимизации финансовой суммы

<sup>3</sup> Точнее, это термодинамическая свободная энергия, деленная на температуру.

<sup>4</sup> Здесь рассматриваются пары интенсивных и экстенсивных величин (банковский процент  $\epsilon_i$ , размер депозита  $N_i$ ),  $i = 1, \dots, n$ . В термодинамике рассматриваются пары величин (давление, объем) или (температура, энтропия).

(что эквивалентно минимизации свободной энергии при значении параметра, равном  $-\beta$ ).

С точки зрения финансовых операций финансовые бумаги одной номинации (которые в принципе имеют различающие их номера) неразличимы, их попарные перестановки не должны влиять на результаты этих операций. Поэтому имеет смысл считать, что они подчиняются статистике неразличимых объектов, точнее, статистике Бозе – Эйнштейна (см. ниже). Для учета этой особенности в качестве исходных объектов мы будем рассматривать неупорядоченные наборы букв алфавита  $B$ . Как было указано, кроме квантовомеханических частиц этой информационной модели, в частности, подчиняются распределения финансовых вложений по различным типам ценных бумаг с фиксированным процентом дохода.

Результаты данной статьи будут в основном формулироваться для множества  $B^N$ , полученного из множества  $B^N$  всех слов длины  $N$ , состоящих из букв алфавита  $B$ , путем факторизации по группе всех перестановок индексов  $\{1, \dots, N\}$ .

Мы будем рассматривать указанные модели на микроуровне и при этом не будем использовать вероятностные модели. Вместо этого, на основе алгоритмического подхода А.Н. Колмогорова [8, 9] к обоснованию теории вероятностей и теории информации, будут рассмотрены алгоритмические аналоги указанных выше понятий. Например, вместо энтропии соответствующего распределения вероятностей, согласно которому распределена последовательность  $\omega_1, \dots, \omega_N$ , мы будем рассматривать *алгоритмическую энтропию*, или колмогоровскую сложность  $K(\omega_1 \dots \omega_N)$  слова  $\omega_1 \dots \omega_N$ , характеризующего микросостояние рассматриваемой физической или экономической системы. Будет также введен аналог понятия свободной энергии – *алгоритмическая свободная энергия*, у которой обычная свободная энергия будет являться ее главным членом. Преимуществом при таком использовании колмогоровской сложности является то, что в отличие от вероятностной энтропии сложность  $K(\omega_1 \dots \omega_N)$  имеет смысл для произвольного неравновесного состояния  $\omega_1, \dots, \omega_N$  системы.

Используя математические свойства колмогоровской сложности, мы представим сложность произвольного микросостояния системы из  $N$  элементов в виде суммы двух слагаемых. Это разложение аналогично разложению физической энтропии из работы [10] или разложению кода последовательности данных в принципе MDL (Minimum Description Length) из работ [11, 12]. Первое из этих слагаемых – колмогоровская сложность микросостояния при известном макросостоянии, второе слагаемое – сложность самого макросостояния. Мы выделим в первом слагаемом главный член – линейный по  $N$  и гладкий по своим параметрам (частотам). В случае Больцмановской статистики этот член равен энтропии Шеннона – Гиббса. В случае статистики Бозе (а также в случае статистики Ферми) также выделяется аналогичный член, который мы назовем энтропией Бозе (энтропией Ферми). Второе слагаемое имеет меньший порядок и будет использовано при оценке возможных флуктуаций энергетических уровней в равновесном состоянии. Мы покажем, что в равновесном состоянии второе слагаемое из разложения алгоритмической энтропии компенсируется дополнительными членами, возникающими при более точных оценках алгоритмической энтропии, а алгоритмическая энтропия и алгоритмическая свободная энергия совпадают с классическими аналогами.

## § 2. Основные структуры

**Алгоритмическая статистика.** Определение и основные свойства колмогоровской сложности, или алгоритмической энтропии, приведены в Приложении. Пусть  $K(x)$  и  $K(x|y)$  – префиксные варианты безусловной и условной колмогоровской сложности. Следуя стандартному подходу статистической механики, стохастическая структу-

ра на произвольном конечном множестве конструктивных объектов<sup>5</sup>  $\mathcal{X}$  будет задаваться в форме некоторого вычислимого отображения  $\Xi(\alpha)$  (алгоритмической статистики), принимающего значения в некотором множестве конструктивных объектов  $\mathcal{Y}$ . Элементы  $\mathcal{X}$  называются *микросостояниями*, элементы  $\mathcal{Y}$  – *макросостояниями*. Легко видеть, что  $K(\alpha, \Xi(\alpha)) = K(\alpha) + O(1)$ . Отсюда по свойству (П.2) (см. Приложение) имеем следующее представление колмогоровской сложности элемента  $\alpha \in \mathcal{X}$  через энтропию Хартли (логарифм мощности элемента разбиения) и сложность элемента  $\Xi^{-1}(\Xi(\alpha))$  разбиения, соответствующего функции  $\Xi$ :

$$K(\alpha) = \log |\Xi^{-1}(\Xi(\alpha))| + K(\Xi(\alpha)) - d_{\Xi}(\alpha) + O(1), \quad (1)$$

где величина  $d_{\Xi}(\alpha) = \log |\Xi^{-1}(\Xi(\alpha))| - K(\alpha | \Xi(\alpha), K(\Xi(\alpha)))$  называется дефектом случайности  $\alpha$  относительно соответствующего  $\Xi$  разбиения<sup>6</sup>. Пусть  $E$  – некоторая числовая функция (функция потерь, энергия), определенная на  $\mathcal{X}$ . Далее также будет рассматриваться *алгоритмическая свободная энергия* микросостояния  $\alpha$

$$F(\alpha) = \beta E(\alpha) - K(\alpha), \quad (2)$$

где  $\beta$  – параметр ( $\beta^{-1}$  – температура). Алгоритмическая свободная энергия, так же как и алгоритмическая энтропия, определена с точностью до аддитивной константы (см. Приложение). Нас будут интересовать экстремальные значения свободной энергии.

Рассмотрим конкретные примеры приведенной выше формальной структуры. Пусть  $B = \{a_1, \dots, a_M\}$  – некоторый конечный алфавит,  $f(a)$  – числовая функция на  $B$ , а  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  – все различные ее значения; предположим, что это вычислимые действительные числа. Предположим также, что  $n \geq 2$ . Определим  $G_j = \{a : f(a) = \epsilon_j\}$ ,  $g_j = |G_j|$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Имеем  $\sum_{j=1}^n g_j = M$ . Величина  $\rho = N/M$  называется плотностью. Полагаем  $\mathcal{X} = B^N$  – множество всех слов (последовательностей букв) длины  $N$ ,  $N = 1, \dots$ . Пусть  $\mathcal{Y} = \Pi_N^n$  – симплекс, состоящий из всех целочисленных наборов  $(N_1, \dots, N_n)$  таких, что  $\sum_{i=1}^n N_i = N$ . Рассмотрим функцию  $\Xi(\omega^N) = (N_1, \dots, N_n)$  на  $B^N$ , где  $\omega^N = \omega_1 \dots \omega_N$  и

$$N_i = N_i(\omega^N) = |\{j : 1 \leq j \leq N, f(\omega_j) = \epsilon_i\}|$$

при  $i = 1, \dots, n$ . Пусть  $\nu_i = \nu_i(\omega^N) = N_i(\omega^N)/N$ . Мы отождествляем набор  $\Xi(\omega^N)$  и соответствующий элемент разбиения, содержащий  $\omega^N$ . Величина

$$E(\omega^N) = \sum_{i=1}^n f(\omega_i) = \sum_{i=1}^n N_i \epsilon_i = N \sum_{i=1}^n \nu_i \epsilon_i \quad (3)$$

будет называться (внутренней) энергией микросостояния  $\omega^N$ . Для любых  $\omega^N, \omega'^N \in \Xi$  выполняется  $E(\omega^N) = E(\omega'^N)$ .

