ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2007, том 417, № 3, с. 1–5

МАТЕМАТИКА

УДУ 517.958

ТРАЕКТОРНЫЙ АТТРАКТОР 2*d* УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА С ДИССИПАЦИЕЙ И ЕГО СВЯЗЬ С СИСТЕМОЙ НАВЬЕ–СТОКСА ПРИ ИСЧЕЗАНИИ ВЯЗКОСТИ

© 2007 г. М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Представлено академиком В.А. Ильиным 25.04.2007 г.

Поступило 16.05.2007 г.

В книге [1 гл. 4] изучаются крупномасштабные геофизические процессы, происходящие в атмосфере и океане. Эти явления можно описать уравнениями, которые получаются из двумерной системы Эйлера добавлением весьма важного для приложений диссипативного члена $-ru$. Отметим, что такие уравнения исследовались в математической литературе (см., например, [2–4]).

1. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ 2*d* УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА С ДИССИПАЦИЕЙ

Рассматривается система уравнений для двумерного пространственно-периодического поля скоростей $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$, $t \geq 0$, вида

$$\begin{aligned} \partial_t u + B(u, u) + ru &= g(x), \\ \nabla \cdot u := \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R} \bmod 2\pi)^2$ – двумерный тор. В (1) коэффициент диссипации $r > 0$, $B(u, u) = P(u_1\partial_{x_1} u + u_2\partial_{x_2} u)$, где P обозначает ортогональный оператор Лере, проектирующий пространство $L_2(\mathbb{T}^2)^2$ на $H = [\{v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)^2 \mid \nabla \cdot v = 0\}]_{L_2(\mathbb{T}^2)^2}$. Здесь $[X]_E$ обозначает замыкание множества X в топологии пространства E.

Градиент функции давления в исходной системе устранен с помощью применения к обеим частям уравнений оператора P. Кроме того, предполагается, что в системе (1) внешняя сила $g(x) \in H^1$, где $H^1 = [\{v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)^2 | \nabla \cdot v = 0\}]_{H^1(\mathbb{T}^2)^2} \Subset H$ (аналогично определяется шкала пространств H^s, $s \in \mathbb{R}$, $H^0 = H$). Нормы в пространствах H и H^1 обозначаются соответственно через $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$.

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской Академии наук, Москва

В момент времени $t = 0$ задается начальное поле скоростей

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) \in H^1. \tag{2}$$

Существование слабого решения $\{u(x, t), t \in \mathbb{R}_+\}$ задачи (1), (2) доказывается, например, с помощью метода Галёркина. При этом используется ортонормированный в H базис $\{e_j(x) = e_{j1}(x), e_{j2}(x) \in H^1, j = 1, 2, \ldots\}$, состоящий из собственных функций оператора Стокса: $-P\Delta e_j = \lambda_j e_j$, $j = 1, 2, \ldots$ Отметим, что в пространствах H^s с периодическими граничными условиями оператор Стокса $-P\Delta = -\Delta$. Приближения Галёркина $u_m(x, t) = \sum_{j=1}^{m} c_{jm}(t)e_j(x)$ удовлетворяют системе обыкновенных уравнений и начальным условиям вида

$$\partial_t u_m + \Pi_m B(u_m, u_m) + ru_m = \Pi_m g(x), \tag{3}$$

$$u_m(\cdot, 0) = \Pi_m u_0(\cdot), \tag{4}$$

где Π_m обозначает ортогональный проектор в H на конечномерное подпространство $[e_1(x), e_2(x), \ldots, e_m(x)]$. Задача Коши (3), (4) имеет и притом единственное решение $u_m(x, t) \in C([0, T_m]; H^1)$ для некоторого $T_m > 0$. Умножив уравнение (3) скалярно в H на u_m и воспользовавшись известным тождеством $(B(u, u), u) = 0$ при $u \in H^1$, получаем после элементарных преобразований равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + r|u_m(t)|^2 = (g, u_m(t)), \quad \forall t \in [0, T_m]. \tag{5}$$

Из этого дифференциального соотношения следует неравенство

$$|u_m(t)|^2 \leq |u_m(0)|^2 e^{-rt} + r^{-1}|g|^2, \quad \forall t \in [0, T_m]. \tag{6}$$

