УДК 517.958

М. И. Вишик, Е. С. Тити, В. В. Чепыжов

О сходимости траекторных аттракторов трехмерной α-модели Навье–Стокса при $\alpha \to 0$

Изучается связь долговременной динамики α-модели Навье–Стокса и точной 3D системы Навье–Стокса. Доказано, что ограниченные множества решений α-модели Навье–Стокса сходятся к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ трехмерной системы Навье–Стокса, когда время стремится к бесконечности, а α стремится к нулю. В частности показано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\alpha$ α-модели Навье–Стокса стремится к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ 3D системы Навье–Стокса при $\alpha \to 0+$. Построен минимальный предел $\mathfrak{A}_{\min}(\subseteq \mathfrak{A}_0)$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \to 0+$ и доказано, что множество $\mathfrak{A}_{\min}$ связно и строго инвариантно.

Библиография: 35 названий.

Введение

Настоящая статья посвящена изучению связи динамики решений при больших временах осредненной по Лагранжу α-модели Навье–Стокса (α-модели Н.–С.) с решениями точной трехмерной системы Навье–Стокса (3D системы Н.–С.) при периодических граничных условиях. Рассматриваемая α-модель Навье–Стокса, которую еще называют системой Камассы–Холма с вязкостью, была введена и изучена в работах [1]–[6] (см. также [7] и цитированные там работы). Она представляет собой регуляризованное приближение 3D системы Н.–С., зависящее от малого положительного параметра α, в которой неизвестная функция скорости v в ряде слагаемых заменена на более гладкую вектор-функцию u, связанную с v эллиптической системой $v = u - \alpha^2 \Delta u$ (см. § 2). При $\alpha = 0$ получается точная 3D система Навье–Стокса.

Так как теорема единственности глобальных слабых решений (или глобального существования сильных решений) начальной задачи для 3D системы Н.–С. пока не доказана, к этой системе нельзя применить развитую к настоящему времени теорию глобальных аттракторов бесконечномерных динамических систем, которая обычно применяется при исследовании 2D системы Н.–С. и других важных эволюционных уравнений математической физики (см., например, [8]–[14]).

Во многих работах было показано аналитически и численно, что указанная выше α-модель Н.–С. позволяет получить хорошее приближение ряда задач, связанных с турбулентностью течения (см. [1]–[4], [7], [15], [16]). В частности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-00390, 04-01-00735), Фонда содействия отечественной науке, CRDF (грант № RUM1-2654-MO-05), NSF (грант № DMS–0204794), ISF (грант № 120/06) и BSF (грант № 2004271).

было обнаружено, что точные стационарные решения α-модели Н.–С. весьма схожи с эмпирическими данными и с результатами численного моделирования для широкого диапазона значений чисел Рейнольдса для потоков в каналах и трубах (см. [1]–[3]). Стоит отметить, однако, что имеются и другие α-модели, которые также хорошо согласуются с экспериментальными данными, например α-модель Кларка [17], α-модель Лерэ [18], модифицированная α-модель Лерэ [19], упрощенная α-модель Бардина [20] и другие модели. Близкие задачи, связанные с регуляризацией трехмерной системы Навье–Стокса, рассматривались также в работах Лионса [21] и Ладыженской [22].

В работе [6] подробно изучена задача Коши для α-модели Н.–С., доказаны теоремы существования и единственности слабых решений для этой системы. Установлено свойство сглаживания решений и построен глобальный аттрактор соответствующей полугруппы. Кроме того найдены оценки размерности глобального аттрактора этой системы в терминах соответствующих физических параметров задачи, а также обсуждены другие параметры и характеристики, связанные с проблемой турбулентности (энергетический спектр и пограничный слой, см. также [23], [24]).

Теория траекторных аттракторов эволюционных уравнений с частными производными была развита в работах [14], [25]–[27]. Особое внимание уделялось уравнениям, для которых единственность решения соответствующей начальной задачи пока не доказана, например для точной 3D системы Н.–С. (см. также [13], [28]).

В настоящей работе изучается связь между решениями α-модели Н.–С. и точной 3D системы Н.–С. при $\alpha \to 0+$. В основной теореме доказывается, что ограниченные (в определенной норме) семейства решений $\{u_\alpha(x,t)\}$ α-моделей Н.–С. сходятся (в некоторой топологии) при $\alpha \to 0+$ и при $t \to +\infty$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ точной 3D системы Н.–С. В частности траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\alpha$ α-моделей Н.–С. сходятся при $\alpha \to 0+$ к $\mathfrak{A}_0$. В работах [29], [30] аналогичные теоремы доказаны для α-модели Лерэ.

Статья состоит из введения, пяти параграфов и приложения. В § 1 напоминается определение траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_0$ точной 3D системы Н.–С. В § 2 рассматривается α-модель Н.–С. (уравнения Камассы–Холма с вязкостью). Следуя [6], формулируются основные свойства этой модели.

Параграфы 3 и 4 посвящены доказательству сходимости траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ α-модели Н.–С. при $\alpha \to 0+$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ точной 3D системы Н.–С. Для этой цели оказалось целесообразным изучение системы уравнений, которой удовлетворяет функция $w_\alpha(t) = (1-\alpha^2\Delta)^{1/2}u_\alpha(t)$. Здесь $u_\alpha(t)$ обозначает сглаженное поле скоростей решения α-модели Н.–С. Основная теорема § 3 утверждает, что если последовательность решений $w_{\alpha_n}(t)$ указанной системы уравнений сходится к пределу $w(t)$ при $\alpha_n \to 0+$, $n \to \infty$, в пространстве Θ_+^{loc} (см. § 1), то $w(t)$ является слабым решением Лерэ–Хопфа точной 3D системы Н.–С. Используя в основном эту теорему, в § 4 доказана сходимость при $\alpha \to 0+$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_0$ в пространстве Θ_+^{loc}.

В § 5 установлено существование минимального предела $\mathfrak{A}_{\min}$ ($\mathfrak{A}_{\min} \subseteq \mathfrak{A}_0$) траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \to 0+$, т.е. $\mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A}_{\min}$, $\alpha \to 0+$, где

$\mathfrak{A}_{\min}$ – наименьшее замкнутое подмножество $\mathfrak{A}_0$, которое удовлетворяет этому предельному соотношению (см. § 5). Доказано, что множество $\mathfrak{A}_{\min}$ связно и строго инвариантно относительно трансляционной полугруппы. Эти свойства минимального предела $\mathfrak{A}_{\min}$ делают его весьма полезным объектом при исследовании различных систем, приближающих 3D систему Н.–С.

Отметим, что остается открытым вопрос о связности траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_0$ точной 3D системы Н.–С.

Кроме того возникает гипотеза, что разным α-моделям трехмерной системы Н.–С. (α-модели Камассы–Холма, Лерэ, Кларка, Бардина и т.д.) отвечают не совпадающие минимальные пределы $\mathfrak{A}_{\min}$ их траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \to 0+$.

§ 1. Трехмерная система Навье–Стокса и ее траекторный аттрактор

Рассматривается автономная система Н.–С. с периодическими граничными условиями

$$\partial_t v - \nu\Delta v + \sum_{j=1}^{3} v^j \partial_{x_j} v + \nabla p = g(x),$$
$$\nabla \cdot v = 0, \qquad x \in \mathbb{T}^3 := \bigl[\mathbb{R} \bmod 2\pi L\bigr]^3, \quad t \geqslant 0.$$

Она эквивалентна нелинейному нелокальному функциональному дифференциальному уравнению

$$\partial_t v - \nu\Delta v + P\sum_{j=1}^{3} v^j \partial_{x_j} v = g(x), \qquad \nabla \cdot v = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $v = v(x,t) = \bigl(v^1(x,t), v^2(x,t), v^3(x,t)\bigr)$ – неизвестная вектор-функция, описывающая движение жидкости в $\mathbb{T}^3$, P – ортогональный проектор Лерэ–Гельмгольца, а $g(x) = \bigl(g^1(x), g^2(x), g^3(x)\bigr)$ обозначает заданную внешнюю силу с нулевым средним по переменной x, т.е. $\int_{\mathbb{T}^3} g(x)\,dx = 0$ и $g = Pg$. Предполагается, что $v(x,t)$ является периодической функцией по $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$ с нулевым средним, т.е. $\int_{\mathbb{T}^3} v(x,t)\,dx = 0$ и $v = Pv$.

Обозначим через

$$\mathscr{V} = \biggl\{\phi(x) = \bigl(\phi^1(x), \phi^2(x), \phi^3(x)\bigr),\ x \in \mathbb{T}^3 \ \Big|\ \phi^j(x) \text{ – тригонометрические полиномы с периодом } 2\pi L \text{ по каждой переменной } x_i,\ i,j = 1,2,3, \text{ такие, что } \nabla\cdot\phi = 0 \text{ и } \int_{\mathbb{T}^3} \phi(x)\,dx = 0\biggr\}.$$

Через H и V обозначаются замыкания множества $\mathscr{V}$ соответственно по нормам $\|\cdot\|_H =: |\cdot|$ и $\|\cdot\|_{H^1} =: \|\cdot\|$ пространств $L_2(\mathbb{T}^3)^3$ и $H^1(\mathbb{T}^3)^3$ (см., например, [11], [31]). Тогда для оператора Лерэ–Гельмгольца справедливо $P\colon L_2(\mathbb{T}^3)^3 \to H$.

Определим также пространство $D(A) = \bigl\{v \in H \mid \Delta v \in H\bigr\}$, где $A = -P\Delta$ есть оператор Стокса с областью определения $D(A)$. Напомним, что в периодическом случае $A = -\Delta$ и норма $|Av| =: \|v\|_{D(A)}$ на $D(A)$ эквивалентна норме пространства $H^2(\mathbb{T}^3)^3$. Оператор A является самосопряженным положительным и имеет компактную резольвенту. Обозначим через

$$((u,v)) := (A^{1/2}u, A^{1/2}v) = (\nabla u, \nabla v), \quad \|u\| := |A^{1/2}u|, \qquad u,v \in V,$$

скалярное произведение и норму в V соответственно. Из неравенства Пуанкаре вытекает, что

$$|v|^2 \leqslant \lambda_1^{-1}\|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V, \tag{1.2}$$

где λ_1 – первое собственное значение оператора Стокса A. Через $V' = H^{-1}$ обозначается пространство, сопряженное V. Для любого $f \in V'$ через $\langle f, v\rangle$ обозначается действие функционала $f \in V'$ на векторе $v \in V$. Оператор A осуществляет изоморфизм между V и V', причем $((u,v)) = \langle Au, v\rangle$ при всех $u, v \in V$.

Перепишем уравнение (1.1) в стандартной укороченной форме:

$$\partial_t v + \nu A v + B(v,v) = g(x), \qquad t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Здесь обозначено

$$B(u,v) = P[(u\cdot\nabla)v] = P\sum_{j=1}^{3} u^j \partial_{x_j} v. \tag{1.4}$$

Напомним, что при выполнении условия $\nabla\cdot u = 0$ справедливо равенство

$$B(u,v) = P\sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}(u^j v) \tag{1.5}$$

(см. [11], [21], [31]). Кроме того для всех $w \in D(A)$ и $u, v \in V$ выполнена оценка

$$\bigl|\langle B(u,v), w\rangle\bigr| \leqslant C|u|\cdot\|v\|\cdot\|w\|_{L_\infty} \leqslant C_1\lambda_1^{-1/4}|u|\cdot\|v\|\cdot\|w\|_{D(A)} \tag{1.6}$$

и, следовательно,

$$\|B(u,v)\|_{D(A)'} \leqslant C_1\lambda_1^{-1/4}|u|\cdot\|v\|, \tag{1.7}$$

где $D(A)'$ – пространство, сопряженное $D(A)$.

Пусть задана некоторая функция $v(\,\cdot\,) \in L_2(0,M;V) \cap L_\infty(0,M;H)$. Следовательно, $Av \in L_2(0,M;V')$ и тогда в силу (1.7) имеем

$$B\bigl(v(\,\cdot\,), v(\,\cdot\,)\bigr) \in L_2\bigl(0,M;D(A)'\bigr). \tag{1.8}$$

Рассмотрим (см., например, [21]) пространство обобщенных функций (распределений) $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Напомним, что функция

$$v(\,\cdot\,) \in L_2(0,M;V) \cap L_\infty(0,M;H)$$

называется *слабым решением уравнения* (1.3), если она удовлетворяет этому уравнению в пространстве $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Тогда из свойства (1.8) следует, что производная по времени $\partial_t v(\,\cdot\,) \in L_2\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$ для любого слабого решения $v(\,\cdot\,)$ уравнения (1.3) и, следовательно, $v(\,\cdot\,) \in C\bigl([0,M];D(A)'\bigr)$. Напомним, что $v(\,\cdot\,)\in L_\infty(0,M;H)$. Тогда в силу известной леммы из [32] (см. также [31]) функция $v(\,\cdot\,)\in C_w([0,M];H)$ и, следовательно, для уравнения (1.3) имеет смысл начальное условие

$$v\big|_{t=0}=v_0(x)\in H \tag{1.9}$$

в классе слабых решений из $L_2(0,M;V)\cap L_\infty(0,M;H)$.

Сформулируем теперь классическую теорему о существовании слабых решений задачи Коши для трехмерной системы Н.–С. в форме, которая нам потребуется в дальнейшем (см., например, [11], [21], [31], [33]).

Теорема 1.1. *Пусть $g\in V'$ и $v_0\in H$. Тогда для любого $M>0$ существует слабое решение $v(t)$ уравнения* (1.3) *из пространства $L_2(0,M;V)\cap L_\infty(0,M;H)$ такое, что $v(0)=v_0$ и $v(t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству*

$$\frac12\,\frac{d}{dt}|v(t)|^2+\nu\|v(t)\|^2\leqslant\langle g,v(t)\rangle,\qquad t\in[0,M]. \tag{1.10}$$

Неравенство (1.10) *означает, что для любой $\psi(\,\cdot\,)\in C_0^\infty(\,]0,M[\,)$, $\psi(t)\geqslant0$,*

$$-\frac12\int_0^M|v(t)|^2\psi'(t)\,dt+\nu\int_0^M\|v(t)\|^2\psi(t)\,dt\leqslant\int_0^M\langle g,v(t)\rangle\psi(t)\,dt. \tag{1.11}$$

Доказательство теоремы 1.1 приведено, например, в [11], [14], [21].

