Математические заметки

том 79 выпуск 4 апрель 2006

УДК 517.95

АТТРАКТОРЫ ДИССИПАТИВНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Изучается равномерный аттрактор $\mathscr{A}^\varepsilon$ диссипативного волнового уравнения в ограниченной области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, у которого внешняя сила сингулярно осциллирует по времени, точнее имеет вид $g_0(x,t)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(x,t/\varepsilon)$, $x\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, где $\alpha>0$, $0<\varepsilon\leqslant 1$. Это уравнение имеет в $E=H_0^1\times L_2$ поглощающее множество B^ε, которое допускает оценку $\|B^\varepsilon\|_E\leqslant C_1+C_2\varepsilon^{-\alpha}$ и, следовательно, может неограниченно расти по норме E при $\varepsilon\to 0+$. При выполнении некоторых дополнительных условий для функции $g_1(x,z)$, $x\in\Omega$, $z\in\mathbb{R}$, доказано, что при $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ глобальные аттракторы $\mathscr{A}^\varepsilon$ такого уравнения ограничены в E, т.е. $\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E\leqslant C_3$, $0<\varepsilon\leqslant 1$.

Наряду с исходным уравнением рассматривается "предельное" волновое уравнение с внешней силой $g_0(x,t)$, которое также имеет глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$. В том случае, когда $g_0(x,t)=g_0(x)$ и глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$ предельного уравнения является экспоненциальным, установлено, что при $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ хаусдорфово отклонение $\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}^\varepsilon,\mathscr{A}^0)\leqslant C\varepsilon^{\eta(\alpha)}$, причем $\eta(\alpha)>0$. Для $\eta(\alpha)$ и α_0 даются явные формулы. Рассмотрен также неавтономный случай, когда функция $g_0=g_0(x,t)$. Предполагается, что выполнены достаточные условия при которых "предельное" неавтономное уравнение имеет экспоненциальный глобальный аттрактор. В этом случае получены оценки сверху для хаусдорфова отклонения аттракторов $\mathscr{A}^\varepsilon$ от $\mathscr{A}^0$, аналогичные приведенным выше.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Рассматривается диссипативное волновое уравнение вида

$$\partial_t^2u+\gamma\partial_tu=\Delta u-f(u)+g_0(x,t)+\varepsilon^{-\alpha}g_1\biggl(x,\frac{t}{\varepsilon}\biggr),\qquad u|_{\partial\Omega}=0,\tag{1.1}$$

где $\gamma>0$, $1\geqslant\varepsilon>0$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\Omega\Subset\mathbb{R}^n$. Нелинейная функция $f(u)\in C^1$. Предполагается, что функция $f(u)$ и внешняя сила $g^\varepsilon(t):=g_0(x,t)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(x,t/\varepsilon)$ удовлетворяют условиям, при которых начальная задача

$$u|_{t=\tau}=u_\tau(x),\qquad \partial_tu|_{t=\tau}=p_\tau(x)$$

для (1.1) корректно поставлена при фиксированном $\varepsilon>0$. В частности, считается выполненным неравенство $|f'(v)|\leqslant K(1+|v|^\rho)$ при всех $v\in\mathbb{R}$, где $0\leqslant\rho<2/(n-2)$ при

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00390, Фонда содействия отечественной науке и фонда CRDF, грант № 1-2654.

$n \geqslant 3$ и $\rho \geqslant 0$ любое при $n = 1, 2$. Кроме того, предполагается, что функции $g_0(x,t)$ и $g_1(x,z)$ являются *трансляционно компактными* в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ (см. п. 2).

Наряду с уравнением (1.1) рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon + \gamma \partial_t \widehat{u}^\varepsilon = \Delta \widehat{u}^\varepsilon - f(\widehat{u}^\varepsilon) + \widehat{g}_0(x,t) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \qquad \widehat{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.2}$$

у которых внешние силы $\widehat{g}^\varepsilon(t) := \widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1(t/\varepsilon)$ принадлежат оболочке $\mathscr{H}(g^\varepsilon)$ исходной внешней силы $g^\varepsilon(t)$ в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ при любом фиксированном $\varepsilon \in \,]0,1]$.

Обозначим через $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau),\ \ t \geqslant \tau\}$ процесс, соответствующий уравнению (1.2): $U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)y_\tau = \widehat{y}^\varepsilon(t)$, где $y_\tau = (u_\tau, p_\tau) \in E := H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ – начальное условие при $t = \tau$ для уравнения (1.2), а $\widehat{y}^\varepsilon(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), p^\varepsilon(t))$ – его решение при $t \geqslant \tau$. Здесь и далее, $E := H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ обозначает энергетическое фазовое пространство.

В п. 2 на основании энергетических оценок устанавливается, что при фиксированном $\varepsilon \in \,]0,1]$ семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, обладает компактным в E поглощающим множеством $B^\varepsilon \Subset E$, для которого имеет место оценка

$$\|B^\varepsilon\|_E \leqslant C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon^\alpha}. \tag{1.3}$$

Из этого свойства следует, что при каждом фиксированном $\varepsilon \in \,]0,1]$ семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathscr{A}^\varepsilon \subset B^\varepsilon$ в пространстве E, т.е. множество $\mathscr{A}^\varepsilon$ притягивает при $t \to +\infty$ в норме E любые ограниченные семейства траекторий $\{\widehat{y}^\varepsilon(t),\ t \geqslant \tau \mid \|\widehat{y}^\varepsilon(\tau)\|_E \leqslant M\}$ уравнения равномерно по $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, и при этом $\mathscr{A}^\varepsilon$ является минимальным замкнутым множеством, обладающим этим свойством. В частности,

$$\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \leqslant C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon^\alpha}. \tag{1.4}$$

Отметим, что при сделанных выше предположениях допускается неограниченный рост норм $\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E$ при $\varepsilon \to 0+$ (это можно показать на конкретных примерах).

Одновременно с уравнениями (1.2) рассматривается “предельное” семейство уравнений

$$\partial_t^2 \widehat{u}^0 + \gamma \partial_t \widehat{u}^0 = \Delta \widehat{u}^0 - f(\widehat{u}^0) + \widehat{g}^0(t), \qquad \widehat{u}^0|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.5}$$

где $\widehat{g}^0 \in \mathscr{H}(g_0)$, которое также порождает “предельное” семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^0}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^0 \in \mathscr{H}(g_0)$, действующих в E. Это семейство обладает равномерным глобальным аттрактором $\mathscr{A}^0$ (см. п. 2). Множество $\mathscr{A}^0$ компактно и, в частности, ограничено в E.

В п. 3 изучается вопрос об отклонении траекторий $\widehat{y}^\varepsilon(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), \widehat{p}^\varepsilon(t))$ при $t \geqslant \tau$ уравнения (1.2) от траекторий $\widehat{y}^0(t) = (\widehat{u}^0(t), \widehat{p}^0(t))$ соответствующего “предельного” уравнения (1.5), удовлетворяющих одинаковым начальным условиям

$$\widehat{y}^\varepsilon(\tau) = \widehat{y}^0(\tau) = y_\tau \in B^\varepsilon.$$

При этом предполагается, что для всех функций $\widehat{g}_1(x,z) \in \mathscr{H}(g_1)$ выполнено следующее существенное дополнительное условие: существуют первообразные $\widehat{G}_1(x,z)$ по переменной z, $\partial_z \widehat{G}_1(x,z) = \widehat{g}_1(x,z)$, удовлетворяющие неравенству

$$\|\widehat{G}_1(\,\cdot\,,z)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant M < \infty \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

где число M не зависит от $\widehat{g}_1 \in \mathscr{H}(g_1)$. В п. 3 приведены примеры квазипериодических (по z) функций, для которых (1.6) имеет место.

При выполнении перечисленных выше условий, свойства (1.6), а также неравенства

$$|f'(v)| \leqslant K \qquad \forall\, v \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

доказано, что

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau+t) - \widehat{y}^0(\tau+t)\|_E \leqslant D\varepsilon^{1/2-\alpha}e^{rt} \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{1.8}$$

где D и r – некоторые положительные константы, не зависящие от ε. Для показателя r дается явное выражение. Эта оценка является аналогом известных глобальных оценок Боголюбова.

Несмотря на то, что поглощающее множество B^ε уравнений (1.2) допускает лишь оценку (1.3), в п. 4 доказано, что глобальный аттрактор $\mathscr{A}^\varepsilon$ уравнений (1.2) равномерно ограничен по $\varepsilon \in \,]0,1]$ в норме E:

$$\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \leqslant C, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{1.9}$$

если показатель α в (1.1) и (1.2) удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 = \frac{1}{2(1+r/\beta)}. \tag{1.10}$$

Здесь число r такое же, как и в оценке (1.8), а коэффициент β взят из экспоненты в энергетическом неравенстве для уравнений (1.2) (см. (2.9) в п. 2).

В ряде важных случаев удалось оценить сверху хаусдорфово отклонение глобального аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$ от глобального аттрактора $\mathscr{A}^0$. Первый такой случай рассмотрен в п. 5. Предполагается, что в уравнении (1.1) внешняя сила имеет вид

$$g^\varepsilon(t) = g_0(x) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Следовательно, в уравнениях (1.2)

$$\widehat{g}^\varepsilon(x,t) := g_0(x) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right),$$

а "предельное" семейство волновых уравнений (1.5) состоит из одного автономного уравнения, так как $g_0(x)$ не зависит от времени t. Кроме того, предполагается, что глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$ этого автономного уравнения является экспоненциальным. Достаточные условия для этого известны (см. п. 5). Главное из них заключается в том, что "предельное" уравнение (1.5) имеет конечное число стационарных точек, причем все они гиперболические.

При выполнении этих условий доказана следующая оценка:

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}^\varepsilon, \mathscr{A}^0) \leqslant C^0\varepsilon^{\eta_0(\alpha)}, \qquad \eta_0(\alpha) = \frac{\nu}{2(r+\nu)}(1-\alpha). \tag{1.11}$$

Здесь r такое же, как и в (1.8), а ν – коэффициент в экспоненте из формулы для экспоненциального притяжения аттрактором $\mathscr{A}^0$ ограниченных семейств решений "предельного" уравнения (1.5).

Наконец, в п. 6 и п. 7 рассмотрен случай, когда “предельное” уравнение (1.5) является неавтономным: $\widehat{g}_0 = \widehat{g}_0(t) \in \mathscr{H}(g_0)$, но его глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$ является экспоненциальным. Достаточные условия для этого даны в [1] и изложены в п. 6. В п. 7 доказана оценка вида (1.11) для $\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}^\varepsilon, \mathscr{A}^0)$, если выполнены условия из работы [1].

Некоторые проблемы, связанные с усреднением глобальных аттракторов автономных и неавтономных диссипативных уравнений математической физики, изучались в работах [2]–[8]. В работах [1], [9] доказаны оценки вида (1.11) для диссипативных волновых уравнений вида (1.1) при $\alpha = 0$ (случай несингулярной осцилляции внешних сил).