Как было замечено в §1, в некоторых нетривиальных физических и экономических задачах рассматриваются нелинейные функции энергии.

Например, в [7] в случае  $n = 2$  рассматривается функция

$$E(\omega^N) = \epsilon_1 N_1 + \epsilon_2 N_2 - \frac{V N_2 (N_2 - 1)}{2N},$$

в которой отражается взаимодействие между элементами системы ( $V$  – некоторая константа).

<sup>5</sup> Отличительное свойство конструктивных объектов состоит в том, что они могут быть алгоритмически эффективно занумерованы натуральными числами.

<sup>6</sup>  $|A|$  – число элементов конечного множества  $A$ .

Во всех этих случаях алгоритмическая свободная энергия (2) имеет вид

$$F(\omega^N) = \beta E(\omega^N) - K(\omega^N). \quad (4)$$

Мы также рассмотрим вопросы максимизации алгоритмической энтропии элементов некоторого энергетического "слоя"  $\mathcal{L}^N = \mathcal{L}^N(v)$ , который состоит из всех микросостояний  $\omega^N$ , удовлетворяющих условию

$$|E(\omega^N) - vN| \leq C, \quad (5)$$

где  $v$  – средняя стоимость (передачи) одной буквы сообщения (предполагаем, что  $v$  – положительное вычислимое действительное число; далее считаем, что  $v$  фиксировано),  $C$  – некоторая достаточно большая константа.

**Бернуллиевские последовательности** (статистика Больцмана). Используя формулу Стирлинга для приближения биномиальных коэффициентов, представим (1) в виде<sup>7</sup>

$$K(\omega^N) = NH(\nu_1, \dots, \nu_n) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \nu_i - \frac{1}{2} (n-1) \log N + K(\Xi(\omega^N)) - d_{\Xi}(\omega^N) + O(1), \quad (6)$$

где  $H(\nu_1, \dots, \nu_n) = - \sum_{i=1}^n \nu_i \log(\rho \nu_i / p_i) + \log N$  – энтропия,  $p_i = g_i / M$ ,  $N_i$  и  $\nu_i$  определены ранее,  $i = 1, \dots, n$ .

В линейном случае максимум  $NH_{\max}$  главного члена (6) при условиях

$$\sum_{i=1}^n \nu_i \epsilon_i = v, \quad \sum_{i=1}^n \nu_i = 1 \quad (7)$$

легко вычисляется с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа (см. [13]) и достигается при

$$\tilde{\nu}_i = \rho^{-1} p_i 2^{-(\beta \epsilon_i + \mu)}, \quad (8)$$

где  $\beta$  и  $\mu$  неявно задаются указанными выше условиями.

Главным членом алгоритмической свободной энергии (4) является *свободная энергия*

$$FH(\omega^N) = \beta E(\omega^N) - NH(\nu_1, \dots, \nu_n). \quad (9)$$

В случае линейной энергии  $E(\omega^N)$ , задаваемой формулой (3), при фиксированной температуре  $\beta$  минимум свободной энергии (9) достигается при том же значении (8) с тем лишь исключением, что значение  $\beta$  заранее задано, а значение  $\mu$  находится из второго условия (7).

**Неупорядоченные наборы** (статистика Бозе – Эйнштейна). Квантовый газ состоит из неразличимых частиц (т.е. эти частицы не имеют имен). Математически это означает, что любые две последовательности, имеющие одинаковые наборы букв, отождествляются. Другими словами, рассматриваются неупорядоченные наборы букв алфавита  $V$ . Пусть  $\mathcal{B}^N$  – множество всех неупорядоченных наборов (мультимножеств), полученное факторизацией множества  $V^N$  относительно группы перестановок индексов его элементов. Набор  $\omega^N = [\omega_1, \dots, \omega_N] \in \mathcal{B}$  отождествляется с конструктивным объектом – кортежем  $\langle (a_1, k_1), \dots, (a_M, k_M) \rangle$ , в который каждая буква алфавита  $a_i$  входит с некоторой кратностью – неотрицательным целым числом  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Размер набора  $\omega^N$  равен сумме кратностей всех букв данного кортежа.

<sup>7</sup> Это и аналогичные представления рассматриваем при  $\nu_i > 0$ , в противном случае уменьшаем значение  $n$ . Под  $K(\Xi(\omega^N))$  понимается  $K(N_1, \dots, N_n)$ .

Функция  $\Xi(\omega^N)$ , определенная выше на множестве  $B^N$ , естественным образом распространяется на его факторизацию  $B^N$ . Элемент соответствующего разбиения, определяемый значением  $\Xi$  – набором целых чисел  $(N_1, \dots, N_n)$ , состоит из неупорядоченных наборов  $\omega^N = [\omega_1, \dots, \omega_N]$ , для которых

$$N_i = N_i(\omega^N) = |\{j : \omega_j \in G_i\}| \quad (10)$$

при  $i = 1, \dots, n$ . Напомним, что  $p_i = g_i/M$ .

Пусть  $\omega^N \in B^N$ , числа  $N_1, \dots, N_n$  определены по (10),  $\nu_i = N_i/N$ . Используя формулу Стирлинга для приближения биномиальных коэффициентов и формулу (1), получим

$$\begin{aligned} K(\omega^N) = NH^B(\nu_1, \dots, \nu_n) - \sum_{i=1}^n \log(1 + \rho \nu_i/p_i) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{\nu_i(\rho^{-1}p_i - 1/N)}{\nu_i + \rho^{-1}p_i - 1/N} - \frac{1}{2} n \log N + K(\Xi(\omega^N)) - d_{\Xi}(\omega^N) + O(n/N) + O(1), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$H^B(\nu_1, \dots, \nu_n) = \sum_{i=1}^n (\nu_i + p_i \rho^{-1}) \log(\nu_i + p_i \rho^{-1}) - \nu_i \log \nu_i - p_i \rho^{-1} \log(p_i \rho^{-1})$$

определяет главный член алгоритмической энтропии, который будем называть *энтропией Бозе*.