Замечание 1.1. Для трехмерной системы Н.–С. вопрос о единственности построенного слабого решения задачи (1.3), (1.9) остается открытым. Неизвестно также, удовлетворяет ли любое слабое решение энергетическому неравенству (1.10). Тем не менее известно, что каждое слабое решение, получающееся с помощью метода приближений Фаэдо–Галёркина, удовлетворяет этому энергетическому неравенству. Класс слабых решений, удовлетворяющих энергетическому неравенству (1.10) или (1.11), называется *слабыми решениями Лерэ–Хопфа*.

Далее будет определен траекторный аттрактор уравнения Н.–С. (1.3). (Более подробно см. [14], [26].)

Прежде всего определим пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ уравнения (1.3). Рассматривается множество всех слабых решений $v(t)$, $t\geqslant0$, принадлежащих пространству $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V)\cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$, которые удовлетворяют уравнению (1.3) в пространстве распределений $\mathscr{D}'\big(0,M;D(A)'\big)$ при каждом $M>0$.

Определение 1.1. *Пространство траекторий* $\mathscr{K}^+$ состоит из всех слабых решений Лерэ–Хопфа $v(\,\cdot\,)$ уравнения (1.3) из пространства $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V)\cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)$, которые удовлетворяют энергетическому неравенству (1.10) при $t\geqslant0$, т.е.

$$-\frac12\int_0^\infty|v(t)|^2\psi'(t)\,dt+\nu\int_0^\infty\|v(t)\|^2\psi(t)\,dt\leqslant\int_0^\infty\langle g,v(t)\rangle\psi(t)\,dt \tag{1.12}$$

при всех $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\psi\geqslant0$.

Из теоремы 1.1 следует, что при любом $v_0\in H$ имеется хотя бы одна траектория $v(\,\cdot\,)\in\mathscr{K}^+$ такая, что $v(0)=v_0$.

Нам понадобится банахово пространство

$$\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}} = \bigl\{z \mid z(\,\cdot\,) \in L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H),\ \partial_t z(\,\cdot\,) \in L_2^{\mathrm{b}}\bigl(\mathbb{R}_+;D(A)'\bigr)\bigr\}$$

с нормой

$$\|z\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} = \|z\|_{L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;V)} + \|z\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} + \|\partial_t z\|_{L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;D(A)')}, \tag{1.13}$$

где

$$\|z\|^2_{L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;V)} = \sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|z(s)\|^2\,ds, \qquad \|z\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\geqslant 0}|z(t)|$$

и

$$\|\partial_t z\|^2_{L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;D(A)')} = \sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|z(s)\|^2_{D(A)'}\,ds.$$

Обозначим через $\{T(h)\} := \bigl\{T(h),\ h \geqslant 0\bigr\}$ трансляционную полугруппу, действующую на функцию $\bigl\{z(t),\ t\geqslant 0\bigr\}$ по формуле

$$T(h)z(t) = z(t+h), \qquad t \geqslant 0.$$

Ясно, что полугруппа $\{T(h)\}$ действует на $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$. Рассмотрим действие полугруппы $\{T(h)\}$ в пространстве траекторий $\mathscr{K}^+$ уравнения (1.3). Из определения $\mathscr{K}^+$ видно, что если $v(\,\cdot\,) \in \mathscr{K}^+$, то $v_h(\,\cdot\,) = T(h)v(\,\cdot\,) = v(\,\cdot\,+h) \in \mathscr{K}^+$ при любом $h \geqslant 0$. Значит,

$$T(h)\mathscr{K}^+ \subseteq \mathscr{K}^+ \qquad \forall\, h \geqslant 0. \tag{1.14}$$

Ниже построен глобальный аттрактор трансляционной полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathscr{K}^+$. Этот аттрактор называется *траекторным аттрактором*, так как полугруппа $\{T(h)\}$ действует на пространстве траекторий $\mathscr{K}^+$. В книге [14] доказано следующее ключевое утверждение.

Утверждение 1.1. *Пусть $g \in V'$. Тогда справедливо следующее*:

1) $\mathscr{K}^+ \subseteq \mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$;
2) *для любой функции* $v(\,\cdot\,) \in \mathscr{K}^+$

$$\|T(h)v(\,\cdot\,)\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant C_0\|v(\,\cdot\,)\|^2_{C_\infty(0,1;H)}e^{-\nu\lambda_1 h} + R_0^2 \qquad \forall\, h \geqslant 1, \tag{1.15}$$

где константа C_0 зависит от ν и λ_1, а R_0 зависит от ν, λ_1 и $\|g\|_{V'}$.

Нам понадобится определенная ниже топология в пространстве $\mathscr{K}^+$. Аналогично $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ рассматривается пространство

$$\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}} = \bigl\{z \mid z(\,\cdot\,) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H),\ \partial_t z(\,\cdot\,) \in L_2^{\mathrm{loc}}\bigl(\mathbb{R}_+;D(A)'\bigr)\bigr\}.$$

Определим в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ следующую секвенциальную топологию, которую обозначим Θ_+^{loc}. По определению последовательность функций $\{z_n\} \subseteq \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ сходится к функции $z \in \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ в топологии Θ_+^{loc} при $n \to +\infty$, если при любом $M > 0$

$$\begin{aligned} z_n(\,\cdot\,) &\rightharpoonup z(\,\cdot\,), \quad n\to\infty, \qquad \text{слабо в } L_2(0,M;V),\\ z_n(\,\cdot\,) &\rightharpoonup z(\,\cdot\,), \quad n\to\infty, \qquad *\text{-слабо в } L_\infty(0,M;H) \end{aligned}$$

и

$$\partial_t z_n(\,\cdot\,) \rightharpoonup \partial_t z(\,\cdot\,), \quad n\to\infty, \qquad \text{слабо в } L_2\bigl(0,M;D(A)'\bigr).$$

Отметим, что топологию Θ_+^{loc} можно описать в терминах открытых окрестностей. Пространство Θ_+^{loc} является хаусдорфовым топологическим пространством со счетной базой (однако Θ_+^{loc} не метризуемо). Очевидно, $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}} \subseteq \Theta_+^{\mathrm{loc}}$. Кроме того любой шар $B_R = \{z \in \mathscr{F}_+^{\mathrm{b}} \mid \|u\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant R\}$ является компактом в Θ_+^{loc}. Тем самым шар B_R с топологией, индуцированной из Θ_+^{loc}, является метризуемым, а соответствующее метрическое пространство является полным (см. подробности в [14], [26]). Это свойство метризуемости упрощает конструкцию траекторного аттрактора (в топологии Θ_+^{loc}) полугруппы $\{T(h)\}$, действующей на $\mathscr{K}^+$. Из определения топологии Θ_+^{loc} вытекает, что трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ является непрерывной в Θ_+^{loc}. Следующее утверждение весьма важно для нас (см. его доказательство в [14]).

Утверждение 1.2. *Пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ замкнуто в Θ_+^{loc}.*

Стандартно определяется притягивающее множество в $\mathscr{K}^+$ (см. [8]–[10], [28]). Множество $P \subseteq \mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ называется *притягивающим для пространства $\mathscr{K}^+$ в топологии* Θ_+^{loc}, если для любого ограниченного (по норме $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$) множества $B \subset \mathscr{K}^+$ множество P притягивает $T(h)B$ в топологии Θ_+^{loc} при $h \to +\infty$, т.е. для любой окрестности $\mathscr{O}(P)$ (в Θ_+^{loc}) найдется положительное число $h_1 = h_1(B, \mathscr{O})$ такое, что $T(h)B \subseteq \mathscr{O}(P)$ при всех $h \geqslant h_1$.

Сформулируем теперь определение траекторного аттрактора.

Определение 1.2. Множество $\mathfrak{A} \subset \mathscr{K}^+$ называется *траекторным аттрактором полугруппы* $\{T(h)\}$ в топологии Θ_+^{loc}, если

1) $\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ и компактно в Θ_+^{loc};
2) $\mathfrak{A}$ строго инвариантно относительно $\{T(h)\}$: $T(h)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ $\forall\, h \geqslant 0$;
3) $\mathfrak{A}$ является притягивающем множеством в топологии Θ_+^{loc} для полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathscr{K}^+$.

Следуя терминологии из [9], множество $\mathfrak{A}$ можно также назвать $(\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}, \Theta_+^{\mathrm{loc}})$-*аттрактором полугруппы* $\{T(h)\}|_{\mathscr{K}^+}$.

Из основного неравенства (1.15) вытекает, что шар B_{2R_0} в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ является притягивающим (и даже поглощающим) множеством полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathscr{K}^+$. Шар B_{2R_0} компактен в Θ_+^{loc} и $T(h)B_{2R_0} \subseteq B_{2R_0}$ при всех $h \geqslant 0$. Значит, непрерывная полугруппа $\{T(h)\}$ имеет компактное притягивающее множество. Следовательно, трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A} \subset \mathscr{K}^+ \cap B_{2R_0}$, и кроме того

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{s>0} \biggl[\bigcup_{h \geqslant s} T(h)(\mathscr{K}^+ \cap B_{2R_0})\biggr]_{\Theta_+^{\mathrm{loc}}},$$

где $[\,\cdot\,]_{\Theta_+^{\mathrm{loc}}}$ обозначает замыкание в Θ_+^{loc} (см. [14]).

Заметим, что вложения

$$\Theta_+^{\mathrm{loc}} \subset L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta}), \qquad 0 < \delta \leqslant 1, \tag{1.16}$$

$$\Theta_+^{\mathrm{loc}} \subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}), \tag{1.17}$$

являются непрерывными (см. [14], [21], [34]). Поэтому траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ удовлетворяет следующим свойствам: для любого ограниченного (в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$)

множества $B \subset \mathscr{K}^+$

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}\bigl(T(h)B,\mathfrak{A}\bigr) \to 0, \qquad h \to +\infty,$$
$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}\bigl(T(h)B,\mathfrak{A}\bigr) \to 0, \qquad h \to +\infty,$$

где M – произвольное положительное число.

Для описания структуры траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ нам понадобится понятие ядра уравнения (1.3). *Ядро* $\mathscr{K}$ состоит из всех слабых решений $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ограниченных в пространстве

$$\mathscr{F}^{\mathrm{b}} = \bigl\{ z \mid z(\,\cdot\,) \in L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R};V) \cap L_\infty(\mathbb{R};H),\ \partial_t z(\,\cdot\,) \in L_2^{\mathrm{b}}\bigl(\mathbb{R};D(A)'\bigr) \bigr\},$$

которые удовлетворяют неравенству, подобному (1.12): при всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi \geqslant 0$,

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 \psi'(t)\,dt + \nu \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|^2 \psi(t)\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \langle g, v(t)\rangle \psi(t)\,dt. \qquad (1.18)$$

(Норма в $\mathscr{F}^{\mathrm{b}}$ определяется так же, как и норма в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ (см. (1.13)), заменой $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$.)

Через Π_+ обозначим оператор ограничения на $\mathbb{R}_+$. В книге [14] доказано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ трехмерной системы Н.–С. совпадает с ограничением ядра $\mathscr{K}$ уравнения (1.3) на $\mathbb{R}_+$:

$$\mathfrak{A} = \Pi_+ \mathscr{K}. \qquad (1.19)$$

Множество $\mathscr{K}$ ограничено в $\mathscr{F}^{\mathrm{b}}$ и компактно в Θ^{loc}. Топология Θ^{loc} определяется аналогично Θ_+^{loc}, причем интервалы $(0,M)$ заменяются на $(-M,M)$.

§ 2. α-модель Навье–Стокса и ее аттрактор

2.1. Некоторые свойства α-модели Навье–Стокса. Рассматривается следующая система уравнений с периодическими граничными условиями:

$$\partial_t v - \nu\Delta v - P\bigl(u \times (\nabla \times v)\bigr) = g(x), \qquad (2.1)$$
$$v = u - \alpha^2 \Delta u, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \qquad x \in \mathbb{T}^3. \qquad (2.2)$$

Эта система является приближением трехмерной системы Н.–С. (1.1), которая обсуждалась в предыдущем параграфе. Неизвестной считается вектор-функция $v = v(x,t) = (v^1, v^2, v^3)$. Функция $u = u(x,t) = (u^1, u^2, u^3)$ получается сглаживанием функции v. Предполагается, что функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$, а также (известная) внешняя сила $g(x)$ являются периодическими по $x \in \mathbb{T}^3$ и имеют нулевое среднее. В (2.2) α – фиксированный положительный параметр, который называется *“длиной подсеточного (фильтрующего) масштаба” модели* (см. мотивацию модели в [6] и приведенные там ссылки). Как и в (1.1), P обозначает проектор Лерэ–Гельмгольца, а $a \times b$ – это обычное векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Ниже будет показано, что при $\alpha = 0$ функция $v \equiv u$ и уравнения (2.1) и (2.2) формально совпадают с трехмерной системой Н.–С. (1.1). Система (2.1), (2.2) иногда называется *трехмерными уравнениями Камассы–Холма* (она также называется *осредненной по Лагранжу α-моделью Н.–С.* или просто *α-моделью Н.–С.*).

Напомним, что нелинейный член в (2.1) удовлетворяет следующему тождеству:

$$u \times (\nabla \times v) = \sum_{j=1}^{3} (u^j \partial_j v - u^j \nabla v^j) = -(u \cdot \nabla) v - \sum_{j=1}^{3} u^j \nabla v^j, \tag{2.3}$$

если (например) известно, что $u, v \in C^1$ (см. [6]). При $u = v$ получаем, что

$$v \times (\nabla \times v) = -(v \cdot \nabla) v - \frac{1}{2} \nabla \biggl(\sum_{j=1}^{3} v^j v^j \biggr), \tag{2.4}$$

и, следовательно, при $\alpha = 0$ система (2.1), (2.2) превращается в (1.1), поскольку P проектирует любую градиентную функцию в нуль, т.е. $P \nabla \bigl(\sum_{j=1}^{3} v^j v^j \bigr) = 0$ (см., например, [11], [31]).

Перепишем систему (2.1), (2.2) в более короткой форме:

$$\partial_t v + \nu A v + \widetilde{B}(u, v) = g(x), \tag{2.5}$$

$$v = u + \alpha^2 A u. \tag{2.6}$$

Здесь, как и в уравнении (1.3), A обозначает оператор Стокса, а билинейный оператор

$$\widetilde{B}(u, v) = -P\bigl(u \times (\nabla \times v)\bigr). \tag{2.7}$$

Напомним, что

$$\widetilde{B}(v, v) = B(v, v), \tag{2.8}$$

где $B(u, v) = (u \cdot \nabla) v$ (см. (1.4)), и при $\alpha = 0$ система (2.5), (2.6) совпадает с системой Н.–С. (1.3).

