ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2007, том 413, № 3, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР НЕАВТОНОМНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА С СИНГУЛЯРНО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ

© 2007 г. М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Представлено академиком В.А. Ильиным 15.03.2006 г.

Поступило 12.05.2006 г.

Глобальные аттракторы автономной и неавтономной 2D системы Навье–Стокса (НС) были изучены во многих статьях и книгах (см. [1–3] и цитируемую там литературу). Вопросы гомогенизации и усреднения глобальных аттракторов 2D системы НС и других уравнений математической физики, содержащих быстро осциллирующие члены, также были исследованы во многих публикациях (см., например, [5–9]).

В настоящем сообщении изучается глобальный аттрактор $\mathscr{A}^\varepsilon$ неавтономной 2D системы НС вида

$$\begin{gathered}\partial_t u + \nu L u + B(u,u) = g_0(x,t) + \varepsilon^{-\rho} P g_1(x/\varepsilon, t),\\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,\\ u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t)), \quad x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^2_x,\\ 0 \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_t,\end{gathered} \tag{1}$$

в которой с помощью стандартного метода исключено давление $p(x, t)$. В системе (1) $Lu = -P\Delta u$, $B(u, u) = P[u^1\partial_{x_1} u + u^2\partial_{x_2} u]$, где P – проектор Лэре из $(L_2(\Omega))^2$ на пространство H. Вместе с пространством H рассматривается более гладкое пространство V. Напомним, что H и V являются замыканиями линейного пространства $\mathscr{V}_0 := \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^2 | \operatorname{div} v = 0\}$ соответственно в нормах $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ пространств $L_2(\Omega)^2$ и $H_0^1(\Omega)^2$ (см. [10–12, 2, 13]). В системе (1) $\nu > 0$, $1 \ge \rho > 0$, а число ε – малый параметр. Внешнюю силу обозначим через $g^\varepsilon(x, t) := g_0(x, t) + \varepsilon^{-\rho} P g_1(x/\varepsilon, t)$.

Предполагается, что $g_0(x, t) \in L_2^b(\mathbb{R}; H)$ и $g_1(z, t) \in L_2^b(\mathbb{R}; Z)$, точнее,

$$\|g_0\|^2_{L_2^b(\mathbb{R};H)} := \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_\tau^{\tau+1} (\|g_0(\cdot,s)\|^2_H) ds < +\infty, \tag{2}$$

$$\|g_1\|^2_{L_2^b(\mathbb{R};Z)} := \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_\tau^{\tau+1} (\|g_1(\cdot,s)\|^2_Z) ds < +\infty, \tag{3}$$

где пространство $Z = L_2^b(\mathbb{R}^2_z; \mathbb{R}^2)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_z$, причем функция $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z)) \in Z$, если

$$\|\varphi(\cdot)\|^2_Z := \sup_{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2} \int_{z_1}^{z_1+1}\int_{z_2}^{z_2+1} |\varphi(\zeta_1,\zeta_2)|^2 d\zeta_1 d\zeta_2 < +\infty.$$

Как известно,

$$\|B(u,u)\|_{V'} \le c_1^2 |u|\|u\|, \quad \forall u \in V, \tag{4}$$

где константу $c_1 = c_0$ можно, например, взять из известного неравенства Ладыженской $\|f\|_{L_4(\Omega)} \le c_0|f|^{1/2}|\nabla f|^{1/2}$, которое выполнено при всех $f \in H_0^1(\Omega)$ [10, 12, 13]. В неравенстве (4) через V' обозначено пространство, сопряженное к V.

При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ задача Коши для системы (1) с начальным условием

$$u|_{t=\tau} = u_\tau(x), \quad u_\tau \in H, \tag{5}$$

имеет, и притом единственное, решение в слабом смысле, точнее, $u(t) \in C(\mathbb{R}_\tau; H)$ $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_\tau; V)$, $\partial_t u \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_\tau; V')$, где $\mathbb{R}_\tau = [\tau, +\infty)$ (см. [10, 12, 2, 3]). Это решение $u(t)$ удовлетворяет энергетическому равенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 = \langle u(t), g^\varepsilon(t)\rangle, \quad \forall t \ge \tau. \tag{6}$$