В случае линейной энергии максимум  $H_{\max}^B$  энтропии Бозе (11) при ограничениях (7) легко вычисляется с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа и достигается при

$$\tilde{\nu}_i = \frac{p_i}{2\beta \epsilon_i + \mu - \rho}, \quad (12)$$

где  $\beta$  и  $\mu$  неявно задаются условиями (7).

Вариант понятия алгоритмической свободной энергии (2) имеет тот же вид, что и (4), где  $\omega^N$  – неупорядоченное микросостояние. Главный член алгоритмической свободной энергии  $FH^B$  аналогичен главному члену  $FH$  алгоритмической свободной энергии в бернуллиевском случае (9), он будет также называться свободной энергией. Для линейной энергии (3) минимум главного члена достигается при значениях частот (12), где  $\beta$  – фиксированный параметр; для простоты считаем, что  $\beta > 0$ .

Так как соотношения для энтропии рассматриваются с точностью до аддитивной константы, второй и третий (вычитаемые) члены в формуле (11) для алгоритмической энтропии в точке экстремума можно игнорировать в случае постоянных  $n$  и  $p_1, \dots, p_n$ . Точные оценки этих членов используются в равномерных оценках замечания 2.

Для задания модели Ферми – Дирака рассматривается подмножество  $\mathcal{F}^N$  множества  $B^N$ , состоящее из всех неупорядоченных наборов  $\omega^N = [\omega_1, \dots, \omega_N]$ , для которых при  $i, j = 1, \dots, N$  не существует  $\omega_i \neq \omega_j$  таких, что  $f(\omega_i) = f(\omega_j)$ . Другими словами, к  $\mathcal{F}^N$  относятся все неупорядоченные наборы размера  $N$ , у которых  $k_i = 0$  или  $k_i = 1$ . Линейный член алгоритмической энтропии определяется посредством *энтропии Ферми*

$$H^F = \sum_{i=1}^n p_i \rho^{-1} \log(p_i \rho^{-1}) - \nu_i \log \nu_i - (p_i \rho^{-1} - \nu_i) \log(p_i \rho^{-1} - \nu_i), \quad (13)$$

где  $\nu_i = N_i/N$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

В случае линейной энергии (3) максимум энтропии  $H_{\max}^F$  при ограничениях (7) достигается при значениях

$$\tilde{\nu}_i = \frac{p_i}{2^{\beta \epsilon_i + \mu} + \rho}, \quad (14)$$

где  $i = 1, \dots, n$ , а константы  $\beta$  и  $\mu$  неявно задаются этими условиями. Аналогичные соотношения имеют место и для свободной энергии.

### § 3. Теоремы о концентрации

Теорема Дженса – “феномен концентрации энтропии” – утверждает, что в случае линейной энергии (3) для произвольного  $\epsilon > 0$  доля в  $\mathcal{L}^N$  всех слов длины  $N$ , для которых  $|\nu_i - \tilde{\nu}_i| \geq \epsilon$  хотя бы для одного  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , не превосходит  $2^{-cN}$ , где константа  $c$  зависит от  $\epsilon$ . Здесь частоты  $\tilde{\nu}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , максимизирующие энтропию, определены по формулам (8).

Мы приводим варианты этой теоремы для неупорядоченных наборов и энтропии Бозе, а также аналогичные теоремы о концентрации для свободной энергии. Далее  $H$  обозначает энтропию Бозе.

Далее для простоты рассмотрим линейную энергию (3), однако результаты легко переносятся и на нелинейный случай с некоторыми оговорками на гладкость. Например, максимум (или минимум) должен существовать; если это локальный экстремум, то все рассуждения о концентрации микросостояний относятся к некоторой окрестности этого экстремума и т.д.

Пусть набор  $(N_1, \dots, N_n) \in \Pi_N^n$  удовлетворяет условию (5). Полагаем  $\nu_i = N_i/N$  и  $\delta\tilde{\nu}_i = \nu_i - \tilde{\nu}_i$ . Тогда легко проверить, что вариация энтропии в  $\mathcal{L}^N$  в точке максимума имеет вид

$$\begin{aligned} \delta H(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n) &= H(\nu_1, \dots, \nu_n) - H(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{(\delta\tilde{\nu}_i)^2}{\tilde{\nu}_i(1 + \rho\tilde{\nu}_i/p_i) \ln 4} + o((\delta\tilde{\nu}_i)^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (11) и (15) получаем представление сложности микросостояния, находящегося вблизи максимума энтропии<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} K(\omega^N) &= NH_{\max} - \sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N\tilde{\nu}_i)^2}{\tilde{N}_i(1 + \tilde{N}_i/g_i) \ln 4} - \frac{1}{2} n \log N - \\ &- d_{\Xi}(\omega^N) + K(N_1, \dots, N_n | N, K(N)) + K(N) + o(N(\delta\tilde{\nu}_i)^2) + O(1). \end{aligned} \quad (16)$$

Теорема Дженса о концентрации имеет место не только для бернуллиевских последовательностей, но и для моделей Бозе и Ферми.

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 3$ . Тогда для произвольного  $\epsilon > 0$  доля в  $\mathcal{L}^N$  всех неупорядоченных наборов размера  $N$ , для которых  $|\nu_i - \tilde{\nu}_i| \geq \epsilon$  хотя бы для одного  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , не превосходит  $2^{-cN}$ , где константа  $c$  зависит от  $\epsilon$ . Здесь частоты  $\tilde{\nu}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , максимизирующие энтропию, определены по формулам (12) или (14). В случае Ферми также надо заменить  $\mathcal{L}^N$  на  $\mathcal{F}^N \cap \mathcal{L}^N$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $|\nu_i - \tilde{\nu}_i| \geq \epsilon$  хотя бы для одного  $1 \leq i \leq n$ . Тогда из оценки (15) имеем

$$H \leq H_{\max} - c\epsilon^2,$$

<sup>8</sup> Это означает, что  $|\nu_i - \tilde{\nu}_i| < \epsilon$  при всех  $i$  для некоторого достаточно малого  $\epsilon > 0$ .

где  $H$  – энтропия Бозе (11) частотного распределения  $\nu_i$  микросостояния  $\omega^N$  (аналогично в случае модели Ферми),  $c$  – положительная константа. Как и в случае бернуллиевских последовательностей, нетрудно проверить, что число всех микросостояний размера  $N$  с энтропией  $H$  равно  $2^{NH+O(n \log N)}$ . С другой стороны, число всех макросостояний, удовлетворяющих ограничениям (5), имеет порядок  $O(N^{n-2})$ . Отсюда следует, что число всех микросостояний размера  $N$  с энтропией  $H < H_{\max} - \frac{1}{2}c\epsilon^2$  убывает экспоненциально по  $N$ . ▲

Поточечный вариант теоремы 1 для неупорядоченных наборов представляет

**Теорема 2.** Пусть  $n \geq 3$  и  $\sigma(N)$  – некоторая неубывающая целочисленная функция такая, что  $\sigma(N) = o(N)$ , а  $\omega^N \in \mathcal{L}^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , – некоторая последовательность неупорядоченных наборов, для которой выполнено  $K(\omega^N) \geq NH_{\max} - \sigma(N)$  для всех  $N$ , начиная с некоторого. Тогда для произвольного  $i = 1, \dots, n$  выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_i(\omega^N) = \tilde{\nu}_i,$$

где  $\nu_i(\omega^N)$  определены по (10), а значения  $\tilde{\nu}_i$  задаются равенствами (12).

