ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 422, № 2, с. 164–168

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

УСРЕДНЕНИЕ ПО ВРЕМЕНИ ГЛОБАЛЬНЫХ АТТРАКТОРОВ НЕАВТОНОМНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ

© 2008 г. М. И. Вишик, В. Пата, В. В. Чепыжов

Представлено академиком В.А. Ильиным 09.04.2008 г.

Поступило 15.04.2008 г.

Некоторые проблемы, связанные с усреднением по времени аттракторов неавтономных уравнений математической физики, рассматривались в [1–4] и других работах. Усреднение глобальных аттракторов диссипативных волновых уравнений с быстро (но несингулярно) осциллирующими членами изучалось в [2, 5–7], а случай сингулярной осцилляции по времени впервые рассмотрен в [8].

1. О ГЛОБАЛЬНЫХ АТТРАКТОРАХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

В ограниченной области $\Omega \Subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 изучается неавтономное диссипативное волновое уравнение с условиями Дирихле на $\partial\Omega$ с неизвестной вещественной функцией $u = u(x, t)$ при $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\begin{gathered}\partial_t^2 u - \Delta u + \gamma\partial_t u = -f(u) + g_0(x, t) + \varepsilon^{-\rho} g_1(x, t/\varepsilon),\\ u|_{\partial\Omega} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$. Параметры $\gamma > 0$ и $\rho \in [0, 1]$ фиксированы. Оператор Лапласа Δ действует в пространстве x. Наряду с уравнением (1) рассматривается усредненное волновое уравнение

$$\begin{gathered}\partial_t^2 u - \Delta u + \gamma\partial_t u = -f(u) + g_0(x, t),\\ u|_{\partial\Omega} = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

которое формально соответствует случаю $\varepsilon = 0$.

Предполагается, что нелинейная функция $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$, и выполнено неравенство

$$\begin{gathered}|f'(v)| \le C(|v|^{d-2} + 1), \quad \forall v \in \mathbb{R},\\ \text{при} \quad 2 \le d \le 4.\end{gathered} \tag{3}$$

Кроме того, при $d > 2$ функция f удовлетворяет условию диссипативности

$$f(v)v \ge \mu|v|^d - C, \quad \forall v \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

для некоторого $\mu > 0$. При $d = 2$ (случай линейного роста f) вместо (4) предполагается, что

$$\liminf_{|v| \to \infty} \frac{f(v)}{v} > -\lambda_1,$$

где λ_1 – первое собственное значение оператора $-\Delta$ при граничном условии Дирихле (см. [9–12]). Отметим, что неравенство (3) при $d = 4$ известно как условие критического роста функции f (см. [13]).

При любом $\varepsilon \in [0, 1]$ функция

$$g^\varepsilon(x, t) := \begin{cases} g_0(x, t) + \varepsilon^{-\rho} g_1(x, t/\varepsilon) & \text{при } \varepsilon > 0,\\ g_0(x, t) & \text{при } \varepsilon = 0\end{cases} \tag{5}$$

определяет внешнюю силу в уравнении (1) или (2). Изучаются свойства глобальных аттракторов $\mathscr{A}^\varepsilon$ уравнения (1), а также их связь с глобальным аттрактором $\mathscr{A}^0$ усредненного уравнения (2) в зависимости от малого параметра ε, который отражает быстрые сингулярные осцилляции по времени внешней силы $g^\varepsilon(x, t)$.

Обозначим через $H^\sigma := D(A^{\sigma/2})$, $\sigma \in \mathbb{R}$, шкалу гильбертовых пространств с нормой $|u|_\sigma := \|A^{\sigma/2} u\|_{L_2(\Omega)}$, которая соответствует строго положительному самосопряженному оператору $A = -\Delta$ в пространстве $H := L_2(\Omega)$ с областью определения $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Известно, что $H^0 = H$, $H^1 = H_0^1(\Omega)$ и $H^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (далее индекс $\sigma = 0$ будем опускать). Вводятся также энергетические пространства $E^\sigma = H^{\sigma+1} \times H^\sigma$ с нормой $\|(u, p)\|_\sigma := [|u|^2_{\sigma+1} + |p|^2_\sigma]^{1/2}$.

