ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 425, № 4, с. 443–446

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

ТРАЕКТОРНЫЙ АТТРАКТОР СИСТЕМЫ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР ДИФФУЗИИ

© 2009 г. М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Представлено академиком В.А. Ильиным 22.10.2008 г.

Поступило 26.11.2008 г.

Системы уравнений реакции-диффузии, для которых соответствующая задача Коши является корректно поставленной, допускают исследование методами теории глобальных аттракторов (см. [1–3]). Однако для многих модельных систем реакции-диффузии можно построить решения, но доказать теорему единственности этих решений не удается или она не выполнена. В этом случае можно исследовать предельное поведение решений таких уравнений с помощью построения траекторных аттракторов в пространствах со слабой топологией. Этот метод эффективно применяется, например, при изучении трехмерной системы Навье–Стокса и других диссипативных уравнений математической физики (см. [3–8]).

1. В ограниченной области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается система уравнений

$$\partial_t u = \Delta u - f(u, v) + g_1(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t v = \delta\Delta v - h(u, v) + g_2(x), \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\delta > 0$ – малый параметр. Неизвестными считаются две скалярные функции $u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \geq 0$. Предполагается, что f и h являются непрерывными функциями, $f, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, причем они удовлетворяют условиям роста

$$\sigma_1(|u|^{p_1} + |v|^{p_2}) - C \leq f(u, v)u + h(u, v)v \leq \leq \sigma_2(|u|^{p_1} + |v|^{p_2} + 1), \tag{3}$$

$$|f(u, v)|^{q_1} + |h(u, v)|^{q_2} \leq \leq \sigma_3(|u|^{p_1} + |v|^{p_2} + 1), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где σ_i ($i = 1, 2, 3$), C, p_1, p_2 – некоторые положительные константы, причем $p_1, p_2 \geq 2$ и $q_i = \dfrac{p_i}{p_i - 1}$, $i = 1, 2$. Кроме того, предполагается, что $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $h(0, 0) = 0$, и выполнены неравенства

$$h_v(u, v) \geq \sigma_4 > 0, \quad |h_u(u, v)| \leq D, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Числа σ_1 и σ_4 отражают свойства диссипативности системы, и они могут быть произвольно малыми. Для определенности предполагается, что $\sigma_1 = \sigma_4 = \sigma$. Относительно функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ в системе (1), (2) предполагается, что

$$g_1 \in L_2(\Omega), \quad g_2 \in H_0^1(\Omega). \tag{6}$$

Вводятся обозначения $H\colon = L_2(\Omega)$, $V := H_0^1(\Omega)$ и $\|u\| := \|u\|_H$, $\|u\|_1 := \|u\|_V$.

Пара функций $(u(x, t), v(x, t))$ называется слабым решением системы (1), (2) в области $\Omega \times \mathbb{R}_+$, если при любом $M > 0$

$$u \in L_{p_1}(0, M; L_{p_1}(\Omega)) \cap L_2(0, M; V),$$

$$v \in L_{p_2}(0, M; L_{p_2}(\Omega)) \cap L_2(0, M; V),$$

причем $u(x, t)$ и $v(x, t)$ удовлетворяют уравнениям (1), (2) в смысле теории обобщенных функций в $\mathcal{D}'(0, M; H^{-r_1}(\Omega) \times H^{-r_2}(\Omega))$, где $r_i = \max\left\{1, n\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p_i}\right)\right\}$, $i = 1, 2$ (см. [2, 3, 9]). Переменная x будет для краткости опускаться.

Существование слабого решения при начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0, \tag{7}$$

где $u_0 \in H$ и $v_0 \in H$, устанавливается с помощью метода Галёркина, причем в качестве базисных функций используются собственные функции оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле. При этом выводятся энергетические оценки для галёркинских приближений $(u_m(t), v_m(t))$ порядка $m \in \mathbb{N}$. Предельный переход функций $(u_m(t), v_m(t))$ при $m \to \infty$ к слабым решениям $(u(t), v(t))$ задачи (1), (2), (7) совершается по стандарт-