Умножив скалярно в H обе части (3) на функцию $-P\Delta u_m = -\Delta u_m$ и воспользовавшись тем, что $-(u_m, \Delta u_m) = |\nabla u_m|^2$, получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_m(t)|^2 - (B(u_m, u_m), \Delta u_m) + r|\nabla u_m(t)|^2 =$$
$$= (\nabla g, \nabla u_m(t)), \quad \forall t \in [0, T_m].$$

В случае периодических граничных условий $(B(u, u), \Delta u) = 0$ (см. [5]). Поэтому

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_m(t)|^2 + r|\nabla u_m(t)|^2 = (\nabla g, \nabla u_m(t)), \quad \forall t \in [0, T_m]. \tag{7}$$

Из (7) следует (аналогично тому, как из (5) вытекает (6)), что

$$|\nabla u_m(t)|^2 \le |\nabla u_m(0)|^2 e^{-rt} + r^{-1}|\nabla g|^2, \quad \forall t \in [0, T_m]. \tag{8}$$

Наконец, складывая неравенства (6) и (8), получаем основную оценку

$$\|u_m(t)\|^2 \le \|u_m(0)\|^2 e^{-rt} + r^{-1}\|g\|^2, \quad \forall t \in [0, T_m], \tag{9}$$

где $\|v\|^2 = |v|^2 + |\nabla v|^2$. Из этого неравенства выводится, что решение $u_m(x, t)$ задачи (3), (4) продолжается на $\mathbb{R}_+$ (т.е. $T_m = +\infty$), причем $u_m(x, t) \in C_b(\mathbb{R}_+; H^1)$.

Поскольку $u_0(\cdot) \in H^1$, то начальное условие системы (3)

$$u_m(\cdot, 0) = \Pi_m u_0(\cdot) \to u_0(\cdot) \ (m \to \infty) \ \text{ сильно в } H^1. \tag{10}$$

Неравенство (9) влечет существование подпоследовательности $\{m'\} \subset \{m\}$, такой, что

$$u_{m'}(\cdot, t) \rightharpoonup u(\cdot, t) \ (m' \to \infty) \quad \text{*-слабо в } L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1) \tag{11}$$

для некоторой функции $u(x, t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1)$. Утверждается, что $u(x, t)$ является слабым решением задачи (1), (2) для уравнений Эйлера с диссипацией. В самом деле, из уравнений (3) находим, что

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_m\|_{H^{-1}} &\le \|B(u_m, u_m)\|_{H^{-1}} + r\|u_m\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^{-1}} \le \\ &\le C(\|u_m\|^2_{L_4(\mathbb{T}^2)^2} + \|u_m\|_{H^1} + \|g\|_{H^1}) \le \\ &\le C_1(\|u_0\|^2_{H^1} + \|g\|^2_{H^1} + 1), \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{12}$$

При этом мы воспользовались неравенством Ладыженской (см. [6]) и оценкой (9).

Из (11) и (12) следует, что

$$\partial_t u_{m'}(\cdot, t) \rightharpoonup \partial_t u(\cdot, t) \ (m' \to \infty) \quad \text{*-слабо в } L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}). \tag{13}$$

Далее доказывается, что

$$u_{m'}(\cdot, t) \rightharpoonup u(\cdot, t) \ (m' \to \infty) \quad \text{сильно в } L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H), \tag{14}$$

а из (13) и (14) получаем (см. [7, 8]), что

$$B(u_{m'}, u_{m'}) \rightharpoonup B(u, u) \ (m' \to \infty) \quad \text{*-слабо в } L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}). \tag{15}$$

Теперь, имея соотношения (11), (13) и (15), в уравнении (3) можно совершить предельный переход при $m' \to \infty$ в пространстве обобщенных функций $D'(\mathbb{R}_+; H^{-1})$ (см. [7]) и получить, что найденная функция $u(x, t)$ является слабым решением уравнения (1) в смысле пространства $D'(\mathbb{R}_+; H^{-1})$, а из (10) следует, что $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию (2). Наконец, из неравенства (9) находим, что предельная функция $u(x, t)$ удовлетворяет оценке

$$\operatorname{ess\,sup}\{\|u(t+s)\|^2 \,|\, s \ge 0\} \le \|u(0)\|^2 e^{-rt} + r^{-1}\|g\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{16}$$

Утверждение 1. *Для любого* $u_0(x) \in H^1$ *задача* (1), (2) *имеет слабое решение* $u(x, t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1)$, *которое удовлетворяет неравенству* (16).