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской Академии наук, Москва
Политехнический институт, Милан, Италия

Предполагается, что $g_0, g_1 \in L_1^b(\mathbb{R}; H)$, точнее,

$$\|g_0\|_{L_1^b} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |g_0(s)| ds = M_0,$$

$$\|g_1\|_{L_1^b} := \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |g_1(s)| ds = M_1.$$

Легко проверить, что $\|g^\varepsilon\|_{L_1^b} \le Q^\varepsilon$, где $Q_\varepsilon := M_0 + 2M_1\varepsilon^{-\rho}$ при $\varepsilon > 0$ и $Q_0 := M_0$. Отметим, что при $\varepsilon > 0$ норма внешней силы $g^\varepsilon(t) := g^\varepsilon(\cdot, t)$ в пространстве L_1^b может расти как $\varepsilon^{-\rho}$ при $\varepsilon \to 0^+$.

Перепишем уравнения (1) и (2) в общем виде, добавив к ним начальными условия при $t = \tau$:

$$\partial_t^2 u + Au + \gamma\partial_t u = -f(u) + g^\varepsilon(t), \tag{6}$$

$$u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad \partial_t u|_{t=\tau} = p_\tau. \tag{7}$$

Здесь $\tau \in \mathbb{R}$, а $u_\tau \in H^1$ и $p_\tau \in H$ – известные начальные данные. При любом $\varepsilon \in [0, 1]$ задача (6), (7) имеет и притом единственное решение $u(t) := u(\cdot, t)$, для которого $u \in C_b(\mathbb{R}_\tau; H^1)$ и $\partial_t u \in C_b(\mathbb{R}_\tau; H)$, где $\mathbb{R}_\tau = [0, \infty)$ и C_b обозначает пространство непрерывных ограниченных функций (см. [9–13]). Обозначим

$$y_\tau = (u_\tau, p_\tau), \quad y(t) = (u(t), \partial_t u(t)),$$

где $u(t)$ – решение задачи (6), (7). Тогда $y \in C_b(R_\tau; E)$ и $y(\tau) = y_\tau$. Кроме того, функция $y(t)$ удовлетворяет основной априорной оценке

$$\|y(t)\|_E^2 \le C\|y_\tau\|_E^d e^{-\beta(t-\tau)} + C(1 + Q_\varepsilon^2), \quad \forall t \ge \tau, \tag{8}$$

для некоторых $C > 0$ и $\beta > 0$, которые не зависят от Q_ε, $\tau \in \mathbb{R}$ и $y_\tau \in E$ (см. [9, 10, 12]).

Задача (6), (7) порождает динамический процесс $\{U_\varepsilon(t, \tau)\} := \{U_\varepsilon(t, \tau)| \ t \ge \tau, \tau \in R\}$, действующий в пространстве E по формуле $U_\varepsilon(t, \tau)y_\tau = y(t)$ при всех $y_\tau \in E$. Из (8) следует, что процесс $\{U_\varepsilon(t, \tau)\}$ имеет равномерное (по $\tau \in \mathbb{R}$) поглощающее множество

$$B^\varepsilon = \{y \in E| \ \|y\|_E \le 2C(1 + Q_\varepsilon)\}.$$

Отметим, что диаметр множества B^ε неограниченно растет при $\varepsilon \to 0^+$.