**Доказательство.** Из представления (16) и условия теоремы получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{(\nu_i - \tilde{\nu}_i)^2}{\tilde{\nu}_i(1 + \rho\tilde{\nu}_i/p_i)} &= O((K(N_1, \dots, N_n|N, K(N)) + K(N) + \log N + \sigma(N))/N) = \\ &= O((n \log N + \sigma(N))/N). \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение теоремы. ▲

На основе теоремы о концентрации энтропии Джейнс [6] предложил некоторое неформальное объяснение, почему частоты энергетических уровней физической системы (типа идеального газа) при фиксированной энергии  $E(\omega^N) = E$  сильно не отклоняются от частот, при которых достигается максимум энтропии. Согласно Джейнсу микросостояния системы переходят друг в друга произвольным образом, т.е. рассматриваются все возможности перехода произвольного микросостояния  $\omega^N$  в новое микросостояние  $\omega'^N$ , ограниченные только законом сохранения энергии  $E(\omega^N) = E(\omega'^N) = E$ . Однако большая часть микросостояний  $\omega^N$  с энергией  $E(\omega^N) \approx E$  имеют частоту, которая отклоняется от гиббсовской не более чем на  $\epsilon$ , точнее, доля всех микросостояний  $\omega^N$  с энергией  $E$ , для которых это свойство нарушается, не превосходит  $2^{-c\epsilon^2 N}$ . Поэтому подавляющую часть времени система находится в микросостояниях, имеющих частоту энергетических состояний, близкую к гиббсовской (переходя к времени, здесь мы также неформально используем эргодическую гипотезу).

Теорема Джейнса о концентрации выполнена для изолированных систем, для которых выполнен закон сохранения энергии. Далее будут рассматриваться неизолированные системы изотермического типа, в которых некоторая внешняя система поддерживает постоянную температуру  $\theta = \beta^{-1}$ .

Согласно физическим представлениям, если путем возбуждения перевести систему из  $N$  слабо взаимодействующих частиц на некоторый достаточно высокий энергетический уровень<sup>9</sup>, то под действием сил типа сил трения энергетический спектр системы будет изменяться в сторону уменьшения энергии системы до ее абсолютного минимума. В этом случае действует некоторый нечетко сформулированный закон, который в [14] называется принципом “энергетической выгоды”. Достигнув минимума, система останется в нем. При этом энергетический спектр системы будет претерпевать незначительные по порядку флуктуации.

<sup>9</sup> Например, это происходит с электронами при возбуждении кристалла в лазере сильной подсветкой.

Легко показать, что свойство концентрации свободной энергии вокруг своего минимума при фиксированной температуре, аналогичное свойству концентрации энтропии, не выполнено: существуют неминимальные значения свободной энергии, в которых находится экспоненциально больше микросостояний, чем в точке минимума свободной энергии (это продемонстрировано в замечании 1). Свойство концентрации микросостояний будет выполнено, если включить нашу систему в большую систему – “тепловую ванну”, которая находится в равновесном состоянии при фиксированной внутренней энергии и обеспечивает заданную общую температуру всей системы.

В следующей теореме приводится некоторый аналог теоремы Джейнса для свободной энергии, на основании которого можно предлагать неформальные объяснения того, почему система не отклоняется от точки минимума свободной энергии. Мы покажем, что вокруг макросостояния, на котором достигается минимум свободной энергии, существует целый энергетический слой линейного по  $N$  размера, в котором доля микросостояний с частотами, отклоняющимися от частот, в которых достигается минимум свободной энергии, экспоненциально мала. Поскольку данный энергетический слой имеет ширину порядка  $O(N)$ , возмущения энергии  $E(\omega^N)$  системы размера  $o(N)$  не могут вывести за его пределы.

В теореме 6 мы покажем, что допустимые возмущения энергии  $E(\omega^N)$ , при которых алгоритмическая свободная энергия  $F(\omega^N)$  сохраняет свое минимальное значение  $F_{\min}$  с точностью до  $o(N)$ , имеют величину  $o(N)$ . В той же теореме будет показано, что если алгоритмическая свободная энергия сохраняет свое минимальное значение с точностью до константы, то соответствующие возмущения внутренней энергии имеют величину  $O(\sqrt{N})$ .

**Теорема 3.** *Существует такая положительная константа  $c$ , что для произвольного достаточно малого  $\epsilon$ , для произвольного  $\beta > 0$  и для всех  $N$  доля всех микросостояний  $\omega^N$ , удовлетворяющих*

$$E(\omega^N) - \tilde{E} < c\beta^{-1}\epsilon^2 N, \quad (17)$$

для которых к тому же выполнено  $|\nu_i - \tilde{\nu}_i| > \epsilon$  хотя бы для одного  $0 \leq i \leq n$ , не превышает  $2^{-c\epsilon^2 N}$ .

Здесь  $\nu_i = \nu_i(\omega^N)$  – частоты энергетических уровней системы, а  $E(\omega^N)$  – внутренняя энергия при данных значениях частот,  $\tilde{\nu}_i$  – частоты, в которых достигается минимум главного члена свободной энергии,  $\tilde{E}$  – значение внутренней энергии при этих значениях частот<sup>10</sup>.

**Доказательство.** Для произвольного микросостояния  $\omega^N$  имеем выражения для свободной энергии в бернуллиевском случае или случае Бозе

$$FH(\omega^N) = \beta E(\omega^N) - NH, \quad (18)$$

где  $\Xi = \Xi(\omega^N)$ . В точке минимума имеем

$$FH_{\min} = \beta \tilde{E} - N\tilde{H}. \quad (19)$$

Заметим, что для макросостояния  $\Xi = \Xi(\omega^N)$  имеем  $|\Xi| = 2^{NH+O(n \log N)}$ . Для макросостояния минимума свободной энергии также выполнено  $|\tilde{\Xi}| = 2^{N\tilde{H}+O(n \log N)}$ .

<sup>10</sup> Частоты  $\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n$  задаются формулой (8) в случае бернуллиевских последовательностей и формулами (12), (14) – в случаях Бозе и Ферми соответственно,  $E(\omega^N)$  имеет вид (3),  $\tilde{E} = N \sum_{i=1}^n \epsilon_i \tilde{\nu}_i$ .

Если  $(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n)$  – точка локального экстремума свободной энергии, то надо говорить о доле всех микросостояний (или соответствующих наборов  $(N_1, \dots, N_n)$ ), лежащих в некоторой окрестности точки  $(\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_n)$ . Зависимость правой части (17) от  $\beta$  будет более сложной.