Замечание 1. *Заметим, что любое слабое решение* $u(x, t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1)$ *задачи* (1), (2) *удовлетворяет энергетическому тождеству*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + r|u(t)|^2 = (g, u(t)), \ \forall t \ge 0,$$

в котором функция $|u(t)|^2$ *является абсолютно непрерывной* (ср. с (5)), *однако для выполнения аналогичного тождества* (см. (7)) *для функции* $|\nabla u(t)|^2$ *при* $t \ge 0$ (*или вытекающего из него неравенства вида* (8)) *гладкости слабого решения не хватает.*

Замечание 2. Единственность решения задачи (1), (2) в классе $L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1)$ доказать не удается. Здесь наблюдается аналогия с известными результатами для классического уравнения Эйлера (1) при $r = 0$, для которого доказаны теоремы существования и единственности в классе функций $u(x, t)$, у которых вихрь $\nabla \times u := \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \in L_\infty(\mathbb{R}_+; L_\infty(\mathbb{T}^2))$ при условии, что $\nabla \times u_0 \in L_\infty(\mathbb{T}^2)$ (см. [9, 10]). Эти результаты можно распространить на случай уравнений Эйлера с диссипацией (1) при $r > 0$. Однако, как видно из дальнейшего, при исследовании траекторных аттракторов системы (1) теорема о единственности решений не требуется.

2. ТРАЕКТОРНЫЙ АТТРАКТОР СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА С ДИССИПАЦИЕЙ

Введем пространства $\mathcal{F}_+^\infty$ и $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$:

$$\mathcal{F}_+^\infty = \{v(x,t),\, x \in \mathbb{T}^2,\, t \in \mathbb{R}_+ |\, v(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1),$$
$$\partial_t v(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1})\},$$
$$\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} = \{v(x,t),\, x \in \mathbb{T}^2,\, t \in \mathbb{R}_+ |\, v(\cdot) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1),$$
$$\partial_t v(\cdot) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1})\}. \tag{17}$$

Напомним, что функция $z(t) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z(t) \in L_\infty(0, M; E)$ при любом $M > 0$. Ясно, что $\mathcal{F}_+^\infty \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$. В пространстве $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ вводится топология Θ_+^{loc} со следующей слабой секвенциальной сходимостью последовательностей $\{v_n(x, t)\} \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$: по определению, $v_n(\cdot) \rightharpoonup v(\cdot)$ $(n \to \infty)$ в топологии Θ_+^{loc}, если для любого $M > 0$ последовательность $v_n(x, t) \rightharpoonup v(x, t)$ $(n \to \infty)$ *-слабо в $L_\infty(0, M; H^1)$ и $\partial_t v_n(x, t) \rightharpoonup \partial_t v(x, t)$ $(n \to \infty)$ *-слабо в $L_\infty(0, M; H^{-1})$. Отметим, что Θ_+^{loc} является хаусдорфовым пространством Фреше–Урысона со счетной базой топологии. Кроме того, любой шар $\mathcal{B}(0, R) = \{v \in$ $\in \mathcal{F}_+^\infty \,|\, \|v\|_{\mathcal{F}_+^\infty} \le R\}$ в пространстве $\mathcal{F}_+^\infty$ является компактным множеством в слабой топологии Θ_+^{loc}. Следовательно, топология Θ_+^{loc} на любом шаре $\mathcal{B}(0, R)$ является метризуемой (см., например, [11]). Соответствующую метрику мы будем обозначать $\rho(\cdot, \cdot)$. Отметим, однако, что на всем пространстве $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ или $\mathcal{F}_+^\infty$ топология Θ_+^{loc} не метризуема.

Введем пространство траекторий $\mathcal{K}_+(N)$ для уравнения (1), которое зависит от числа $N > 0$. По определению, функция $u(x, t) \in \mathcal{F}_+^\infty$ принадлежит $\mathcal{K}_+(N)$, если она является слабым решением уравнения (1) в смысле пространства $D'(\mathbb{R}_+; H^{-1})$, и для него выполнено неравенство

$$\operatorname{ess\,sup}\{\|u(t+s)\|^2 \,|\, s \ge 0\} \le Ne^{-rt} + r^{-1}\|g\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{18}$$

Пространство $\mathcal{K}_+(N)$ непусто при любом $N > 0$. Действительно, если $u_0 \in H^1$ и $\|u_0\|^2 < N$, то (возможно, не единственное) слабое решение $u(x, t)$ задачи (1), (2) из утверждения 1, полученное по приведенному выше методу Галёркина, удовлетворяет неравенству (18) (см. (16)) и, следовательно, $u(x, t)$ принадлежит $\mathcal{K}_+(N)$.

