ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 343, № 1, с. 25 - 27

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-50

ГРУБОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ОТНОШЕНИЮ К ГИСТЕРЕЗИСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

© 1995 г. **Ф. Даймонд (Австралия), П. Клоеден (Австралия), В. С. Козякин, М. А. Красносельский, А. В. Покровский**

Представлено академиком Я.З. Цыпкиным 10.02.94 г.

Поступило 14.03.94 г.

Рассмотрим гладкое отображение $f: \mathfrak{R}^d \to \mathfrak{R}^d$. Системы вида

$$x_n = f(x_{n-1}) \qquad (1)$$

являются классическим средством описания динамики систем управления, объектов технического, механического и др. происхождения. Обычно уравнения (1) описывают динамику соответствующих реальных систем лишь приближенно, и возникает проблема их грубости по отношению к возмущениям различной природы. Согласно классическим результатам (см., например, [1]), достаточно гладкие системы (1) сохраняют многие структурные свойства при г л а д к и х (малых в метрике C^1) возмущениях. Имеются, однако, классы негладких возмущений, представляющих значительный интерес. К ним относятся прежде всего различного рода аппроксимации и интерполяции, временны́е и пространственные дискретизации и т.п. Для их анализа в статье используется техника, недавно предложенная авторами для приближенного исследования хаотических динамических систем.

1. Ниже основным объектом анализа является класс операторных возмущений систем (1), естественно возникающий при описании динамики систем со слабыми гистерезисными нелинейностями [2]. Гистерезисные нелинейности трактуются в [2] и ниже как непрерывные, но принципиально негладкие динамические системы **W**, часто с бесконечномерным пространством $\Omega = \Omega(\mathbf{W})$ внутренних состояний ω. Этот класс содержит такие нелинейности, как люфт, упор, модели Ишлинского–Бесселинга, Прейзаха–Гилтая и др. (см. [2]). В таких ситуациях естественное фазовое пространство возмущенной системы (1) – это прямое произведение $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}^d \times \Omega$. Таким образом, динамика возмущенной системы описывается соотношениями

$$(x_n, \omega_n) = S(x_{n-1}, \omega_{n-1}) =$$
$$= (\Phi(x_{n-1}, \omega_{n-1}), \Gamma(x_{n-1}, \omega_{n-1})), \qquad (2)$$

где отображения $\Phi: \mathfrak{R}^d \times \Omega \to \mathfrak{R}^d$ и $\Gamma: \mathfrak{R}^d \times \Omega \to \Omega$ непрерывны.

Возникает общая проблема о сходстве фазовых портретов гладкой функциональной динамической системы (1) и операторной динамической системы (2). Подчеркнем, что система (1) не является, вообще говоря, структурно-устойчивой в каком-либо естественном смысле по отношению к рассматриваемому классу возмущений. Анализ структурной устойчивости систем с асимптотически устойчивым состоянием равновесия или орбитально асимптотически устойчивыми автоколебаниями содержится в [3, 4]. Следующий естественный шаг – исследование операторных возмущений в областях гиперболичности исходной системы (например, в окрестности гиперболического состояния равновесия). Желательно, чтобы оценки близости траекторий двух систем не зависели явно от длины временно́го интервала, а были равномерными до тех пор, пока траектории обеих систем находятся в соответствующей области (предполагается, что в этой области могут содержаться сколь угодно длинные куски траекторий).

Оценка близости – основная тема статьи. Общие утверждения сформулированы в разделе 2. Как оказалось, любая принадлежащая области гиперболичности траектория системы (1) может быть отслежена некоторой траекторией при любом достаточно малом операторном возмущении. Разделы 3 и 4 содержат примеры применения общих результатов к исследованию дифференциальных уравнений с конкретными гистерезисными нелинейностями. Эти примеры идейно близки к некоторым результатам из [5].

2. Введем в с п о м о г а т е л ь н ы е о п р е д е л е н и я и о б о з н а ч е н и я. Будем считать фиксированным некоторое множество $\mathscr{X} \subseteq \mathfrak{R}^d$.

Университет Квинсленда, Брисбен, Австралия
Университет Дикин, Джилонг, Австралия
Институт проблем передачи информации Российской Академии наук, Москва

Расстояние между системами (1) и (2) (на множестве $\mathscr{X}$) будем характеризовать величиной

$$d(S, f) = \sup_{x \in \mathscr{X},\, \omega \in \Omega} |\Phi(x, \omega) - f(x)|.$$

Конечный набор $\mathbf{x} = x_0, x_1, \ldots, x_N$ называется конечной траекторией (длины N) системы f, если $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Для любого компактного множества $\mathscr{X}_* \subset \mathscr{X}$ обозначим: $\mathbf{Tr}(f, \mathscr{X}_*)$ – совокупность траекторий системы (1), лежащих в множестве $\mathscr{X}_*$. Аналогично, для каждого $\omega_0^* \in \Omega$ обозначим: $\mathbf{Tr}(S, \omega_0^*)$ – совокупность конечных траекторий

$$(x_0, \omega_0),\ (x_1, \omega_1),\ \ldots,\ (x_N, \omega_N) \tag{3}$$

системы (2), удовлетворяющих равенству $\omega_0 = \omega_0^*$.