В заключение отметим, что и для некоторых других уравнений математической физики, содержащих сингулярно осциллирующие члены вида $g_0(x,t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(x, t/\varepsilon)$ или $g_0(x,t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(x/\varepsilon, t)$, имеют место результаты, аналогичные результатам, полученным в настоящей статье.

2. Равномерный аттрактор диссипативного волнового уравнения с сингулярно осциллирующей по времени внешней силой. Изучается следующее волновое уравнение с нулевыми граничными условиями:

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u) + g_0(x,t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\biggl(x, \frac{t}{\varepsilon}\biggr), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.1}$$

где $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $u = u(x,t)$ – неизвестная вещественная функция, Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ – коэффициент диссипации, $\varepsilon > 0$ – малый параметр и $0 < \alpha \leqslant \alpha_0$ (величина α_0 будет определена позже). Предполагается, что нелинейная функция $f(u)$ принадлежит классу C^1 и удовлетворяет следующим условиям:

$$F(v)v \geqslant -mv^2 - C_m, \qquad F(v) = \int_0^v f(w)\,dw, \tag{2.2}$$

$$f(v)v - \gamma_1 F(v) + mv^2 \geqslant -C_m \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Здесь число m достаточно мало и $\gamma_1 > 0$. Кроме того, предполагается выполненным неравенство

$$|f'(v)| \leqslant K(1 + |v|^\rho), \qquad 0 \leqslant \rho < \frac{2}{n-2} \ \text{ при } n \geqslant 3, \quad \rho \geqslant 0 \ \text{ любое при } n = 1, 2. \tag{2.4}$$

Условия (2.2)–(2.4) являются стандартными для диссипативных квазилинейных волновых уравнений вида (2.1) (см., например, [10]–[17]). В качестве характерных примеров нелинейных функций $f(u)$, при которых уравнение (2.1) имеет конкретный физический смысл, можно привести функции $f(u) = u|u|^\rho$ и $f(u) = K \sin u$ (диссипативное уравнение сайн-Гордона; см. [11]).

Функция $g_0(x,t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(x, t/\varepsilon)$ называется *внешней силой*. Предполагается, что функции $g_0(t) := g_0(x,t)$ и $g_1(z) := g_1(x,z)$ являются *трансляционно компактными* в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, где $H = L_2(\Omega)$; по определению это означает, что при любом фиксированном $M > 0$ множества функций $\{g_0(t+h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ и $\{g_1(z+h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ являются предкомпактными в пространстве $L_2(-M, M; H)$ (см. [14]). Здесь и далее, через t обозначается “медленная” переменная времени, а через z – “быстрая”.

В частности, из условия трансляционной компактности вытекают неравенства

$$\begin{aligned} \|g_0\|^2_{L_2^b} &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |g_0(s)|^2\,ds \leqslant C_0^2, \\ \|g_1\|^2_{L_2^b} &= \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_z^{z+1} |g_1(\zeta)|^2\,d\zeta \leqslant C_1^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $|\cdot|$ обозначает норму в $L_2(\Omega)$. Норму в пространстве $H_0^1(\Omega)$ мы для краткости будем обозначать $\|\cdot\|_1$.

Из неравенства (2.5) следует, что

$$\Big\|g_1\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big\|^2_{L_2^b} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \Big|g_1\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)\Big|^2\,ds \leqslant C_2^2 := 2C_1^2 \quad \forall\,\varepsilon,\ \ 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{2.6}$$

и, тем самым,

$$\Big\|g_0(\,\cdot\,) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big\|_{L_2^b} \leqslant \|g_0(\,\cdot\,)\|_{L_2^b} + \varepsilon^{-\alpha}\Big\|g_1\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big\|_{L_2^b} \leqslant C_0 + C_2\varepsilon^{-\alpha}. \tag{2.7}$$

Заметим, что норма внешней силы $g^\varepsilon(t) := g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(t/\varepsilon)$ из уравнения (2.1) может неограниченно расти при $\varepsilon \to 0+$.

Для уравнения (2.1) рассматривается задача Коши

$$u|_{t=\tau} = u_\tau(x), \qquad \partial_t u|_{t=\tau} = p_\tau(x), \tag{2.8}$$

где $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau(x) \in H_0^1(\Omega)$ и $p_\tau(x) \in L_2(\Omega)$. В [14] доказано (см., также исследования автономных гиперболических уравнений вида (2.1) в [10]–[13], [15]), что при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и для любой пары начальных данных $(u_\tau, p_\tau) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ задача Коши (2.1), (2.8) имеет, и притом единственное решение $u \in C_b(\mathbb{R}_\tau; H_0^1(\Omega))$, $\partial_t u \in C_b(\mathbb{R}_\tau; L_2(\Omega))$, причем $\partial_t^2 u \in C_b(\mathbb{R}_\tau; H^{-1}(\Omega))$, где обозначено $\mathbb{R}_\tau = [\tau, +\infty)$.

Рассмотрим функции $y_\tau(x) = (u_\tau(x), p_\tau(x))$ и $y(x,t) = (u(x,t), \partial_t u(x,t))$, $x \in \Omega$, $t \geqslant \tau$, где $u(x,t)$ – решение задачи (2.1), (2.8).

Рассмотрим также энергетическое пространство $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ с нормой

$$\|y\|_E = \big\{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|p\|^2_{L_2(\Omega)}\big\}^{1/2} := \big\{\|u\|_1^2 + |p|^2\big\}^{1/2}.$$

Тогда, очевидно, $y(\,\cdot\,, t) \in C_b(\mathbb{R}_\tau; E)$ и $y(x,\tau) = y_\tau(x)$.

В [14] доказана следующая основная априорная оценка для решения

$$y(t) := y(x,t) = (u(x,t), \partial_t u(x,t))$$

задачи (2.1), (2.8):

$$\|y(t)\|_E^2 \leqslant C_3\|y_\tau\|_E^{\rho+2} e^{-2\beta(t-\tau)} + C_4\bigg(1 + \Big\|g_0(\,\cdot\,) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big\|^2_{L_2^b}\bigg) \quad \forall\, t \geqslant \tau, \tag{2.9}$$

где $\beta > 0$, константы β, C_3, C_4 не зависят от g_0 и g_1, а также от y_τ и $y(t)$.

Поскольку задача (2.1), (2.8) имеет единственное решение при любом $\tau\in\mathbb{R}$ и при всех $y_\tau\in E$, диссипативное волновое уравнение (2.1) порождает *процесс* $\{U_{g^\varepsilon}(t,\tau)\}:=\{U_{g^\varepsilon}(t,\tau)\mid t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R}\}$, действующий в E по формуле

$$U_{g^\varepsilon}(t,\tau)y_\tau=y(t),\qquad t\geqslant\tau,\tag{2.10}$$

где $y(t)$ – решение задачи (2.1), (2.8) с внешней силой $g^\varepsilon(t):=g_0(t)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$ и с начальными условиями $y_\tau\in E$. Отметим, что каждое (нелинейное) отображение $U_{g^\varepsilon}(t,\tau)\colon E\to E$ сильно непрерывно в норме E (см., например, [14]).

Из оценки (2.9) следует, что процесс $\{U_{g^\varepsilon}(t,\tau)\}$ имеет ограниченное (в E) *равномерно* (по $\tau\in\mathbb{R}$) *поглощающее множество* $B^\varepsilon\subset E$, а именно:

$$B^\varepsilon=\bigl\{y\in E\bigm| \|y\|_E^2\leqslant 2C_4\bigl(1+\|g^\varepsilon\|_{L_2^b}^2\bigr)\bigr\},\tag{2.11}$$

где $g^\varepsilon:=g^\varepsilon(t)=g_0(t)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$. Из (2.7) получаем, что

$$\|B^\varepsilon\|_E\leqslant C_5+\frac{C_6}{\varepsilon^\alpha},\qquad C_5=\sqrt{2C_4}(1+C_0),\quad C_6=\sqrt{2C_4}\,C_2,\tag{2.12}$$

где константы C_5 и C_6 не зависят от ε. Значит, норма в E поглощающего множества B^ε процесса $\{U_{g^\varepsilon}(t,\tau)\}$ может неограниченно возрастать при $\varepsilon\to0+$.

Раз функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$ являются трансляционно компактными в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, то функция $g^\varepsilon(t):=g_0(t)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$ также трансляционно компактна в этом пространстве при любом фиксированном ε, $0<\varepsilon\leqslant1$. Обозначим через $\mathscr{H}(g_0)$, $\mathscr{H}(g_1)$ и $\mathscr{H}(g^\varepsilon)$ оболочки соответственно функций $g_0(t)$, $g_1(z)$ и $g^\varepsilon(t)$ в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Напомним, например, что

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(g_0)=\bigl\{\widehat{g}_0(t)\mid \exists\,\{h_n\},\ h_n\in\mathbb{R},\ &\text{такая, что}\\ g_0(t+h_n)\to\widehat{g}_0(t),\ n\to\infty,\ &\text{сильно в } L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)\bigr\}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Аналогично определяются оболочки $\mathscr{H}(g_1)$ и $\mathscr{H}(g^\varepsilon)=\mathscr{H}(g_0(\,\cdot\,)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(\,\cdot\,/\varepsilon))$ при каждом фиксированном ε, $0<\varepsilon\leqslant1$. В дальнейшем символ $\widehat{g}^\varepsilon$ будет обозначать функцию из $\mathscr{H}(g^\varepsilon)$. Легко видеть, что любую такую функцию можно записать в виде суммы

$$\widehat{g}^\varepsilon(t)=\widehat{g}_0(t)+\varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1\biggl(\frac{t}{\varepsilon}\biggr),$$

где $\widehat{g}_0(t)\in\mathscr{H}(g_0)$ и $\widehat{g}_1(z)\in\mathscr{H}(g_1)$. Отметим, что

$$\|\widehat{g}^\varepsilon(\,\cdot\,)\|_{L_2^b}=\biggl\|\widehat{g}_0(\,\cdot\,)+\varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1\Bigl(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Bigr)\biggr\|_{L_2^b}\leqslant\|\widehat{g}_0(\,\cdot\,)\|_{L_2^b}+\varepsilon^{-\alpha}\biggl\|\widehat{g}_1\Bigl(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Bigr)\biggr\|_{L_2^b}\leqslant C_0+C_2\varepsilon^{-\alpha},\tag{2.14}$$

где константы C_0 и C_2 те же самые, что и в оценках (2.5), (2.7).