Если $d < 4$, то при любом $\varepsilon \in [0, 1]$ процесс $\{U_\varepsilon(t, \tau)\}$ является равномерно (по $\tau \in \mathbb{R}$) асимптотически компактным и имеет (равномерный) глобальный аттрактор $A^\varepsilon \Subset$ E (см. [12]). Отметим, что данный результат также верен в критическом случае $d = 4$, если предположить, что функции g_0 и g_1 принадлежат более регулярному пространству $L_1^b(\mathbb{R}; H^\kappa)$ при некотором $\kappa > 0$, т.е. (см. [14, 15])

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \{|g_0(s)|_\kappa + |g_1(s)|_\kappa\} ds < \infty.$$

Из включения $\mathscr{A}^\varepsilon \subseteq B^\varepsilon$ находим, что $\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \le 2C(1 + Q_\varepsilon)$, причем легко построить примеры внешних сил $g^\varepsilon(x, t)$ вида (5), для которых $\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \ge \varepsilon^{-\rho}$ при $\varepsilon > 0$. Следовательно, размер глобального аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$ уравнения (6) может расти до бесконечности, когда скорость осцилляций $\frac{1}{\varepsilon} \to \infty$.

2. РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ГЛОБАЛЬНЫХ АТТРАКТОРОВ

Введем обозначение $G_1(t, \tau) = \int_\tau^t g_1(\cdot, s) ds$. Предполагается, что

$$\sup_{t \ge \tau, \tau \in \mathbb{R}} \left\{ |G_1(t, \tau)|_{\vartheta - 1} + \int_t^{t+1} |G_1(t, \tau)|_\vartheta ds \right\} \le l \tag{9}$$

при некотором $l \ge 0$, где

$$\vartheta = \vartheta(d) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ 2 \le d \le 3, \\ 3\left(1 - \dfrac{2}{d}\right) \ \text{ при } \ 3 < d < 4, \\ \dfrac{3}{2} + \delta \ \ (\delta > 0) \ \text{ при } \ d = 4. \end{cases}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено условие* (9), *а в критическом случае* $d = 4$ *дополнительно предполагается, что* $\rho < 1$.

Тогда глобальный аттрактор $\mathscr{A}^\varepsilon$ *равномерно* (*по* $\varepsilon \in [0, 1]$) *ограничен в пространстве* E, *т.е.*,

$$\sup_{\varepsilon \in [0, 1]} \|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E < \infty. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1 основано на изучении зависимости от ε решения вспомогательного линейного волнового уравнения (6), когда $f \equiv 0$ и $g_0 \equiv 0$ при нулевых начальных условиях.

З а м е ч а н и е 1. Если в случае $2 \le d \le 3$ функция $G_1(t, \tau)$ удовлетворяет (9) при $\vartheta = 3\left(1 - \frac{2}{d}\right) < 1$, то вместо (10) справедливо более слабое неравенство

$$\sup_{\varepsilon \in [0, 1]} \|\mathscr{A}^\varepsilon\|_{E^{\vartheta - 1}} < \infty.$$

3. СХОДИМОСТЬ ГЛОБАЛЬНЫХ АТТРАКТОРОВ ПРИ $\varepsilon \to 0^+$

Далее предполагаем, что $\rho < 1$. Изучаем разность $w(t) = u^\varepsilon(t) - u^0(t)$ двух решений уравнения (6) при $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon = 0$ соответственно с одинаковыми начальными условиями

$$u^\varepsilon(\tau) = u^0(\tau) = u_\tau, \quad \partial_t u^\varepsilon(\tau) = \partial_t u^0(\tau) = p_\tau,$$

где $y_\tau = (u_\tau, p_\tau) \in B_\star$ и $B_\star$ – шар в E, которому принадлежат все множества $\mathcal{A}^\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1]$ (см. (10)). Обозначим $y^\varepsilon(t) = (u^\varepsilon(t), \partial_t u^\varepsilon(t))$, $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$.

Л е м м а 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *разность* $w(t) = y^\varepsilon(t) - y^0(t)$ *при* $y^\varepsilon(\tau) = y^0(\tau) = y_\tau \in B_\star$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|w(t)\|_E \le D\varepsilon^{1-\rho}e^{R(t-\tau)}, \quad \forall t \ge \tau, \tag{11}$$

где положительные константы D *и* R *не зависят от* ε, τ *и* $y_\tau \in B_\star$. *Если* $d = 4$, *то* $R = R(\rho)$.