Сформулируем теперь некоторые свойства билинейного оператора $\widetilde{B}$, которые аналогичны соответствующим свойствам оператора B. Оператор $\widetilde{B}$ отображает $V \times V$ в V', и для любых $u, v, w \in V$ выполнены следующие неравенства:

$$\bigl| \langle \widetilde{B}(u, v), w \rangle \bigr| \leqslant c |u|^{1/4} \|u\|^{3/4} \|v\| \cdot |w|^{1/4} \|w\|^{3/4}, \tag{2.9}$$

$$\bigl| \langle \widetilde{B}(u, v), w \rangle \bigr| \leqslant c |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| \cdot \|w\|. \tag{2.10}$$

(Доказательство см., например, в [6].) Справедливо также тождество

$$\bigl\langle \widetilde{B}(u, v), w \bigr\rangle = -\bigl\langle \widetilde{B}(w, v), u \bigr\rangle \qquad \forall\, u, v, w \in V, \tag{2.11}$$

которое следует из формул векторного анализа

$$(a \times b) \cdot c = \det[a, b, c] = -\det[c, b, a] = -(c \times b) \cdot a \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^3,$$

если положить $a = u$, $b = \nabla \times v$ и $c = w$. Из (2.11) заключаем, что

$$\bigl\langle \widetilde{B}(u, v), u \bigr\rangle = 0 \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{2.12}$$

Нам потребуется также следующее неравенство, доказанное в работе [6]:

$$\bigl|\langle\widetilde{B}(u,v),w\rangle\bigr| \leqslant c\bigl(|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}|v|\cdot|Aw| + \|u\|\cdot|v|\cdot\|w\|^{1/2}|Aw|^{1/2}\bigr) \qquad \forall\, u,v\in V, \qquad \forall\, w\in D(A). \tag{2.13}$$

Чтобы получить (2.13), можно воспользоваться тождеством

$$\bigl\langle\widetilde{B}(u,v),w\bigr\rangle = \bigl\langle B(w,u)-B(u,w),v\bigr\rangle \tag{2.14}$$

и известными свойствами оператора B (см. (1.6) и [6]). Тождество (2.14) проверяется прямыми вычислениями.

Из (2.13) вытекает, что

$$\bigl|\langle\widetilde{B}(u,v),w\rangle\bigr| \leqslant c\|u\|\cdot|v|\cdot|Aw| \qquad \forall\, u,v\in V, \quad \forall\, w\in D(A). \tag{2.15}$$

Это означает, что $\widetilde{B}$ отображает $V\times H$ в $D(A)'$ и

$$\bigl\|\widetilde{B}(u,v)\bigr\|_{D(A)'} \leqslant c\|u\|\cdot|v| \tag{2.16}$$

(сравните с (1.7)).

2.2. Задача Коши и аттракторы α-модели Н.–С. Пусть дана функция $u(\,\cdot\,)\in L_\infty(0,M;V)\cap L_2\bigl(0,M;D(A)\bigr)$. Тогда

$$v(\,\cdot\,) = u(\,\cdot\,)+\alpha^2Au(\,\cdot\,)\in L_\infty(0,M;V')\cap L_2(0,M;H), \qquad Av(\,\cdot\,)\in L_2\bigl(0,M;D(A)'\bigr).$$

Следовательно, из неравенства (2.16) заключаем, что соответствующая функция $\widetilde{B}\bigl(u(\,\cdot\,),v(\,\cdot\,)\bigr)\in L_2\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Тем самым все члены в уравнении (2.5) (кроме производной по времени) принадлежат пространству $L_2\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$, а само уравнение имеет смысл в пространстве распределений $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Дополним систему (2.5), (2.6) начальным условием

$$u\big|_{t=0} = u_0\in V. \tag{2.17}$$

(Сравните с (1.9), где $v_0\in H$.)

Определение 2.1. Пусть $g\in H$, $u_0\in V$ и $M>0$. Функция

$$u(\,\cdot\,)\in L_\infty(0,M;V)\cap L_2\bigl(0,M;D(A)\bigr)$$

называется *решением системы* (2.5), (2.6) и (2.17), если

(i) функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.5) в пространстве обобщенных функций $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$, т.е. для каждого $\omega\in D(A)$

$$\frac{d}{dt}\langle u+\alpha^2Au,\,\omega\rangle + \bigl\langle A(u+\alpha^2Au),\,\omega\bigr\rangle + \bigl\langle\widetilde{B}(u,u+\alpha^2Au),\,\omega\bigr\rangle = \langle g,\omega\rangle, \tag{2.18}$$

где равенство (2.18) понимается в смысле скалярных распределений в пространстве $\mathscr{D}'(0,M)$, т.е. для каждого $\varphi\in C_0^\infty(\,]0,M[\,)$

$$-\int_0^M\langle v(t),\omega\rangle\varphi'(t)\,dt + \int_0^M\langle Av(t),\omega\rangle\varphi(t)\,dt + \int_0^M\bigl\langle\widetilde{B}\bigl(u(t),v(t)\bigr),\omega\bigr\rangle\varphi(t)\,dt = \int_0^M\langle g,\omega\rangle\varphi(t)\,dt, \tag{2.19}$$

где $v(t)=u(t)+\alpha^2Au(t)$;

(ii) $u(0) = u_0$; поскольку $u(t)$ является решением (2.5) и (2.6), производная по времени $dv/dt \in L_2\big(0, M; D(A)'\big)$; отметим, что $u = (1 + \alpha^2 A)^{-1} v$, поэтому $du/dt \in L_2(0, M; H)$, следовательно, $u \in C([0, M]; H)$ и начальное условие (2.17) является осмысленным.

Замечание 2.1. В некоторых случаях *решением системы* (2.5) и (2.6) будет также называться функция $v(t)$, которая связана с $u(t)$ взаимно однозначным оператором $(1 + \alpha^2 A)$. При этом устанавливается соответствие между решениями (2.5) и (2.6) и решениями точной системы Н.–С. (1.3).

В работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $g \in H$ и $u_0 \in V$. Тогда при любом $M > 0$ задача Коши* (2.5), (2.6) *и* (2.17) *имеет, и притом единственное, решение $u(t)$, которое принадлежит пространству*

$$C([0, M]; V) \cap L_\infty\big(0, M; D(A)\big).$$

Теперь мы сформулируем и докажем ряд следствий из этой теоремы, которые нам понадобятся в дальнейшем. Прежде всего нас интересуют оценки решений, которые не зависят от α при $\alpha \to 0+$.

Следствие 2.1 (энергетическое тождество). *Пусть $u(t)$ – решение* (2.5), (2.6) *и* (2.17). *Тогда выполнено следующее тождество*:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\{|u(t)|^2 + \alpha^2 \|u(t)\|^2\big\} + \nu\big\{\|u(t)\|^2 + \alpha^2 |Au(t)|^2\big\} = \langle g, u(t)\rangle, \quad t \in [0, M], \tag{2.20}$$

причем функция $|u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2$ является абсолютно непрерывной и ее производная по времени удовлетворяет (2.20) *в обычном смысле при почти всех $t \in (0, M)$.*

Доказательство. Умножим уравнение (2.5) скалярно в H на $u(t)$ и используем, что $u \in L_2\big(0, M; D(A)\big)$ и $\partial_t u \in L_2(0, M; H)$. Тогда в силу известной теоремы из [31]

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2(u, \partial_t u),$$
$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2(A^{1/2}u, \partial_t A^{1/2}u) = 2(Au, \partial_t u) = 2(u, \partial_t Au)$$

(напомним, что $A^{1/2}u \in L_2(0, M; V)$ и $\partial_t A^{1/2}u \in L_2(0, M; V')$). Кроме того

$$\big(\widetilde{B}(u, v), u\big) = 0$$

(см. (2.12)). Для завершения доказательства отметим, что

$$(Av, u) = \|u(t)\|^2 + \alpha^2 |Au(t)|^2.$$

Аналогичные выкладки используются при доказательстве единственности решения задачи (2.5), (2.6) и (2.17) (см. [6]).

Следствие 2.2 (априорные оценки). *Если $u(t)$ – решение (2.5), (2.6) и (2.17), то для любого $t \geqslant 0$ имеют место следующие неравенства*:

$$|u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2 \leqslant \bigl(|u(0)|^2 + \alpha^2\|u(0)\|^2\bigr)e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2}, \quad (2.21)$$

$$\nu\int_t^{t+1}\bigl\{\|u(s)\|^2 + \alpha^2|Au(s)|^2\bigr\}\,ds \leqslant \bigl(|u(0)|^2 + \alpha^2\|u(0)\|^2\bigr)e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2} + \frac{|g|^2}{\lambda_1\nu}. \quad (2.22)$$

Доказательство. Используем тождество (2.20) и оценим его правую часть следующим образом:

$$|(g,u)| \leqslant \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\nu}\|g\|^2_{V'} \leqslant \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\nu\lambda_1}|g|^2 \leqslant \frac{\nu}{2}\bigl\{\|u\|^2 + \alpha^2|Au|^2\bigr\} + \frac{1}{2\nu\lambda_1}|g|^2.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\bigl\{|u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2\bigr\} + \nu\bigl\{\|u(t)\|^2 + \alpha^2|Au(t)|^2\bigr\} \leqslant \frac{1}{\nu\lambda_1}|g|^2. \quad (2.23)$$

Из неравенства Пуанкаре получаем, что

$$|u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2 \leqslant \lambda_1^{-1}\bigl\{\|u(t)\|^2 + \alpha^2|Au(t)|^2\bigr\}$$

(поскольку $\lambda_1|u|^2 \leqslant \|u\|^2$ и $\lambda_1\|u\|^2 \leqslant |Au|^2$). Следовательно, из (2.23) имеем

$$\frac{d}{dt}\bigl\{|u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2\bigr\} + \nu\lambda_1\bigl\{|u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2\bigr\} \leqslant \frac{1}{\nu\lambda_1}|g|^2.$$

Это дифференциальное неравенство вида

$$\frac{d}{dt}\varphi + \nu\lambda_1\varphi \leqslant \frac{1}{\nu\lambda_1}|g|^2 \quad\Longrightarrow\quad \varphi(t) \leqslant \varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}|g|^2,$$

где $\varphi(t) = |u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2$. Отсюда получаем (2.21).

Интегрируя (2.23) по $[t, t+1]$, находим, что

$$\begin{aligned}
|u(t+1)|^2 + \alpha^2\|u(t+1)\|^2 + \nu\int_t^{t+1}\bigl\{\|u(s)\|^2 + \alpha^2|Au(s)|^2\bigr\}\,ds \\
\leqslant |u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2 + \frac{1}{\nu\lambda_1}|g|^2 \\
\leqslant \bigl(|u(0)|^2 + \alpha^2\|u(0)\|^2\bigr)e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2} + \frac{1}{\nu\lambda_1}|g|^2.
\end{aligned}$$

При этом мы воспользовались (2.21). Итак, (2.22) также доказано.

Замечание 2.2. (i) Из оценок (2.21) и (2.22) следует, что при $\alpha > 0$ справедливо $u(\,\cdot\,) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; V) \cap L_2^{\mathrm{loc}}\bigl(\mathbb{R}_+; D(A)\bigr)$. Эти включения существенным образом используются при доказательстве теоремы 2.1 (см. [6]).

(ii) Установлено также, что $v(\,\cdot\,) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; H)$.

Замечание 2.3. Константы в правых частях оценок (2.21) и (2.22), стоящие при выражении $\bigl(|u(0)|^2 + \alpha^2\|u(0)\|^2\bigr)$, не зависят от α. Это обстоятельство играет исключительно важную роль при доказательстве сходимости решений α-модели Н.–С. к решениям точной системы Н.–С. при $\alpha \to 0+$.

Замечание 2.4. В работе [6] установлено следующее свойство сглаживания решений задачи (2.5), (2.6) и (2.17):

$$t|Au(t)|^2 + \nu \int_0^t s|A^{3/2}u(s)|^2\,ds \leqslant C\bigl(\alpha, t, \|u(0)\|, |g|\bigr), \tag{2.24}$$

где $C(\alpha, z, r_1, r_2)$ – монотонно возрастающая функция по каждому аргументу z, r_1, r_2 и $C(\alpha, z, r_1, r_2) \to +\infty$ при $\alpha \to 0+$.

Рассмотрим теперь полугруппу $\{S_\alpha(t)\} := \{S(t)\}$, $\alpha > 0$, действующую в пространстве V по формуле $S(t)u_0 = u(t)$, где $u(t)$ – решение задачи (2.5), (2.6) и (2.17). Из (2.21) следует, что полугруппа $\{S(t)\}$ имеет ограниченное (в V) поглощающее множество $P_0 = \bigl\{u \mid \|u\| \leqslant 2|g|/(\alpha\lambda_1\nu)\bigr\}$. Множество $P_1 = S(1)P_0$ также является поглощающим, а из неравенства (2.24) вытекает, что P_1 предкомпактно в V. Легко проверить, что полугруппа $\{S(t)\}$ непрерывна в V. Из этих фактов следует, что полугруппа $\{S(t)\}$, соответствующая α-модели Н.–С., имеет глобальный аттрактор $\mathscr{A}_\alpha$, причем множество $\mathscr{A}_\alpha$ компактно в V, строго инвариантно относительно $\{S(t)\}$: $S(t)\mathscr{A}_\alpha = \mathscr{A}_\alpha$ при всех $t \geqslant 0$, и $\operatorname{dist}_V\bigl(S(t)B, \mathscr{A}_\alpha\bigr) \to 0+$ при $t \to +\infty$ для любого ограниченного (в V) множества начальных данных $B = \{u_0\}$ (см. [8]–[10], [14], [28]). Более того, множество $\mathscr{A}_\alpha$ ограничено в $D(A) \cap H^2(\mathbb{T}^3)^3$ для любого фиксированного $\alpha > 0$, но не равномерно по α (см. [6]).

В следующем параграфе будет изучаться поведение решений α-модели Н.–С. при $\alpha \to 0+$. Будет установлена их связь с решениями трехмерной системы Н.–С.

§ 3. О сходимости решений α-модели Н.–С.

Прежде всего необходимо получить оценки производной $\partial_t v$, в которых константы не зависят от α, подобные оценкам, выведенным для функции u в следствиях 2.1 и 2.2.