Теперь при каждом фиксированном ε, $0<\varepsilon\leqslant1$, мы рассмотрим семейство уравнений

$$\partial_t^2\widehat{u}^\varepsilon+\gamma\partial_t\widehat{u}^\varepsilon=\Delta\widehat{u}^\varepsilon-f(\widehat{u}^\varepsilon)+\widehat{g}^\varepsilon(t),\qquad \widehat{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega}=0,\tag{2.15}$$

где $\widehat{g}^\varepsilon(t)=\widehat{g}_0(t)+\varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1(t/\varepsilon)\in\mathscr{H}(g^\varepsilon)$, $g^\varepsilon=g_0(t)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$, а $g_0(t)$, $g_1(z)$ – исходные функции из уравнения (2.1). Очевидно, что семейство уравнений (2.15) порождает *семейство процессов* $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, действующих в E по формуле, аналогичной (2.10). Кроме того, соответствующие решения

$$\widehat{y}^\varepsilon(t) = U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\widehat{y}_\tau = (\widehat{u}^\varepsilon(\,\cdot\,,t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(\,\cdot\,,t)), \qquad t \geqslant \tau,$$

удовлетворяют неравенству

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(t)\|_E^2 \leqslant C_3 \|\widehat{y}_\tau\|_E^{\rho+2} e^{-2\beta(t-\tau)} + C_4\bigl(1 + \bigl(C_0 + C_2\varepsilon^{-\alpha}\bigr)^2\bigr) \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \tag{2.16}$$

из которого заключаем, что множество B^ε (см. (2.11)) является общим равномерно поглощающим множеством семейства процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$.

Напомним, что семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, называется *равномерно асимптотически компактным* в E, если найдется компактное множество $P^\varepsilon \Subset E$, которое притягивает любое ограниченное множество B ($\|B\|_E \leqslant M$) начальных данных:

$$\operatorname{dist}_E(U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)B, P^\varepsilon) \to 0, \qquad t-\tau \to +\infty, \tag{2.17}$$

равномерно по $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$. Здесь число ε фиксировано и $0<\varepsilon\leqslant 1$.

Нам понадобится еще одно определение, связанное с семейством процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$. Это семейство называется $(E\times\mathscr{H}(g^\varepsilon),E)$-*непрерывным*, если для любой фиксированной пары (t,τ), где $t\geqslant\tau$, $\tau\in\mathbb{R}$, отображение $(\widehat{y}_\tau,\widehat{g}^\varepsilon) \to U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\widehat{y}_\tau$ непрерывно из $E\times\mathscr{H}(g^\varepsilon)$ в E, т.е. $U_{\widehat{g}^\varepsilon_n}(t,\tau)\widehat{y}_{\tau n} \to U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\widehat{y}_\tau$ в E при $\widehat{y}_{\tau n} \to \widehat{y}_\tau$ в E и при $\widehat{g}^\varepsilon_n \to \widehat{g}^\varepsilon$ в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$.

Имеет место следующее

Утверждение 2.1. *При любом фиксированном* ε, $0<\varepsilon\leqslant 1$, *семейство процессов* $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, *соответствующее уравнениям* (2.15) *является равномерно* (*по* $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$) *асимптотически компактным и* $(E\times\mathscr{H}(g^\varepsilon),E)$-*непрерывным.*

Доказательство этого утверждения приведено в [14, гл. 4, п. 4] (см. также [16], [11], [13]).

Напомним определение равномерного глобального аттрактора семейства процессов.

Определение 2.1. Замкнутое множество $\mathscr{A}^\varepsilon \subset E$ называется *равномерным глобальным аттрактором* семейства процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, если множество $\mathscr{A}^\varepsilon$ притягивает любое ограниченное множество B начальных данных

$$\operatorname{dist}_E(U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)B, \mathscr{A}^\varepsilon) \to 0, \qquad t-\tau\to+\infty,$$

равномерно по $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$ и $\mathscr{A}^\varepsilon$ – минимальное равномерно притягивающее множество, т.е. $\mathscr{A}^\varepsilon$ принадлежит любому замкнутому множеству P^ε, удовлетворяющему (2.17).

Утверждение 2.1 используется при доказательстве теоремы о существовании компактного в E, равномерного глобального аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$ семейства процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, отвечающего уравнениям (2.15) (см. [14]). Кроме того, в силу (2.12) из вложения $\mathscr{A}^\varepsilon \subseteq B^\varepsilon$ получаем оценку

$$\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \leqslant C_5 + \frac{C_6}{\varepsilon^\alpha}. \tag{2.18}$$

Замечание 2.1. Можно построить примеры внешних сил $g^\varepsilon(t) := g_0(t)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$ в уравнении (2.1), которые являются трансляционно компактными функциями в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, причем соответствующие равномерные глобальные аттракторы $\mathscr{A}^\varepsilon$ удовлетворяют неравенству

$$\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \geqslant c_5 + \frac{c_6}{\varepsilon^\alpha},$$

т.е. нормы аттракторов $\mathscr{A}^\varepsilon$ в E могут неограниченно расти при $\varepsilon \to 0+$.

Для процесса $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, имеющего внешнюю силу $\widehat{g}^\varepsilon(t) := \widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1(t/\varepsilon)$, обозначим через $\mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}$ ядро соответствующего уравнения (2.15). Напомним, что *ядро* $\mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}$ состоит из всех решений $\widehat{y}^\varepsilon(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(\,\cdot\,,t), \partial_t\widehat{u}^\varepsilon(\,\cdot\,,t))$ этого уравнения, которые определены на всей оси времени $\{t \in \mathbb{R}\}$ (такие решения мы будем называть *полными траекториями*) и являются ограниченными в E. Формально, это условие можно записать в виде

$$U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\widehat{y}^\varepsilon(\tau) = \widehat{y}^\varepsilon(t) \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

причем $\widehat{y}^\varepsilon(\,\cdot\,) \in C_b(\mathbb{R};E)$ для любого $\widehat{y}^\varepsilon(\,\cdot\,) \in \mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}$. Множество

$$\mathscr{K}(t) = \{\widehat{y}^\varepsilon(t) \mid \widehat{y}^\varepsilon \in \mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}\}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

называется *сечением ядра* в момент времени t.

В [14] доказано, что равномерный глобальный аттрактор $\mathscr{A}^\varepsilon$ семейства процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, отвечающего (2.15), можно представить в виде

$$\mathscr{A}^\varepsilon = \bigcup_{\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)} \mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}(0), \tag{2.19}$$

где $\mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}(0)$ – сечение ядра в момент $t=0$. Отметим, что ядро $\mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}$ не пусто при любой $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$.

Вместе с уравнением (2.1) рассматривается "предельное" (или "усредненное") волновое уравнение

$$\partial_t^2 u + \gamma\partial_t u = \Delta u - f(u) + g_0(x,t), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.20}$$

где γ, $f(u)$ и $g_0(x,t)$ те же, что и в (2.1). Рассматривается также семейство "предельных" волновых уравнений

$$\partial_t^2\widehat{u}^0 + \gamma\partial_t\widehat{u}^0 = \Delta\widehat{u}^0 - f(\widehat{u}^0) + \widehat{g}^0(t), \qquad \widehat{u}^0|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.21}$$

где $\widehat{g}^0 \in \mathscr{H}(g^0)$, $g^0(t) := g_0(t)$. Семейство уравнений (2.21) порождает "предельное" семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^0}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^0 \in \mathscr{H}(g^0)$, действующих в E, и соответствующие решения

$$\widehat{y}^0(t) = U_{\widehat{g}^0}(t,\tau)\widehat{y}_\tau = (\widehat{u}^0(\,\cdot\,,t), \partial_t\widehat{u}^0(\,\cdot\,,t)), \qquad t \geqslant \tau,$$

удовлетворяют неравенству

$$\|\widehat{y}^0(t)\|_E^2 \leqslant C_3\|\widehat{y}_\tau\|_E^{\rho+2}e^{-2\beta(t-\tau)} + C_4(1+C_0^2) \qquad \forall\, t \geqslant \tau. \tag{2.22}$$

Шар

$$B^0 = \bigl\{y \in E \bigm| \|y\|_E^2 \leqslant 2C_4\bigl(1 + \|g^0\|_{L_2^b}^2\bigr)\bigr\}$$

(см. (2.11)) служит равномерно поглощающим множеством семейства процессов $\{U_{\widehat{g}^0}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^0 \in \mathscr{H}(g^0)$. Утверждение 2.1 выполнено при $\varepsilon = 0$ для семейства процессов $\{U_{\widehat{g}^0}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^0 \in \mathscr{H}(g^0)$, и это семейство имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0 \Subset E$,

$$\|\mathscr{A}^0\|_E \leqslant C_5. \tag{2.23}$$

Формула (2.19) справедлива и при $\varepsilon = 0$ (см. [14], где перечисленные выше свойства подробно доказаны).

В следующих пунктах будет изучаться связь между равномерными аттракторами $\mathscr{A}^\varepsilon$ и $\mathscr{A}^0$ при $\varepsilon \to 0+$ и при выполнении некоторых дополнительных условий. В настоящий момент мы даже не можем гарантировать равномерную ограниченность множеств $\mathscr{A}^\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0+$ (см. замечание 2.1).

3. Оценка отклонения траекторий исходного и "предельного" уравнений. Рассматривается диссипативное волновое уравнение (2.15) с фиксированной внешней силой $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, $\widehat{g}^\varepsilon(t) = \widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1(t/\varepsilon)$, где $\widehat{g}_0(t) \in \mathscr{H}(g_0)$ и $\widehat{g}_1(z) \in \mathscr{H}(g_1)$, а функции $g_0(t), g_1(z)$ взяты из исходного уравнения (2.1). В этом пункте мы сравним решение этого уравнения с решением соответствующего "предельного" волнового уравнения (2.21) с внешней силой $\widehat{g}^0(t) := \widehat{g}_0(t)$ при одинаковых начальных условиях, принадлежащих поглощающему множеству B^ε (см. (2.11)).

Мы будем предполагать, что функция $f(u)$ удовлетворяет неравенству (2.4) с показателем $\rho = 0$, т.е.

$$|f'(v)| \leqslant K \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Тогда, в частности,

$$|f(v)| \leqslant K|v| + C_0' \quad \forall\, v \in \mathbb{R}, \qquad C_0' = |f(0)|. \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. Излагаемые далее результаты применимы, например, к неавтономному диссипативному уравнению сайн-Гордона, в котором нелинейная функция $f(u) = K \sin u$.

