

© 1990 г. В.С. Козякин, канд. физ.-мат. наук
(НПО АСУ «Москва»)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Показывается, что для линейных рассинхронизованных систем алгебраического критерия абсолютной устойчивости в общем случае не существует.

1. Введение

В сложных системах управления, содержащих импульсные элементы, возможна рассинхронизация моментов включения этих элементов. В ряде случаев несинхронный характер срабатывания импульсных элементов не влияет на устойчивость системы. В других случаях сколь угодно малая рассинхронизация моментов включения импульсных элементов приводит к резким изменениям динамики системы управления, и система теряет устойчивость [1]. В последние годы начато (см., например, [1–5]) интенсивное изучение эффектов, связанных с рассинхронизацией систем управления; получены как необходимые, так и достаточные условия устойчивости различных классов рассинхронизованных систем. В то же время найти общие, эффективно проверяемые критерии устойчивости рассинхронизованных систем, аналогичные известным [6] для синхронизованных систем, не удалось. Задача об устойчивости линейных рассинхронизованных систем оказалась более сложной, чем задача об устойчивости синхронизованных систем. В настоящей статье предпринимается попытка формального объяснения сложности задачи исследования устойчивости линейных рассинхронизованных систем. Показывается, что критерия абсолютной устойчивости линейных рассинхронизованных систем, заключающегося в конечном числе арифметических действий, не существует.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную линейную систему управления, динамика изменения вектора состояния $x(n) = \{x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n)\}$ которой описывается векторным разностным уравнением

$$(1) \quad x(n) = A(n)x(n-1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $A(n) = (a_{ij}(n))$ — квадратная матрица порядка N с элементами $a_{ij}(n)$.

Систему (1) назовем синхронизованной, если $A(n) \equiv \text{const}$. Если же $A(n) \neq \text{const}$, но множество $\{A(n) : n = 1, 2, \dots\}$ состоит из конечного числа элементов $A_1, A_2, \dots, A_M$, то систему (1) назовем рассинхронизованной.

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ — некоторая конечная совокупность квадратных матриц порядка N . Назовем систему (1) абсолютно устойчивой относительно класса

матриц $\mathfrak{A}$ (ср. [7]), если при некотором $c = c(\mathfrak{A})$ для любой последовательности матриц $A(n) \in \mathfrak{A}$ выполняются оценки

$$(2) \quad \|A(n)A(n-1)\cdots A(1)x\| \leq c\|x\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Назовем систему (1) абсолютно экспоненциально устойчивой относительно класса матриц $\mathfrak{A}$, если при некоторых $c = c(\mathfrak{A})$, $q = q(\mathfrak{A}) < 1$ для любой последовательности матриц $A(n) \in \mathfrak{A}$ выполняются оценки

$$(3) \quad \|A(n)A(n-1)\cdots A(1)x\| \leq cq^n\|x\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если класс матриц $\mathfrak{A}$ состоит из квадратных матриц $A_1 = (a_{1ij})$, $A_2 = (a_{2ij})$, $\dots$, $A_M = (a_{Mij})$ порядка N , то для его описания нужно задать MN^2 чисел: a_{111} , a_{112} , $\dots$, a_{1NN} , a_{211} , a_{212} , $\dots$, a_{2NN} , $\dots$, a_{M11} , a_{M12} , $\dots$, a_{MNN} . Поэтому каждый класс $\mathfrak{A}$, состоящий из M квадратных матриц порядка N , можно рассматривать как точку в некотором пространстве $\mathfrak{M}(M, N) = R^{MN^2}$. Выделим в пространстве $\mathfrak{M}(M, N)$ множество $S(M, N)$ тех классов $\mathfrak{A}$, относительно которых система (1) абсолютно устойчива. Через $E(M, N)$ обозначим множество тех классов $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}(M, N)$, относительно которых система (1) абсолютно экспоненциально устойчива.

Задачу анализа абсолютной устойчивости системы (1) можно сформулировать теперь как задачу описания множеств $S(M, N)$ и $E(M, N)$; чем проще в каком-либо смысле структура множеств $S(M, N)$ или $E(M, N)$, тем проще получить критерий абсолютной устойчивости или абсолютной экспоненциальной устойчивости.