Утверждение 3.1. *Пусть $g \in H$. Тогда любое решение $u(t)$ задачи* (2.5), (2.6) *и* (2.17) *удовлетворяет неравенству*

$$\biggl(\int_t^{t+1} \|\partial_t v(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\biggr)^{1/2} \leqslant C\bigl(|u(0)|^2 + \alpha^2\|u(0)\|^2\bigr)e^{-\nu\lambda_1 t} + R^2, \tag{3.1}$$

где C зависит от λ_1, ν, а R зависит от λ_1, ν, $|g|$, при этом величины C и R не зависят от α.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (2.16):

$$\bigl\|\widetilde{B}(u, v)\bigr\|_{D(A)'} \leqslant c\|u\| \cdot |v| \qquad \forall\, u \in V, \quad \forall\, v \in H. \tag{3.2}$$

Подставляя сюда решение $u(t)$ (2.5), (2.6), (2.17) и $v = u + \alpha^2 Au$, получаем

$$\begin{aligned}\big\|\widetilde{B}(u(t),v(t))\big\|_{D(A)'} &\leqslant c\|u(t)\|\big\{|u(t)| + \alpha^2|Au(t)|\big\}\\ &= c\big\{|u(t)|\cdot\|u(t)\| + \alpha\|u(t)\|\alpha|Au(t)|\big\}\\ &\leqslant c\big(|u(t)|^2 + \alpha^2\|u(t)\|^2\big)^{1/2}\big(\|u(t)\|^2 + \alpha^2|Au(t)|^2\big)^{1/2}. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

При этом мы воспользовались простейшим неравенством Коши. Применяя неравенство (2.21), получаем

$$\big\|\widetilde{B}(u(t),v(t))\big\|^2_{D(A)'} \leqslant c^2\left\{\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2}\right\}\big(\|u(t)\|^2 + \alpha^2|Au(t)|^2\big),$$

где $\varphi(0) = |u(0)|^2 + \alpha^2\|u(0)\|^2$. Интегрируя это неравенство по t, находим

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\big\|\widetilde{B}(u(s),v(s))\big\|^2_{D(A)'}\,ds\\ &\qquad\leqslant c^2\left\{\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2}\right\}\int_t^{t+1}\big(\|u(s)\|^2 + \alpha^2|Au(s)|^2\big)\,ds.\end{aligned}$$

(Функция в фигурных скобках была просто промажорирована по $[t, t+1]$ своим значением в точке t.) Учитывая (2.22), получаем

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\big\|\widetilde{B}(u(s),v(s))\big\|^2_{D(A)'}\,ds\\ &\qquad\leqslant c^2\left\{\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2}\right\}\frac{1}{\nu}\left\{\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2} + \frac{|g|^2}{\lambda_1\nu}\right\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\int_t^{t+1}\big\|\widetilde{B}(u(s),v(s))\big\|^2_{D(A)'}\,ds\right)^{1/2} \leqslant C_1\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + R_1^2, \qquad (3.4)$$

где $C_1 = c\nu^{-1/2}$ и $R_1^2 = |g|^2/(\lambda_1^2\nu^2) + |g|^2/(\lambda_1\nu)$.

Из оценки

$$\|Av\|_{D(A)'} = \|v\|_H = |v| \leqslant |u| + \alpha^2|Au|$$

заключаем, что

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1}\|Av(s)\|^2_{D(A)'}\,ds &\leqslant 2\left(\int_t^{t+1}|u(s)|^2\,ds + \alpha^2\int_t^{t+1}\alpha^2|Au(s)|^2\,ds\right)\\ &\leqslant 2\int_t^{t+1}\big\{|u(s)|^2 + \alpha^2|Au(s)|^2\big\}\,ds.\end{aligned}$$

(Напомним, что $\alpha \leqslant 1$.) Применяя еще раз неравенство (2.22), мы получаем, что

$$\int_t^{t+1}\|Av(s)\|^2_{D(A)'}\,ds \leqslant C_2\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + R_2^2 \qquad (3.5)$$

для подходящих C_2 и R_2, не зависящих от α.

Функции u и v удовлетворяют уравнению (2.5), т.е.

$$\partial_t v = -\nu A v - \widetilde{B}(u,v) + g. \tag{3.6}$$

Из (3.6), принимая во внимание неравенства (3.4) и (3.5), выводим

$$\begin{aligned}
&\biggl(\int_t^{t+1} \|\partial_t v(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\biggr)^{1/2} \\
&\qquad \leqslant \nu\biggl(\int_t^{t+1} \|Av(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\biggr)^{1/2} \\
&\qquad\qquad + \biggl(\int_t^{t+1} \bigl\|\widetilde{B}(u(s),v(s))\bigr\|^2_{D(A)'}\,ds\biggr)^{1/2} + \|g\|_{D(A)'} \\
&\qquad \leqslant \nu\bigl(C_2\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + R_2^2\bigr)^{1/2} + C_1\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + R_1^2 + \lambda_1^{-1}|g| \\
&\qquad \leqslant \nu\bigl(C_2\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + R_2^2 + 1\bigr) + C_1\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + R_1^2 + \lambda_1^{-1}|g| \\
&\qquad \leqslant C\varphi(0)e^{-\nu\lambda_1 t} + R^2 = C\bigl(|u(0)|^2 + \alpha^2\|u(0)\|^2\bigr)e^{-\nu\lambda_1 t} + R^2,
\end{aligned}$$

где $C = \nu C_2 + C_1$ и $R = \nu(R_2^2 + 1) + R_1^2 + \lambda_1^{-1}|g|$. Доказательство закончено.

Справедливо следующее неравенство:

$$\|f\|^2_{D(A)'} \leqslant \|f + \alpha^2 Af\|^2_{D(A)'} \qquad \forall\, f \in D(A)'.$$

Действительно, оператор A является самосопряженным и положительным, т.е.

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{D(A)'} &= \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 \lambda_j^{-1} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 (1 + \alpha^2\lambda_j)\lambda_j^{-1} \\
&= \|(1+\alpha^2 A)f\|^2_{D(A)'} = \|f + \alpha^2 Af\|^2_{D(A)'},
\end{aligned}$$

где $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j$, $Ae_j = \lambda_j e_j$, $j = 1, 2, \dots$, $\{e_j\}$ – собственные функции оператора A, а $\{\lambda_j\}$ – соответствующие собственные значения.

Отсюда следует, что

$$\int_t^{t+1} \|\partial_t u(s)\|^2_{D(A)'}\,ds \leqslant \int_t^{t+1} \|\partial_t v(s)\|^2_{D(A)'}\,ds, \qquad t \geqslant 0, \tag{3.7}$$

где $v = u + \alpha^2 Au$.

Следствие 3.1. *Неравенство* (3.1) *имеет место и для функции* $\partial_t u$:

$$\biggl(\int_t^{t+1} \|\partial_t u(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\biggr)^{1/2} \leqslant C\bigl(|u(0)|^2 + \alpha^2\|u(0)\|^2\bigr)e^{-\nu\lambda_1 t} + R^2, \tag{3.8}$$

с теми же константами C *и* R.

Для того чтобы построить траекторный аттрактор системы (2.5) и (2.6), целесообразно перейти к новой функциональной переменной w, которая занимает промежуточное положение между функциями u и v. Рассмотрим функцию

$$w = (1 + \alpha^2 A)^{1/2} u. \tag{3.9}$$

Тогда очевидно имеются равенства

$$v = (1+\alpha^2 A)u = (1+\alpha^2 A)^{1/2} w. \tag{3.10}$$

Легко проверяются следующие тождества:

$$|w|^2 = |u|^2 + \alpha^2\|u\|^2, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\|w\|^2 &= \big\|(1+\alpha^2 A)^{1/2}u\big\|^2 = \big|A^{1/2}(1+\alpha^2 A)^{1/2}u\big|^2 = \big(A(1+\alpha^2 A)u, u\big)\\ &= \big((1+\alpha^2 A)u, Au\big) = \|u\|^2 + \alpha^2|Au|^2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Заметим, что функция $w = w(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}&\partial_t w + \nu A w + (1+\alpha^2 A)^{-1/2}\widetilde{B}\big((1+\alpha^2 A)^{-1/2}w, (1+\alpha^2 A)^{1/2}w\big)\\ &\qquad = (1+\alpha^2 A)^{-1/2} g,\end{aligned} \tag{3.13}$$

которое вытекает из (2.5), (3.9) и (3.10).

Используя функцию w, перепишем неравенства (2.21), (2.22) и (3.1) в эквивалентной форме.

Следствие 3.2. *Для любого $t>0$ выполнены следующие неравенства*:

$$|w(t)|^2 \leqslant |w(0)|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2}, \tag{3.14}$$

$$\nu\int_t^{t+1}\|w(s)\|^2\,ds \leqslant |w(0)|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|g|^2}{\lambda_1^2\nu^2} + \frac{|g|^2}{\lambda_1\nu}, \tag{3.15}$$

$$\left(\int_t^{t+1}\|\partial_t w(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\right)^{1/2} \leqslant C|w(0)|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + R^2. \tag{3.16}$$

Отметим, что (3.16) *вытекает из* (3.1), *если принять во внимание неравенство, аналогичное* (3.7):

$$\int_t^{t+1}\|\partial_t w(s)\|^2_{D(A)'}\,ds \leqslant \int_t^{t+1}\|\partial_t v(s)\|^2_{D(A)'}\,ds, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.17}$$

Рассмотрим теперь банахово пространство $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$, которое было определено в § 1. Напомним, что

$$\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}} = \big\{z \mid z(\,\cdot\,) \in L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;V)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H),\ \partial_t z(\,\cdot\,)\in L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;D(A)')\big\}.$$

Из неравенств (3.14)–(3.16) вытекает

Утверждение 3.2. *Если $g\in H$, то для любого решения $u(t)$ задачи* (2.5), (2.6) *и* (2.17) *соответствующая функция $w(t) = (1+\alpha^2 A)^{1/2}u(t)$, являясь решением* (3.13), *удовлетворяет неравенству*

$$\|T(h)w(\,\cdot\,)\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant C_3|w(0)|^2 e^{-\nu\lambda_1 h} + R_3^2 \qquad \forall\, h\geqslant 0, \tag{3.18}$$

где константа C_3 зависит от ν и λ_1, а R_3 зависит от ν, λ_1 и $|g|$. (Подчеркнем еще раз, что C_3 и R_3 не зависят от α.)

Рассмотрим пространство траекторий $\mathscr{K}_\alpha^+$ системы (2.5), (2.6). По определению пространство $\mathscr{K}_\alpha^+$ состоит из объединения функций $w(t) = (1+\alpha^2 A)^{1/2}u(t)$, где $u(t)$ – решение (2.5), (2.6) и (2.17) для произвольного $u_0 \in V$. Из утверждения 3.2 следует, что $\mathscr{K}_\alpha^+ \subset \mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ при $\alpha > 0$.

Перепишем энергетическое тождество (2.20) в интегральной форме, которая нам понадобится в дальнейшем.

Утверждение 3.3. *Для каждого* $w \in \mathscr{K}_\alpha^+$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty |w(t)|^2\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^\infty \|w(t)\|^2\psi(t)\,dt = \int_0^\infty \langle g, u(t)\rangle\psi(t)\,dt \tag{3.19}$$

при всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Для доказательства (3.19) следует переписать тождество (2.20) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu\|w(t)\|^2 = \langle g, u(t)\rangle, \qquad t \geqslant 0,$$

умножить это уравнение на произвольную функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ и проинтегрировать по t от 0 до $+\infty$. Тогда, интегрируя по частям в первом интегральном слагаемом (что законно, поскольку функция $|w(t)|^2$ является абсолютно непрерывной), получаем желаемое равенство (3.19).

Ниже рассматривается топологическое пространство Θ_+^{loc}, введенное в § 1 в связи с исходной системой Н.–С. Напомним, что $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}} \subset \Theta_+^{\mathrm{loc}}$.

Лемма 3.1. *Пусть даны последовательности* $\{u_n(t)\} \subset \mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ *и* $\{\alpha_n\} \subset]0,1]$, *причем* $\alpha_n \to 0+$ *при* $n \to \infty$. *Введем обозначение* $w_n = (1+\alpha_n A)^{1/2}u_n$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Предположим, что последовательность* $\{w_n(t)\}$ *ограничена в* $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ *и* $w_n(t) \to w(t)$ *в* Θ_+^{loc} *при* $n \to \infty$. *Тогда последовательность* $\{u_n(t)\}$ *ограничена в* $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ *и* $u_n(t) \to w(t)$ *в* Θ_+^{loc} *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из очевидных неравенств

$$|u_n|^2 \leqslant |u_n|^2 + \alpha^2\|u_n\|^2 = |w_n|^2, \tag{3.20}$$

$$\|u_n\|^2 \leqslant \|u_n\|^2 + \alpha^2|Au_n|^2 = \|w_n\|^2 \tag{3.21}$$

(см. (3.11) и (3.12)). Кроме того, аналогично (3.17) доказывается, что

$$\int_t^{t+1} \|\partial_t u_n(s)\|_{D(A)'}^2\,ds \leqslant \int_t^{t+1} \|\partial_t w_n(s)\|_{D(A)'}^2\,ds. \tag{3.22}$$

Следовательно,

$$\|u_n\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant \|w_n\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Из (3.23) заключаем, что $\{u_n(t)\}$ ограничена в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$. Поскольку шар в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ является слабо компактным множеством в Θ_+^{loc}, можно извлечь из $\{u_n(t)\}$ сходящуюся подпоследовательность, предел которой обозначим через $u(t)$. Для простоты обозначим эту подпоследовательность через $\{u_n(t)\}$. Мы также выделяем соответствующую подпоследовательность из $\{w_n(t)\}$. Тогда имеем

$$u_n(t) \to u(t), \quad w_n(t) \to w(t) \quad \text{в } \Theta_+^{\mathrm{loc}}, \qquad n \to \infty.$$

Мы утверждаем, что $u \equiv w$. Рассмотрим произвольный интервал $[0, M]$. По нашему предположению

$$\begin{aligned} w_n(t) &\to w(t), \quad & n \to \infty, \quad & \text{слабо в } L_2(0,M;V), \\ \partial_t w_n(t) &\to \partial_t w(t), \quad & n \to \infty, \quad & \text{слабо в } L_2\big(0,M;D(A)'\big). \end{aligned}$$

Тогда в силу теоремы Обена (см. [21], [34], [35]) получаем, что $w_n(t) \to w(t)$, $n \to \infty$, сильно в $L_2(0,M;H)$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$$u_n(t) \to u(t), \quad n \to \infty, \qquad \text{сильно в } L_2(0,M;H).$$

Отметим, что $\big\|(1+\alpha_n A)^{-1/2}\big\|_{\mathscr{L}(H,H)} < 1$ и, следовательно,

$$\begin{gathered} \big\|(1+\alpha_n A)^{-1/2} w_n - (1+\alpha_n A)^{-1/2} w\big\|_{L_2(0,M;H)} \leqslant \|w_n - w\|_{L_2(0,M;H)} \to 0, \\ n \to \infty. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Из леммы 3.2 (см. ниже) заключаем, что

$$\big\|(1+\alpha_n A)^{-1/2} w - w\big\|_{L_2(0,M;H)} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.25}$$

Из (3.24) и (3.25)

$$\begin{aligned} \|u_n - w\|_{L_2(0,M;H)} &= \big\|(1+\alpha_n A)^{-1/2} w_n - w\big\|_{L_2} \\ &\leqslant \big\|(1+\alpha_n A)^{-1/2} w_n - (1+\alpha_n A)^{-1/2} w\big\|_{L_2} \\ &\quad + \big\|(1+\alpha_n A)^{-1/2} w - w\big\|_{L_2} \to 0, \qquad n \to \infty, \end{aligned}$$

т.е.

$$u_n(t) \to w(t) \quad \text{сильно в } L_2(0,M;H),$$

следовательно, $u(t) \equiv w(t)$, и лемма 3.1 полностью доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $f(t) \in L_2(0,M;H)$ и $\alpha_n \to 0+$, $n \to \infty$. Тогда*

$$(1+\alpha_n A)^{-1/2} f(t) \to f(t), \quad n \to \infty, \qquad \textit{сильно в } L_2(0,M;H).$$

Доказательство приведено в конце статьи в приложении.