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской Академии наук, Москва

ной схеме (см., например, [2, 3]). Доказано, что любое слабое решение $(u(t), v(t))$ задачи (1), (2), (7) удовлетворяет неравенствам

$$\|u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 + 2\int_0^t (\|u(s)\|_1^2 + \delta\|v(s)\|_1^2)e^{-\sigma(t-s)}ds \le$$

$$\le (\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2)e^{-\sigma t} + R_1^2, \tag{8}$$

$$2\int_t^{t+1} (\|u(s)\|_1^2 + \delta\|v(s)\|_1^2)ds +$$

$$+ \sigma\int_t^{t+1} (\|u(s)\|_{L_{p_1}}^{p_1} + \|v(s)\|_{L_{p_2}}^{p_2})ds \le$$

$$\le (\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2)e^{-\sigma t} + R_2^2, \quad \forall t \ge 0, \tag{9}$$

причем величины R_1 и R_2 не зависят от δ. В том случае, когда $v_0 \in V$ для слабых решений, которые получаются по методу Галёркина, доказана дополнительная оценка вида

$$\|v(t)\|_1^2 \le \|v_0\|_1^2 e^{-\sigma t} +$$

$$+ C(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2)e^{-\sigma t} + R^2, \quad \forall t \ge 0, \tag{10}$$

где величина R и константа C также не зависят от δ.

Отметим, что при выполнении условий (3)–(6) задача Коши для системы (1), (2) может иметь неединственное решение.

2. Рассматривается пространство $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$, состоящее из функций $(y(t), z(t)) := (y(x, t), z(x, t))$, $x \in \Omega$, $t \ge 0$, где

$$y(\cdot) \in L_\infty(0, M; H) \cap$$

$$\cap L_2(0, M; V) \cap L_{p_1}(0, M; L_{p_1}(\Omega)),$$

$$z(\cdot) = L_\infty(0, M; V) \cap L_{p_2}(0, M; L_{p_2}(\Omega)),$$

$$\partial_t y(\cdot) \in L_{q_1}(0, M; H^{-r_1}(\Omega)),$$

$$\partial_t z(\cdot) \in L_{q_2}(0, M; H^{-r_2}(\Omega)), \quad \forall M > 0.$$

В пространстве $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ вводится также топология Θ_+^{loc} с помощью задания слабой сходимости или *-слабой сходимости последовательностей

$$\{y_m(t)\}, \{z_m(t)\}, \{\partial_t y_m(t)\}, \{\partial_t z_m(t)\}$$

$$\text{при } m \to \infty$$

в указанных выше пространствах при каждом $M > 0$. Пространство $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ с топологией Θ_+^{loc} является линейным хаусдорфовым пространством Фреше–Урысона со счетной базой (см., например, [3]).

В $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ рассматривается линейное подпространство $\mathcal{F}_+^{\text{b}}$, состоящее из элементов $(y(\cdot), z(\cdot))$, обладающих конечной нормой

$$\|(y, z)\|_{\mathcal{F}_+^{\text{b}}} := \|y\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} + \|y\|_{L_2^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; V)} +$$

$$+ \|y\|_{L_{p_1}^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; L_{p_1})} + \|\partial_t y\|_{L_{q_1}^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; H^{-r_1})} + \|z\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V)} +$$

$$+ \|z\|_{L_{p_2}^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; L_{p_2})} + \|\partial_t z\|_{L_{q_2}^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; H^{-r_2})}.$$

Напомним, что в пространстве $L_p^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; X)$, где X – банахово пространство и $p \ge 1$, норма задается по формуле

$$\|y\|_{L_p^{\text{b}}(\mathbb{R}_+; X)}^p := \sup_{t \ge 0} \int_t^{t+1} \|y(s)\|_X^p ds.$$

Отметим, что любой шар $B_r = \{\|(y, z)\|_{\mathcal{F}_+^{\text{b}}} \le r\}$ в банаховом пространстве $\mathcal{F}_+^{\text{b}}$ компактен в топологии $\mathcal{F}_+^{\text{loc}} \cap \Theta_+^{\text{loc}}$.

Определим теперь пространство $\mathcal{K}_+(N)$ решений (траекторий) системы (1), (2), которое зависит от числа $N > 0$.