Пользуясь гладкостью энтропии, для микросостояния  $\omega^N \in \Xi$  общего положения получаем

$$FH(\omega^N) - FH_{\min} = N \sum_{i=1}^n c_i (\nu_i - \tilde{\nu}_i)^2 + o(N), \quad (20)$$

где в линейном случае  $c_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \nu_i^2}(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Отсюда и из (18), (19) получаем

$$|\Xi| = |\tilde{\Xi}| 2^{\beta(E(\omega^N) - \bar{E}) - N \sum_{i=1}^n c_i (\nu_i - \tilde{\nu}_i)^2 + O(n \log N)}. \quad (21)$$

Пусть  $c = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} c_i$ . Общее число всех макросостояний имеет порядок  $O(N^n)$ , поэтому число всех микросостояний  $\omega^N$ , лежащих в энергетическом слое (17), для которых к тому же имеет место  $|\nu_i - \tilde{\nu}_i| > \epsilon$  хотя бы для одного  $1 \leq i \leq n$ , не превосходит  $2^{-Nc\epsilon^2}$  от числа всех микросостояний слоя.  $\blacktriangle$

Слой (17) становится тоньше с возрастанием  $\beta$ . В частности, это замечание можно проиллюстрировать на следующем примере: финансовая система, находящаяся в равновесии в условиях высокой покупательной способности денежной единицы, легче может быть выведена из равновесного состояния путем дополнительных финансовых вложений, чем такая же система в условиях низкой покупательной способности денежной единицы.

В произвольной точке  $(\bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_n)$  соотношение типа (21) имеет вид

$$|\Xi| = |\tilde{\Xi}| 2^{\beta N \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial \nu_i}(\nu_i - \bar{\nu}_i) - N \sum_{i=1}^n c_i (\nu_i - \bar{\nu}_i)^2 + O(n \log N)}. \quad (22)$$

В этом случае, хотя можно также выделить некоторый абстрактный слой с аналогичными свойствами, определяющая его первая сумма в экспоненте (22) уже не имеет смысла разности энергий. В этом случае нет никаких энергетических препятствий для выхода системы из макросостояния  $\Xi$  типа (22).

В замечании 1 продемонстрируем, что при любом значении параметра  $\beta > 0$  существуют макросостояния экспоненциально большего размера, чем макросостояние, на котором достигается минимум свободной энергии.

*Замечание 1.* Рассмотрим бернуллиевский случай с линейной энергией при  $n = 2$  и  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ . Тогда (21) превращается в

$$|\Xi| = |\tilde{\Xi}| 2^{N(\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\nu_2 - \tilde{\nu}_2) - (\nu_2 - \tilde{\nu}_2)^2)/(\tilde{\nu}_1 \tilde{\nu}_2 \ln 4) + O(n \log N)}, \quad (23)$$

где  $\tilde{\Xi}$  – некоторое макросостояние, в котором достигается минимум свободной энергии, а  $\Xi$  – произвольное макросостояние. Фиксируем достаточно малое  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , так чтобы при  $\nu_2 - \tilde{\nu}_2 \approx \delta$  мы могли бы игнорировать второй член в экспоненте (23). Пусть макросостояние  $\Xi_1$  соответствует частоте  $\nu_2$  такой, что  $\delta < \nu_2 - \tilde{\nu}_2 < 2\delta$ , а макросостояние  $\Xi_2$  соответствует частоте  $\nu'_2$  такой, что  $|\nu'_2 - \tilde{\nu}_2| < \delta/2$ . Тогда из (23) для подходящих констант  $c_1, c_2$ , где  $c_1 > c_2 > 0$ , имеем

$$|\Xi_1| > \tilde{\Xi} |2^{Nc_1\delta} > 2^{Nc_2\delta} |\Xi_2|. \quad (24)$$

Так как общее число макросостояний есть полином от  $N$ , суммирование по всем макросостояниям типа  $\Xi_2$  не нарушит неравенства (24) с точностью до величины  $O(n \log N)$  в экспоненте. В результате получаем

$$\sum |\Xi_2| < 2^{-c_3 N \delta} |\Xi_1|,$$

где  $c_3$  – положительная константа, а сумма берется по всем макросостояниям типа  $\Xi_2$ . Таким образом, число всех микросостояний, соответствующих частотам, от-

личающимся от  $\tilde{\nu}_2$  на  $\delta/2$ , экспоненциально меньше, чем размер одного макросостояния, соответствующего частоте  $\nu_2$  такой, что  $\delta < \nu_2 - \tilde{\nu}_2 < 2\delta$ .

Приведем поточечный вариант теоремы 3, сформулированный с использованием алгоритмической энтропии.

**Теорема 4.** Пусть  $\beta > 0$ . Тогда для любой последовательности микросостояний  $\omega^N$ ,  $N = 1, \dots$ , таких что

$$F(\omega^N) - F_{\min} = o(N), \quad (25)$$

$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu_i(\omega^N) = \tilde{\nu}_i$  для произвольного  $i = 1, \dots, n$ .

Для выполнения условия (25), в частности, достаточно, чтобы

$$K(\omega^N) - N\tilde{H} = o(N),$$

$$E(\omega^N) - \tilde{E} = o(N),$$

где  $\nu_i(\omega^N)$  и  $\tilde{\nu}_i(\omega^N)$  определяются так же, как в теореме 3, а  $\tilde{H} = H(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n)$  – значение энтропии (соответствующей статистической модели – бернуллиевской, Бозе или Ферми) в точке минимума свободной энергии.

Проверка этого утверждения аналогична проверке утверждения теоремы 2.

#### § 4. Флуктуации в равновесных состояниях

Условия, при которых достигается максимум алгоритмической энтропии внутри слоя (5), указаны в следующей теореме. Во всех теоремах далее (но не в замечании 2) число энергетических уровней  $n$  и обратная температура  $\beta > 0$  считаются константами; соответственно, они входят во все константы типа  $O(1)$ .

**Теорема 5.** Максимальное значение алгоритмической энтропии неупорядоченного микросостояния задается формулой<sup>11</sup>

$$\max_{\omega^N \in \mathcal{E}^N} K(\omega^N) = NH_{\max}^B - \log N + K(N) + O(1),$$

где  $H_{\max}^B$  – максимальное значение энтропии Бозе при ограничениях (7).

Кроме этого, для произвольного положительного  $t$  для любой последовательности микросостояний  $\omega^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , такой что  $K(\omega^N) \geq \max_{\omega^N \in \mathcal{E}^N} K(\omega^N) - t$ , имеем

$$d_{\Xi}(\omega^N) = O(1), \quad (26)$$

$$K(\Xi(\omega^N)|N, K(N)) = \frac{1}{2}(n-2)\log N + O(1). \quad (27)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6 (см. ниже).

Следующая теорема описывает условия, при которых достигается минимальное значение алгоритмической свободной энергии. Мы показываем, что минимальное значение алгоритмической свободной энергии равно, с точностью до членов логарифмического порядка, минимальному значению классической свободной энергии. Из этого равенства мы получим в качестве следствия точную оценку на размеры флуктуаций внутренней энергии, а также чисел заполнения. В частности, будет определен размер возмущений внутренней энергии, при которых алгоритмическая свободная энергия асимптотически не отклоняется от своего минимального значения. Более того, минимальное значение алгоритмической свободной энергии необходимым образом достигается на микросостоянии  $\omega^N$ , случайном внутри случайного

<sup>11</sup> Об оценке величины  $K(N)$  см. Приложение.