Сформулируем и докажем теперь основную теорему этого параграфа.

Теорема 3.1. *Пусть имеется последовательность $\{w_n\} \subset \mathscr{K}^+_{\alpha_n}$ такая, что $\{w_n\}$ ограничена в $\mathscr{F}^{\mathrm{b}}_+$, $\alpha_n \to 0+$, $n \to \infty$, и $w_n(t) \to w(t)$ в Θ^{loc}_+ при $n \to \infty$. Тогда $w(t)$ является слабым решением трехмерной системы Н.–С., причем w удовлетворяет энергетическому неравенству (1.12), т.е. $w \in \mathscr{K}^+$, где $\mathscr{K}^+$ – пространство траекторий системы Н.–С.*

Доказательство. По условию имеем

$$\|w_n\|_{\mathscr{F}^{\mathrm{b}}_+} \leqslant C \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Так как $w_n(t) \to w(t)$ в Θ^{loc}_+ при $n \to \infty$, то отсюда

$$\|w\|_{\mathscr{F}^{\mathrm{b}}_+} \leqslant C. \tag{3.27}$$

Положим $u_n = (1+\alpha_n^2 A)^{-1/2} w_n$. Ясно, что u_n является решением исходной системы (2.5), (2.6). Из неравенства (3.26) следует, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\geqslant 0}\bigl\{|u_n(t)|^2+\alpha_n^2\|u_n(t)\|^2\bigr\}\leqslant C, \tag{3.28}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\bigl\{\|u_n(s)\|^2+\alpha_n^2|Au_n(s)|^2\bigr\}\,ds\leqslant C, \tag{3.29}$$

$$\sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|\partial_t u_n(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|\partial_t w_n(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\leqslant C. \tag{3.30}$$

Докажем теперь, что $w(t)$ является слабым решением трехмерной системы Н.–С. на любом интервале $]0,M[$.

Функция $w_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w_n+\nu Aw_n+(1+\alpha_n^2A)^{-1/2}\widetilde{B}(u_n,v_n)=(1+\alpha_n^2A)^{-1/2}g \tag{3.31}$$

в пространстве $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Здесь $v_n=u_n+\alpha_n^2Au_n$.

По предположению теоремы

$$w_n(t)\to w(t),\qquad n\to\infty, \tag{3.32}$$

слабо в $L_2(0,M;V)$, $*$-слабо в $L_\infty(0,M;H)$ и

$$\partial_t w_n(t)\to \partial_t w(t),\qquad n\to\infty, \tag{3.33}$$

слабо в $L_2\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Тогда эти сходимости имеют место также и в пространстве распределений $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Кроме того из (3.32) вытекает, что

$$Aw_n(t)\to Aw(t),\qquad n\to\infty, \tag{3.34}$$

слабо в $L_2(0,M;V')$, а также в топологии пространства $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Применяя лемму 3.2 в том частном случае, когда функция $f(t)\equiv g$ не зависит от времени, находим, что

$$(1+\alpha_n^2A)^{-1/2}g\to g,\qquad n\to\infty, \tag{3.35}$$

сильно в $L_2(0,M;H)$ и, следовательно, в $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$.

Таким образом, имея (3.33)–(3.35), для доказательства того, что w удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w+\nu Aw+B(w,w)=g, \tag{3.36}$$

достаточно показать, что

$$(1+\alpha_n^2A)^{-1/2}\widetilde{B}(u_n,v_n)\to B(w,w),\qquad n\to\infty, \tag{3.37}$$

в пространстве $\mathscr{D}'\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$.

Сначала докажем, что

$$\widetilde{B}(u_n,v_n)\to B(w,w),\qquad n\to\infty, \tag{3.38}$$

слабо в пространстве $L_q\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$ для некоторого q, $1<q<2$.

Из леммы 3.1 следует, что

$$u_n(t) \to w(t) \quad \text{в } \Theta_+^{\mathrm{loc}}, \qquad n \to \infty. \tag{3.39}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(u_n, v_n) &= \widetilde{B}(u_n, u_n + \alpha_n^2 A u_n) = \widetilde{B}(u_n, u_n) + \alpha_n^2 \widetilde{B}(u_n, Au_n)\\ &= B(u_n, u_n) + \alpha_n^2 \widetilde{B}(u_n, Au_n).\end{aligned} \tag{3.40}$$

(Здесь мы воспользовались тождеством (2.8).) Рассмотрим оба слагаемых равенства (3.40) по отдельности. Начнем со второго. В силу (2.16) имеем

$$\big\|\alpha_n^2 \widetilde{B}(u_n, Au_n)\big\|_{D(A)'} \leqslant c\alpha_n^2 \|u_n\| \cdot |Au_n|. \tag{3.41}$$

Зафиксировав произвольное число β, $1 < \beta < 2$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\int_0^M \big\|\alpha_n^2 \widetilde{B}\big(u_n(t), Au_n(t)\big)\big\|_{D(A)'}^\beta\, dt &\leqslant c^\beta \alpha_n^{2\beta} \int_0^M \|u_n(t)\|^\beta |Au_n(t)|^\beta\, dt\\ &\leqslant c^\beta \alpha_n^{2\beta}\Big(\sup_{t\in[0,M]} \|u_n(t)\|^\gamma\Big) \int_0^M \|u_n(t)\|^{\beta-\gamma} |Au_n(t)|^\beta\, dt\\ &\leqslant c^\beta \alpha_n^{2\beta}\Big(\sup_{t\in[0,M]} \|u_n\|^\gamma\Big) \bigg[\int_0^M \|u_n\|^{q(\beta-\gamma)}\, dt\bigg]^{1/q} \bigg[\int_0^M |Au_n|^{p\beta}\, dt\bigg]^{1/p},\end{aligned} \tag{3.42}$$

где γ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 < \gamma < \beta$. В (3.42) мы воспользовались неравенством Гёльдера при $1/p + 1/q = 1$ (эти числа будут определены ниже). Продолжая цепочку неравенств (3.42), имеем

$$\begin{aligned}&\int_0^M \|\alpha_n^2 \widetilde{B}(u_n, Au_n)\|_{D(A)'}^\beta\, dt\\ &\qquad\leqslant c^\beta \alpha_n^{2\beta}\Big(\sup_{t\in[0,M]} \|u_n\|^2\Big)^{\gamma/2} \bigg[\int_0^M \|u_n\|^{q(\beta-\gamma)}\, dt\bigg]^{1/q} \bigg[\int_0^M |Au_n|^{p\beta}\, dt\bigg]^{1/p}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Положим теперь $p = 2/\beta$, $q = 2/(2-\beta)$ и найдем число γ из уравнения $q(\beta - \gamma) = 2$, т.е.

$$\frac{2}{2-\beta}(\beta - \gamma) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma = 2(\beta - 1).$$

Отсюда следует, что γ удовлетворяет неравенству $0 < \gamma < \beta$, поскольку

$$\gamma = 2(\beta - 1) < \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \beta < 2.$$

Подставляя такие p, q и γ в (3.43), приходим к оценке

$$\begin{aligned}&\int_0^M \big\|\alpha_n^2 \widetilde{B}(u_n, Au_n)\big\|_{D(A)'}^\beta\, dt\\ &\qquad\leqslant c^\beta \alpha_n^{2-\beta}\Big(\sup_{t\in[0,M]} \alpha_n^2\|u_n\|^2\Big)^{\beta-1} \bigg[\int_0^M \|u_n\|^2\, dt\bigg]^{(2-\beta)/2} \bigg[\int_0^M \alpha_n^2 |Au_n|^2\, dt\bigg]^{\beta/2}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Воспользовавшись оценками (3.28) и (3.29), найдем, что правая часть (3.44) не превосходит величины $C_1\alpha_n^{2-\beta}$:

$$\int_0^M \bigl\|\alpha_n^2 \widetilde{B}(u_n, Au_n)\bigr\|_{D(A)'}^{\beta}\, dt \leqslant C_1\alpha_n^{2-\beta}, \qquad 1<\beta<2. \tag{3.45}$$

Следовательно,

$$\alpha_n^2 \widetilde{B}(u_n, Au_n) \to 0, \qquad n\to\infty, \tag{3.46}$$

сильно в $L_\beta\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$ при любом β, $1<\beta<2$.

Изучим теперь поведение члена $B(u_n,u_n)$ из (3.40). Из (3.39) следует, что

$$u_n(t)\to w(t), \qquad n\to\infty,$$

слабо в $L_2(0,M;V)$, и последовательность $\{u_n(t)\}$ ограничена в этом пространстве. Кроме того

$$\partial_t u_n(t)\to \partial_t w(t), \qquad n\to\infty,$$

слабо в $L_2\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$ и поэтому $\{\partial_t u_n(t)\}$ ограничена в этом пространстве. Значит, применяя теорему Обена о компактности (см. [21], [34], [35]), получаем

$$u_n(t)\to w(t), \qquad n\to\infty, \tag{3.47}$$

сильно в $L_2(0,M;H)$. Напомним, что $L_2(0,M;H)\subset L_2(\mathbb{T}^3\times[0,M])^3$, и, следовательно, можно считать, что

$$u_n(x,t)\to w(x,t), \quad n\to\infty, \qquad \text{при п.в. } (x,t)\in\mathbb{T}^3\times[0,M]. \tag{3.48}$$

Равенство (1.5) влечет

$$B(u_n,u_n) = P\sum_{j=1}^{3}\partial_{x_j}(u_n^j u_n). \tag{3.49}$$

Из (3.48) следует, что

$$\begin{gathered} u_n^j(x,t)u_n(x,t)\to w^j(x,t)w(x,t), \qquad n\to\infty, \\ \text{при п.в. } (x,t)\in\mathbb{T}^3\times[0,M]. \end{gathered} \tag{3.50}$$

Напомним, что $\{u_n\}$ ограничена в $L_2(0,M;V)$ и в $L_\infty(0,M;H)$. Значит, из известного неравенства

$$\|B(u,u)\|_{V'}\leqslant c|u|^{1/2}\|u\|^{3/2} \qquad \forall\, u\in V$$

вытекает, что

$$\{u_n^j u_n\} \quad \text{ограничена в } L_{4/3}(0,M;H) \tag{3.51}$$

и в $L_{4/3}(\mathbb{T}^3\times[0,M])^3$. Применяя известную лемму о слабой сходимости из [21], заключаем из (3.50) и (3.51), что

$$u_n^j(t)u_n(t)\to w^j(t)w(t), \qquad n\to\infty,$$

слабо в $L_{4/3}(\mathbb{T}^3 \times [0,M])^3$ и слабо в $L_{4/3}(0,M;H)$. Тогда в силу (3.49)

$$B\bigl(u_n(t),u_n(t)\bigr) \to B\bigl(w(t),w(t)\bigr), \qquad n\to\infty, \tag{3.52}$$

слабо в $L_{4/3}(0,M;V')$.

Складывая (3.46) и (3.52), находим, что

$$\widetilde{B}(u_n,v_n) \to B(w,w), \qquad n\to\infty,$$

слабо в $L_{4/3}\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$.

Теперь мы утверждаем, что

$$(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2}\widetilde{B}(u_n,v_n) \to B(w,w), \qquad n\to\infty, \tag{3.53}$$

слабо в $L_{4/3}\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$. Здесь нам понадобится лемма, обобщающая лемму 3.1.

Лемма 3.3. *Пусть $f_n(t)\in L_q\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$ и $f_n \rightharpoondown f$, $n\to\infty$, слабо в пространстве $L_q\bigl(0,M;D(A)'\bigr)$, $q>1$. Пусть также $\alpha_n\to 0+$, $n\to\infty$. Тогда*

$$(1+\alpha_n A)^{-1/2} f_n(t) \to f(t) \quad \textit{слабо в } L_q\bigl(0,M;D(A)'\bigr).$$

Доказательство. По предположению $\forall\,\varphi\in L_p\bigl(0,M;D(A)\bigr)$ (здесь $1/p+1/q=1$)

$$\int_0^M \langle f_n(t),\varphi(t)\rangle\,dt \to \int_0^M \langle f(t),\varphi(t)\rangle\,dt, \qquad n\to\infty. \tag{3.54}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^M \bigl\langle (1+\alpha_n A)^{-1/2} f_n(t),\varphi(t)\bigr\rangle\,dt &= \int_0^M \bigl\langle f_n,(1+\alpha_n A)^{-1/2}\varphi\bigr\rangle\,dt \\ &= \int_0^M \bigl\langle f_n,(1+\alpha_n A)^{-1/2}\varphi-\varphi\bigr\rangle\,dt + \int_0^M \langle f_n,\varphi\rangle\,dt. \end{aligned} \tag{3.55}$$

В силу леммы 3.4 (см. ниже)

$$(1+\alpha_n A)^{-1/2}\varphi \to \varphi, \qquad n\to\infty,$$

сильно в $L_p\bigl(0,M;D(A)\bigr)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\biggl|\int_0^M \bigl\langle f_n,(1+\alpha_n A)^{-1/2}\varphi-\varphi\bigr\rangle\,dt\biggr| \\ &\qquad\leqslant \|f_n\|_{L_q(0,M;D(A)')}\bigl\|(1+\alpha_n A)^{-1/2}\varphi-\varphi\bigr\|_{L_p(0,M;D(A))} \\ &\qquad\leqslant C\bigl\|(1+\alpha_n A)^{-1/2}\varphi-\varphi\bigr\|_{L_p} \to 0, \qquad n\to\infty,\end{aligned}$$

и правая часть (3.55) стремится к $\displaystyle\int_0^M \langle f(t),\varphi(t)\rangle\,dt$ при $n\to\infty$ (см. (3.54)). Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $\varphi(t)\in L_p\bigl(0,M;D(A)\bigr)$ и $\alpha_n\to 0+$, $n\to\infty$. Тогда*

$$(1+\alpha_n A)^{-1/2}\varphi(t) \to \varphi(t) \quad \textit{сильно в } L_p\bigl(0,M;D(A)\bigr).$$

Доказательство приведено в приложении.