Рассмотрим решение $\widehat{y}^\varepsilon(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t))$, $t \geqslant \tau$, уравнения (2.15), у которого начальное условие $\widehat{y}^\varepsilon(\tau) = (\widehat{u}^\varepsilon(\tau), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(\tau)) = (\widehat{u}_\tau, \widehat{p}_\tau) = \widehat{y}_\tau$ принадлежит шару B^ε. Тогда (см. (2.12))

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau)\|_E = \|\widehat{y}_\tau\|_E = \|(\widehat{u}_\tau, \widehat{p}_\tau)\|_E \leqslant C_5 + \frac{C_6}{\varepsilon^\alpha}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим также решение $\widehat{y}^0(t) = (\widehat{u}^0(t), \partial_t \widehat{u}^0(t))$, $t \geqslant \tau$, соответствующего "предельного" уравнения (2.21) с внешней силой $\widehat{g}^0(t)$ и с теми же начальными условиями при $t = \tau$, что и у решения $\widehat{y}^\varepsilon(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t))$ исходного уравнения:

$$\widehat{u}^0|_{t=\tau} = \widehat{u}_\tau(x), \qquad \partial_t \widehat{u}^0|_{t=\tau} = \widehat{p}_\tau(x). \tag{3.4}$$

Разность этих решений $(w(t), \partial_t w(t)) = (\widehat{u}^\varepsilon(t) - \widehat{u}^0(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t) - \partial_t \widehat{u}^0(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 w + \gamma \partial_t w = \Delta w - \bigl(f(\widehat{u}^\varepsilon) - f(\widehat{u}^0)\bigr) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \tag{3.5}$$

и начальным условиям

$$w|_{t=\tau}=0,\qquad \partial_t w|_{t=\tau}=0. \tag{3.6}$$

Умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ уравнение (3.5) на $\partial_t w$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\partial_t w|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_1^2+\gamma|\partial_t w|^2+\langle f(\widehat{u}^\varepsilon)-f(\widehat{u}^0),\partial_t w\rangle=\left\langle \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\partial_t w\right\rangle. \tag{3.7}$$

Здесь и далее $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Предположим, что функции $\widehat{g}_1(x,z)\in\mathscr{H}(g_1)$ обладают первообразными $\widehat{G}_1(x,z)$ по z:

$$\frac{\partial}{\partial z}\widehat{G}_1(x,z)=\widehat{g}_1(x,z) \tag{3.8}$$

такими, что

$$\|\widehat{G}_1(\,\cdot\,,z)\|_1=\|\widehat{G}_1(\,\cdot\,,z)\|_{H_0^1}\leqslant\Gamma_1\qquad\forall\,z\in\mathbb{R}, \tag{3.9}$$

где Γ_1 не зависит от $\widehat{g}_1$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$|\widehat{G}_1(\,\cdot\,,z)|=\|\widehat{G}_1(\,\cdot\,,z)\|_{L_2}\leqslant\Gamma_0\qquad\forall\,z\in\mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Заметим, что в (3.7)

$$\varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)=\varepsilon^{1-\alpha}\partial_t\widehat{G}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Интегрируя уравнение (3.7) по времени от τ до $\tau+t$ и используя нулевые условия (3.6), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\bigl\{|\partial_t w(\tau+t)|^2+\|w(\tau+t)\|_1^2\bigr\}+\gamma\int_0^t|\partial_t w(\tau_1)|^2\,d\tau_1\\
&\quad=-\int_0^t\left\langle\left(\int_0^1 f'(\widehat{u}^0(\tau+\tau_1)+s\cdot w(\tau+\tau_1))\,ds\right)w(\tau+\tau_1),\partial_t w(\tau+\tau_1)\right\rangle d\tau_1\\
&\qquad+\varepsilon^{1-\alpha}\int_0^t\left\langle\partial_t\widehat{G}_1\left(\frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\right),\partial_t w(\tau+\tau_1)\right\rangle d\tau_1\\
&\quad=-\int_0^t\left\langle\left(\int_0^1 f'(\widetilde{u}(\tau+\tau_1,s))\,ds\right)w(\tau+\tau_1),\partial_t w(\tau+\tau_1)\right\rangle d\tau_1\\
&\qquad+\varepsilon^{1-\alpha}\left\langle\widehat{G}_1\left(\frac{\tau+t}{\varepsilon}\right),\partial_t w(\tau+t)\right\rangle-\varepsilon^{1-\alpha}\int_0^t\left\langle\widehat{G}_1\left(\frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\right),\partial_t^2 w(\tau+\tau_1)\right\rangle d\tau_1\\
&\quad:=I+II+III.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

В последнем равенстве применялось интегрирование по частям. (Для краткости обозначено $\widetilde{u}(t,s):=\widehat{u}^0(t)+s\cdot w(t)=\widehat{u}^0(t)+s(\widehat{u}^\varepsilon(t)-\widehat{u}^0(t))$). Оценим слагаемые I, II и III каждое по-отдельности. Имеем в силу (3.1)

$$\begin{aligned}
|I|&=\left|\int_0^t\left\langle\left(\int_0^1 f'(\widetilde{u}(\tau+\tau_1,s))\,ds\right)w(\tau+\tau_1),\partial_t w(\tau+\tau_1)\right\rangle d\tau_1\right|\\
&\leqslant K\int_0^t|w(\tau+\tau_1)|\times|\partial_t w(\tau+\tau_1)|\,d\tau_1\\
&\leqslant K\int_0^t\lambda_1^{-1/2}\|w(\tau+\tau_1)\|_1\times|\partial_t w(\tau+\tau_1)|\,d\tau_1\\
&\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{K}{\lambda_1^{1/2}}\int_0^t\bigl(\|w(\tau+\tau_1)\|_1^2+|\partial_t w(\tau+\tau_1)|^2\bigr)\,d\tau_1.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Пуанкаре: $|w| \leqslant \lambda_1^{-1/2}\|w\|_1$, где λ_1 – первое собственное значение оператора Лапласа при нулевых граничных условиях. При оценивании интеграла III воспользуемся условием (3.9):

$$\begin{aligned}|III| &= \varepsilon^{1-\alpha}\left|\int_0^t \left\langle \widehat{G}_1\left(\frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\right), \partial_t^2 w(\tau+\tau_1)\right\rangle d\tau_1\right| \\ &\leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\int_0^t \left\|\widehat{G}_1\left(\frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\right)\right\|_1 \|\partial_t^2 w(\tau+\tau_1)\|_{-1}\,d\tau_1 \\ &\leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\Gamma_1\int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau+\tau_1)\|_{-1}\,d\tau_1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Оценим теперь интеграл в правой части неравенства (3.13). Имеем

$$\|\partial_t^2 w(\tau+t)\|_{-1} \leqslant \|\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon(\tau+t)\|_{-1} + \|\partial_t^2 \widehat{u}^0(\tau+t)\|_{-1}. \tag{3.14}$$

При $0<\varepsilon\leqslant 1$ из уравнения (2.15), а при $\varepsilon=0$ из уравнения (2.21) получаем, что

$$\begin{aligned}\|\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon(t)\|_{-1} &\leqslant C_7\big(\|\widehat{u}^\varepsilon(t)\|_1 + \|f(\widehat{u}^\varepsilon(t))\|_{-1} + \|\partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t)\|_{-1} + \|\widehat{g}^\varepsilon(t)\|_{-1}\big) \\ &\leqslant C_8\big(\|\widehat{u}^\varepsilon(t)\|_1 + |f(\widehat{u}^\varepsilon(t))| + |\partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t)| + |\widehat{g}^\varepsilon(t)|\big).\end{aligned} \tag{3.15}$$

(Напомним, что $|\cdot|$ обозначает норму в $L_2(\Omega)$.) Из (3.2) находим, что

$$|f(\widehat{u}^\varepsilon(\tau+t))| \leqslant C_9\big(|\widehat{u}^\varepsilon(\tau+t)|+1\big), \qquad t\geqslant 0, \quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1. \tag{3.16}$$

Значит, из (3.15) и (3.16) следует неравенство

$$\|\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon(\tau+t)\|_{-1} \leqslant C_{10}\big(\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau+t)\|_E + |\widehat{g}^\varepsilon(\tau+t)|\big) \qquad \forall\, t\geqslant 0, \quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1. \tag{3.17}$$

Применим оценки (2.16) и (2.22) (напомним, что в нашем случае $\rho=0$):

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau+t)\|_E \leqslant C_{11}\|\widehat{y}_\tau\|_E e^{-\beta t} + C_{12}(1+\varepsilon^{-\alpha}), \qquad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{3.18}$$

$$\|\widehat{y}^0(\tau+t)\|_E \leqslant C_{11}\|\widehat{y}_\tau\|_E e^{-\beta t} + C_{12} \qquad \forall\, t\geqslant 0. \tag{3.19}$$

Воспользуемся условием (3.3), подставим оценки (3.18) и (3.19) в (3.17), а затем в (3.14), и получим, что

$$\int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau+\tau_1)\|_{-1}\,d\tau_1 \leqslant C_{13}(1+\varepsilon^{-\alpha})\int_0^t (1+e^{-\beta\tau_1})\,d\tau_1 \leqslant C_{14}(1+\varepsilon^{-\alpha})(1+t). \tag{3.20}$$

Из (3.20) и (3.13) находим, что

$$\begin{aligned}|III| &\leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\Gamma_1\int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau+\tau_1)\|_{-1}\,d\tau_1 \\ &\leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\Gamma_1 C_{14}(1+\varepsilon^{-\alpha})(1+t) \leqslant C_{15}\varepsilon^{1-2\alpha}(1+t),\end{aligned} \tag{3.21}$$

где $C_{15}=2\Gamma_1 C_{14}$ (напомним, что $0<\varepsilon\leqslant 1$).

Для слагаемого II в (3.11), воспользовавшись неравенствами (2.16), (2.22) и (3.10), получаем оценку

$$\begin{aligned}|II| &= \varepsilon^{1-\alpha}\left|\left\langle \widehat{G}_1\left(\frac{\tau+t}{\varepsilon}\right), \partial_t w(\tau+t)\right\rangle\right| \leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\left|\widehat{G}_1\left(\frac{\tau+t}{\varepsilon}\right)\right| \times |\partial_t w| \\ &\leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\Gamma_0 \times |\partial_t w(\tau+t)| \leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\Gamma_0\bigl(|\partial_t \widehat{u}^\varepsilon(\tau+t)| + |\partial_t \widehat{u}^0(\tau+t)|\bigr) \\ &\leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\Gamma_0\bigl(\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau+t)\|_E + \|\widehat{y}^0(\tau+t)\|_E\bigr) \leqslant \varepsilon^{1-\alpha}\Gamma_0 C_{16}(1+\varepsilon^{-\alpha}) \leqslant C_{17}\varepsilon^{1-2\alpha}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Обозначим $z(t) := |\partial_t w(\tau+t)|^2 + \|w(\tau+t)\|_1^2$. Из (3.11)–(3.13) и из (3.21), (3.22) получаем

$$z(t) \leqslant 2(I + II + III) \leqslant K_1 \int_0^t z(\tau)\,d\tau + C_{18}\varepsilon^{1-2\alpha}(1+t), \tag{3.23}$$

где $K_1 = K\lambda_1^{-1/2}$. Обозначим $v(t) = z(t)/(1+t)$. Тогда

$$\begin{aligned}v(t) &\leqslant K_1 \int_0^t \frac{z(\tau)}{1+t}\,d\tau + C_{18}\varepsilon^{1-2\alpha} \\ &\leqslant K_1 \int_0^t \frac{z(\tau)}{1+\tau}\,d\tau + C_{18}\varepsilon^{1-2\alpha} = K_1 \int_0^t v(\tau)\,d\tau + C_{18}\varepsilon^{1-2\alpha}.\end{aligned}$$

Из леммы Гронуолла получаем, что

$$v(t) \leqslant C_{18}\varepsilon^{1-2\alpha}e^{K_1 t}$$

и, следовательно,

$$|\partial_t w(\tau+t)|^2 + \|w(\tau+t)\|_1^2 = z(t) = v(t)(1+t) \leqslant C_{18}\varepsilon^{1-2\alpha}e^{K_1 t}(1+t) \leqslant D_0^2\varepsilon^{1-2\alpha}e^{2rt}, \tag{3.24}$$

где $D_0^2 := C_{18}$, $2r := K_1 + 1 = K\lambda_1^{-1/2} + 1$.