Утверждение 2. *Для любого фиксированного $N > 0$ пространство $\mathcal{K}_+(N)$ ограничено в $\mathcal{F}_+^\infty$ и замкнуто в топологии Θ_+^{loc}.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству, приведенному в [12], для диссипативного гиперболического уравнения с нелинейной функцией взаимодействия $f(u)$, имеющей любой порядок степенного роста по u.

Как уже отмечалось, топология Θ_+^{loc} метризуема на ограниченных множествах из $\mathcal{F}_+^\infty$, поэтому, а также в силу утверждения 2 пространство $\mathcal{K}_+(N)$ с топологией Θ_+^{loc} является метризуемым и компактным.

На пространствах $\mathcal{F}_+^\infty$ и $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ рассматривается полугруппа трансляций $\{T(h)\} := \{T(h), h \ge 0\}$, действующая по формуле $T(h)v(t) = v(t + h)$. Рассмотрим полугруппу $\{T(h)\}$ на пространстве траекторий $\mathcal{K}_+(N)$ уравнения (1). Заметим, что

$$T(h)\mathcal{K}_+(N) \subseteq \mathcal{K}_+(N), \quad \forall h \ge 0. \tag{19}$$

Действительно, если $u(t) \in \mathcal{K}_+(N)$, то функция $T(h)u(t) = u(t + h)$, очевидно, также является слабым решением системы (1) в силу ее автономности. Кроме того, поскольку $u(t)$ удовлетворяет неравенству (18), получаем, что при $h \ge 0$

$$\operatorname{ess\,sup}\{\|u(t+h+s)\|^2 \,|\, s \ge 0\} \le Ne^{-r(t+h)} + $$
$$+ r^{-1}\|g\|^2 \le Ne^{-rt} + r^{-1}\|g\|^2,$$

и, значит, $T(h)u(t)$ также удовлетворяет (18), т.е. $T(h)u(t) \in \mathcal{K}_+(N)$ и (19) доказано.

Из утверждения 2 и из (19) следует, что полугруппа трансляций $\{T(h)\}$ действует на компактном метрическом пространстве $\mathcal{K}_+(N)$. Легко проверить, что полугруппа $\{T(h)\}$ непрерывна на $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ (а, значит, и на $\mathcal{K}_+(N)$) в топологии Θ_+^{loc}. Из этих фактов вытекает, что полугруппа $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}_+(N)}$ имеет глобальный аттрактор $\mathfrak{A}(N) \subset \mathcal{K}_+(N)$, который называется траекторным аттрактором уравнения (1). Напомним, что $\mathfrak{A}(N) = \bigcap_{\theta \ge 0} \left[\bigcup_{h \ge \theta} T(h)\mathcal{K}_+(N)\right]_{\Theta_+^{\mathrm{loc}}}$, множество $\mathfrak{A}(N)$ является строго инвариантным относительно $\{T(h)\}$: $T(h)\mathfrak{A}(N) = \mathfrak{A}(N)$ при всех $h \ge 0$ и для любого множество траекторий $B \subseteq \mathcal{K}_+(N)$ хаусдорфово отклонение $\mathrm{dist}_\rho(T(h)B, \mathfrak{A}(N)) \to 0$ $(h \to +\infty)$ (см., например, [5, 12, 13]).