Предполагается, что функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$ являются трансляционно компактными (тр.к.) в пространстве $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$. По определению это означает, что множества

$$\{g_0(t+\tau) |\ \tau \in \mathbb{R}\} \ \text{ и } \ \{g_1(t+\tau) |\ \tau \in \mathbb{R}\}$$

являются предкомпактными в пространстве $L_1(-T, T; H)$ при каждом $T > 0$ (см. [12]). Отметим, что почти-периодические функции из пространства $C_b(\mathbb{R}; H)$ являются частным случаем тр.к. функций. Легко видеть, что при любом $\varepsilon \in (0, 1]$ функция $g^\varepsilon(t) = g_0(t) + \varepsilon^{-\rho}g_1(t/\varepsilon)$ также является тр.к. в $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$. Пусть $\mathcal{H}(g^\varepsilon)$ обозначает оболочку в $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ функции g^ε, которая определяется по формуле

$$\mathcal{H}(g^\varepsilon) := \left\{\begin{matrix} \hat{g} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H) |\ \exists\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}, \text{ такая,} \\ \text{что } g^\varepsilon(t+\tau_n) \to \hat{g}(t) \\ \text{сильно в } L_1(-T, T; H) \text{ при } n \to \infty \\ \text{для каждого } T > 0 \end{matrix}\right\}.$$

Легко показать, что при $\varepsilon > 0$ любая функция $\hat{g} \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$ представима в виде $\hat{g}^\varepsilon(t) = \hat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\rho}\hat{g}_1(t/\varepsilon)$ для некоторых $\hat{g}_0 \in \mathcal{H}(g_0)$ и $\hat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$ ($\mathcal{H}(g_0)$ и $\mathcal{H}(g_1)$ – оболочки функций g_0 и g_1 соответственно). Кроме того,

$$\|\hat{g}\|_{L_1^b} \le \|g^\varepsilon\|_{L_1^b} \le Q_\varepsilon, \quad \forall \hat{g} \in \mathcal{H}(g^\varepsilon), \tag{12}$$

и, следовательно, уравнение

$$\partial_t^2\hat{u} + A\hat{u} + \gamma\partial_t\hat{u} = -f(\hat{u}) + \hat{g}(t) \tag{13}$$

порождает динамический процесс в E, который обозначается $\{U_{\hat{g}}(t, \tau)\}$. В силу (12) процессы $\{U_{\hat{g}}(t, \tau)\}$ при $\hat{g} \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$ обладают теми же свойствами, что и процесс $\{U_\varepsilon(t, \tau)\}$, отвечающий исходной внешней силе g^ε. Ядром $\mathcal{K}_{\hat{g}}$ процесса $\{U_{\hat{g}}(t, \tau)\}$ с внешней силой $\hat{g} \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$ называется семейство решений $\hat{z}(t) = (\hat{u}(t), \partial_t\hat{u}(t))$ уравнения (13), заданных при всех $t \in \mathbb{R}$, которые являются равномерно ограниченными в E: $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\hat{z}(t)\|_E < \infty$. Множество $\mathcal{K}_{\hat{g}}(\tau) = \{\hat{z}(\tau) |\ \hat{z} \in \mathcal{K}_{\hat{g}}\} \subset E$ называется сечением ядра в момент времени $t = \tau$. В [12] получено следующее представление глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ процесса $\{U_\varepsilon(t, \tau)\}$ при $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \bigcup_{\hat{g} \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)} \mathcal{K}_{\hat{g}}(\tau). \tag{14}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\rho < 1$, *функции* $g_0(t)$ *и* $g_1(t)$ *являются тр.к. в* $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, *а функция* $G_1(t, \tau)$ *удовлетворяет* (9).