Из равенства (6) с помощью стандартных преобразований получаем следующие неравенства для слабых решений $u(t)$ системы (1):

$$|u(t)|^2 \le |u(\tau)|^2 e^{-\nu\lambda_1(t-\tau)} + D\|g^\varepsilon\|^2_{L_2^b(\mathbb{R};H)}, \tag{7}$$

Институт проблем передачи информации Российской Академии наук, Москва

$$|u(t)|^2 + \nu\int_\tau^t \|u(s)\|^2 ds \le |u(\tau)|^2 + \frac{1}{\nu\lambda_1}\int_\tau^t |g^\varepsilon(s)|^2 ds, \quad \forall t \ge \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где $D = \frac{1}{\nu\lambda_1}\left(1 + \frac{1}{\nu\lambda_1}\right)$ и λ_1 обозначает первое собственное значение оператора Стокса L.

Если функции $g_0(x, t)$ и $g_1(z, t)$ являются трансляционно-ограниченными, т.е. выполнены условия (2) и (3), то уравнение (1) порождает процесс $\{U_\varepsilon(t, \tau)\} := \{U_\varepsilon(t, \tau), t \ge \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$, действующий в H по формуле $U_\varepsilon(t, \tau)u_\tau = u(t)$, $t \ge \tau$, где $u_\tau \in H$, а $u(t)$ – решение уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию (5). Этот процесс $\{U_\varepsilon(t, \tau)\}$ имеет равномерный (по $\tau \in \mathbb{R}$) глобальный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon$, ограниченный по норме пространств H и V при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. С помощью (7) и (8) доказано, что

$$|\mathcal{A}^\varepsilon| \le C_0 + C_1\varepsilon^{-\rho}, \quad \forall\varepsilon > 0 \ (\rho > 0), \tag{9}$$

причем константы C_0 и C_1 не зависят от ε и ρ. Из (9) следует, что размеры в H аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ могут стремиться к бесконечности при $\varepsilon \to 0+$.

Наряду с исходной системой НС (1) рассматривается "предельная" система

$$\begin{gathered} \partial_t u + \nu L u + B(u, u) = g_0(x, t), \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Это уравнение также порождает процесс $\{U_0(t, \tau)\}$, действующий в H по формуле $U_0(t, \tau)u_\tau = u(t)$, $t \ge \tau$, где $u(t)$ – решение (10) с начальным условием $u(\tau) = u_\tau$. Процесс $\{U_0(t, \tau)\}$ имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$, ограниченный по норме пространств H и V, и в частности $|\mathcal{A}^0| \le C_0$ (ср. с (9)).

Пусть теперь функция $g_1(z, t)$ допускает следующее дивергентное представление по переменной z:

$$\begin{gathered} g_1(z_1, z_2, t) = \partial_{z_1}G_1(z_1, z_2, t) + \partial_{z_2}G_2(z_1, z_2, t), \\ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{11}$$

причем функции $G_j(z, t) \in L_2^b(\mathbb{R}; Z)$, $\partial_{z_j} G_j(z, t) \in L_2^b(\mathbb{R}; Z)$ при $j = 1, 2$, т.е. они удовлетворяют условиям конечности нормы в $L_2^b(\mathbb{R}; Z)$ типа (3).

Т е о р е м а 1. *При выполнении дивергентного условия* (11) *глобальный аттрактор* $\mathcal{A}^\varepsilon$ *равномерно* (по ε) *ограничен в* H:

$$|\mathcal{A}^\varepsilon| \le C_2, \quad \forall\varepsilon \in \,]0, 1] \ (0 < \rho \le 1). \tag{12}$$

(Заметим, что множество $\mathcal{A}^\varepsilon$ может не быть равномерно ограниченным по ε в норме пространства V даже при выполнении условия (11).)

Изучается отклонение $w(x, t) = u^\varepsilon(x, t) - u^0(x, t)$ решения $u^\varepsilon(x, t)$ уравнения (1) от решения $u^0(x, t)$ уравнения (10), которые удовлетворяют одинаковым начальным условиям $u^\varepsilon(x, \tau) = u^0(x, \tau)$.