Напомним, что

$$|\partial_t w(t+\tau)|^2 + \|w(t+\tau)\|_1^2 = \|\widehat{y}^\varepsilon(t+\tau) - \widehat{y}^0(t+\tau)\|_E^2$$

при $t \geqslant 0$, причем $\widehat{y}^\varepsilon(\tau) = \widehat{y}^0(\tau) = \widehat{y}_\tau \in B^\varepsilon$.

Доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть в уравнении (2.1) функция $f(u)$ удовлетворяет условиям (2.2)–(2.4) при $\rho = 0$ (см. (3.1)). Кроме того, пусть функции $g_0(x,t)$ и $g_1(x,z)$ являются трансляционно компактными в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ соответственно по $t \in \mathbb{R}$ и по $z \in \mathbb{R}$. Предполагается, что любая функция $\widehat{g}_1(x,z) \in \mathscr{H}(g_1)$ имеет первообразную $\widehat{G}_1(x,z)$ по z:*

$$\frac{\partial}{\partial z}\widehat{G}_1(x,z) = \widehat{g}_1(x,z),$$

причем $\widehat{G}_1 \in C_b(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega))$ и выполнено неравенство

$$\|\widehat{G}_1(\,\cdot\,,z)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \Gamma_1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{R},$$

где Γ_1 *не зависит от* $\widehat{g}_1$.

Тогда для отклонения

$$\widehat{y}^\varepsilon(t) - \widehat{y}^0(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t\widehat{u}^\varepsilon(t)) - (\widehat{u}^0(t), \partial_t\widehat{u}^0(t))$$

решения $(\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t\widehat{u}^\varepsilon(t))$ *уравнения* (2.15) *от решения* $(\widehat{u}^0(t), \partial_t\widehat{u}^0(t))$ *"предельного" уравнения* (2.21), *которые удовлетворяют одинаковым начальным условиям* $\widehat{y}^\varepsilon(\tau) = \widehat{y}^0(\tau) = \widehat{y}_\tau \in B^\varepsilon$ (*шар* B^ε *определен в* (2.11)), *справедливо неравенство*

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau+t) - \widehat{y}^0(\tau+t)\|_E \leqslant D_0\varepsilon^{1/2-\alpha}e^{rt} \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{3.25}$$

где $r = (K\lambda_1^{-1/2}+1)/2$.

Замечание 3.2. Доказанная оценка (3.25) для отклонения решений исходного и "предельного" ("усредненного") уравнений друг от друга при одинаковых начальных условиях аналогична известным глобальным оценкам Боголюбова (см. [18]). В следующих пунктах предполагается, что $\alpha < 1/2$, но еще накладываются некоторые дополнительные ограничения на этот показатель (см. (4.1)).

Приведем теперь некоторые примеры функций $g_1(x,z)$, для которых любые функции $\widehat{g}_1 \in \mathscr{H}(g_1)$ удовлетворяют условиям (3.8) и (3.9).

Будем рассматривать квазипериодические функции. Функция $g_1(x,z)$ называется *квазипериодической* по z, если она представима в виде

$$g_1(x,z) = \Phi(x, \overline{\alpha}z), \qquad \overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{R}^l, \tag{3.26}$$

где $\Phi(x,\overline{\omega}) \in C(\mathbb{R}^l; H_0^1(\Omega))$ и функция $\Phi(x,\overline{\omega}) = \Phi(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l)$ является 2π-периодической по каждому аргументу $\omega_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, l$ (см. [19]). Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ называются *частотами* квазипериодической функции.

а) Пусть функция $g_1(x,z)$ представима в виде (3.26), причем функция $\Phi(x,\overline{\omega})$ является тригонометрическим полиномом по $\overline{\omega}$ с нулевым средним:

$$\Phi(x,\overline{\omega}) = \sum_{0<|\bar{k}|\leqslant N} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\overline{\omega},\bar{k})}, \qquad x \in \Omega, \quad \overline{\omega} \in \mathbb{R}^l, \tag{3.27}$$

где $a_{\bar{k}}(\,\cdot\,) \in H_0^1(\Omega)$, $a_{\bar{k}}(\,\cdot\,) = a_{-\bar{k}}(\,\cdot\,)$ при всех мультииндексах $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_l) \in \mathbb{Z}^l \setminus \{\overline{0}\}$. В формуле (3.27)

$$|\bar{k}| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_l|, \qquad (\overline{\omega}, \bar{k}) = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \dots + \omega_l k_l.$$

Условие нулевого среднего означает, что коэффициент $a_{\overline{0}}(x) \equiv 0$.

Тогда функция $g_1(x,z)$ имеет вид

$$g_1(x,z) = \Phi(x, \overline{\alpha}z) = \sum_{0<|\bar{k}|\leqslant N} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\overline{\alpha},\bar{k})z}, \qquad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

Заметим, что любая функция $\widehat{g}_1 \in \mathscr{H}(g_1)$ представима в виде

$$\widehat{g}_1(x,z) = \Phi(x, \overline{\alpha}z + \overline{h}) = \sum_{0<|\bar{k}|\leqslant N} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\overline{h},\bar{k})} e^{i(\overline{\alpha},\bar{k})z}, \qquad \overline{h} \in \mathbb{T}^l = (\mathbb{R} \bmod 2\pi)^l,$$

где элемент $\overline{h} \in \mathbb{T}^l$ зависит от $\widehat{g}_1$.

Предполагается, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ являются рационально независимыми. В этом случае имеет место неравенство

$$|(\overline{\alpha}, \bar{k})| \geqslant \rho > 0 \qquad \forall\, \bar{k} \in \mathbb{Z}^l \setminus \{\overline{0}\}, \quad |\bar{k}| \leqslant N, \tag{3.29}$$

для некоторого $\rho = \rho(\overline{\alpha}, N)$ и, следовательно, функция

$$\widehat{G}_1(x, z) = \sum_{0<|\bar{k}|\leqslant N} \frac{a_{\bar{k}}(x) e^{i(\overline{h}, \bar{k})}}{i(\overline{\alpha}, \bar{k})} e^{i(\overline{\alpha}, \bar{k})z} \tag{3.30}$$

задана корректно и является первообразной по z для $\widehat{g}_1(x, z)$: $\partial_z \widehat{G}_1(x, z) = \widehat{g}_1(x, z)$. Условие (3.9) также выполнено в силу (3.29), так как

$$\|\widehat{G}_1(\,\cdot\,, z)\|_1 \leqslant \sum_{0<|\bar{k}|\leqslant N} \frac{\|a_{\bar{k}}(\,\cdot\,)\|_1}{|(\overline{\alpha}, \bar{k})|} \leqslant \frac{1}{\rho} \sum_{0<|\bar{k}|\leqslant N} \|a_{\bar{k}}(\,\cdot\,)\|_1 = M_1. \tag{3.31}$$

б) Рассмотрим случай (3.26) общей квазипериодической зависимости по z функции $g_1(x, z)$. Для простоты предположим, что $\Phi(x, \overline{\omega}) \in C^m(\mathbb{T}^l; H_0^1(\Omega))$. Будем также предполагать, что функция $\Phi(x, \overline{\omega})$ имеет нулевое среднее по $\overline{\omega}$:

$$\int_{\mathbb{T}^l} \Phi(x, \overline{\omega})\, \mu(d\overline{\omega}) = 0, \tag{3.32}$$

где $\mu(d\overline{\omega})$ – мера Лебега на торе $\mathbb{T}^l$.

Предположим, что компоненты вектора $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ являются рационально независимыми числами и удовлетворяют следующему диофантову условию:

$$|(\overline{\alpha}, \bar{k})| \geqslant C_{\overline{\alpha}} |\bar{k}|^{-(l-1+\delta)} > 0 \qquad \forall\, \bar{k} \in \mathbb{Z}^l \setminus \{\overline{0}\}, \quad \delta > 0. \tag{3.33}$$

Как известно неравенство (3.33) имеет место, если вектор $\overline{\alpha}$ принадлежит некоторому множеству $\mathscr{S}^l = \mathbb{R}^l / \mathscr{Q}^l$, где множество $\mathscr{Q}^l$ имеет в $\mathbb{R}^l$ нулевую меру Лебега: $\mu(\mathscr{Q}^l) = 0$ (см. [20], [21]).

Пусть $\overline{\alpha} \in \mathscr{S}^l$. Разложим функцию $\Phi(x, \overline{\omega})$ в ряд Фурье по переменным $\overline{\omega}$ и положим $\overline{\omega} = \overline{\alpha} z$, где $z \in \mathbb{R}$. Мы получим

$$g_1(x, z) = \Phi(x, \overline{\alpha} z) = \sum_{\bar{k} \neq \overline{0}} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\overline{\alpha}, \bar{k})z}. \tag{3.34}$$

(Отметим, что в силу (3.32) $a_{\overline{0}}(x) = 0$.) Рассмотрим функцию

$$G_1(x, z) = \sum_{\bar{k} \neq \overline{0}} \frac{a_{\bar{k}}(x)}{i(\overline{\alpha}, \bar{k})} e^{i(\overline{\alpha}, \bar{k})z}. \tag{3.35}$$

Если выполнено неравенство

$$\sum_{\bar{k} \neq \overline{0}} \|a_{\bar{k}}(\,\cdot\,)\|_1 |\bar{k}|^{l-1+\delta} < +\infty, \tag{3.36}$$

то в силу условия (3.33), очевидно,

$$\|G_1(\,\cdot\,,z)\|_1 \leqslant \sum_{\bar k\neq\overline{0}} \frac{\|a_{\bar k}(\,\cdot\,)\|_1}{|(\overline{\alpha},\bar k)|} \leqslant \sum_{\bar k\neq\overline{0}} \|a_{\bar k}(\,\cdot\,)\|_1 |\bar k|^{l-1+\delta} = M_1 \qquad \forall\, z\in\mathbb{R}, \tag{3.37}$$

а функция $G_1(x,z)$ является первообразной по z для функции $g_1(x,z)$.