макросостояния. Оценка размера флуктуаций внутренней энергии в точке равновесия оказалась возможной благодаря использованию колмогоровской сложности в определении алгоритмической свободной энергии.

Рассмотрим версию этой теоремы для модели Бозе неупорядоченных наборов и для энергии линейного типа (3). Для энергии нелинейного вида рассмотрение аналогично.

Пусть минимальное значение свободной энергии  $\widetilde{FH} = \widetilde{FH}^B$  достигается при частотах  $(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n)$ , задаваемых формулами (12) в случае Бозе.

Определим для произвольных целых положительных  $N$  и  $m$  множество всех микросостояний, на которых алгоритмическая свободная энергия отклоняется от своего минимума не более чем на величину  $m$

$$\mathcal{M}_N^m = \{\alpha^N : F(\alpha^N) \leq \min_{\omega^N} F^B(\omega^N) + m\}.$$

**Теорема 6.** Пусть  $\beta > 0$  и  $n$  фиксированы. Тогда для произвольного положительного  $m$  существуют такие положительные константы  $c_1 < c_2$ , что для любой последовательности микросостояний  $\omega^N \in \mathcal{M}_N^m$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,

$$c_1 \sqrt{N} \leq |E(\omega^N) - \tilde{E}| \leq c_2 \sqrt{N}, \quad (28)$$

$$d_{\Xi}(\omega^N) = O(1), \quad (29)$$

$$K(\Xi(\omega^N)|N, K(N)) = \frac{1}{2}(n-1) \log N + O(1). \quad (30)$$

Минимальное значение алгоритмической свободной энергии для пространства неупорядоченных наборов задается формулой

$$\min_{\omega^N} F^B(\omega^N) = \widetilde{FH}^B + \frac{1}{2} \log N - K(N) + O(1), \quad (31)$$

где  $\widetilde{FH}^B = N \left( \beta \sum_{i=1}^n \epsilon_i \tilde{\nu}_i - \tilde{H}^B \right)$  – значение свободной энергии в точке своего минимума (12),  $\tilde{H}^B$  – значение энтропии Бозе в этой точке. Все константы зависят от  $\beta$  и  $n$ .

Пусть теперь  $m = m(N)$  – некоторая вычислимая функция от  $N$ , причем  $m(N) = o(N)$ . Тогда при  $\omega^N \in \mathcal{M}_N^{m(N)}$  выполняется<sup>12</sup>  $E(\omega^N) - \tilde{E} = o(N)$ .

**Доказательство.** Докажем, что в (31) имеет место неравенство  $\leq$ . Симплекс  $\Pi_N^n$  проходит через центр эллипсоида

$$\sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N\tilde{\nu}_i)^2}{N\tilde{\nu}_i(1 + \rho\tilde{\nu}_i/p_i)} \leq 1, \quad (32)$$

если рассматривать их в  $n$ -мерном арифметическом пространстве. Так как объем эллипсоида пропорционален произведению длин его полуосей, число целочисленных наборов  $(N_1, \dots, N_n)$ , лежащих в пересечении эллипсоида (32) с симплексом  $\Pi_N^n$ , пропорционально  $N^{\frac{1}{2}(n-1)}$ . Легко видеть, что для произвольного целочисленного набора  $(N_1, \dots, N_n)$  общего положения, лежащего в этом пересечении, выполнено

$$K(N_1, \dots, N_n|N, K(N)) = \frac{1}{2}(n-1) \log N + O(1).$$

<sup>12</sup> Таким образом, даже при отклонениях алгоритмической свободной энергии  $F(\omega^N)$  от своего минимума на величину порядка  $m(N) = o(N)$  возмущения внутренней энергии  $E(\omega^N)$  также имеют порядок  $o(N)$ , и согласно теоремам 3 и 4 не выводят систему из “защитного” слоя.

Пусть  $\Xi$  – соответствующее макросостояние, определяемое набором  $(N_1, \dots, N_n)$ . Тогда для любого  $\omega^N \in \Xi$ , для которого  $d_{\Xi}(\omega^N) = O(1)$ , будет выполнено

$$\begin{aligned} \min_{\alpha^N} F(\alpha^N) &\leq F(\omega^N) = \widetilde{F}\widetilde{H}^B + \frac{1}{2}n \log N - K(N_1, \dots, N_n|N, K(N)) - \\ &- K(N) + O(1) = \widetilde{F}\widetilde{H}^B - K(N) + \frac{1}{2} \log N + O(1). \end{aligned} \quad (33)$$

Докажем теперь неравенство  $\geq$  в (30). Используя разложение (15), теперь уже для произвольного микросостояния  $\omega^N$  и  $\Xi = \Xi(\omega^N)$  получаем

$$\begin{aligned} F(\omega^N) &= \sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N\tilde{\nu}_i)^2}{N\tilde{\nu}_i(1 + \rho\tilde{\nu}_i/p_i) \ln 4} + o(N(\delta\tilde{\nu}_i)^2) + N(\beta \sum_{i=1}^n \epsilon_i \tilde{\nu}_i - \tilde{H}) + \\ &+ d_{\Xi}(\omega^N) + \frac{1}{2}n \log N - K(\Xi|N, K(N)) - K(N) + O(1). \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть теперь  $\omega^N \in \mathcal{M}_N^m$ . Тогда из (33) следует, что

$$F(\omega^N) \leq \widetilde{F}\widetilde{H}^B + \frac{1}{2} \log N - K(N) + O(1). \quad (35)$$

Пусть  $\Xi = \Xi(\omega^N)$ . Из (34) и (35) для произвольного  $\epsilon > 0$  получаем

$$(1 - \epsilon) \sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N\tilde{\nu}_i)^2}{N\tilde{\nu}_i(1 + \rho\tilde{\nu}_i/p_i) \ln 4} \leq K(N_1, \dots, N_n|N, K(N)) - \frac{1}{2}(n-1) \log N + O(1). \quad (36)$$

Допустим, что для произвольного целого неотрицательного  $L$  выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N\tilde{\nu}_i)^2}{N\tilde{\nu}_i(1 + \rho\tilde{\nu}_i/p_i) \ln 4} \leq L + O(1). \quad (37)$$

Так как каждое число  $\tilde{\nu}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , вычислимо, можно по  $i$  эффективно определить интервал целых чисел, в котором находится значение  $N_i$ . Сложность числа  $N_i$  определяется длиной этого интервала (а также числом  $i \leq n$ ):

$$K(N_i|L, N) \leq \frac{1}{2} \log N + \frac{1}{2} \log L + O(1). \quad (38)$$

В целом, учитывая ограничения на наборы  $(N_1, \dots, N_n)$ , получаем

$$K(N_1, \dots, N_n|L, N) - \frac{1}{2}(n-1) \log N \leq \frac{1}{2}(n-1) \log L + O(1). \quad (39)$$