Продолжим доказательство теоремы 3.1. К этому моменту установлено соотношение (3.53), которое вместе с предыдущими соотношениями означает, что функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению (3.36). Осталось проверить, что $w(t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству (1.11) (при $v = w$) на любом интервале $(0, M)$. В самом деле, функция $w_n(t)$ удовлетворяет энергетическому равенству (см. (3.19))

$$-\frac{1}{2}\int_0^M |w_n(t)|^2\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^M \|w_n(t)\|^2\psi(t)\,dt = \int_0^M \langle g, u_n(t)\rangle\psi(t)\,dt \tag{3.56}$$

для любой $\psi \in C_0^\infty(0, M)$. Пусть теперь $\psi \geqslant 0$ при $t \in]0, M[$. Нами уже доказано, что $u_n(t) \to w(t)$, $n \to \infty$, сильно в $L_2(0, M; H)$ (см. (3.47)). Аналогично доказывается, что

$$w_n(t) \to w(t), \quad n \to \infty, \qquad \text{сильно в } L_2(0, M; H). \tag{3.57}$$

Тогда вещественные функции $|w_n(t)|$ сходятся к $|w(t)|$ при $n \to \infty$ сильно в $L_2(0, M)$. В частности, переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что

$$|w_n(t)|^2 \to |w(t)|^2, \quad n \to \infty, \qquad \text{для п.в. } t \in [0, M]. \tag{3.58}$$

Рассмотрим последовательность функций $\bigl\{|w_n(t)|^2\psi'(t)\bigr\}$ в $L_1(0, M)$. Из предположения теоремы 3.1 следует, что эта последовательность существенно ограничена и, значит, у нее имеется интегрируемая мажоранта. Тогда по теореме Лебега о мажорантной сходимости получаем из (3.58), что

$$\int_0^M |w_n(t)|^2\psi'(t)\,dt \to \int_0^M |w(t)|^2\psi'(t)\,dt, \qquad n \to \infty. \tag{3.59}$$

Заметим, что $w_n(t)\sqrt{\psi(t)} \to w(t)\sqrt{\psi(t)}$, $n \to \infty$, слабо в $L_2(0, M; V)$ (условие теоремы 3.1). Следовательно,

$$\int_0^M \|w(t)\|^2\psi(t)\,dt \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_0^M \|w_n(t)\|^2\psi(t)\,dt. \tag{3.60}$$

Мы уже отмечали, что $u_n(t) \to w(t)$, $n \to \infty$, сильно в $L_2(0, M; H)$. Поэтому

$$\int_0^M \langle g, u_n(t)\rangle\psi(t)\,dt \to \int_0^M \langle g, w(t)\rangle\psi(t)\,dt, \qquad n \to \infty. \tag{3.61}$$

Используя (3.59)–(3.61) и переходя к пределу в (3.56), получаем

$$-\frac{1}{2}\int_0^M |w(t)|^2\psi'(t)\,dt + \nu\int_0^M \|w(t)\|^2\psi(t)\,dt \leqslant \int_0^M \langle g, w(t)\rangle\psi(t)\,dt \tag{3.62}$$

при всех $\psi \in C_0^\infty(0, M)$, $\psi \geqslant 0$.

Итак, мы доказали, что предельная функция $w(t)$ в теореме 3.1 является слабым решением трехмерной системы Н.–С. и удовлетворяет энергетическому неравенству, т.е. $w \in \mathscr{K}^+$.

Теорема 3.1 используется в следующем параграфе, в котором изучается сходимость траекторных аттракторов α-модели Н.–С. к траекторному аттрактору 3D системы Н.–С.

§ 4. Сходимость траекторий α-модели Н.–С. к траекторному аттрактору трехмерной системы Н.–С.

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ траекторный аттрактор системы Н.–С.

$$\partial_t v + \nu A v + B(v,v) = g(x), \qquad t \geqslant 0 \tag{4.1}$$

(см. § 1). Напомним, что множество $\mathfrak{A}_0$ ограничено в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$, компактно в Θ_+^{loc} и $\mathfrak{A}_0 \subset \mathscr{K}^+$.

Через $B_\alpha = \{w_\alpha(x,t),\, t \geqslant 0\}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, обозначается семейство функций вида $w_\alpha(t) = (1+\alpha^2 A)^{1/2} u_\alpha(t)$, где $u_\alpha(t)$ – решение системы (2.5), (2.6), а нормы $w_\alpha(t)$ в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ равномерно ограничены

$$\|w_\alpha\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} = \|w_\alpha\|_{L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;V)} + \|w_\alpha\|_{L_\infty^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;H)} + \|\partial_t w_\alpha\|_{L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;D(A)')} \leqslant R \qquad \forall\, w_\alpha \in B_\alpha,$$

где R – произвольное число. Напомним, что каждая функция $w_\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w_\alpha + \nu A w_\alpha + (1+\alpha^2 A)^{-1/2} \widetilde{B}(u_\alpha, v_\alpha) = (1+\alpha^2 A)^{-1/2} g, \tag{4.2}$$

где $v_\alpha = (1+\alpha^2 A)^{1/2} w_\alpha(t)$ и $u_\alpha = (1+\alpha^2 A)^{-1/2} w_\alpha(t)$.

Положим также

$$\widehat{B}_\alpha = (1+\alpha^2 A)^{-1/2} B_\alpha = \bigl\{u_\alpha \in \mathscr{F}_+^{\mathrm{b}} \mid (1+\alpha^2 A)^{1/2} u_\alpha = w_\alpha \in B_\alpha\bigr\},$$

где u_α удовлетворяет уравнениям (2.5) и (2.6).

Обозначим через $\mathscr{K}_0$ ядро уравнения (4.1). Напомним, что $\mathscr{K}_0$ является объединением всех ограниченных (по норме $\mathscr{F}^{\mathrm{b}}$) полных слабых решений $\{v(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ системы Н.–С. (4.1), которые удовлетворяют энергетическому неравенству (1.18). В § 1 показано, что $\mathfrak{A}_0 = \Pi_+ \mathscr{K}_0$.

Сформулируем теперь основную теорему этого параграфа.

Теорема 4.1. *Пусть* $B_\alpha = \{w_\alpha(x,t),\, t \geqslant 0\}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *обозначает ограниченное множество решений уравнения* (4.2), *которые удовлетворяют неравенству*

$$\|w_\alpha\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant R \qquad \forall\, \alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{4.3}$$

Тогда множество сдвинутых решений $\{T(h)B_\alpha\}$ *(напомним, что* $T(h)w(t) = w(t+h)$*) сходится к траекторному аттрактору* $\mathfrak{A}_0 = \Pi_+\mathscr{K}_0$ *системы Н.–С.* (4.1) *в топологии* Θ_+^{loc} *при* $h \to +\infty$ *и* $\alpha \to 0+$:

$$T(h)B_\alpha \to \mathfrak{A}_0 \quad \text{в } \Theta_+^{\mathrm{loc}}, \qquad h \to +\infty, \quad \alpha \to 0+. \tag{4.4}$$

Более того, такая же сходимость имеет место для соответствующего множества $\widehat{B}_\alpha = (1+\alpha^2 A)^{-1} B_\alpha$:

$$T(h)\widehat{B}_\alpha \to \mathfrak{A}_0 \quad \text{в } \Theta_+^{\mathrm{loc}}, \qquad h \to +\infty, \quad \alpha \to 0+. \tag{4.5}$$

Доказательство. Предположим, что соотношение (4.4) не выполнено, т.е. найдется окрестность $\mathscr{O}(\mathfrak{A}_0)$ в Θ_+^{loc} и найдутся последовательности $\alpha_n \to 0+$, $h_n \to +\infty$, $n \to \infty$, такие, что

$$T(h_n)B_{\alpha_n} \not\subset \mathscr{O}(\mathfrak{A}_0). \tag{4.6}$$

Тогда имеются решения $w_{\alpha_n}(\,\cdot\,) \in B_{\alpha_n}$ такие, что функции

$$W_{\alpha_n}(t) = T(h_n)w_{\alpha_n}(t) = w_{\alpha_n}(t+h_n)$$

не принадлежат $\mathscr{O}(\mathfrak{A}_0)$:

$$W_{\alpha_n}(\,\cdot\,) \notin \mathscr{O}(\mathfrak{A}_0). \tag{4.7}$$

Заметим, что функция $W_{\alpha_n}(t)$ является решением уравнения (4.2) на полупрямой $[-h_n, +\infty)$ при $\alpha = \alpha_n$, поскольку $W_{\alpha_n}(t)$ – это обратный сдвиг по времени функции $w_{\alpha_n}(t)$ на h_n. Напомним, что уравнение (4.2) является автономным. Кроме того из (4.3) следует, что

$$\sup_{t\geqslant -h_n} |W_{\alpha_n}(t)| + \biggl(\sup_{t\geqslant -h_n}\int_t^{t+1} \|W_{\alpha_n}(s)\|^2\,ds\biggr)^{1/2} \\ + \sup_{t\geqslant -h_n}\biggl(\int_t^{t+1} \|\partial_t W_{\alpha_n}(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\biggr)^{1/2} \leqslant R. \tag{4.8}$$

Из этого неравенства вытекает, что последовательность $\{W_{\alpha_n}(\,\cdot\,)\}$ является слабо компактной в пространстве

$$\Theta_{-M,M} = L_2(-M,M;V) \cap L_\infty(-M,M;H) \cap \bigl\{u \mid \partial_t u \in L_2\bigl(-M,M;D(A)'\bigr)\bigr\}$$

при каждом M, если рассматривать α_n с индексами n такими, что $h_n \geqslant M$. Следовательно, для каждого фиксированного $M > 0$ можно найти подпоследовательность $\{\alpha_{n'}\} \subset \{\alpha_n\}$ такую, что $\{W_{\alpha_{n'}}(\,\cdot\,)\}$ сходится слабо в $\Theta_{-M,M}$. Тогда, применяя стандартную диагональную процедуру Кантора, строим функцию $W(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и подпоследовательность $\{\alpha_{n''}\} \subset \{\alpha_n\}$ такие, что

$$W_{\alpha_{n''}} \to W \text{ слабо в } \Theta_{-M,M} \text{ при } n'' \to \infty \text{ для любого } M > 0. \tag{4.9}$$

Из (4.8) получаем неравенство для предельной функции $W(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|W(t)| + \biggl(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} \|W(s)\|^2\,ds\biggr)^{1/2} \\ + \sup_{t\in\mathbb{R}}\biggl(\int_t^{t+1} \|\partial_t W(s)\|^2_{D(A)'}\,ds\biggr)^{1/2} \leqslant R. \tag{4.10}$$

В частности имеем, что

$$W \in \mathscr{F}^{\mathrm{b}} = L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R};V) \cap L_\infty(\mathbb{R};H) \cap \bigl\{u \mid \partial_t u \in L_2^{\mathrm{b}}\bigl(\mathbb{R};D(A)'\bigr)\bigr\}.$$

Теперь применим теорему 3.1, в которой можно предполагать, что все функции определены на полуоси $[-M, +\infty)$ вместо $[0, +\infty)$ (уравнения автономны). Тогда из (4.9) и (4.10) заключаем, что $W(x,t)$ является слабым решением трехмерной системы Н.–С. для всех $t \in \mathbb{R}$ и $W(x,t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству, т.е. $W \in \mathscr{K}_0$, где $\mathscr{K}_0$ – ядро уравнения (4.1). Однако $\Pi_+\mathscr{K}_0 = \mathfrak{A}_0$, и мы имеем, что $\Pi_+ W \in \mathfrak{A}_0$. В то же время было установлено, что

$$\Pi_+ W_{\alpha_{n''}} \to \Pi_+ W \quad \text{в } \Theta_+^{\mathrm{loc}}, \qquad n \to \infty \tag{4.11}$$

(см. (4.9)). В частности, для больших n''

$$\Pi_+ W_{\alpha_{n''}} \in \mathscr{O}(\Pi_+ W) \subseteq \mathscr{O}(\mathfrak{A}_0). \tag{4.12}$$

Это противоречит (4.6). Следовательно, (4.4) верно. Для доказательства (4.5) применяется (4.4) и лемма 3.1. Доказательство завершено.

Теперь мы воспользуемся теоремой 3.1 для изучения поведения траекторных аттракторов α-модели Н.–С. при $\alpha \to 0+$.

Как и раньше, рассматривается пространство траекторий $\mathscr{K}_\alpha^+$, $\alpha > 0$, α-модели (2.5) и (2.6), которое было построено в § 3. Напомним, что $\mathscr{K}_\alpha^+$ состоит из всех функций вида $w_\alpha(t) = (1+\alpha^2 A)^{1/2} u_\alpha(t)$, $t \geqslant 0$, где $u_\alpha(t)$ – решение (2.5) и (2.6), или, что эквивалентно, $w_\alpha(t)$ – решение (3.13). Пространство $\mathscr{K}_\alpha^+ \subset \mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ для любого $\alpha > 0$. Рассмотрим топологию Θ_+^{loc} на $\mathscr{K}_\alpha^+$. Легко проверить, что пространство $\mathscr{K}_\alpha^+$ замкнуто в Θ_+^{loc}. Трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ действует на $\mathscr{K}_\alpha^+$ по формуле $T(h)w_\alpha(t) = w_\alpha(t+h)$, $h \geqslant 0$. Из определения $\mathscr{K}_\alpha^+$ следует, что $T(h)\mathscr{K}_\alpha^+ \subseteq \mathscr{K}_\alpha^+$ при всех $h \geqslant 0$. Наконец, из утверждения 3.2 вытекает (см. (3.18)), что существует поглощающее множество полугруппы $\{T(h)\}$ в $\mathscr{K}_\alpha^+$, ограниченное в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ и компактное в Θ_+^{loc}. (Отметим, что это поглощающее множество не зависит от α, поскольку константы C_3 и R_3 в (3.18) не зависят от α.) Тогда аналогично § 1 доказывается существование траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathscr{K}_\alpha^+$ такого, что $\mathfrak{A}_\alpha$ ограничен в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$, компактен в Θ_+^{loc} и для которого

$$\|\mathfrak{A}_\alpha\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant R' \qquad \forall\, \alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{4.13}$$

при некотором $R' > 0$ (не зависящем от α). Напомним, что $T(h)\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha$ при всех $h \geqslant 0$ и $T(h)B_\alpha \to \mathfrak{A}_\alpha$ в Θ_+^{loc} при $h \to +\infty$ для любого ограниченного множества $B_\alpha \subset \mathscr{K}_\alpha^+$. Кроме того $\mathfrak{A}_\alpha = \Pi_+ \mathscr{K}_\alpha$, где $\mathscr{K}_\alpha$ – ядро уравнения (3.13).