Пусть α – положительное число, а $\mathscr{X}_* \subseteq \mathscr{X}$ – компактное множество. Систему (1) назовем α-грубой в $\mathscr{X}_*$ по отношению к непрерывным операторным возмущениям, если существует такое $\varepsilon^* > 0$, что для каждой данной траектории $\mathbf{x}^* = x_0^*, x_1^*, \ldots, x_N^* \in \mathbf{Tr}(f, \mathscr{X}_*)$, каждой непрерывной системы (2), удовлетворяющей $d(S, f) < \varepsilon^*$, и каждого $\omega^* \in \Omega$ существует траектория (3) из множества $\mathbf{Tr}(S, \omega^*)$, удовлетворяющая условию $\|x_n - x_n^*\| \le \alpha d(S, f)$ при $n = 0, 1, \ldots, N$. Последнее определение означает, что каждая траектория системы (1) может быть отслежена с точностью, не зависящей от длины траектории, первой компонентой некоторой траектории возмущенной системы (2).

Производную отображения f в точке $x \in \mathfrak{R}^d$ обозначим Df_x. Назовем четверку неотрицательных чисел $\mathbf{s} = (\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$ дихотомичной, если

$$\lambda_s < 1 < \lambda_u, \tag{4}$$

$$(1 - \lambda_s)(\lambda_u - 1) > \mu_s\mu_u. \tag{5}$$

Для любых удовлетворяющих неравенствам (4) чисел λ_s, λ_u четверка $\mathbf{s}$ дихотомична, если произведение $\mu_s\mu_u$ достаточно мало. Для данной дихотомичной четверки $\mathbf{s}$ и положительного γ отображение f назовем $(\mathbf{s}, \gamma)$-полугиперболическим на множестве $\mathscr{X}_*$, если каждому $x \in \mathscr{X}_*$ соответствует такая декомпозиция $T_x\mathfrak{R}^d = E_x^s \oplus E_x^u$ с соответствующими проекторами P_x^s и P_x^u, что

$$\left\| P_{f(x)}^s Df_x u \right\| \le \lambda_s \| u \|, \quad u \in E_x^s,$$

$$\left\| P_{f(x)}^s Df_x v \right\| \le \mu_s \| v \|, \quad v \in E_x^u,$$

$$\left\| P_{f(x)}^u Df_x v \right\| \ge \lambda_u \| v \|, \quad v \in E_x^u,$$

$$\left\| P_{f(x)}^u Df_x u \right\| \le \mu_u \| u \|, \quad u \in E_x^s,$$

$$\left\| P_x^s \right\|, \left\| P_x^u \right\| \le \gamma.$$

Теорема 1. *Пусть отображение f является $(\mathbf{s}, \gamma)$-полугиперболическим в $\mathscr{X}_*$. Тогда система* (1) *при каждом*

$$\alpha > \alpha_*(\mathbf{s}, \gamma) = \frac{\lambda_u - \lambda_s + \mu_s + \mu_u}{(1 - \lambda_s)(\lambda_u - 1) - \mu_s\mu_u}\gamma$$

является α-грубой в $\mathscr{X}_*$ по отношению к непрерывным операторным возмущениям.

3. Напомним, что нелинейность упор размаха h – это преобразователь U_h с пространством состояний $[-h, h]$, скалярными входами $u(t)$ и скалярными выходами $\omega(t)$ [2]. При гладком входе $u(t)$, $t \ge 0$, и начальном состоянии $\omega_0 \in [-h, h]$ соответствующий выход $\omega(t) = (U_h[\omega_0]u)(t)$, $t \ge 0$, определяется как единственное абсолютно непрерывное решение задачи

$$\omega' = q(\omega, u'(t)), \quad \omega(0) = \omega_0,$$

где

$$q(\omega, u) = \begin{cases} \min\{u, 0\} & \text{при } \omega \ge h, \\ u & \text{при } |\omega| < h, \\ \max\{u, 0\} & \text{при } \omega \le -h. \end{cases}$$

Рассмотрим систему, описываемую соотношениями

$$x' = F(x, \omega), \quad \omega(t) = (U_h[\omega_0](c, x))(t). \tag{6}$$

Здесь $x \in \mathfrak{R}^d$; $h > 0$ и $\omega \in [-h, h]$ играют роль параметров; c – фиксированный вектор из $\mathfrak{R}^d$; U – преобразователь упор размаха h (см. [2]). Такие уравнения возникают при описании механических систем с упругопластическими элементами Прагера, технических систем с люфтами и упорами, многих систем автоматического регулирования и др. Предположим, что функция F удовлетворяет глобальному условию Липшица. Тогда уравнение (6) имеет единственное решение при каждом начальном условии $x(0) = x_0$ и каждом начальном состоянии ω_0 гистерезисной нелинейности U. Рассмотрим оператор сдвига $\mathrm{Sh}_h(x_0, \omega_0)$ за единичное время по траекториям уравнения (6) и оператор сдвига $\mathrm{Sh}_0(x_0)$ также за единичное время по траекториям уравнения

$$x' = g(x). \tag{7}$$

Эти операторы сдвига определяют динамические системы S и f, где пространство состояний системы S – это прямое произведение $\mathfrak{R}^d \times [-h, h]$.