Используя стандартные соотношения  $K(x|L) \geq K(x) - K(L) - O(1)$  и  $K(x|M) \leq K(x) + O(1)$ , получим

$$K(N_1, \dots, N_n|N, K(N)) - \frac{1}{2}(n-1) \log N \leq \frac{1}{2}(n+1) \log L + O(1). \quad (40)$$

Так как (37) выполнено при значении  $L$ , равном максимуму целой части числа

$$K(N_1, \dots, N_n|N, K(N)) - \frac{1}{2}(n-1) \log N + O(1),$$

умноженного на  $(1 - \epsilon)^{-1}$ , и единицы, из (40) получаем

$$L \leq \frac{1}{2}n \log L + O(1). \quad (41)$$

Отсюда получаем, что  $L = O(1)$ . Поэтому

$$\sum_{i=1}^n \frac{(N_i - N\tilde{\nu}_i)^2}{N\tilde{\nu}_i(1 + \rho\tilde{\nu}_i/p_i)} = O(1), \quad d_{\Xi}(\omega^N) = O(1), \quad (42)$$

а также

$$K(N_1, \dots, N_n | N, K(N)) - \frac{1}{2}(n-1) \log N = O(1). \quad (43)$$

Из (34) и (43) получаем

$$F(\omega^N) \geq \widetilde{FH}^B + \frac{1}{2} \log N - K(N) + O(1). \quad (44)$$

Таким образом, соотношение (31) доказано.

Из (31) и (34) легко следуют соотношения (29) и (30).

Правое неравенство (28) следует из того, что все целочисленные наборы, на которых с точностью до константы достигается минимум свободной энергии, лежат в эллипсоиде (42). Для доказательства левого неравенства (28) заметим, что общее число целочисленных наборов  $(N_1, \dots, N_n)$ , которые являются элементами общего положения внутри эллипсоида (42), равно  $O(N^{\frac{1}{2}(n-1)})$ . Так как сечение эллипсоида гиперплоскостью также является эллипсоидом, число наборов общего положения, лежащих в слое

$$\left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i N_i - \tilde{E} \right| \leq D, \quad (45)$$

где  $D$  – произвольное положительное целое число, имеет порядок  $O(N^{\frac{1}{2}(n-2)}D)$ . Отсюда, учитывая свойство (30), получаем, что число  $D$  может иметь порядок не более  $O(N^{1/2})$ , а наборы  $(N_1, \dots, N_n)$  сложности  $\frac{1}{2}(n-1) \log N + O(1)$  должны лежать вне слоя (45) ширины порядка  $O(N^{1/2})$ .

Пусть теперь  $m = m(N)$  – некоторая вычислимая функция от  $N$ . Если в оценках теоремы 6 учитывать параметр  $m$  отдельно, получим, что при  $F(\omega^N) \leq \min_{\alpha^N} F(\alpha^N) + m(N)$  для некоторой константы  $c > 0$  выполняется  $|E(\omega^N) - \tilde{E}| \leq c\sqrt{m(N)N}$ . Таким образом, при отклонениях алгоритмической свободной энергии  $F(\omega^N)$  от своего минимума на величину порядка  $m(N) = o(N)$  возмущения внутренней энергии  $E(\omega^N)$  также имеют порядок  $o(N)$ . ▲

Аналогичные оценки имеют место для бернуллиевских последовательностей.

*Теорема 7. Максимальное значение алгоритмической энтропии бернуллиевской последовательности при ограничениях (5) задается формулой*

$$\max_{\omega^N \in \mathcal{L}^N} K(\omega^N) = NH_{\max} - \frac{1}{2} \log N + K(N) + O(1),$$

где  $H_{\max}$  – максимальное значение энтропии Шеннона при ограничениях (7).

Кроме того, для произвольного положительного  $m$  для любой последовательности микросостояний  $\omega^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , такой что  $K(\omega^N) \geq \max_{\omega^N \in \mathcal{L}^N} K(\omega^N) - m$ , выполнены соотношения (26), (27).

Теорема 8. Минимальное значение алгоритмической свободной энергии для бернуллиевских последовательностей задается формулой

$$\min_{\omega^N} F(\omega^N) = -N\beta^{-1} \log \left( \sum_{j=1}^n g_j 2^{-\beta \epsilon_j} \right) - K(N) + O(1). \quad (46)$$

Минимум в (46) достигается на последовательности  $\omega^N$ , для которой выполнены соотношения (28), (29) и (30).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6 и поэтому здесь не приводится (см. также вычисления в [13]).

Замечание 2. В теоремах 6, 7 и 8 константы зависят от  $n$  и  $p_1, \dots, p_n$ . Приведем один аналог (31), в котором константы не зависят от этих параметров<sup>13</sup>.

$$\begin{aligned} \widetilde{FH}^B - K(N) - \left( \frac{1}{2} + \Delta \right) n \log \log n + O(n/N) + O(1) &\leq \min_{\omega^N} F^B(\omega^N) \leq \\ &\leq \widetilde{FH}^B + \frac{1}{2} \log N - K(N) + \frac{1}{2} n \log \frac{n}{2\pi e} + O(n/N) + O(1), \end{aligned}$$

где  $\Delta$  – произвольное положительное число. Эту оценку можно получить, если учесть, что второй и третий (вычитаемые) члены в формуле (11) для алгоритмической энтропии в точке экстремума отличаются от поправки к сложности (30), которая появляется при более точной оценке объема  $n$ -мерного эллипсоида (32) на величину  $O(n/N)$ .

Аналогичные равномерные оценки имеют место для моделей Больцмана и Ферми.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Подробно о колмогоровской теории сложности и стохастичности конечных объектов см. обзоры [15, 16] и монографию [3]. Колмогоровская сложность (или энтропия) определена для произвольного конструктивного объекта. Этим она отличается от энтропии Шеннона, которая требует для своего введения наличия вероятностной модели. Определение сложности использует понятие алгоритма. Алгоритмы будут перерабатывать конструктивные объекты, под которыми обычно понимаются слова в конечных алфавитах. Все слова в конечном алфавите можно алгоритмически эффективно занумеровать натуральными числами.

Пусть  $F(p, y)$  – произвольная вычислимая функция, принимающая значения в множестве всех слов в некотором алфавите  $B$ . Здесь  $p$  – конечное двоичное слово,  $y$  – слово (возможно, в другом, отличном от  $B$ , алфавите). Предполагается также, что выполнено требование: если  $F(p, y)$  и  $F(p', y)$  определены, то каждое из слов  $p$  и  $p'$  не может быть продолжением другого. Мера сложности слова  $x$  при известном  $y$  определяется как

$$K_F(x|y) = \min\{l(p) \mid F(p, y) = x\},$$

где  $l(p)$  – длина двоичного слова  $p$ , которое является кодом слова  $x$  при условии  $y$  (полагаем  $\min \emptyset = \infty$ ). Способ декодирования  $F(p, y)$  называется оптимальным, если для любого другого способа декодирования  $F'(p, y)$  выполнено  $K_F(x|y) \leq K_{F'}(x|y) + O(1)$ , где константа  $O(1)$  не зависит от  $x$  и  $y$  (но зависит от функции  $F'$ )<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> Заметим, что для физических систем имеет смысл рассматривать неограниченное  $n$ , для финансовых приложений достаточно считать  $n$  константой.