Поскольку траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\alpha$ удовлетворяют (4.13), применима теорема 4.1 к этим множествам и получается

Следствие 4.1. *Имеют место следующие соотношения*:

$$\mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A}_0 \quad \textit{в } \Theta_+^{\mathrm{loc}}, \qquad \alpha \to 0+, \tag{4.14}$$

$$(1+\alpha^2 A)^{-1/2}\mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A}_0 \quad \textit{в } \Theta_+^{\mathrm{loc}}, \qquad \alpha \to 0+. \tag{4.15}$$

В самом деле, семейство $\{\mathfrak{A}_\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1\}$ равномерно ограничено по $\alpha \in]0,1]$. Тогда в (4.4) положим $B_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha$ и получим (4.14), так как $T(h)\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha$ для всех $h \geqslant 0$. Соотношение (4.15) непосредственно вытекает из (4.14).

Заметим, что для любого $0 < \delta \leqslant 1$ следующие вложения являются непрерывными (см. [14]):

$$\Theta_{-M,M} \subseteq L_2(-M,M;H^{1-\delta}), \tag{4.16}$$

$$\Theta_{-M,M} \subseteq C([-M,M];H^{-\delta}). \tag{4.17}$$

Напомним, что (*несимметричным*) *хаусдорфовым расстоянием от множества X до множества Y в банаховом пространстве E* называется величина

$$\mathrm{dist}_E(X,Y) := \sup_{x\in X} \mathrm{dist}_E(x,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \|x-y\|_E. \tag{4.18}$$

Из (4.14) и (4.15) выводим

Следствие 4.2. *Для любого фиксированного* $M>0$ *при* $\alpha\to 0+$ *выполнены следующие предельные соотношения*:

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\mathfrak{A}_\alpha,\mathfrak{A}_0)\to 0+,$$
$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(\mathfrak{A}_\alpha,\mathfrak{A}_0)\to 0+.$$

В заключение этого параграфа установим связь между траекторным аттрактором $\mathfrak{A}_\alpha$ и глобальным аттрактором $\mathscr{A}_\alpha$ α-модели при фиксированном $\alpha>0$ (см. [6] и § 2).

Утверждение 4.1. *Выполнено соотношение*

$$\mathfrak{A}_\alpha=\bigl\{w(t)=(1+\alpha^2A)^{1/2}u(t)=(1+\alpha^2A)^{1/2}S_\alpha(t)u_0,\ t\geqslant 0\mid u_0\in\mathscr{A}_\alpha\bigr\},\qquad(4.19)$$

где $\{S_\alpha(t)\}$ – *полугруппа, соответствующая* α-*модели* (2.5), (2.6) *и действующая в пространстве* V.

Для доказательства (4.19) напомним, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\alpha$ описывается с помощью ядра $\mathscr{K}_\alpha$ системы (3.13), а глобальный аттрактор $\mathscr{A}_\alpha$ имеет аналогичное представление в терминах ядра системы (2.5) и (2.6). Эти ядра преобразуются друг в друга с помощью оператора $(1+\alpha^2A)^{-1/2}$.

Наконец, сформулируем еще два утверждения, которые вытекают из результатов [6] о корректности задачи Коши для α-модели Н.–С.

Утверждение 4.2. *При любом* $\alpha>0$ *траекторный аттрактор* $\mathfrak{A}_\alpha$ *является связным множеством в пространстве* Θ_+^{loc}.

Утверждение 4.3. *Семейство множеств* $\bigl\{\mathfrak{A}_\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1\bigr\}$ *является непрерывным сверху в* Θ_+^{loc}, *т.е. при каждом* α, $0<\alpha\leqslant 1$, *и для любой окрестности* $\mathscr{O}(\mathfrak{A}_\alpha)$ *найдется число* $\delta=\delta(\alpha,\mathscr{O})>0$ *такое, что*

$$\mathfrak{A}_{\alpha'}\subseteq\mathscr{O}(\mathfrak{A}_\alpha)\qquad\forall\,\alpha'>0,\quad|\alpha'-\alpha|<\delta.\qquad(4.20)$$

Мы не приводим здесь доказательства утверждений 4.2 и 4.3, так как они достаточно стандартны для корректно поставленных задач (см., например, [8], [9]).

Замечание 4.1. Если применить оценку (2.24) к $w(t)=(1+\alpha^2A)^{1/2}u(t)$, то получится, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\alpha$ состоит из более регулярных функций, т.е. он ограничен в пространстве

$$\mathscr{F}_+^{\mathrm{b,s}}=L_2^{\mathrm{b}}\bigl(\mathbb{R}_+;D(A)\bigr)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;V)\cap\bigl\{\partial_t w(\,\cdot\,)\in L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;H)\bigr\}$$

и, более того, множество $\mathfrak{A}_\alpha$ притягивает ограниченные семейства траекторий из $\mathscr{K}_\alpha^+$ в сильной локальной топологии пространства

$$\Theta_+^{\mathrm{loc,s}}=L_2^{\mathrm{loc}}\bigl(\mathbb{R}_+;D(A)\bigr)\cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V)\cap\bigl\{\partial_t w(\,\cdot\,)\in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)\bigr\}.$$

Однако эти свойства не являются равномерными по α и они не сохраняются при переходе к пределу при $\alpha\to 0+$.

§ 5. Минимальный предел траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \to 0$

Пусть $\mathfrak{A}_\alpha$ – траекторный аттрактор α-модели Н.–С., $0 < \alpha \leqslant 1$. Как было доказано выше, $\mathfrak{A}_\alpha \subset B$, где B – это шар в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}$ (см. (4.13)) с радиусом R', не зависящим от α:

$$\|\mathfrak{A}_\alpha\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} \leqslant \|B\|_{\mathscr{F}_+^{\mathrm{b}}} = R' \qquad \forall\, \alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{5.1}$$

Ясно, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_0$ точной системы Н.–С. также принадлежит B (см. § 1). Напомним, что шар B компактен в топологии Θ_+^{loc}. Из теоремы Урысона о компактности вытекает, что подпространство $B \cap \Theta_+^{\mathrm{loc}}$, снабженное топологией из Θ_+^{loc}, является метризуемым (см. подробности в [14]). Обозначим соответствующую метрику в $B \cap \Theta_+^{\mathrm{loc}}$ через $\rho(\,\cdot\,,\cdot\,)$, а само метрическое пространство обозначим B_ρ. Это метрическое пространство компактно и полно. Используя новые обозначения, результат предыдущего параграфа можно записать в форме

$$\mathrm{dist}_{B_\rho}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_0) \to 0+, \tag{5.2}$$

где $\mathrm{dist}_{B_\rho}(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначает расстояние Хаусдорфа от одного множества до другого в B_ρ (см. (4.18)). Отметим, что на самом деле предельное соотношение (5.2) сильнее, чем соотношения из следствия 4.2.

Напомним, что множество $\mathfrak{A}_0 \subset B_\rho$ замкнуто в B_ρ. Пусть $\mathfrak{A}_{\min}$ – минимальное замкнутое подмножество $\mathfrak{A}_0$, которое удовлетворяет свойству (5.2), т.е. имеет место равенство $\lim_{\alpha \to 0+} \mathrm{dist}_{B_\rho}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}_{\min}) = 0$, и $\mathfrak{A}_{\min}$ принадлежит каждому замкнутому подмножеству $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}_0$, для которого $\lim_{\alpha \to 0+} \mathrm{dist}_{B_\rho}(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{A}') = 0$. Множество $\mathfrak{A}_{\min}$ будем называть *минимальным пределом траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \to 0+$*.

Для доказательства существования такого множества $\mathfrak{A}_{\min}$ мы просто покажем, что

$$\mathfrak{A}_{\min} = \bigcap_{0<\delta\leqslant 1} \biggl[\, \bigcup_{0<\alpha\leqslant\delta} \mathfrak{A}_\alpha \biggr]_{B_\rho}. \tag{5.3}$$

Легко доказать, что точка w принадлежит правой части (5.3), если и только если найдутся $w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $\rho(w_{\alpha_n}, w) \to 0$ и $\alpha_n \to 0+$ при $n \to \infty$. В силу (5.2) такая предельная точка w всегда принадлежит $\mathfrak{A}_0$, и, более того, она принадлежит любому замкнутому притягивающему множеству $\mathfrak{A}'$. Утверждается, что множество (5.3) является притягивающим для $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \to 0+$. Предположив противное, найдем последовательность $w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ такую, что $\alpha_n \to 0+$ и

$$\mathrm{dist}_{B_\rho}(w_{\alpha_n}, \mathfrak{A}_{\min}) \geqslant \varepsilon \tag{5.4}$$

для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Напомним, что $w_{\alpha_n} \in B_\rho$, а B_ρ – компактное метрическое пространство. Тогда, переходя к подпоследовательности $\{w_{\alpha_{n'}}\} \subset \{w_{\alpha_n}\}$, можно считать, что $\rho(w_{\alpha_{n'}}, w') \to 0$ при $\alpha_{n'} \to 0$ для некоторой $w' \in B_\rho$. Следовательно, по определению $w' \in \mathfrak{A}_{\min}$, что противоречит (5.4). Доказано, что множество $\mathfrak{A}_{\min}$ является минимальным замкнутым притягивающим подмножеством $\mathfrak{A}_0$.

Утверждение 5.1. *Минимальный предел $\mathfrak{A}_{\min}$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \to 0+$ является связным подмножеством $\mathfrak{A}_0$ в B_ρ.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда множество $\mathfrak{A}_{\min}$ представимо в виде объединения двух непустых замкнутых непересекающихся подмножеств $\mathfrak{A}^1_{\min}$ и $\mathfrak{A}^2_{\min}$, т.е.

$$\mathfrak{A}_{\min} = \mathfrak{A}^1_{\min} \cup \mathfrak{A}^2_{\min}, \qquad \mathfrak{A}^1_{\min} \cap \mathfrak{A}^2_{\min} = \varnothing.$$

Поскольку пространство B_ρ компактно, имеется два открытых множества $\mathscr{O}_1$ и $\mathscr{O}_2$ в B_ρ таких, что $\mathfrak{A}^1_{\min} \subset \mathscr{O}_1$, $\mathfrak{A}^2_{\min} \subset \mathscr{O}_2$ и $\mathscr{O}_1 \cap \mathscr{O}_2 = \varnothing$. Ясно, что $\mathfrak{A}_{\min} \subset \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$. Следовательно, в силу (5.2) найдется число $\alpha_0 > 0$ такое, что

$$\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2 \qquad \forall\, \alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant \alpha_0. \tag{5.5}$$

Заметим, что каждое множество $\mathfrak{A}_\alpha$ связно (см. утверждение 4.2), т.е. $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathscr{O}_1$ или $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathscr{O}_2$ при всех $\alpha < \alpha_0$. В то же время, поскольку $\mathfrak{A}_{\min}$ – это минимальный предел $\mathfrak{A}_\alpha$, можно найти α_1 и α_2 такие, что

$$\mathfrak{A}_{\alpha_1} \subset \mathscr{O}_1, \qquad \mathfrak{A}_{\alpha_2} \subset \mathscr{O}_2 \tag{5.6}$$

(в противном случае, можно уменьшить $\mathfrak{A}_{\min}$). Пусть для определенности $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0$. Положим

$$\delta^* = \sup\bigl\{\delta \mid \mathfrak{A}_\alpha \subset \mathscr{O}_2,\, \alpha_2 \leqslant \alpha < \alpha_2 + \delta\bigr\}. \tag{5.7}$$

Заметим, что $\alpha_2 + \delta^* \leqslant \alpha_1 < \alpha_0$ (см. (5.6)), и $\mathfrak{A}_{\alpha_2+\delta^*} \subset \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$, поскольку $\alpha_2 + \delta^* < \alpha_0$ (см. (5.5)).

Утверждается, что $\mathfrak{A}_{\alpha_2+\delta^*}$ не может принадлежать $\mathscr{O}_2$. В самом деле, если $\mathfrak{A}_{\alpha_2+\delta^*} \subset \mathscr{O}_2$, то в силу утверждения 4.3 имеется достаточно малое $\delta_2 > 0$ такое, что $\mathfrak{A}_{\alpha_2+\delta^*+\delta_2} \subset \mathscr{O}_2$, а это противоречит определению δ^* (5.7). Одновременно с этим $\mathfrak{A}_{\alpha_2+\delta^*}$ не может принадлежать и $\mathscr{O}_1$. Действительно, если $\mathfrak{A}_{\alpha_2+\delta^*} \subset \mathscr{O}_1$, то опять в силу утверждения 4.3 найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что $\mathfrak{A}_{\alpha_2+\delta^*-\delta_1} \subset \mathscr{O}_1$, а это снова противоречит определению δ^*. Однако все это вступает в противоречие с включением $\mathfrak{A}_{\alpha_2+\delta^*} \subset \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2$. Доказательство закончено.