Определение 1. Пространство $\mathcal{K}_+(N)$ состоит из функций $(u(\cdot), v(\cdot)) \in \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$, таких, что:

(i) пара $(u(t), v(t))$, $t \ge 0$, является слабым решением системы (1), (2);

(ii) функция $v(t)$ удовлетворят неравенству

$$\|v(t)\|_1^2 \le Ne^{-\sigma t} + R^2, \quad \forall t \ge 0, \tag{11}$$

где величины σ и R такие же, как в неравенстве (10).

Из построения слабых решений задачи (1), (2), (7) по методу Галёркина следует, что пространство траекторий $\mathcal{K}_+(N)$ непусто при любом $N > 0$.

Рассмотрим трансляционную полугруппу $\{T(\tau)\} := \{T(\tau), \tau \ge 0\}$, действующую в пространстве $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ по формуле

$$T(\tau)(y(t), z(t)) = (y(t+\tau), z(t+\tau)), \; t \ge 0.$$

Заметим, что $T(\tau)\colon \mathcal{K}_+(N) \to \mathcal{K}_+(N)$ при любом $\tau \ge 0$.

Утверждение 1. *Пространство траекторий $\mathcal{K}_+(N) = \{(u(t), v(t)), t \ge 0\}$ принадлежит $\mathcal{F}_+^{\text{b}}$, причем справедливо неравенство*

$$\|T(\tau)(u, v)\|_{\mathcal{F}_+^{\text{b}}} \le C(\|u(0)\|^2 + N)e^{-\rho\tau} + R_3^2, \quad \forall \tau \ge 0, \tag{12}$$

где $C \ge 0$ и $\rho > 0$ не зависят от g_1, g_2 и δ, а величина $R_3 = R_3(\|g_1\|, \|g_2\|)$ не зависит от δ.

Утверждение 2. *Пространство* $\mathcal{K}_+(N)$ *замкнуто в* $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} \cap \Theta_+^{\mathrm{loc}}$ *при любом* $N \geq 0$.

Множество $P \subseteq \mathcal{K}_+(N)$ называется поглощающим для полугруппы $\{T(\tau)\}$, если для любого множества $B \subset \mathcal{K}_+(N)$, ограниченного в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, найдется число $\tau_1 = \tau_1(B) \geq 0$, такое, что $T(\tau)B \subseteq P$ при всех $\tau \geq \tau_1$.

Множество $P \subseteq \mathcal{K}_+(N)$ называется притягивающим для полугруппы $\{T(\tau)\}$, если любая окрестность $\mathbb{O}(P)$ множества P в топологии Θ_+^{loc} является поглощающим множеством, т.е., для любого множества $B \subset \mathcal{K}_+(N)$, ограниченного в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, найдется число $\tau_1 = \tau_1(B, \mathbb{O}) \geq 0$, такое, что $T(\tau)B \subseteq \mathbb{O}(P)$ при всех $\tau \geq \tau_1$. Ясно, что любое поглощающее множество является притягивающим.

Определение 2. Множество $\mathfrak{A} \subset \mathcal{K}_+(N)$ называется траекторным аттрактором полугруппы $\{T(\tau)\}$ на $\mathcal{K}_+(N)$, если оно ограничено в норме $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, компактно в топологии Θ_+^{loc}, строго инвариантно относительно $\{T(\tau)\}$, т.е.

$$T(\tau)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \forall \tau \geq 0,$$

и $\mathfrak{A}$ является притягивающим множеством $\{T(\tau)\}$ на $\mathcal{K}_+(N)$ в топологии Θ_+^{loc}.

Построим траекторный аттрактор полугруппы $\{T(\tau)\}$. Из неравенства (12) следует, что множество

$$P = \left\{(u, v) \in \mathcal{K}_+(N) \mid \|(u, v)\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} \leq 2R_3^2\right\} \tag{13}$$