Тогда глобальные аттракторы $\mathcal{A}^\varepsilon$ *сходятся к* $\mathcal{A}^0$ *относительно отклонения по Хаусдорфу множеств в* E *при* $\varepsilon \to 0^+$, *т.е.*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\{\mathrm{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0)\} = 0.$$

Напомним, что отклонение по Хаусдорфу множества B_1 от множества B_2 в пространстве E равно $\mathrm{dist}_E(B_1, B_2) = \sup_{b_1\in B_1}\inf_{b_2\in B_2}\|b_1 - b_2\|_E$. При доказательстве теоремы 2 используется свойство равномерной ограниченности аттракторов (10), оценка разности решений (11), а также представление аттракторов (14).

З а м е ч а н и е 2. При $\rho = 1$ утверждение теоремы 2 не верно. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть уравнение

$$\partial_t^2 u + Au + \gamma\partial_t u = -\varepsilon^{-1}\sin(t/\varepsilon)e, \tag{15}$$

которое является частным случаем (6) при $f \equiv g_0 \equiv 0$, $g_1(t) = -\sin(t)$ и $\rho = 1$ (здесь e – любая собственная функция оператора A). Для уравнения (15) имеется явная формула для единственного элемента его ядра $z^\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, причем

$$z^\varepsilon(t) \sim (\varepsilon\sin(t/\varepsilon)e, \cos(t/\varepsilon)e)$$

при малых ε. Тогда в силу (14) $\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E = 1$, в то время как $\mathcal{A}^0 = \{0\}$. Следовательно, $\mathrm{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \nrightarrow 0$ при $\varepsilon \to 0^+$.

Замечание 3. В условиях теоремы 2, если $2 \le d \le 3$ и функция $G_1(t, \tau)$ удовлетворяет (9) при $\vartheta = 3\left(1 - \frac{2}{d}\right) < 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \{\mathrm{dist}_{E^{\vartheta-1}}(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0)\} = 0.$$

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО ГЁЛЬДЕРУ АТТРАКТОРОВ $\mathcal{A}^\varepsilon$ ПРИ $\varepsilon = 0$

В заключение приводится явная оценка вида $M\varepsilon^\eta$ для хаусдорфова отклонения $\mathrm{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0)$ при условии, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ является экспоненциальным. Глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ процесса $\{U(t, \tau)\}$ в пространстве E называется экспоненциальным с показателем $\nu > 0$, если существует возрастающая положительная функция $\mathcal{G}$, такая, что для любого ограниченного в E множества B

$$\mathrm{dist}_E(U(t, \tau)B, \mathcal{A}) \le \mathcal{G}(\|B\|_E)e^{-\nu(t-\tau)},$$
$$\forall t \ge \tau, \tau \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и, кроме того, глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ является экспоненциальным с показателем $\nu > 0$. Тогда*

$$\mathrm{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \le M\varepsilon^\eta, \tag{16}$$

где $M = M(g_0, g_1, \rho)$ *и* $\eta = \frac{\nu(1-\rho)}{R+\nu}$, *а R – из оценки* (11).

Замечание 4. Опять (см. замечания 1 и 3) если 2 $d \le 3$ и $G_1(t, \tau)$ удовлетворяет (9) при $\vartheta = 3\left(1 - \frac{2}{d}\right) < 1$, то

$$\mathrm{dist}_{E^{\vartheta-1}}(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \le M\varepsilon^\eta.$$

Наконец дадим два примера волновых уравнений вида (6), для которых глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ усредненного уравнения является экспоненциальным.