Простому описанию поддаются множества $S(1, N)$ и $E(1, N)$. Действительно, каждый класс $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}(1, N)$ состоит из одной матрицы. Следовательно, речь идет об условиях устойчивости или асимптотической устойчивости некоторого разностного уравнения $x(n) = Ax(n-1)$. Критерий Рауса–Гурвица [6] позволяет записать эти условия в виде конечной системы полиномиальных неравенств, включающих элементы a_{ij} матрицы A . Проверка этих неравенств может быть выполнена конечным числом арифметических операций над элементами матрицы A . Другими словами, конечного числа арифметических операций достаточно для решения вопроса о принадлежности произвольного класса $\mathfrak{A} = \{A\}$ множеству $S(1, N)$ или $E(1, N)$.

Можно ли при $M \geq 2$ конечным числом арифметических операций решить вопрос о принадлежности произвольного класса $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}(M, N)$ множеству $S(M, N)$ или $E(M, N)$? Этот вопрос решается в следующем разделе.

3. Основной результат

Пусть $u = \{u_1, u_2, \dots, u_L\}$ — элемент координатного пространства R^L . Полиномом переменной $u \in R^L$ называют конечную сумму $p(u) = \sum p_{i_1 i_2 \dots i_L} u_1^{i_1} u_2^{i_2} \cdots u_L^{i_L}$ с числовыми коэффициентами $p_{i_1 i_2 \dots i_L}$. Говорят [8], что множество $U \subseteq R^L$ обладает SA -свойством, если существует конечное число полиномов $p_1(u), \dots, p_k(u), p_{k+1}(u), \dots, p_{k+l}(u)$, таких, что U совпадает с множеством элементов $u \in R^L$, выделяемых условиями:

$$(4) \quad p_1(u) > 0, \dots, p_k(u) > 0, \quad p_{k+1}(u) = \dots = p_{k+l}(u) = 0.$$

Множество U называют [8] полуалгебраическим, если оно является объединением конечного числа множеств, обладающих SA -свойством.

Теорема 1. Пусть $M, N \geq 2$. Если подмножество U пространства $\mathfrak{M}(M, N)$ удовлетворяет условиям $E(M, N) \subseteq U \subseteq S(M, N)$, то оно не полуалгебраично.

Доказательство теоремы вынесено в приложение.

Полуалгебраичность множества равносильна существованию критерия (закрывающегося в проверке конечного числа условий вида (4)), который позволяет за конечное число действий сложения, вычитания, умножения, деления и сравнения чисел установить принадлежность некоторого элемента данному множеству. Как видно из теоремы 1, ни множество $S(M, N)$, ни множество $E(M, N)$ не являются полуалгебраическими. Поэтому смысл теоремы 1 заключается в том, что в общем случае конечным числом арифметических действий невозможно установить, является рассинхронизованная система (1) абсолютно устойчивой (абсолютно экспоненциально устойчивой) или нет.

Задача существования алгебраических критериев устойчивости важна и для классов рассинхронизованных систем, отличных от рассмотренных выше. Например, в теории рассинхронизованных систем с непрерывным временем возникает вопрос об устойчивости так называемых правильных систем [3, 4] (т.е. систем с бесконечным числом переключения каждой компоненты). Дискретную систему (1) и соответствующую ей последовательность матриц $A(n)$ назовем правильной, если каждая матрица A_i , из класса $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ встречается в последовательности $\{A(n)\}$ бесконечное число раз. Обозначим через $r(n)$ наибольшее целое число r обладающее свойством: набор матриц $\{A(1), A(2), \dots, A(n)\}$ можно разбить на r поднаборов $\{A(1), \dots, A(n_1)\}$, $\{A(n_1 + 1), \dots, A(n_2)\}$, $\dots$, $\{A(n_{r-1} + 1), \dots, A(n)\}$ так, что каждый из них содержит все матрицы $A_1, A_2, \dots, A_M$. Очевидно, система (1) правильна тогда и только тогда когда $r(n) \rightarrow \infty$.

Систему (1) назовем абсолютно экспоненциально правильно устойчивой относительно класса матриц $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$, если найдутся такие $c = c(\mathfrak{A})$, $q = q(\mathfrak{A}) < 1$, что для любой правильной последовательности матриц $A(n) \in \mathfrak{A}$ справедливы оценки:

$$\|A(n)A(n-1)\cdots A(1)x\| \leq cq^{r(n)}\|x\|.$$

Через $R(M, N)$ обозначим множество классов $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}(M, N)$, относительно которых система (1) абсолютно экспоненциально правильно устойчива

Теорема 2. Пусть $M, N \geq 2$. Тогда множество $R(M, N)$ не полуалгебраично.