<sup>14</sup> Выражение  $f(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_n) + O(1)$  означает, что найдется константа  $c$  такая, что неравенство  $f(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_n) + c$  выполнено для всех значений  $x_1, \dots, x_n$ . Выражение  $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) + O(1)$  означает, что  $f(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_n) + O(1)$  и  $g(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_n) + O(1)$ .

Оптимальный способ декодирования существует [3, 17]. Любые два оптимальных способа декодирования определяют меры сложности, отличающиеся на константу. Один из таких оптимальных способов декодирования фиксируется, соответствующая мера сложности обозначается  $K(x|y)$  и называется (условной) колмогоровской сложностью  $x$  относительно  $y$ . Безусловная сложность слова  $x$  определяется как  $K(x) = K(x|\Lambda)$ , где  $\Lambda$  – пустая последовательность.

Для задания произвольного элемента  $x$  конечного множества  $D$  достаточно знать  $D$ , например, в виде списка элементов, и порядковый номер  $x$  в этом списке. Поэтому

$$K(x|D) \leq \log |D| + O(1).$$

Более того, для произвольного  $c > 0$  число всех  $x \in D$ , для которых

$$K(x|D) < \log |D| - c, \tag{П.1}$$

не превосходит  $2^{-c}|D|$ , т.е. большинство элементов множества  $D$  имеют условную колмогоровскую сложность, близкую к максимальной, иными словами, являются элементами множества  $D$  *общего положения*. А.Н.Колмогоров [9, 18, 16] определил стохастичность без понятия вероятностного распределения на основе принципа максимальной сложности конструктивного объекта в простой (по сложности) структуре: элемент  $x$  конечного множества слов  $D$  называется случайным, если  $K(x|D) \approx \log |D|$ . Точнее, рассматривается разность

$$d(x|D) = \log |D| - K(x|D),$$

которая называется дефектом алгоритмической случайности элемента  $x$  конечного множества  $D$ . Обозначим через  $\text{Rand}_m(D) = \{x \in D : d(x|D) \leq m\}$  множество всех  $m$ -случайных элементов  $D$ . Из оценки числа элементов, удовлетворяющих (П.1), следует, что  $|\text{Rand}_m(D)| \geq (1 - 2^{-m})|D|$ . Если  $x$  – элемент множества конструктивных объектов  $X$ , а  $y$  – элемент множества конструктивных объектов  $Y$ , то пара  $(x, y)$  рассматривается как элемент множества конструктивных объектов  $X \times Y$  (декартова произведения  $X$  и  $Y$ ). В дальнейшем будет использоваться следующее фундаментальное свойство алгоритмической сложности:

$$K(x, y) = K(y) + K(x|y, K(y)) + O(1), \tag{П.2}$$

где  $x$  и  $y$  – произвольные конструктивные объекты. (Полный вывод этого неравенства см. в [3, 17].)

Рассмотрим также колмогоровскую сложность натуральных чисел. Из свойств префиксного кодирования легко получить, что для произвольного  $\epsilon > 0$  найдется константа  $c > 0$  такая, что выполнено

$$K(N) \leq \log N + (1 + \epsilon) \log \log N + c$$

для всех натуральных  $N$ . Покажем, что  $\log N - O(1)$  является нижней границей сложности для “большинства” натуральных чисел  $N$ . Определим

$$B_L^m = \{N : N \geq L, \quad K(N) \geq \log N - m\},$$

где  $m, L = 0, 1, \dots$  Легко видеть, что  $B_{L+1}^m \subseteq B_L^m$  и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{|B_L^m \cap \{L, \dots, L + N - 1\}|}{N} = 1$$

для всех  $m$  и  $L$ . Действительно, так как число всех программ длины, меньшей  $\log N' - m$ , где  $N' \leq L + N - 1$ , не превосходит  $2^{-m}(L + N - 1)$ , получим

$$\frac{|B_L^m \cap \{L, \dots, L + N - 1\}|}{N} \geq 1 - 2^{-m+1}$$

для всех достаточно больших  $N$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jaynes E.T.* Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1989.
2. *Cover T.M., Thomas J.A.* Elements of Information Theory. New York: Wiley, 1991.
3. *Li M., Vitányi P.* An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications. New York: Springer-Verlag, 1997.
4. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. М.: Сов. радио, 1975.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976.
6. *Jaynes E.T.* How Should We Use Entropy in Economics? (Some half-baked ideas in need of criticism). Unpublished manuscript, <http://bayes.wustl.edu/et/etj/articles/entropy.in.economics.pdf>
7. *Маслов В.П.* Интегральные уравнения и фазовые переходы в вероятностных играх. Аналогия со статистической физикой // Теория вероятностей и ее применения. 2003. Т. 48. № 2. С. 403–411.
8. *Колмогоров А.Н.* Три подхода к определению понятия “количество информации” // Пробл. передачи информ. 1965. Т. 1. № 1. С. 3–11.
9. *Колмогоров А.Н.* К логическим основам теории информации и теории вероятностей // Пробл. передачи информ. 1969. Т. 5. № 3. С. 3–7.
10. *Zurek W.H.* Algorithmic Randomness and Physical Entropy // Physical Review A. 1989. V. 40. № 8. P. 4731–4751.
11. *Rissanen J.* Encyclopedia of Statistical Sciences. V. 5. New York: Wiley, 1985.
12. *Gács P., Tromp J., Vitányi P.* Algorithmic Statistics // IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. V. 20. № 5. P. 1–21.
13. *Вьюгин В.В., Маслов В.П.* Об экстремальных соотношениях между аддитивными функциями потерь и колмогоровской сложностью // Пробл. передачи информ. 2003. Т. 39. № 4. С. 71–87.
14. *Боголюбов Н.Н.* Энергетические уровни неидеального бозе-эйнштейновского газа // Вестн. МГУ. 1947. Т. 7. С. 43–56.
15. *Успенский В.А., Семенов А.Л., Шень А.Х.* Может ли (индивидуальная) последовательность нулей и единиц быть случайной? // УМН. 1990. Т. 45. № 1. С. 105–162.
16. *Колмогоров А.Н., Успенский В.А.* Алгоритмы и случайность // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32. № 3. С. 425–455.
17. *V'yugin V.V.* Algorithmic Complexity and Stochastic Properties of Finite Binary Sequences // Computer J. 1999. V. 42. № 4. P. 294–317.
18. *Колмогоров А.Н.* Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей // УМН. 1983. Т. 38. № 4. С. 27–36.

*Вьюгин Владимир Вячеславович*  
 Институт проблем передачи информации РАН  
 vuyugin@iitp.ru  
*Маслов Виктор Павлович*  
 Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
 физический факультет  
 v.p.maslov@mail.ru

Поступила в редакцию  
 14.09.2004  
 После переработки  
 01.03.2005