Утверждение 3. *Траекторный аттрактор $\mathfrak{A}(N)$ не зависит от N: $\mathfrak{A}(N) = \mathfrak{A}$. Аттрактор $\mathfrak{A}$ совпадает с множеством $\Pi_+\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ обозначает ядро уравнения* (1) *в пространстве $\mathcal{F}^\infty$.*

Пространство $\mathcal{F}^\infty$ определяется аналогично $\mathcal{F}_+^\infty$ (см. (17) с заменой $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$), а Π_+ – оператор сужения на полуось $\mathbb{R}_+$. Напомним, что я д р о $\mathcal{K}$ состоит из функций $\{u(x, t), t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{F}^\infty$, которые являются ограниченными в H^1 полными слабыми решениями (1) на всей оси времени $\mathbb{R}$. В частности, из (19) получаем, что

$$\|u(\cdot)\|^2_{L_\infty(\mathbb{R};\, H^1)} = \operatorname{edd} \sup\{\|u(\cdot, s)\|^2 | s \in \mathbb{R}\} \le r^{-1}\|g\|^2,$$
$$\forall u \in \mathcal{K}.$$

3. СХОДИМОСТЬ ТРАЕКТОРНЫХ АТТРАКТОРОВ 2d СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА С ДИССИПАЦИЙ, КОГДА ВЯЗКОСТЬ $\nu \to 0+$.

Рассматривается двумерная система Навье–Стокса с диссипативным членом $-ru$ и с вязкостью $\nu > 0$:

$$\begin{aligned} &\partial_t u + B(u, u) - \nu\Delta u + ru = g(x), \\ &\nabla \cdot u = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2, \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{20}$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в системе уравнений Эйлера с диссипацией (1). Отметим, что система (20) также имеет глубокий геофизический смысл (см. [1]), причем основная диссипация происходит в планетарном пограничном слое и описывается членом $-ru$, а мелкомасштабная диссипация соответствует члену с вязкостью $\nu\Delta u$ (отметим, что в физически значимых случаях $0 < \Delta \ll r$).

З а м е ч а н и е 3. Изучая классическую систему Навье–Стокса с вязкостью $\nu > 0$ (при $r = 0$), дополнительно предполагают, что функции u и g имеют нулевое среднее на торе $\mathbb{T}^2$, чтобы избежать линейный рост решений. При $r > 0$ этого можно не делать, так как член $-ru$ вносит дополнительную диссипацию.

Как известно, задача Коши (20), (2) однозначно разрешима, причем при $u_0 \in H^1$ соответствующее решение $u(x, t)$ принадлежит классу $C_b(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_2^b(\mathbb{R}_+; H^2)$ и является сильным решением (см. [14, 15], случай $r = 0$ рассматривался, например, в [5, 13, 12]). Отметим, что член диссипации $-ru$ не влияет на этот результат. Кроме того, любое решение $u(x, t)$ задачи (20), (2) удовлетворяет тождествам

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu|\nabla u(t)|^2 + r|u(t)|^2 = (g, u(t)),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u(t)|^2 + \nu|\Delta u(t)|^2 + r|\nabla u(t)|^2 = (\nabla g, \nabla u(t)),$$

которые аналогичны известным тождествам для обычной 2d системы Навье–Стокса при $r = 0$ (см., например, [5, 13]).

Как и в разделе 2, в пространстве траекторий $\mathcal{K}_+^\nu \subset C_b(\mathbb{R}_+; H^1) \cap L_2^b(\mathbb{R}_+; H^2) \subset \mathcal{F}_+^\infty$ системы (23), состоящем из всех ее решений $u(x, t)$, $t \ge 0$, рассматривается полугруппа трансляций $\{T(h)\}$. Пространства $\mathcal{F}_+^\infty$, $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ и Θ_+^{loc} определены выше. Доказывается, что эта полугруппа имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\nu \subset \mathcal{K}_+^\nu$, который притягивает ограниченные множества решений системы (23) в топологии Θ_+^{loc}. (см. аналогичное доказательство в [12] для случая $r = 0$). Кроме того, траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\nu$ равномерно ограничены при $0 < \nu \le 1$ в норме пространства $\mathcal{F}_+^\infty$, т.е. $\mathfrak{A}_\nu \subset \mathcal{B}(0, R_0) := \mathcal{B}_\rho$ при всех ν, где $\mathcal{B}_\rho$ – некоторый шар в $\mathcal{F}_+^\infty$, причем топология $\Theta_+^{\mathrm{loc}}|_{\mathcal{B}_\rho}$ порождается метрикой ρ, описанной выше. Доказана следующая

Т е о р е м а 1. *Траекторные аттракторы* $\mathfrak{A}_\nu$ *системы* (23) *сходятся в метрике* ρ *при* $\nu \to 0+$ *к траекторному аттрактору* $\mathfrak{A}$ *системы* (1): $\mathrm{dist}_\rho(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{A}) \to 0+$ *при* $\nu \to 0+$. *Пусть* B_ν *– ограниченные в* $\mathcal{F}_+^\infty$ *множества траекторий системы* (20):

$$\|B_\nu\|_{\mathcal{F}_+^\infty} \le M \ (0 < \nu \le 1).$$

Тогда $\mathrm{dist}_\rho(T(h)B_\nu, \mathfrak{A}) \to 0$ *при* $\nu \to 0+$ *и* $h \to +\infty$.