Для доказательства теоремы 2 достаточно заметить, что множество $R(M, N)$ содержит в себе $E(M, N)$ и само содержится в $S(M, N)$. Поэтому по теореме 1 оно не является полуалгебраическим. Другими словами, при $M, N \geq 2$ не существует алгебраического критерия абсолютной экспоненциальной правильной устойчивости дискретных рассинхронизованных систем.

4. Дополнение

Задача об абсолютной устойчивости систем (1) сводится к анализу поведения бесконечных произведений матриц $A(n) \in \mathfrak{A}$. Приводимая ниже теорема 3 сводит эту задачу к геометрически наглядному вопросу о существовании в пространстве R^N нормы, в которой каждая матрица $A_1, A_2, \dots, A_M$ будет сжимающей.

Теорема 3. Система (1) абсолютно устойчива в классе матриц $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ тогда и только тогда, когда в R^N найдется норма $\|\cdot\|$, в которой выполняются неравенства

$$(5) \quad \|A_1\|, \|A_2\|, \dots, \|A_M\| \leq 1.$$

Система (1) абсолютно экспоненциально устойчива в классе матриц $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда в R^N найдется норма $\|\cdot\|$, в которой при некотором $q < 1$

выполняются неравенства

$$(6) \quad \|A_1\|, \|A_2\|, \dots, \|A_M\| \leq q.$$

Доказательство теоремы вынесено в приложение.

Из теоремы 3 вытекает ряд важных свойств множеств $S(M, N)$ и $E(M, N)$. Так, например, множество $E(M, N)$ открыто в $\mathfrak{M}(M, N)$; множество $E(M, N)$ является внутренностью множества $S(M, N)$.

В силу открытости множества $E(M, N)$, если система (1) абсолютно экспоненциально устойчива относительно некоторого класса $\mathfrak{A}^0 = \{A_1^0, A_2^0, \dots, A_M^0\}$, то она абсолютно экспоненциально устойчива и относительно любого класса $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ матриц A_i , близких к соответствующим матрицам A_i^0 ($i = 1, 2, \dots, M$).

Из теорем 1 и 3 следует алгебраическая неразрешимость в общем случае задачи построения для конечной совокупности квадратных матриц нормы, удовлетворяющей условиям (5) или (6).

Теорема 1 утверждает, что в общем случае эффективные критерии абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем (1) отсутствуют. Тем не менее такие критерии могут существовать для рассинхронизованных систем специального вида. Приведем примеры.

Пример 1. Обозначим через $\mathfrak{R}(N)$ подмножество пространства $\mathfrak{M}(N, N)$ состоящее из классов $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ матриц A_i вида

$$(7) \quad A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

К исследованию абсолютной устойчивости систем (1) относительно классов $\mathfrak{A} \in \mathfrak{R}(N)$ сводится вопрос об устойчивости систем с непрерывным временем [1–5] при некоторых типах рассинхронизаций.

Теорема 4. Система (1) абсолютно устойчива относительно класса матриц $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2\} \in \mathfrak{R}(2)$ вида (7) тогда и только тогда, когда выполнена одна из систем соотношений:

- а) $a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 0, a_{22} = 1$;
- б) $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = -1, a_{21}$ произвольно;
- в) $a_{11} = -1, a_{12}$ произвольно, $a_{21} = 0, a_{22} = 1$;
- г) $a_{11} = a_{22} = -1, 0 \leq a_{12}, a_{21} < 4$;
- д) $|a_{11}| < 1, |a_{22}| < 1, -(1 - |a_{11}|)(1 - |a_{22}|) \leq a_{12}a_{21} \leq (1 - a_{11})(1 - a_{22})$.

Доказательство теоремы 4 не приводим, поскольку оно громоздко. Подчеркнем, что сформулированный в теореме 4 критерий абсолютной устойчивости системы (1) относительно классов матриц из $\mathfrak{R}(2)$ алгебраичен.