Пусть $g(x) = F(x, 0)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию $g(0) = 0$, а матрица $Dg(0)$ не имеет собственных чисел на мнимой оси. Тогда система f полугиперболична в некотором замкнутом шаре $\mathscr{B}$ с центром в нуле. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Существуют такие* $\alpha > 0$ *и* $h_0 > 0$, *что для каждой траектории* $x(t) \in \mathcal{B}$, $0 \le \le t < t_* \le \infty$, *уравнения* (7) *и каждого* $h \le h_0$ *найдется траектория* $(x_h(t), \omega_h(t))$, $0 \le t < t_*$, *уравнения* (6), *удовлетворяющая оценке* $|x(t) - x_h(t)| \le \alpha h$ *при* $0 \le t < t_*$.

Следствие 1. *Существуют такие* $\alpha > 0$ *и* $h_0 > 0$, *что для любого* $x_0 \in \mathcal{B}$, *принадлежащего устойчивому многообразию уравнения* (7), *найдется траектория* $(x_h(t), \omega_h(t))$, $t \ge 0$, *уравнения* (6), *удовлетворяющая оценке* $|x_0(t) - x_h(t)| \le \alpha h$ *при* $t > 0$.

Следствие 1 – это утверждение об устойчивости центрального многообразия по отношению к гистерезисным возмущениям изучаемой системы.

Аналоги теоремы 2 и ее следствия верны и для систем с такими нелинейностями, как люфт или обобщенный люфт, модели Мизеса и Треска [2] и т.д.

4. Пусть $\mu = \mu(h)$ – мера Бореля на $[0, \infty]$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty h d\mu(h) < \infty.$$

Обозначим через Z совокупность непрерывных функций $z(h)$, $h \ge 0$, для которых $|z(h)| \le h$. Введем преобразователь $\mathbf{W}_\mu$ со скалярными входами и выходами и с пространством состояний Z. Для гладкого входа $u(t)$, $t \ge 0$, и начального состояния $z_0 \in Z$ соответствующий выход $z(t) = (W_\mu[z_0]u)(t)$, $t \ge 0$, определим равенством

$$z(t) = \int_0^\infty (U[z_0(h)]\,u)(t) d\mu(h),$$

где U_h – это упор размаха h. Такие системы описывают фундаментальные механические модели (например, модели Ишлинского и Бесселинга [2]).

Предположим, что функция F та же, что и в предыдущем разделе. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$x' = F(x, z), \quad z(t) = (W_\mu[z_0](c, x))(t), \qquad (8)$$

аналогичными уравнениям (6). Уравнение (8) при каждом начальном условии $x(0) = x_0$ и каждом начальном состоянии гистерезисной нелинейности имеет единственное решение $x(t)$, $t \ge 0$. Следовательно, определен оператор сдвига $\mathrm{Sh}_\mu(x_0)$ по траекториям уравнения (8). Из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. *Существуют такие* $\alpha > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$, *что для каждой траектории* $x(t)$, $0 \le t < < t^* \le \infty$, *уравнения* (7), *для каждой меры* μ, *удовлетворяющей условию*

$$r(\mu) = \int_0^\infty h d\mu(h) \le \varepsilon_0,$$

и для каждого $z(h) \in Z$ *найдется траектория* $(x_\mu(t), z_\mu(t))$, $0 \le t < t_*$, *уравнения* (8), *для которой* $|x(t) - x_\mu(t)| \le \alpha r(\mu)$ *при* $0 \le t < t_*$.

Аналоги теоремы 3 верны для уравнений с многомерной моделью Ишлинского, моделью Прейзаха–Гилтая [2], многомерными аналогами модели Гилтая [6, 7].

Ф. Даймонд, П. Клоеден и А.В. Покровский поддержаны грантом A89132609 Австралийского совета по научным исследованиям, В.С. Козякин и М.А. Красносельский частично поддержаны грантом 93–01–00884 Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical System and Bifurkation of Vector Fields. N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 450 p.
2. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 271 с.
3. *Красносельский М.А., Покровский А.В., Фоменко И.В.* // ДАН. 1989. Т. 309. № 5. С. 1068 - 1071.
4. *Красносельский М.А., Майергойз И.Д., Покровский А.В., Рачинский Д.И.* // ДАН. 1993. Т. 331. № 4. С. 398 - 401.
5. *Beyn M.-J.* // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V. 24. № 5. P. 1095 - 1113.
6. *Красносельский М.А., Майергойз И.Д., Покровский А.В., Рачинский Д.И.* // ДАН. 1993. Т. 330. № 4. С. 427 - 429.
7. *Mayergoys I.D.* Mathematical Models of Hysteresis. N.Y.: Springer-Verlag, 1991. 207 p.