Осталось заметить, что любая функция $\widehat{g}_1 \in \mathscr{H}(g_1)$ имеет вид

$$\widehat{g}_1(x,z) = \Phi(x,\overline{\alpha}z+\overline{h}) = \sum_{\bar k\neq\overline{0}} a_{\bar k}(x) e^{i(\overline{h},\bar k)} e^{i(\overline{\alpha},\bar k)z}, \qquad \overline{h}\in\mathbb{T}^l,$$

а ее первообразная по z

$$\widehat{G}_1(x,z) = \sum_{\bar k\neq\overline{0}} \frac{a_{\bar k}(x) e^{i(\overline{h},\bar k)}}{i(\overline{\alpha},\bar k)} e^{i(\overline{\alpha},\bar k)z}$$

в силу (3.33) и (3.36) удовлетворяет (как и G_1) неравенству

$$\|\widehat{G}_1(\,\cdot\,,z)\|_1 \leqslant \sum_{\bar k\neq\overline{0}} \frac{\|a_{\bar k}(\,\cdot\,)\|_1}{|(\overline{\alpha},\bar k)|} \leqslant M_1 \qquad \forall\, z\in\mathbb{R}. \tag{3.38}$$

Условие (3.37) выполнено, если известно, что функция $\Phi(x,\overline{\omega})$ имеет достаточно большое число m производных по переменной $\overline{\omega}$.

4. О равномерной ограниченности глобальных аттракторов $\mathscr{A}^\varepsilon$. Как уже отмечалось в замечании 2.1, условия, сформулированные в п. 2, не гарантируют равномерную ограниченность (по ε) глобальных аттракторов $\mathscr{A}^\varepsilon$ уравнений (2.15). В этом пункте будут указаны условия, при которых свойство равномерной ограниченности имеет место. Как и в п. 3, предполагается, что в оценке (2.4) $\rho=0$, т.е. выполнено неравенство (3.1), а, кроме того, предполагается, что каждая функция $\widehat{g}_1(x,z)\in\mathscr{H}(g_1)$ имеет первообразную $\widehat{G}_1(x,z)$ по z, которая удовлетворяет неравенству (3.9).

Утверждение 4.1. *При выполнении перечисленных выше условий, если число α удовлетворяет неравенству*

$$\alpha \leqslant \alpha_0 = \frac{1}{2(1+r/\beta)}, \tag{4.1}$$

то найдется число $C>0$ такое, что

$$\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \leqslant C \qquad \forall\,\varepsilon,\ \ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{4.2}$$

В неравенстве (4.1) *число r такое же, как в неравенстве* (3.25), *а показатель β такой же, как в основных априорных оценках* (2.9) *и* (2.16).

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $y^\varepsilon \in \mathscr{A}^\varepsilon$ – любая точка глобального аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$. В силу (2.19) найдется полная траектория $\widehat{y}^\varepsilon(t)$ процесса $\{U_{\widehat{g}_1}(t,\tau)\}$ с некоторой внешней силой $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, для которой $\widehat{y}^\varepsilon(0) = y^\varepsilon$. Функция $\widehat{g}^\varepsilon$ представима в виде $\widehat{g}^\varepsilon(t) = \widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1(t/\varepsilon)$, где $\widehat{g}_0(t) \in \mathscr{H}(g_0)$ и $\widehat{g}_1(z) \in \mathscr{H}(g_1)$. Заметим, что

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(t)\|_E \leqslant \|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \leqslant \frac{C'}{\varepsilon^\alpha} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

где $C' = C_5 + C_6$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ (см. (2.18)).

Зафиксируем некоторое число $T > 0$, которое будет выбрано позднее (см. (4.10)). Рассмотрим точку $\widehat{y}^\varepsilon(-T)$. Построим решение $\widehat{y}^0(t)$, $t \geqslant -T$, "предельного" уравнения (2.21) с внешней силой $\widehat{g}_0(t)$ и начальным условием

$$\widehat{y}^0|_{t=-T} = \widehat{y}^\varepsilon(-T). \tag{4.4}$$

В силу (4.3) имеем, что

$$\|\widehat{y}^0(-T)\|_E \leqslant \frac{C'}{\varepsilon^\alpha}. \tag{4.5}$$

Тогда из основной априорной оценки (2.22) получаем неравенство

$$\|\widehat{y}^0(-T+t)\|_E \leqslant C_3'\|\widehat{y}_\tau\|_E e^{-\beta t} + C_4' \leqslant \frac{C_3'C}{\varepsilon^\alpha}e^{-\beta t} + C_4' = \frac{C_5'}{\varepsilon^\alpha}e^{-\beta t} + C_4' \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Из теоремы 3.1 (в которой следует положить $\tau = -T$, см. (4.4)) получаем следующую оценку для разности $\widehat{y}^\varepsilon(-T+t) - \widehat{y}^0(-T+t)$:

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(-T+t) - \widehat{y}^0(-T+t)\|_E \leqslant D_0\varepsilon^{1/2-\alpha}e^{rt} \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) находим, что

$$\begin{aligned}\|\widehat{y}^\varepsilon(-T+t)\|_E &\leqslant \|\widehat{y}^\varepsilon(-T+t) - \widehat{y}^0(-T+t)\|_E + \|\widehat{y}^0(-T+t)\|_E \\ &\leqslant D_0\varepsilon^{1/2-\alpha}e^{rt} + C_5'\varepsilon^{-\alpha}e^{-\beta t} + C_4' \qquad \forall\, t \geqslant 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Подставим в (4.8) $t = T$ и получим, что

$$\|y^\varepsilon\|_E = \|\widehat{y}^\varepsilon(0)\|_E \leqslant D_0\varepsilon^{1/2-\alpha}e^{rT} + C_5'\varepsilon^{-\alpha}e^{-\beta T} + C_4'. \tag{4.9}$$

Выберем T из уравнения

$$\varepsilon^{1/2-\alpha}e^{rT} = \varepsilon^{-\alpha}e^{-\beta T},$$

откуда

$$T = \frac{1}{2(r+\beta)}\,\log\frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.10}$$

Подставляем выбранное T в (4.9):

$$\begin{aligned}\|y^\varepsilon\|_E &\leqslant D_0\varepsilon^{1/2-\alpha}\varepsilon^{-r/(2(r+\beta))} + C_5'\varepsilon^{-\alpha}\varepsilon^{\beta/(2(r+\beta))} + C_4' \\ &= [D_0 + C_3'']\varepsilon^{\beta/(2(r+\beta))-\alpha} + C_4' = C_6'\varepsilon^{\beta/(2(r+\beta))-\alpha} + C_4'.\end{aligned}$$

Это неравенство выполнено для любого $y^\varepsilon \in \mathscr{A}^\varepsilon$. Следовательно,

$$\|\mathscr{A}^\varepsilon\|_E \leqslant C_6'\varepsilon^{\beta/(2(r+\beta))-\alpha} + C_4'. \tag{4.11}$$

Правая часть этого неравенства равномерно ограничена по ε, т.е. имеет место (4.2), очевидно, при

$$\alpha \leqslant \frac{\beta}{2(r+\beta)} = \frac{1}{2(1+r/\beta)} =: \alpha_0.$$

Предложение доказано.

Заметим, что при выполнении (4.1) доказанное в предыдущем пункте неравенство (3.25) можно усилить следующим образом.

Следствие 4.1. *При выполнении предположений теоремы* 3.1 *и при условии* (4.1) *для разности*

$$\widehat{y}^\varepsilon(t) - \widehat{y}^0(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t)) - (\widehat{u}^0(t), \partial_t \widehat{u}^0(t))$$

решения $(\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t))$ *уравнения* (2.15) *с внешней силой* $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, *причем* $\widehat{y}^\varepsilon(t)$ *взято из ядра* $\mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}$, *и решения* $(\widehat{u}^0(t), \partial_t \widehat{u}^0(t))$ *"предельного" уравнения* (2.21), *которое удовлетворяет начальным условиям* $\widehat{y}^0(\tau) = \widehat{y}^\varepsilon(\tau)$, *справедливо неравенство*

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t) - \widehat{y}^0(\tau + t)\|_E \leqslant D_1 \varepsilon^{1/2 - \alpha/2} e^{rt} \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{4.12}$$

где $r = (K\lambda_1^{-1/2} + 1)/2$.

Доказательство. Следует повторить рассуждения из доказательства теоремы 3.1 с той лишь разницей, что при оценивании $\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t)\|$ воспользоваться не неравенством (3.18), а равномерной оценкой (4.2). Кроме того, в неравенствах (3.18) и (3.19) при оценке $\|\widehat{y}_\tau\|$ следует также воспользоваться (4.2), так как $\widehat{y}_\tau \in \mathscr{A}^\varepsilon$. Получим, что

$$\begin{aligned} &\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t)\|_E \leqslant C'_{11}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \\ &\|\widehat{y}^0(\tau + t)\|_E \leqslant C'_{11} \qquad \forall\, t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Тогда вместо неравенств (3.20), (3.21) и (3.22) будем иметь соответственно

$$\int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau + \tau_1)\|_{-1}\, d\tau_1 \leqslant C'_{14}(1 + t),$$
$$|\mathit{III}| \leqslant \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_1 \int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau + \tau_1)\|_{-1}\, d\tau_1 \leqslant \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_1 C'_{14}(1 + t) \leqslant C'_{15} \varepsilon^{1-\alpha}(1 + t),$$
$$|\mathit{II}| \leqslant \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_0 \big(\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t)\|_E + \|\widehat{y}^0(\tau + t)\|_E\big) \leqslant \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_0 C'_{16} \leqslant C'_{17} \varepsilon^{1-\alpha}.$$

Поэтому неравенство (3.23) примет вид

$$z(t) \leqslant 2(I + \mathit{II} + \mathit{III}) \leqslant K_1 \int_0^t z(\tau)\, d\tau + C'_{18} \varepsilon^{1-\alpha}(1 + t),$$

откуда аналогично (3.24) получаем неравенство

$$z(t) \leqslant C'_{18} \varepsilon^{1-\alpha} e^{K_1 t}(1 + t) \leqslant D_1^2 \varepsilon^{1-\alpha} e^{2rt},$$

где $2r = K_1 + 1$, $D_1^2 = C'_{18}$, что совпадает с искомым неравенством (4.12).