Пример 2. Обозначим через $\mathfrak{R}_+(N)$ подмножество пространства $\mathfrak{M}(N, N)$ состоящее из классов $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ матриц A_i вида (7), для которых $a_{ij} > 0$. Множество $S(N, N) \cap \mathfrak{R}_+(N)$ полуалгебраично. Критерий абсолютной устойчивости системы (1) относительно классов матриц $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{R}_+(N)$ заключается в том, что максимальное собственное значение матрицы $A = (a_{ij})$ не должно превосходить 1. Это утверждение доказывается аналогично теореме 2 из первой части работы [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. *Доказательство теоремы 1* достаточно провести для случая $M = N = 2$. Идея доказательства проста. Строятся два семейства матриц, зависящих от вещественного параметра $t \in [-1, 1]$:

$$(П.1) \quad G(t) = (1-t^4) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) = (1-t^4) \begin{pmatrix} 1-2t^2 & -2t\sqrt{1-t^2} \\ 2t\sqrt{1-t^2} & 1-2t^2 \end{pmatrix}.$$

Множество W всех классов $\mathfrak{A}$ вида $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(t) = \{G(t), H(t)\}$ образует в пространстве $\mathfrak{M}(2, 2)$ алгебраическое множество. Допустим, что множество U полуалгебраично. Тогда множество $U \cap W$ также полуалгебраично. Следовательно, по теореме Уитни (см., например, [9]) о конечном числе компонент связности вещественного алгебраического множества окрестность класса $\mathfrak{A}(0)$ в $U \cap W$ должна быть либо пустой, либо состоять из конечного числа компонент связности. Показывается, что она имеет бесконечное число компонент связности. Значит, множество U не полуалгебраично.

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим через $|\cdot|$ евклидову норму в R^2 : если $x = \{\xi, \eta\}$, то $|x| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Рассмотрим два семейства матриц:

$$(П.2) \quad P(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{tg} \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Пусть $\varphi = \pi/(2n+1)$. Тогда $(PR^n P)(\varphi) = -(\cos \varphi)^{-1}P(\varphi)$.

Лемма 2. Пусть $\varphi = \pi/(2n)$. Тогда $(PR^m P)(\varphi) = \lambda_{m,n}P(\varphi)$, где $|\lambda_{m+n,n}| = |\lambda_{m,n}|$, $|\lambda_{m,n}| \leq 1$.

Обе леммы следуют из равенства $(PR^m P)(\varphi) = \frac{\cos[(2m+1)\varphi]}{\cos \varphi} P(\varphi)$ ($m = 0, 1, \dots$), справедливость которого устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 3. Пусть $\varphi = \pi/(2n)$ и $B_i = P(\varphi)$ или $B_i = R(\varphi)$ при $1 \leq i \leq m$. Тогда справедливо представление

$$(П.3) \quad B_m B_{m-1} \cdots B_1 = \alpha R^q(\varphi) P^r(\varphi) R^s(\varphi),$$

где $|\alpha| \leq 1$, целые числа q и s неотрицательны, $r = 0, 1$.

Доказательство леммы проведем по индукции. При $m = 1$ утверждение леммы очевидно; пусть оно верно при $m = k-1 \geq 1$. Тогда при $m = k$ матрицу $A = B_m B_{m-1} \cdots B_1$ можно представить в виде $A = B_m \tilde{\alpha} R^{\tilde{q}} P^{\tilde{r}} R_m^{\tilde{s}}$, где $|\tilde{\alpha}| \leq 1$, $\tilde{r} = 0$ или $\tilde{r} = 1$, $R = R(\varphi)$, $P = P(\varphi)$.

Если $B_m = R(\varphi)$, то $A = \tilde{\alpha} R^{\tilde{q}+1} P^{\tilde{r}} R_m^{\tilde{s}}$ и для матрицы A справедливо представление (П.3), в котором $\alpha = \tilde{\alpha}$, $q = \tilde{q} + 1$, $r = \tilde{r}$, $s = \tilde{s}$.

Если $B_m = P(\varphi)$ и $\tilde{r} = 0$, то $A = \tilde{\alpha} P R^{\tilde{q}+\tilde{s}}$ и для матрицы A справедливо представление (П.3), в котором $\alpha = \tilde{\alpha}$, $q = 0$, $r = 1$, $s = \tilde{q} + \tilde{s}$.