является поглощающим для полугруппы $\{T(\tau)\}$ в пространстве $\mathcal{K}_+(N)$. Множество P является ограниченным в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$. Рассмотрим на P топологию, индуцированную из Θ_+^{loc}. Это топологическое пространство является компактным и метризуемым. Легко проверить, что полугруппа $\{T(\tau)\}$ отображает P в себя:

$$T(\tau)P \subseteq P, \quad \forall \tau \geq 0,$$

и полугруппа $\{T(\tau)\}$ непрерывна на $\mathcal{K}_+(N)$ в топологии Θ_+^{loc}. В итоге имеется непрерывная полугруппа $\{T(\tau)\}$ на компактном метрическом пространстве P. Тогда применима общая теорема о существовании у полугруппы $\{T(\tau)\}$ глобального аттрактора $\mathfrak{A}(N) \subseteq P$ (см., например, [1, 2, 10]), который задается формулой

$$\mathfrak{A}(N) = \bigcap_{\tau \geq 0}\Big[\bigcup_{\theta \geq \tau} T(\theta)P\Big]_{\Theta_+^{\mathrm{loc}}}. \tag{14}$$

Множество $\mathfrak{A}(N)$ ограничено в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, компактно в Θ_+^{loc}, строго инвариантно:

$$T(\tau)\mathfrak{A}(N) = \mathfrak{A}(N), \quad \forall \tau \geq 0,$$

и, очевидно, множество $\mathfrak{A}(N)$ притягивает любое ограниченное множество $B \subset \mathcal{K}_+(N)$. Следовательно, построенное по формуле (14) множество $\mathfrak{A}(N)$ является траекторным аттрактором $\{T(\tau)\}$ в $\mathcal{K}_+(N)$.

Утверждение 3. *Построенный траекторный аттрактор не зависит от числа* N: $\mathfrak{A}(N) = \mathfrak{A}$, *при этом* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(0)$,

$$\sup\{\|v(t)\|_1^2 \mid t \geq 0\} \leq R^2, \quad \forall (u, v) \in \mathfrak{A},$$

где R *такое же, как в* (11).

Далее описывается структура траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ с помощью полных траекторий $\{u(t), v(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, системы уравнений (1), (2). Вводятся пространства $\mathcal{F}^{\mathrm{loc}}$, $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$ и Θ^{loc}, которые определяются аналогично $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$, $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и Θ_+^{loc} с заменой в их определениях полупрямой $\mathbb{R}_+$ ($t \geq 0$) на всю прямую $\mathbb{R}$ ($-\infty < t < \infty$). Рассматриваются слабые решения $\{u(t), v(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, системы (1), (2), которые принадлежат пространству $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$.

Определение 3. Ядром $\mathcal{K}$ системы уравнений (1), (2) в пространстве $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$ называется множество всех его слабых решений $\{u(t), v(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, которые принадлежат F^{b} и для которых выполнено неравенство

$$\sup\{\|v(t)\|_1 \mid t \in \mathbb{R}\} \leq R,$$

где величина R такая же, как в (11).

Имеет место следующая основная

Теорема 1. *Ядро* $\mathcal{K}$ *системы* (1), (2) *ограничено в пространстве* $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$ *и компактно в топологии* Θ^{loc}, *причем*

$$\mathfrak{A} = \Pi_+\mathcal{K},$$

где Π_+ – *оператор ограничения функций* $\{f(t), t \in \mathbb{R}\}$ *на полуось* $\mathbb{R}_+$.

В дальнейшем используются обозначения $\mathfrak{A}^\delta := \mathfrak{A}$ и $\mathcal{K}^\delta := \mathcal{K}$, где δ – малый коэффициент диффузии в уравнении (2). Напомним, что $\mathfrak{A}^\delta \subset P$ при всех $\delta \in (0, 1]$ (см. (13)), причем множество P не зависит от δ.

Следствие 1. *Семейство траекторных аттракторов* $\{\mathfrak{A}^\delta, 0 < \delta \leq 1\}$ *равномерно ограничено по норме пространства* $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, *а семейство ядер* $\{\mathcal{K}^\delta, 0 < \delta \leq 1\}$ *равномерно ограничено в* $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$.

3. Рассматривается предельная относительно (1), (2) система уравнений

$$\partial_t u = \Delta u - f(u, v) + g_1(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (15)$$

$$\partial_t v = -h(u, v) + g_2(x), \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (16)$$

В этом случае уравнение (16) фактически становится обыкновенным дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $v(x, t)$, $t \geq 0$, при каждом фиксированном $x \in \Omega$. Такие частично диссипативные системы реакции-диффузии рассматривались, например, в [11], где накладывались дополнительные ограничения на нелинейные члены уравнений, которые гарантируют однозначную разрешимость начальной задачи.