5. Оценка отклонения равномерного глобального аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$ от глобального аттрактора $\mathscr{A}^0$ (автономный случай "предельного" уравнения). Рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon + \gamma \partial_t \widehat{u}^\varepsilon = \Delta \widehat{u}^\varepsilon - f(\widehat{u}^\varepsilon) + g_0(x) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \qquad \widehat{u}^\varepsilon|_{\delta\Omega} = 0, \tag{5.1}$$

где функция $f(u)$ удовлетворяет условиям (2.2)–(2.4) при $\rho = 0$ (см. (3.1)), $\gamma > 0$. В этом пункте в отличие от уравнений (2.1) и (2.15) предполагается, что функция $g_0(\,\cdot\,) \in L_2(\Omega)$

не зависит от времени. Относительно функции $\widehat{g}_1(x,z)$, как и раньше, предполагается, что $\widehat{g}_1 \in \mathscr{H}(g_1)$, причем исходная функция $g_1(x,z)$ является трансляционно компактной по z в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ и, кроме того, любая функция $\widehat{g}_1 \in \mathscr{H}(g_1)$ имеет первообразную $\widehat{G}_1(x,z)$ по z, которая ограничена в $C_b(\mathbb{R};H_0^1(\Omega))$, т.е. имеет место неравенство (3.9).

В п. 2 было показано, что уравнения (5.1) порождают семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon(t)=g_0(\,\cdot\,)+\varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1(\,\cdot\,,t/\varepsilon)$, $\widehat{g}_1\in\mathscr{H}(g_1)$, в энергетическом пространстве $E=H_0^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$, которое имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathscr{A}^\varepsilon \Subset E$.

Соответствующее "предельное" уравнение является автономным:

$$\partial_t^2 u^0+\gamma\partial_t u^0=\Delta u^0-f(u^0)+g_0(x), \qquad u^0|_{\partial\Omega}=0. \tag{5.2}$$

В силу автономности процесс $\{U^0(t,\tau)\}$, порождаемый этим уравнением, зависит лишь от разности $t-\tau$. Его можно представить в виде $U^0(t,\tau)=S^0(t-\tau)$, где $\{S^0(t)\}:=\{S^0(t),\ t\geqslant 0\}$ – полугруппа, отвечающая автономному уравнению (5.2). Это уравнение также имеет глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0\Subset E$ (см. [11]–[14]), который обладает свойством строгой инвариантности под действием полугруппы $\{S^0(t)\}$: $S^0(t)\mathscr{A}^0=\mathscr{A}^0$ при всех $t\geqslant 0$.

В этом пункте будет рассматриваться важный случай, когда глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$ автономного диссипативного волнового уравнения (5.2) притягивает ограниченные множества с экспоненциальной скоростью при $t\to+\infty$. Это выполнено, например, когда $\mathscr{A}^0$ является регулярным аттрактором (см. [13], [12]). Как известно, уравнение (5.2) обладает глобальной функцией Ляпунова

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(y^0(t))&=\mathscr{L}(u^0(t),\partial_t u^0(t))\\&=\int_\Omega\biggl(\frac12\bigl\{|\partial_t u^0(x,t)|^2+|\nabla_x u^0(x,t)|^2\bigr\}+F(u^0(x,t))-g^0(x)u^0(x,t)\biggr)\,dx.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Для любого решения $y^0(t)=(u^0(t),\partial_t u^0(t))$ уравнения (5.2) имеет место тождество

$$\mathscr{L}(y^0(t))-\mathscr{L}(y^0(\tau))=-\gamma\int_\tau^t|\partial_t u^0(\,\cdot\,,s)|^2\,ds \qquad \forall\,t\geqslant\tau, \tag{5.4}$$

из которого следует строгое убывание функции $\mathscr{L}(y^0(t))$ по t вдоль любого решения этого уравнения, не совпадающего с его стационарной точкой $z(x)$.

Предполагается, что уравнение (5.2) обладает лишь конечным числом стационарных точек $\{z_i(x),\ i=1,\dots,N\}$:

$$\Delta z_i(x)-f(z_i(x))+g_0(x)=0, \qquad z_i|_{\partial\Omega}=0, \quad x\in\Omega\Subset\mathbb{R}^n,$$

причем каждая стационарная точка является гиперболической (см. [13], [12], [15]). Тогда, как известно, глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$ совпадает с объединением неустойчивых многообразий $M^u(z_i)$, выходящих из стационарных точек z_i (см. [13], [12]):

$$\mathscr{A}^0=\bigcup_{i=1}^N M^u(z_i).$$

Кроме того, ограниченные семейства траекторий $\{y^0(t),\ t \geqslant 0\}$ сближаются с аттрактором $\mathscr{A}^0$ с экспоненциальной скоростью, т.е. найдется число $\nu > 0$ такое, что для любого решения $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$ уравнения (5.2) с начальным условием $y^0(0) = y_0$, $\|y_0\|_E \leqslant L$, справедливо неравенство

$$\operatorname{dist}_E(y^0(t), \mathscr{A}^0) \leqslant C(L)e^{-\nu t}. \tag{5.5}$$

Неравенство (5.5) доказано в [13].

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 5.1. *Пусть*

$$\alpha \leqslant \alpha_0 = \frac{1}{2(1 + r/\beta)}. \tag{5.6}$$

Тогда для хаусдорфова отклонения равномерного глобального аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$ *волнового уравнения* (5.1) *от глобального аттрактора* $\mathscr{A}^0$ *"предельного" автономного уравнения* (5.2) *имеет место оценка*

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}^\varepsilon, \mathscr{A}^0) \leqslant C^0 \varepsilon^{\eta_0(\alpha)}, \tag{5.7}$$

где

$$\eta_0(\alpha) = \frac{\nu}{2(r + \nu)}(1 - \alpha). \tag{5.8}$$

В (5.6) *и* (5.8) ν *– коэффициент в экспоненциальной оценке* (5.5) *притяжения решений "предельного" уравнения к аттрактору* $\mathscr{A}^0$, *число* r *такое же, как в неравенстве* (3.25), *показатель* β *фигурирует в оценке* (2.9).

Доказательство основано на двух следующих фактах.

1) Если решение $\widehat{y}^\varepsilon(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t))$ уравнения (5.1) с внешней силой

$$\widehat{g}^\varepsilon = g_0(x) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где $\widehat{g}_1 \in \mathscr{H}(g_1)$, принадлежит ядру $\mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}$ этого уравнения, а решение $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$ "предельного" уравнения (5.2) удовлетворяет начальным условиям $y^0(\tau) = \widehat{y}^\varepsilon(\tau)$, то траектории $\widehat{y}^\varepsilon(t)$ и $y^0(t)$ уравнений (5.1) и (5.2) отклоняются друг от друга по формуле (4.12)

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t) - y^0(\tau + t)\|_E \leqslant D_1 \varepsilon^{1/2 - \alpha/2} e^{rt} \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{5.9}$$

2) Аттрактор $\mathscr{A}^0$ притягивает решения "предельного" уравнения с экспоненциальной скоростью при $t \to +\infty$ (см. (5.5)), т.е. для любого ограниченного множества $B \subset E$, $\|B\|_E \leqslant L$,

$$\operatorname{dist}_E(y^0(\tau + t), \mathscr{A}^0) \leqslant D_2 e^{-\nu t} \qquad \forall\, y^0(\tau) \in B, \quad t \geqslant 0 \tag{5.10}$$

($D_2 = C(L)$ не зависит от τ).

Приступим к доказательству теоремы 5.1. Пусть y^ε – любая точка $\mathscr{A}^\varepsilon$. Через эту точку проходит некоторая ограниченная полная траектория $\widehat{y}^\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, процесса

$\{U_{\widehat{g}_1}(t,\tau)\}$, задаваемого уравнением (5.1) для некоторой функции $\widehat{g}_1 \in \mathscr{H}(g_1)$ (см. (2.19)). Для определенности можно считать, что

$$y_\tau = \widehat{y}^\varepsilon(0). \tag{5.11}$$

Заметим, что $\widehat{y}^\varepsilon(t) \in \mathscr{A}^\varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому в силу условия (5.6) из (4.2) имеем

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(t)\|_E \leqslant C \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

Рассмотрим точку $\widehat{y}^\varepsilon(-M)$, где M будет указано ниже (см. (5.18)). Пусть

$$y^0(-M+t) = (u^0(-M+t), \partial_t u^0(-M+t))$$

– решение задачи Коши для "предельного" уравнения (5.2), которое при $t=0$ совпадает с $\widehat{y}^\varepsilon(-M)$:

$$y^0(-M) = \widehat{y}^\varepsilon(-M).$$

Из (5.12) получаем, что

$$\|y^0(-M)\|_E \leqslant C. \tag{5.13}$$

В силу (5.9)

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(-M+t) - y^0(-M+t)\|_E \leqslant D_1 \varepsilon^{1/2-\alpha/2} e^{rt}. \tag{5.14}$$

Согласно свойству (5.10) экспоненциального притяжения аттрактором $\mathscr{A}^0$ имеем, что при $t \geqslant 0$

$$\operatorname{dist}_E(y^0(-M+t)), \mathscr{A}^0) \leqslant D_2 e^{-\nu t}. \tag{5.15}$$

Отсюда и из (5.14) вытекает, что при $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_E(\widehat{y}^\varepsilon(-M+t), \mathscr{A}^0) &\leqslant \|\widehat{y}^\varepsilon(-M+t) - y^0(-M+t)\|_E + \operatorname{dist}_E(y^0(-M+t), \mathscr{A}^0) \\ &\leqslant D_1 \varepsilon^{1/2-\alpha/2} e^{rt} + D_2 e^{-\nu t}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Выберем теперь число M так, чтобы

$$\varepsilon^{1/2-\alpha/2} e^{rM} = e^{-\nu M}. \tag{5.17}$$

Логарифмируя обе части этого равенства, получим

$$M = \frac{1-\alpha}{2(r+\nu)} \log \frac{1}{\varepsilon}. \tag{5.18}$$

Подставив теперь $t = M$ в (5.16), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_E(\widehat{y}^\varepsilon(0), \mathscr{A}^0) &\leqslant D_1 \varepsilon^{1/2-\alpha/2} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{r(1-\alpha)/(2(r+\nu))} + D_2 \varepsilon^{\nu(1-\alpha)/(2(r+\nu))} \\ &= (D_1 + D_2) \varepsilon^{\nu(1-\alpha)/(2(r+\nu))} = C^0 \varepsilon^{\eta_0(\alpha)}, \end{aligned} \tag{5.19}$$

где $C^0 = D_1 + D_2$ и

$$\eta_0(\alpha) = \nu \frac{1-\alpha}{2(r+\nu)}. \tag{5.20}$$

Так как y^ε – произвольная точка $\mathscr{A}^\varepsilon$, то из (5.19) заключаем, что

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}^\varepsilon, \mathscr{A}^0) \leqslant C^0 \varepsilon^{\eta_0(\alpha)}, \tag{5.21}$$

и оценка (5.7) доказана.