Если $B_m = P(\varphi)$ и $\tilde{r} = 1$, то $A = \tilde{\alpha} P R^{\tilde{q}} P R_m^{\tilde{s}}$. Здесь сомножитель $PR^{\tilde{q}}P$ согласно лемме 2 можно заменить на $\lambda_{\tilde{q},n}P$. Поэтому $A = \tilde{\alpha} \lambda_{\tilde{q},n} P R_m^{\tilde{s}}$. Следовательно, для матрицы A справедливо представление (П.3), в котором $\alpha = \tilde{\alpha} \lambda_{\tilde{q},n}$, $q = 0$, $r = 1$, $s = \tilde{s}$. При этом $|\alpha| \leq |\tilde{\alpha}| \cdot |\lambda_{\tilde{q},n}| \leq 1$, поскольку $|\tilde{\alpha}| \leq 1$, $|\lambda_{\tilde{q},n}| \leq 1$.

Шаг индукции проведен. Лемма 3 доказана.

Следствие. $|B_m B_{m-1} \cdots B_1| \leq |P(\frac{\pi}{2n})|$.

Доказательство следствия немедленно вытекает из представления (П.3) и унитарности матрицы поворота $R(\varphi)$.

Лемма 4. Пусть $t_n = \sin \frac{\pi}{2n}$. Тогда $\mathfrak{A}(t_n) \in E(2, 2)$.

Доказательство. Пусть $\{A(k)\}$ — последовательность матриц из $\mathfrak{A}(t_n)$. Тогда при каждом k выполняется одно из равенств $A(k) = G(t_n)$ или $A(k) = H(t_n)$. В силу (П.1) $G(t_n) = \mu_n P\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, $H(t_n) = \mu_n R\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, где $\mu_n = 1 - \left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^4$. Поэтому произведение матриц $A(1), A(2), \dots, A(k)$ можно представить в виде: $A(k)A(k-1) \cdots A(1) = \mu_n^k B_k B_{k-1} \cdots B_1$, где $B_i = P\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ или $B_i = R\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Тогда по следствию из леммы 3 $|A(k)A(k-1) \cdots A(1)| \leq \mu_n^k \left|P\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|$, откуда вытекает абсолютная экспоненциальная устойчивость класса матриц $\mathfrak{A}(t_n)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $s_n = \sin \frac{\pi}{2n+1}$. Тогда $\mathfrak{A}(s_n) \notin S(2, 2)$ при всех достаточно больших n .

Доказательство. Очевидно, лемма будет доказана, если при каждом достаточно большом n найдется последовательность матриц $A(k) \in \mathfrak{F}(s_n)$, такая, что

$$(П.4) \quad |A(k_i)A(k_i-1) \cdots A(1)| \rightarrow \infty$$

для некоторой последовательности индексов $k_i \rightarrow \infty$.

Определим последовательность матриц $A(k)$ следующим образом: $A[(n+2)i] = G(s_n)$, $A[(n+2)i+1] = \dots = A[(n+2)i+n] = H(s_n)$, $A[(n+2)i+n+1] = G(s_n)$. Положим $k_i = (n+2)i + n + 1$. Тогда $A(k_i)A(k_i-1) \cdots A(1) = [G(s_n)H^n(s_n)G(s_n)]^i$. Так как $G(s_n) = \nu_n P\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$, $H(s_n) = \nu_n Q\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$, где $\nu_n = 1 - \left(\sin \frac{\pi}{2n+1}\right)^4$, то $A(k_i)A(k_i-1) \cdots A(1) = \left[\nu_n^{n+2} P\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) Q^n\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) P\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\right]^i$. Значит, по лемме 1 $A(k_i)A(k_i-1) \cdots A(1) = \left(-\nu_n^{n+2} / \cos \frac{\pi}{2n+1}\right)^i P\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$. Вспомним, что $P\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$ — проектор, и потому $\left|P\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\right| \geq 1$. Следовательно,

$$(П.5) \quad |A(k_i)A(k_i-1) \cdots A(1)| \geq \left| -\frac{\nu_n^{n+2}}{\cos \frac{\pi}{2n+1}} \right|^i.$$

Нетрудно подсчитать, что $\nu_n^{n+2} / \cos \frac{\pi}{2n+1} = 1 + \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} + o(n^{-2})$. Поэтому при достаточно больших значениях n выполняется неравенство $\nu_n^{n+2} / \cos \frac{\pi}{2n+1} > 1$. Отсюда и из (П.5) следует соотношение (П.4). Лемма 5 доказана.