Напомним, что множество $\mathfrak{A}_{\min}$ компактно. Наконец, докажем

Утверждение 5.2. *Минимальное предельное множество $\mathfrak{A}_{\min}$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\alpha$ при $\alpha \to 0+$ является строго инвариантным множеством относительно трансляционной полугруппы $\{T(h)\}$, т.е.*

$$T(h)\mathfrak{A}_{\min} = \mathfrak{A}_{\min} \qquad \forall\, h \geqslant 0. \tag{5.8}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $w \in \mathfrak{A}_{\min}$. По определению найдется последовательность $w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ такая, что $\rho(w_{\alpha_n}, w) \to 0$ при $\alpha_n \to 0+$. Трансляционная полугруппа $\{T(h)\}$ является непрерывной в Θ^{loc}_+, а значит, $\rho\bigl(T(h)w_{\alpha_n}, T(h)w\bigr) \to 0$ при $\alpha_n \to 0+$. Раз каждое множество $\mathfrak{A}_{\alpha_n}$ строго инвариантно, то $T(h)w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$. Следовательно, $T(h)w \in \mathfrak{A}_{\min}$ и мы доказали, что

$$T(h)\mathfrak{A}_{\min} \subseteq \mathfrak{A}_{\min} \qquad \forall\, h \geqslant 0.$$

Проверим обратное включение. Для любого $h \geqslant 0$ и для произвольной точки $w \in \mathfrak{A}_{\min}$ с соответствующей последовательностью $w_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$, $\rho(w_{\alpha_n}, w) \to 0$, $\alpha_n \to 0+$, необходимо найти точку $W \in \mathfrak{A}_{\min}$ такую, что $T(h)W = w$. Поскольку множество $\mathfrak{A}_{\alpha_n}$ строго инвариантно, найдутся элементы $W_{\alpha_n} \in \mathfrak{A}_{\alpha_n}$ такие, что $T(h)W_{\alpha_n} = w_{\alpha_n}$. Последовательность $\{W_{\alpha_n}\}$ принадлежит компактному множеству B_ρ. Переходя к подпоследовательности $\{\alpha_{n'}\}$, будем иметь, что $W_{\alpha_{n'}} \to W$, $n' \to \infty$, для некоторого $W \in B_\rho$. Тогда $W \in \mathfrak{A}_{\min}$. Поскольку $\{T(h)\}$ непрерывно, $T(h)W_{\alpha_{n'}} \to T(h)W$, $n' \to \infty$. Однако $T(h)W_{\alpha_{n'}} = w_{\alpha_{n'}}$ и тогда $w_{\alpha_{n'}} \to T(h)W$, $n' \to \infty$, но $w_{\alpha_n} \to w$, $n \to \infty$. Следовательно, $T(h)W = w$ и доказано включение

$$\mathfrak{A}_{\min} \subseteq T(h)\mathfrak{A}_{\min} \qquad \forall\, h \geqslant 0.$$

В итоге получаем (5.8).

§ A. Приложение

Доказательство леммы 3.2. Пусть $\{e_n\}$ – собственные векторы оператора A, т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$, $\lambda_k > 0$, и $\lambda_k \to +\infty$, $k \to \infty$. Тогда $f(t) = \sum_{k=1}^\infty f_k(t)e_k$, где $f_k(t) = (f(t), e_k)$, и

$$\|f\|^2_{L_2(0,M;H)} = \sum_{k=1}^\infty \int_0^M |f_k(t)|^2\,dt. \tag{A.1}$$

Имеем

$$(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2} f(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{f_k(t)}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\, e_k,$$

а в силу (A.1)

$$\big\|(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2} f(\,\cdot\,) - f(\,\cdot\,)\big\|^2_{L_2(0,M;H)} = \sum_{k=1}^\infty \biggl[1 - \frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\biggr]^2 \int_0^M |f_k(t)|^2\,dt. \tag{A.2}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (A.1) следует, что найдется число $K > 0$ такое, что

$$\sum_{k=K+1}^\infty \int_0^M |f_k(t)|^2\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{A.3}$$

(поскольку ряд сходится). Заметим, что

$$0 < 1 - \frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}} < 1. \tag{A.4}$$

Следовательно, учитывая (A.2) и (A.3),

$$\begin{aligned}\big\|(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2} f - f\big\|^2_{L_2(0,M;H)} &= \sum_{k=1}^K + \sum_{k=K+1}^\infty \\ &\leqslant \sum_{k=1}^K \biggl[1 - \frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\biggr]^2 \int_0^M |f_k(t)|^2\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Выберем теперь число N так, чтобы при всех $n \geqslant N$

$$\sum_{k=1}^{K}\biggl[1-\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\biggr]^2\int_0^M |f_k(t)|^2\,dt \leqslant \frac{\alpha_n^4}{4}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k^2\int_0^M |f_k(t)|^2\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Это возможно сделать, так как $\alpha_n \to 0+$, $n \to \infty$, а число K зафиксировано. Здесь мы воспользовались также элементарным неравенством

$$0 < 1-\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}} \leqslant \frac{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}-1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}} \leqslant \frac{\alpha_n^2\lambda_k}{2}\,. \tag{A.6}$$

Следовательно,

$$\bigl\|(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2}f(\,\cdot\,)-f(\,\cdot\,)\bigr\|^2_{L_2(0,M;H)} \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, n \geqslant N$$

и тем самым

$$(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2}f(t) \to f(t), \qquad n \to \infty,$$

сильно в $L_2(0,M;H)$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3.4. Поскольку $\varphi \in L_p\bigl(0,M;D(A)\bigr)$, то функция φ разлагается в ряд $\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)e_k$, причем $\varphi_k \in L_p(0,M)$, и подобно (A.1) имеем

$$\|\varphi\|^p_{L_p(0,M;D(A))} = \int_0^M \biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2|\varphi_k(t)|^2\biggr)^{p/2}dt.$$

Кроме того частичная сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{K}\varphi_k(t)e_k \to \varphi(t), \qquad K \to \infty,$$

сильно в $L_p\bigl(0,M;D(A)\bigr)$, т.е.

$$\biggl\|\sum_{k=1}^{K}\varphi_k(\,\cdot\,)e_k-\varphi(\,\cdot\,)\biggr\|^p_{L_p(0,M;D(A))} = \int_0^M\biggl(\sum_{k=K+1}^{\infty}\lambda_k^2|\varphi_k(t)|^2\biggr)^{p/2}dt \to 0, \quad K \to \infty. \tag{A.7}$$

Имеем

$$(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2}\varphi(t)-\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}-1\biggr)\varphi_k(t)e_k = \sum_{k=1}^{K}+\sum_{k=K+1}^{\infty}$$

и

$$\bigl\|(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2}\varphi(\,\cdot\,)-\varphi(\,\cdot\,)\bigr\|^p_{L_p(0,M;D(A))} = \int_0^M\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\biggl[1-\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\biggr]^2|\varphi_k(t)|^2\biggr)^{p/2}dt. \tag{A.8}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\big\|(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2}\varphi(\,\cdot\,)-\varphi(\,\cdot\,)\big\|_{L_p(0,M;D(A))} &= \bigg\|\sum_{k=1}^{\infty}\bigg(\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}-1\bigg)\varphi_k(\,\cdot\,)e_k\bigg\|_{L_p} \\
&\leqslant \bigg\|\sum_{k=1}^{K}\bigg\|_{L_p}+\bigg\|\sum_{k=K+1}^{\infty}\bigg\|_{L_p} = \bigg\|\sum_{k=1}^{K}\bigg(\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}-1\bigg)\varphi_k(\,\cdot\,)e_k\bigg\|_{L_p}+\bigg\|\sum_{k=K+1}^{\infty}\bigg\|_{L_p} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{K}\bigg(1-\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\bigg)\|\varphi_k(\,\cdot\,)e_k\|_{L_p(0,M;D(A))}+\bigg\|\sum_{k=K+1}^{\infty}\bigg\|_{L_p} \\
&= \sum_{k=1}^{K}\lambda_k\bigg(1-\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\bigg)\bigg(\int_0^M|\varphi_k(t)|^p\,dt\bigg)^{1/p}+\bigg\|\sum_{k=K+1}^{\infty}\bigg\|_{L_p}. \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\bigg\|\sum_{k=K+1}^{\infty}\bigg\|_{L_p}^p &= \bigg\|\sum_{k=K+1}^{\infty}\bigg(\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}-1\bigg)\varphi_k(\,\cdot\,)e_k\bigg\|_{L_p}^p \\
&= \int_0^M\bigg(\sum_{k=K+1}^{\infty}\lambda_k^2\bigg[1-\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\bigg]^2|\varphi_k(t)|^2\bigg)^{p/2}dt \\
&\leqslant \int_0^M\bigg(\sum_{k=K+1}^{\infty}\lambda_k^2|\varphi_k(t)|^2\bigg)^{p/2}dt, \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

поскольку $0<1-(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{-1/2}<1$.

Из (A.7) следует, что интеграл (A.10) можно сделать сколь угодно малым для большого K, т.е. для произвольного $\varepsilon>0$ найдется число $K=K(\varepsilon)$ такое, что последнее слагаемое в (A.9) не превосходит $\varepsilon/2$ для этого K.

Осталось оценить первую сумму в (A.9). Используя неравенство

$$0<1-(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{-1/2}<\frac{\alpha_n^2\lambda_k}{2}$$

(см. (A.6)), получаем, что

$$\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\bigg(1-\frac{1}{(1+\alpha_n^2\lambda_k)^{1/2}}\bigg)\bigg(\int_0^M|\varphi_k(t)|^p\,dt\bigg)^{1/p}\leqslant\frac{\alpha_n^2}{2}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\bigg(\int_0^M|\varphi_k(t)|^p\,dt\bigg)^{1/p}. \qquad \text{(A.11)}$$

Поскольку K фиксировано и $\alpha_n\to 0+$ при $n\to\infty$, можно выбрать N достаточно большим для того, чтобы при $n\geqslant N$ правая часть (A.11) также не превосходила $\varepsilon/2$. Тогда в результате

$$\big\|(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2}\varphi(\,\cdot\,)-\varphi(\,\cdot\,)\big\|_{L_p}\leqslant\varepsilon \qquad \forall\, n\geqslant N,$$

т.е.

$$(1+\alpha_n^2 A)^{-1/2}\varphi\to\varphi, \quad n\to\infty, \qquad \text{сильно в } L_p\big(0,M;D(A)\big).$$

Список литературы

[1] S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, S. Wynne, “Camassa–Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow”, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:24 (1998), 5338–5341.

[2] S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, S. Wynne, “A connection between the Camassa–Holm equations and turbulent flows in channels and pipes”, *Phys. Fluids*, **11**:8 (1999), 2343–2353.

[3] S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, S. Wynne, “The Camassa–Holm equations and turbulence”, *Phys. D*, **133**:1–4 (1999), 49–65.

[4] S. Chen, D. D. Holm, L. G. Margolin, R. Zhang, “Direct numerical simulations of the Navier–Stokes alpha model”, *Phys. D*, **133**:1–4 (1999), 66–83.

[5] C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi, “The Navier–Stokes-alpha model of fluid turbulence”, *Phys. D*, **152–153** (2001), 505–519.

[6] C. Foias, D. D. Holm, E. S. Titi, “The three dimensional viscous Camassa–Holm equations, and their relation to the Navier–Stokes equations and turbulence theory”, *J. Dynam. Differential Equations*, **14**:1 (2002), 1–35.

[7] K. Mohseni, B. Kosović, S. Shkoller, J. E Marsden, “Numerical simulations of the Lagrangian averaged Navier–Stokes equations for homogeneous isotropic turbulence”, *Phys. Fluids*, **15**:2 (2003), 524–544.

[8] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer-Verlag, New York, 1988.

[9] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. V. Babin, M. I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, Stud. Math. Appl., **25**, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[10] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Math. Surveys Monogr., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[11] P. Constantin, C. Foias, *Navier–Stokes equations*, Chicago Lectures in Math., Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1988.

[12] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, *Navier–Stokes equations and turbulence*, Encyclopedia Math. Appl., **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[13] G. R. Sell, Y. You, *Dynamics of evolutionary equations*, Appl. Math. Sci., **143**, Springer-Verlag, New York, 2002.

[14] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[15] D. D. Holm, “Fluctuation effects on 3D Lagrangian mean and Eulerian mean fluid motion”, *Phys. D*, **133**:1–4 (1999), 215–269.

[16] B. J. Geurts, D. D. Holm, “Regularization modeling for large-eddy simulation”, *Phys. Fluids*, **15**:1 (2003), L13–L16.

[17] C. Cao, D. D. Holm, E. S. Titi, “On the Clark-α model of turbulence: global regularity and long-time dynamics”, *J. Turbul.*, **6** (2005), 1–11.

[18] A. Cheskidov, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, “On a Leray-α model of turbulence”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **461**:2055 (2005), 629–649.

[19] A. A. Ilyin, E. M. Lunasin, E. S. Titi, “A modified-Leray-α subgrid scale model of turbulence”, *Nonlinearity*, **19**:4 (2006), 879–897.

[20] Y. Cao, E. M. Lunasin, E. S. Titi, “Global well-posedness of the three-dimensional viscous and inviscid simplified Bardina turbulence models”, *Commun. Math. Sci.*, **4**:4 (2006), 823–848.

[21] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.

[22] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer–Verlag, New York, 1985.

[23] A. Cheskidov, "Boundary layer for the Navier–Stokes-alpha model of fluid turbulence", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **172**:3 (2004), 333–362.

[24] J. D. Gibbon, D. D. Holm, "Length-scale estimates for the LANS-α equations in terms of the Reynolds number", *Phys. D*, **220**:1 (2006), 69–78.

[25] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, "Trajectory attractors for evolution equations", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **321**:10 (1995), 1309–1314.

[26] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, "Evolution equations and their trajectory attractors", *J. Math. Pures Appl.* (9), **76**:10 (1997), 913–964.

[27] М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, "Траекторный и глобальный аттракторы 3D системы Навье–Стокса", *Матем. заметки*, **71**:2 (2002), 194–213; англ. пер.: M. I. Vishik, V. V. Chepyzhov, "Trajectory and global attractors of three-dimensional Navier–Stokes systems", *Math. Notes*, **71**:1–2 (2002), 177–193.

[28] G. R. Sell, "Global attractors for the three-dimensional Navier–Stokes equations", *J. Dynam. Differential Equations*, **8**:1 (1996), 1–33.

[29] М. И. Вишик, Е. С. Тити, В. В. Чепыжов, "Аппроксимация траекторного аттрактора 3D системы Навье–Стокса α-моделью Лерэ", *Докл. РАН*, **400**:5 (2005), 583–586; англ. пер.: M. I. Vishik, E. S. Titi, V. V. Chepyzhov, "Trajectory attractor approximation of the 3D Navier–Stokes system by a Leray-α model", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **71**:1 (2005), 92–95.

[30] V. V. Chepyzhov, E. S. Titi, M. I. Vishik, "On the convergence of solutions of the Leray-α model to the trajectory attractor of the 3D Navier–Stokes system", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **17**:3 (2007), 481–500.

[31] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1979.

[32] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т.* I, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol.* 1., Dunod, Paris, 1968.

[33] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, 2 изд., Наука, М., 1970; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York–London, 1963.

[34] J.-P. Aubin, "Un théorème de compacité", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 5042–5044.

[35] Ю. А. Дубинский, "Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях", *Матем. сб.*, **67(109)** (1965), 609–642; англ. пер.: Yu. A. Dubinskij, "Weak convergence in nonlinear elliptic and parabolic equations", *Amer. Math. Soc. Transl. II*, **67** (1968), 226–258.

М. И. Вишик (M. I. Vishik)
Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва
E-mail: vishik@iitp.ru

Поступила в редакцию
23.01.2007

Е. С. Тити (E. S. Titi)
University of California, Irvine, USA;
Weizmann Institute of Science, Rehovot, Izrael
E-mail: etiti@math.uci.edu

В. В. Чепыжов (V. V. Chepyzhov)
Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва
E-mail: chep@iitp.ru