Заметим, что $\Theta_+^{\mathrm{loc}} \subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta})$, $1 \ge \delta > 0$, и указанные выше сходимости имеют место также в равномерной метрике $C([0, M]; H^{1-\delta})$ при любом $M > 0$.

4. МИНИМАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ ТРАЕКТОРНЫХ АТТРАКТОРОВ $\mathfrak{A}_\nu$ ПРИ $\nu \to 0+$

Как было установлено, множества $\mathfrak{A}_\nu$ при $0 < \nu \le 1$ и $\mathfrak{A}$ принадлежат шару $\mathcal{B}_\rho$, который является (в топологии Θ_+^{loc}) компактным метрическим пространством с метрикой ρ и при этом $\mathrm{dist}_\rho(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{A}) \to 0 + (\nu \to 0+)$.

Пусть $\mathfrak{A}_{\min}$ – минимальное замкнутое подмножество $\mathfrak{A}$, которое удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\nu \to 0+} \mathrm{dist}_\rho(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{A}_{\min}) = 0. \tag{21}$$

Минимальность означает, что $\mathfrak{A}_{\min}$ принадлежит любому замкнутому подмножеству $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, для которого $\lim\limits_{\nu \to 0+} \mathrm{dist}_\rho(\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{A}') = 0$. Такое множество $\mathfrak{A}_{\min}$ называется м и н и м а л ь н ы м п р е д е л о м т р а е к т о р н ы х а т т р а к т о р о в $\mathfrak{A}_\nu$ при $\nu \to \to 0+$. Множество $\mathfrak{A}_{\min}$ единственно, и его можно определить по формуле

$$\mathfrak{A}_{\min} = \bigcap_{0<\delta\le 1}\left[\bigcup_{0<\nu\le\delta}\mathfrak{A}_\nu\right]_{B_\rho}. \qquad (22)$$

Теорема 2. 1. *Минимальный предел* $\mathfrak{A}_{\min}$ *траекторных аттракторов* $\mathfrak{A}_\nu$ *при* $\nu \to 0+$ *является связным подмножеством* $\mathcal{B}_\rho \subset \Theta_+^{\mathrm{loc}}$.

2. *Множество* $\mathfrak{A}_{\min}$ *строго инвариантно относительно полугруппы трансляций* $\{T(h),\ h \ge 0\}$, *т.е.*,

$$T(h)\mathfrak{A}_{\min} = \mathfrak{A}_{\min}, \quad \forall h \ge 0. \qquad (23)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00390 и 04-01-00735).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М: Мир, 1984. Т. 1.
2. *Barcilon V., Constantin P., Titi E.S.* // SIAM J. Math. Anal. 1988. V. 19. P. 1355–1364.
3. Saut J-C. // Different. Int. Equats. 1990. V. 182. № 12. P. 1729–1739.
4. *Ильин А.А.* // Мат. сб. 1991. Т. 182. № 12. С. 1729–1739.
5. *Temam R.* Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Applied Mathematics Series. N.Y.: Springer-Verlag, 1997. V. 68. 648 p.
6. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
7. Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
8. *Temam R.* Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1984. 526 p.
9. *Юдович В.И.* // ЖВМиМФ. 1963. Т. 3. С. 1032–1066.
10. *Bardos C.* // J. Math. Anal. and Appl. 1972. V. 40. P. 769–790.
11. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
12. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics. AMS Colloquium Publications. Providence: AMS, 2002. V. 49. 363 p.
13. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
14. *Ilyin A.A., Miranville A., Titi E.S.* // Communs. Math. Sci. 2004. V. 2. № 3. P. 403–426.
15. *Ильин А.А.* // Тр. Мат. ин-та. РАН. 2006. Т. 255. С. 146–160.