Завершим доказательство теоремы. Поскольку по леммам 4 и 5 $\mathfrak{A}(t_n) \in E(2, 2)$, $\mathfrak{A}(s_n) \notin S(2, 2)$ и $E(M, N) \subseteq U \subseteq S(M, N)$, то $\mathfrak{A}(t_n) \in U$, $\mathfrak{A}(s_n) \notin U$. Но так как точки t_n и s_n перемежаются между собой, то множество $U \cap W$ содержит бесконечно много различных компонент связности (различные классы $\mathfrak{A}(t_n)$ лежат в различных компонентах связности). Значит, множество $U \cap W$ по теореме Уитни [9] не полуалгебраично. Но поскольку W — алгебраическое множество, то не полуалгебраично множество U . Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 3. В одну сторону утверждение теоремы 3 очевидно — из неравенств (5) и (6) непосредственно следует, соответственно, абсолютная устойчивость и абсолютная экспоненциальная устойчивость системы (1) относительно класса $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$.

Покажем, что абсолютная экспоненциальная устойчивость системы (1) относительно класса матриц $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ влечет (6). Пусть при некотором $q < 1$ выполняется соотношение (3). Положим $\varkappa_0(x) = |x|$, $\varkappa_n(x) = q^{-n} \max |B_1 B_2 \cdots B_n x|$ ($n > 1$), где $|\cdot|$ — евклидова норма в R^N , а максимум берется по всем возможным наборам матриц $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{A}$. Норму $\|\cdot\|$ определим равенством: $\|x\| = \sup_{n \geq 0} \varkappa_n(x)$.

Функция $\|x\|$ полуаддитивна и в силу (3) удовлетворяет соотношениям: $|x| \leq \|x\| \leq \max\{1, c\} |x|$. Следовательно, $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Остальные свойства нормы для $\|\cdot\|$ очевидны.

Установим справедливость неравенств (6). Очевидно, при любых $k = 1, 2, \dots, M$ и $n = 0, 1, \dots$ выполняется оценка $\varkappa_n(A_k x) \leq q \varkappa_{n+1}(x)$. Следовательно, $\|A_k x\| = \sup_{n \geq 0} \varkappa_n(A_k x) \leq q \sup_{n \geq 0} \varkappa_{n+1}(x) = \sup_{n \geq 1} \varkappa_n(x) \leq q \|x\|$. Отсюда $\|A_k\| \leq q$ при $k = 1, 2, \dots, M$. Неравенства (6) доказаны.

Построение нормы $\|\cdot\|$ и доказательство неравенств (5) в случае абсолютной устойчивости системы (1) проводятся аналогично. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клепцын А. Ф., Козякин В. С., Красносельский М. А., Кузнецов Н. А. О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем. I–III // *АиТ*. 1983. № 7. С. 44–51. 1984. № 3. С. 42–47. 1984. № 8. С. 63–67. 41, 44
2. Клепцын А. Ф. Исследование устойчивости рассинхронизованных двухкомпонентных систем // IX Всесоюз. совещ. по проблемам управления. Тез. докл. М.: Наука, 1983. С. 27–28. 41, 44
3. Клепцын А. Ф., Козякин В. С., Красносельский М. А., Кузнецов Н. А. Устойчивость рассинхронизованных систем // *Докл. АН СССР*. 1984. Т. 274. № 5. С. 1053–1056. 41, 43, 44
4. Kleptsyn A. F., Krasnoselskii M. A., Kuznetsov N. A., Kozjakin V. S. Desynchronization of linear systems // *Mathematics and Computers in Simulation*. 1984. V. 26. P. 423–431. 41, 43, 44
5. Клепцын А. Ф. Об устойчивости рассинхронизованных сложных систем специального вида // *АиТ*. 1985. № 4. С. 169–171. 41, 44
6. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 41, 42
7. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 42
8. Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965. 42
9. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971. 45, 46

Поступила в редакцию 10.10.88

P.S. В данном тексте исправлены опечатки в доказательстве теоремы 1, имевшиеся в оригинальной журнальной версии статьи. С исправленными опечатками соответствующий текст был включен в монографию: Асарин Е. А., Козякин В. С., Красносельский М. А., Кузнецов Н. А. “Анализ устойчивости рассинхронизованных дискретных систем”, М.: Наука, 1992 <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/AsarinKozyakinKrasnoselskijKuznecov1992ru.pdf>. Обобщениям и усилениям представленных результатов посвящена работа: Козякин В. С. “О неопределимости в о-минимальных структурах конечных наборов матриц, бесконечные произведения которых сходятся, ограничены или неограниченны” // *Автоматика и телемеханика*, 2003, № 9, С. 24–41 <http://mi.mathnet.ru/at1939>. 18.01.2013