Предполагается, что функции f и h в системе (15), (16) удовлетворяют неравенствам (3)–(5), а для функций g_1 и g_2 выполнены включения (6). Эти условия не обеспечивают однозначную разрешимость задачи Коши.

Слабым решением системы (15), (16) в области $\Omega \times \mathbb{R}_+$ называется пара функций $(u(t), v(t))$, принадлежащих пространствам

$$u \in L_{p_1}(0, M; L_{p_1}(\Omega)) \cap L_2(0, M; V),$$

$$v \in L_{p_2}(0, M; L_{p_2}(\Omega)) \cap L_\infty(0, M; V)$$

и удовлетворяющих уравнениям (15), (16) в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(0, M; H^{-r_1}(\Omega) \times H^{-r_2}(\Omega))$ при каждом $M > 0$ (показатели r_1 и r_2 были определены в разделе 1). При $t = 0$ задаются начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0 \in H, \quad v|_{t=0} = v_0 \in V. \qquad (17)$$

Существование слабых решений задачи (15)–(17) доказывается с помощью метода Галёркина, который был описан в разделе 1. Для любого слабого решения имеют место оценки (8) и (9), в которых $\delta = 0$. Кроме того доказано существование слабого решения $(u(t), v(t))$ с любыми начальными условиями (17), которое удовлетворяет (10).

Для построения траекторного аттрактора системы (15), (16) вводится пространство $\mathcal{K}_+^0(N)$ аналогично пространству $\mathcal{K}_+^\delta(N) := \mathcal{K}_+(N)$ системы (1), (2). Пространство $\mathcal{K}_+^0(N)$ состоит из функций $(u(\cdot), v(\cdot)) \in F_+^{\text{loc}}$, которые являются слабыми решениями (15), (16), причем функция $v(\cdot)$ удовлетворят неравенству (11) с теми же константами σ и R.

Аналогично разделу 1 доказывается, что трансляционная полугруппа $\{T(\tau)\}$, действующая в пространстве $\mathcal{K}_+^0(N)$, имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}^0$ в топологии Θ_+^{loc}, который не зависит от N, и справедливо неравенство

$$\sup\{\|v(t)\|_1^2 \mid t \geq 0\} \leq R^2, \quad \forall (u, v) \in \mathfrak{A}^0.$$

Кроме того установлено, что

$$\mathfrak{A}^0 = \Pi_+ \mathcal{K}^0.$$

где $\mathcal{K}^0$ – ядро в $\mathcal{F}^b$ системы (15), (16).

Доказаны следующие основные результаты.

Теорема 2. *Траекторные аттракторы* $\mathfrak{A}^\delta$ *системы* (1), (2) *сходятся при* $\delta \to 0^+$ *в топологии* Θ_+^{loc} *к траекторному аттрактору* $\mathfrak{A}^0$ *системы* (15), (16):

$$\mathfrak{A}^\delta \to \mathfrak{A}^0 (\delta \to 0^+) \ \text{в} \ \Theta_+^{\text{loc}}.$$

Следствие 2. *Ядра* $\mathcal{K}^\delta$ *системы* (1), (2) *сходятся при* $\delta \to 0^+$ *в топологии* Θ^{loc} *к ядру* $\mathcal{K}^0$ *системы* (15), (16):

$$\mathcal{K}^\delta \to \mathcal{K}^0 (\delta \to 0^+) \ \text{в} \ \Theta^{\text{loc}}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08–01–00784 и 07–01–00500).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. N.Y.: Springer, 1988. 648 p.
2. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
3. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics. Providence: Amer. Math. Soc., 2002. 363 p.
4. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1995. V. 321. P. 1309–1314.
5. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // Topol. Meth. Nonlin. Anal. 1996. V. 7. № 1. P. 49–76.
6. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // J. Math. Pures and Appl. 1997. V. 76. P. 913–964.
7. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* // Мат. заметки. 2002. Т. 71. № 2. С. 194–213.
8. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* // Мат. сб. 2005. Т. 196. № 6. С. 17–42.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
10. *Hale J.K.* Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems // Math. Surveys and Monogr. 1988. V. 25. 198 p.
11. *Marion M.* // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. № 4. P. 816–844.