Т е о р е м а 2. *Если функция* $g_1(z, t)$ *допускает дивергентное представление* (11), *то имеет место следующая оценка для нормы в* H *функции* $w(x, t)$:

$$|w(t)| \le \varepsilon^{1-\rho} C e^{r(t-\tau)}, \ \forall t \ge \tau, \ \tau \in \mathbb{R}, \ \forall\varepsilon, \ 0 < \varepsilon \le 1, \tag{13}$$

где константы C *и* r *не зависят от* ε *и* $0 \le \rho \le 1$.

Функция $g_0(x, t)$ называется трансляционно-компактной (т.к.) в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, если семейство любых ее сдвигов по t: $\{g_0(x, t+h) \mid h \in R\}$ образует предкомпактное множество в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, снабженном топологией локальной сходимости по норме пространств $L_2(-M, M; H)$ при любом $M > 0$. Аналогично определяется т.к. функции $g_1(z, t)$ в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; Z)$, причем H следует заменить на пространство Z. В [3] приведены необходимые и достаточные условия трансляционной компактности функций со значениями в различных функциональных пространствах. Отметим, что функции, почти периодические (п.п.) по t, со значениями в банаховом пространстве E являются т.к.. в пространстве $C_b(\mathbb{R}; E)$, а значит, они являются т.к.. и в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; E)$. Заметим, что класс т.к. функций значительно шире, чем указанный выше класс п.п. функций. Понятие т.к. функции оказалось весьма эффективным при исследовании неавтономных динамических систем и их аттракторов.

Напомним, что оболочкой т.к.. функции $f(t)$ в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; E)$ называется множество $\mathcal{H}(f) := [\{f(t+h) | h \in \mathbb{R}\}]_{L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; E)}$, где $[\cdot]_X$ обозначает замыкание множества в пространстве X.

У т в е р ж д е н и е 1. *Если функция* $g_1(z, t)$ *является т.к. в* $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; Z)$, *то при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *и* $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$ *функция* $g_1(x/\varepsilon, t)$ *является тр.к. в* $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\Omega)^2)$.

Предполагается что функция $g_0(x, t)$ является т.к. в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, а функция $g_1(z, t)$ – т.к.. в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; Z)$. Тогда в силу утверждения 1 внешняя сила $g^\varepsilon(x, t) := g_0(x, t) + \varepsilon^{-\rho}Pg_1(x/\varepsilon\ t)$ в уравнении (1) является т.к. в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$.

Для описания структуры глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ уравнения (1) рассматривается семейство уравнений

$$\begin{gathered}\partial_t u + \nu L u + B(u, u) = \hat{g}^\varepsilon(x, t),\\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,\end{gathered} \tag{14}$$

где $\hat{g}^\varepsilon(x, t) \in \mathcal{H}(g^\varepsilon(x, t))$. Здесь $\mathcal{H}(g^\varepsilon(x, t))$ обозначает оболочку в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$ т.к. функции $g^\varepsilon(x, t)$. Для любой внешней силы $\hat{g}^\varepsilon(x, t) \in \mathcal{H}(g^\varepsilon(x, t))$ уравнение (14) порождает процесс $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, действующий в H. Отметим, что процессы $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$ обладают теми же свойствами, что и процесс $\{U_{g^\varepsilon}(t, \tau)\} = \{U_\varepsilon(t, \tau)\}$, отвечающий исходному уравнению (1) с внешней силой $g^\varepsilon(x, t) := g_0(x, t) + \varepsilon^{-\rho} P g_1(x/\varepsilon, t)$.

Определение 1. Ядром $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$ уравнения (14) называется семейство всех его полных решений $\{u(t),\, t \in \mathbb{R}\}$, которые равномерно ограничены по норме пространства H: $\sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| < \infty$. Множество $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}(s) = \{u(s) |\, u \in \mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}\} \subset H$ называется сечением ядра $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$ в момент времени $t = s$.

Имеет место следующее соотношение, относящееся к структуре глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ уравнения (1) (см. [3]):

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \bigcup_{\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)} \mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}(0),$$

причем число 0 можно заменить на любое $s \in \mathbb{R}$. Для глобального аттрактора $\mathcal{A}^0$ "предельного" уравнения (10) справедлива аналогичная формула, если рассмотреть соответствующее семейство уравнений НС с внешними силами $\hat{g}_0(x, t) \in \mathcal{H}(g_0(x, t))$ и построить ядра $\mathcal{K}_{\hat{g}_0}$ этих уравнений.