Пример 1. Автономные уравнения с регулярными аттракторами. Предполагается, что функция g_0 не зависит от времени, $g_0(t) \equiv g_0 \in H$. Тогда уравнение (6) при $\varepsilon = 0$ является автономным и отображения $S(t) = U_{g_0}(t, 0)$, $t \ge 0$, образуют сильно непрерывную полугруппу в E. В этом случае глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ строго инвариантен относительно полугруппы $\{S(t)\}$: $S(t)\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}^0$ при $t \ge 0$. Кроме того, существует глобальная функция Ляпунова $\mathcal{L}$: $E \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\mathcal{L}(y^0(t)) - \mathcal{L}(y^0(\tau)) = -\int_\tau^t |\partial_t u^0(s)|^2 ds,$$

где $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$ – любое решение (6) при $\varepsilon = 0$ (см. [9, 11]). Кроме того, если известно, что стационарное уравнение

$$Au + f(u) = g_0$$

имеет лишь конечное число решений $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ в H^1 и все они являются гиперболическими (см. [9, 11]), то глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ совпадает с объединением неустойчивых многообразий $\mathcal{M}^u(w_j)$, выходящих из w_j: $\mathcal{A}^0 = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{M}^u(w_j)$, и, более того, аттрактор $\mathcal{A}^0$ является экспоненциальным с некоторым показателем $\nu > 0$. Следовательно, в этом случае справедливо неравенство (16).

Пример 2. Волновые уравнения типа сайн-Гордона с плоской нелинейностью. Предполагается, что

$$K := \sup_{v \in \mathbb{R}} |f'(v)| < \lambda_1, \quad \gamma^2 \ge 2(\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - K^2}) \tag{17}$$

(случай $d = 2$). Тогда для любой функции $g \in L_1^b(\mathbb{R}; H)$ уравнение (6) с внешней силой $g(t)$ имеет единственное глобальное ограниченное решение $z_g \in C_b(\mathbb{R}; E)$, которое является экспоненциально устойчивым, т.е. найдется $\kappa > 0$ такое, что для любого $y_\tau \in E$

$$\|U(t, \tau)y_\tau - z_g(t)\|_E = \mathcal{G}(\|y_\tau\|_E)e^{-\kappa(t-\tau)}, \quad \forall t \ge \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

для некоторой возрастающей положительной функции $\mathcal{G}$, зависящей от $\|g\|_{L_1^b}$ (см. [6]). Применяя неравенство (18) к исходной тр.к. внешней силе $g^\varepsilon(t)$, находим, что соответствующий глобальный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon$ является экспоненциальным с показателем κ при любом $\varepsilon \in [0, 1]$. Более того, доказано, что при выполнении условий (17) в лемме 1 показатель $R = 0$. В этом случае, применяя теорему 3, приходим к неравенству

$$\mathrm{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \le M\varepsilon^{1-\rho}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08–01–00784 и 07–01–00500), Italian PRIN Research Project 2006, а также стипендии Cariplo Foundation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hale J.K., Verduyn Lunel S.M.* // J. Integr. Equat. Appl. 1990. V. 2. № 4. P. 463–494.
2. *Ильин А.А.* // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 5. С. 15–58.
3. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 1. С. 11–47.
4. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // El. J. ESAIM: COCV. 2002. V. 8. P. 467–487.
5. *Вишик М.И., Фидлер Б.* // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 75–94.
6. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I., Wendland W.L.* // Discrete Cont. Dyn. Syst. 2005. V. 12. P. 27–38.
7. *Zelik S.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 2006. V. 136. P. 1053–1097.
8. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* // Мат. заметки. 2006. Т. 79. № 4. С. 522–545.
9. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
10. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. N.Y.: Springer, 1988. 648 p.
11. *Hale J.K.* Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems. Math. Surveys and Mon. Providence: Amer. Math. Soc., 1988. V. 25. 198 p.
12. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics. Providence: Amer. Math. Soc., 2002. 363 p.
13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
14. *Grasselli M., Pata V.* // Discrete Cont. Dyn. Syst. 2003. Supl. P. 351–358.
15. *Grasselli M., Pata V.* // Communs Pure and Appl. Anal. 2004. V. 3. P. 849–881.