Справедлива следующая основная

Теорема 3. *Пусть функции $g_0(x, t)$ и $g_1(z, t)$ являются т.к. в указанных выше пространствах и функция $g_1(z, t)$ допускает дивергентное представление* (11).

Тогда глобальный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon$ уравнения (1) *стремится при $\varepsilon \to 0+$ по норме H к глобальному аттрактору $\mathcal{A}^0$ "предельного" уравнения* (10) *в следующем смысле*:

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \to 0 \ (\varepsilon \to 0+).$$

(Здесь $\operatorname{dist}_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|_H$ обозначает несимметричное хаусдорфово отклонение в H множества $\mathcal{X}$ от множества $\mathcal{Y}$.)

Рассмотрим теперь 2D систему НС (1) при условии, что число Грасхофа G_0 "предельной" системы (10) с внешней силой $g_0(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$G_0 := \frac{\|g_0\|_{L_2^b(\mathbb{R};\, H)}}{\lambda_1 \nu^2} < \frac{1}{c_1}, \tag{15}$$

где константа c_1 взята из неравенства (4). При выполнении этого условия "предельное" уравнение (10) имеет единственное ограниченное полное решение $\{y_{g^0}(t),\, t \in \mathbb{R}\}$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |y_{g^0}(t)| < \infty$, причем это решение притягивает любое другое решение $u_{g^0}(t)$ "предельного" уравнения с экспоненциальной скоростью при $t \to +\infty$, т.е.

$$\begin{gathered}\left|u_{g^0}(t) - y_{g^0}(t)\right| \le C\left|u_{g^0}(\tau) - y_{g^0}(\tau)\right| e^{-\beta(t-\tau)} \ \forall t \ge \tau,\\ (C > 0,\ \beta > 0)\end{gathered} \tag{16}$$

(см. [14]). Тогда для глобального аттрактора $\mathcal{A}^0$ "предельного" уравнения справедливо следующее представление:

$$\mathcal{A}^0 = [\{y_{g^0}(t) |\ t \in \mathbb{R}\}]_H.$$

Из (21) следует, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ является экспоненциальным, т.е. он притягивает любые ограниченные в H множества начальных условий с экспоненциальной скоростью.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, *и число грасхофа G_0 "предельной" системы Н.-С.* (10) *удовлетворяет неравенству* (15).

Тогда для хаусдорфова отклонения глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ системы (1) *от глобального аттрактора $\mathcal{A}^0$ "предельной" системы* (1) *имеет место оценка*

$$\operatorname{dist}_H(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \le C(\rho)\varepsilon^{1-\rho}, \ \forall \varepsilon,\ 0 < \varepsilon \le 1. \tag{17}$$

Здесь $0 \le \rho < 1$, $C(\rho) > 0$ и $C(\rho)$ зависит также от ν, $\|g_0\|_{L_2^b(\mathbb{R};\, H)}$ *и* $\|g_1\|_{L_2^b(\mathbb{R};\, Z)}$.

Отметим, что разработанные методы можно успешно применять к изучению различных неавтономных уравнений и систем с сингулярно осциллирующими членами, возникающих в различных задачах математической физики.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 05–01–00390 и 04–01–00735), CRDF (грант RUM1–2654–MO–05), а также Фонда содействия отечественной науке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. N.Y.: Springer, 1988. 648 p.

2. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
3. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics. Providence: AMS, 2002. 363 p.
4. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* // Мат. сб. 2005. Т. 196. № 6. С. 17–42.
5. *Hale J.K., Verduyn Lunel S.M.* // J. Int. Equat. Appl. 1990. V. 2. № 4. P. 463–494.
6. *Ильин А.А.* // Мат. сб. 1996. Т. 187. № 5. С. 15–58.
7. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 1. С. 11–47.
8. *Вишик М.И., Фидлер Б.* // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 75–94.
9. *Efendiev M., Zelik S.* // Ann. Inst. H.Poincaré. 2002. V. 19. № 6. P. 961–989.
10. *Ладыженская О.А.* Математическая теория вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
12. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1972.
13. *Constantin P., Foias C.* Navier–Stokes equations. Chicago; L.: Univ. Chicago Press, 1989.
14. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // El. J. ESAIM: COCV. 2002. V. 8. P. 467–487.