6. Равномерный глобальный аттрактор с экспоненциальным притяжением для семейства неавтономных волновых уравнений. Пусть функция $g_0(x,t)$ в предельном волновом уравнении (2.21) является трансляционно компактной в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t^2 u+\gamma\partial_t u=\Delta u-f(u)+g(t), \qquad u|_{\partial\Omega}=0, \tag{6.1}$$

где $g\in\mathscr{H}(g_0)$. Предполагается, что $f(u)$ удовлетворяет неравенствам (2.2)–(2.4) при $\rho=0$ и, как обычно, $\gamma>0$. Пусть $\mathscr{K}_g$ – ядро уравнения (6.1), т.е.

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_g=\bigl\{&y_g(x,t)=(u_g(x,t),\partial_t u_g(x,t)),\ t\in\mathbb{R}\mid u_g(x,t)-\text{решение (6.1) и}\\ &\|y_g(\,\cdot\,,t)\|_E\leqslant L<+\infty\ \ \forall\,t\in\mathbb{R}\bigr\}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Отметим, что число L можно выбрать не зависящим от $g\in\mathscr{H}(g_0)$. Как уже отмечалось, семейство процессов $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\mathscr{H}(g_0)$, действующих в E, порожденное семейством уравнений (6.1), имеет равномерный (по $g\in\mathscr{H}(g_0)$) глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$, причем

$$\mathscr{A}^0=\bigcup_{g\in\mathscr{H}(g_0)}\mathscr{K}_g(0). \tag{6.3}$$

(Доказательство приведено в [14].) Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f'(v)|\leqslant K \qquad \forall\,v\in\mathbb{R}. \tag{6.4}$$

И, кроме того, пусть

$$K<\lambda_1, \qquad \gamma^2>\gamma_0^2:=2\bigl(\lambda_1-\sqrt{\lambda_1^2-K^2}\,\bigr), \tag{6.5}$$

где λ_1 – первое собственное значение оператора $\{-\Delta u,\ u|_{\partial\Omega}=0\}$. Тогда при любом $g\in\mathscr{H}(g_0)$ уравнение (6.1) имеет (единственное) глобальное решение $z_g(x,t)=(\widetilde u_g(x,t),\partial_t\widetilde u_g(x,t))$, ограниченное в E, т.е. ядро $\mathscr{K}_g$ состоит из одного элемента z_g. Траектория z_g притягивает при $t\to+\infty$ любое решение $y_g(x,t)=(u_g(x,t),\partial_t u_g(x,t))$, $t\geqslant\tau$, уравнения (6.1), точнее, имеет место неравенство

$$\|y_g(t)-z_g(t)\|_E\leqslant C\|y_g(\tau)-z_g(\tau)\|_E\cdot e^{-\varkappa(t-\tau)} \qquad \forall\,t\geqslant\tau, \tag{6.6}$$

где $\varkappa>0$ и $C>0$ не зависят от y_g и от $g\in\mathscr{H}(g_0)$.

Доказательство этой теоремы приведено в [1]. Кроме того, в этой работе показано, что при выполнении неравенств (6.5) глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$ имеет следующий вид:

$$\mathscr{A}^0=\bigcup_{g\in\mathscr{H}(g_0)}z_g(0)=\Bigl[\bigcup_{t\in\mathbb{R}}z_{g_0}(t)\Bigr]_E, \tag{6.7}$$

где z_{g_0} – единственное ограниченное полное решение уравнения (6.1) с исходной внешней силой $g_0(x,t)$; $[\,\cdot\,]_E$ обозначает замыкание множества, стоящего внутри этих скобок. Из (6.6) и (6.7) вытекает

Следствие 6.1. *При выполнении условий* (6.4) *и* (6.5) *глобальный аттрактор* $\mathscr{A}^0$ *притягивает любое решение* $y_g(x,t) = (u_g(x,t), \partial_t u_g(x,t))$, $t \geqslant \tau$, *уравнения* (6.1) *с экспоненциальной скоростью, т.е. при*

$$\|y_g(\tau)\|_E \leqslant M_1 \tag{6.8}$$

имеет место неравенство

$$\operatorname{dist}_E(y_g(\tau+t), \mathscr{A}^0) \leqslant C(M_1)e^{-\varkappa t} \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{6.9}$$

где $\varkappa$ *и* C *не зависят от* y_g *и* $g \in \mathscr{H}(g_0)$.

7. Оценка отклонения равномерного глобального аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$ от аттрактора $\mathscr{A}^0$ (неавтономный случай “предельного” уравнения). Рассматривается семейство уравнений вида (2.15)

$$\partial_t^2 u + \gamma\partial_t u = \Delta u - f(u) + \widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7.1}$$

где $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, $\widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1(t/\varepsilon) \in \mathscr{H}(g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon))$. Функции $g_0(t), g_1(z)$ те же, что и в уравнении (2.1), т.е. они трансляционно компактны в $L_2(\mathbb{R}; H)$. Наряду с (7.1) рассматривается соответствующее “предельное” семейство уравнений

$$\partial_t^2 u + \gamma\partial_t u = \Delta u - f(u) + \widehat{g}_0(t), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7.2}$$

где $\widehat{g}_0 \in \mathscr{H}(g_0)$.

Предполагается, что функция $f(v)$ удовлетворяет неравенству (6.4) и выполнено условие (6.5). При выполнении перечисленных условий в предыдущем пункте было показано, что семейство процессов $\{U_{\widehat{g}_0}(t,\tau)\}$, $\widehat{g}_0 \in \mathscr{H}(g_0)$, отвечающее (7.2), имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathscr{A}^0$, который представим в виде (6.7), и $\mathscr{A}^0$ притягивает любые решения уравнения (7.2) с экспоненциальной скоростью, что отражено в неравенстве (6.9).

Для уравнений (7.1) помимо перечисленных свойств предполагается, что для любой функции $\widehat{g}_1(x,z) \in \mathscr{H}(g_1)$ существует ее первообразная $\widehat{G}_1(x,z)$ по z, которая удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9). Рассмотрим теперь при любом фиксированном ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, равномерный глобальный аттрактор $\mathscr{A}^\varepsilon$ семейства уравнений (7.1), который был построен в п. 2. Множество $\mathscr{A}^\varepsilon$ представимо в виде (2.19)

$$\mathscr{A}^\varepsilon = \bigcup_{\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g_0(\,\cdot\,)+\varepsilon^{-\alpha}g_1(\,\cdot\,/\varepsilon))} \mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}(0), \tag{7.3}$$

где $\mathscr{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}(0)$ – сечение (в момент $t = 0$) ядра уравнения (7.1) с внешней силой $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathscr{H}(g_0(\,\cdot\,) + \varepsilon^{-\alpha}g_1(\,\cdot\,/\varepsilon))$.

Из указанных выше свойств следует теорема об отклонении аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$ от аттрактора $\mathscr{A}^0$ “семейства” предельных уравнений (7.2).

Теорема 7.1. *Пусть для функции $f(v)$ имеет место неравенство* (6.4) *и выполнено условие* (6.5), *а функции $g_0(t)$ и $g_1(z)$ являются трансляционно компактны в $L_2(\mathbb{R};H)$, причем для любой функции $\widehat{g}_1(x,z) \in \mathscr{H}(g_1)$ существует первообразная $\widehat{G}_1(x,z)$ по z (т.е. $\partial_z\widehat{G}_1(x,z) = \widehat{g}_1(x,z)$), которая равномерно ограничена в $C_b(\mathbb{R};H_0^1(\Omega))$, т.е. выполнено* (3.9). *Если выполнено неравенство*

$$\alpha \leqslant \alpha_0 = \frac{1}{2(1+r/\beta)},$$

то для отклонения аттрактора $\mathscr{A}^\varepsilon$ от аттрактора $\mathscr{A}^0$ справедлива оценка

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}^\varepsilon, \mathscr{A}^0) \leqslant \widetilde{C}\varepsilon^{\eta_1(\alpha)}, \tag{7.4}$$

где

$$\eta_1(\alpha) = \frac{\varkappa}{2(r+\varkappa)}(1-\alpha). \tag{7.5}$$

Здесь $\varkappa$ – коэффициент из экспоненциальной оценки (6.6) *притяжения решений "предельного" уравнения к аттрактору $\mathscr{A}^0$, а число r такое же, как в* (3.25).

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 5.1. Действительно, предельное уравнение (7.2) имеет экспоненциально притягивающий аттрактор $\mathscr{A}^0$, причем справедлива формула (6.9), где в показательной функции имеется коэффициент $\varkappa$. (На месте $\varkappa$ в аналогичной формуле (5.10) экспоненциального притяжения регулярным аттрактором $\mathscr{A}^0$ автономного уравнения стоит коэффициент ν. Поэтому формула (7.5) для $\eta_1(\alpha)$ отличается от формулы (5.8) для $\eta_0(\alpha)$ лишь тем, что число ν заменено на $\varkappa$.) Далее следует повторить все рассуждения из доказательства теоремы 5.1, начиная с формулы (5.9) (с заменой ν на $\varkappa$). В итоге получится требуемая оценка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Chepyzhov V. V., Vishik M. I., Wendland W. L. On non-autonomous sine-Gordon type equations with a simple global attractor and some averaging // Discr. Cont. Dynamic Systems. 2005. V. 12. №1. P. 27–38.

[2] Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. Averaging in infinite dimensions // J. Integral Equations Appl. 1990. V. 2. №4. P. 463–494.

[3] Ильин А. А. Усреднение диссипативных динамических систем с быстро осциллирующими правыми частями // Матем. сб. 1996. Т. 187. №5. С. 15–58.

[4] Вишик М. И., Чепыжов В. В. Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // Матем. сб. 2001. Т. 192. №1. С. 16–53.

[5] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with a simple global attractor and some averaging problems // Electr. J. ESAIM: COCV. 2002. V. 8. P. 467–487.

[6] Вишик М. И., Фидлер Б. Количественное усреднение глобальных аттракторов гиперболических волновых уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // УМН. 2002. Т. 47. №4. С. 75–94.

[7] Efendiev M., Zelik S. Attractors of the reaction-diffusion systems with rapidly oscillating coefficients and their homogenization // Ann. Inst. Poincaré. 2002. V. 19. №6. P. 961–989.

[8] Chepyzhov V. V., Goritsky A. Yu., Vishik M. I. Integral manifolds and attractors with exponential rate for nonautonomous hyperbolic equations with dissipation // Russ. J. Math. Phys. 2005. №1. P. 17–39.

[9] Вишик М. И., Чепыжов В. В. Аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе гиперболического уравнения с быстро осциллирующей по времени внешней силой // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 9. С. 3–30.
[10] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
[11] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Appl. Math. Sci. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1997.
[12] Hale J. K. Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems. Math. Survey Monographs. V. 25. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988.
[13] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
[14] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors for Equations of Mathematical Physics. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
[15] Raugel G. Global attractors in partial differential equations // Handbook of Dynamical Systems, Vol. 2 / ed. B. Fiedler. Amsterdam: North-Holland, 2002. P. 885–982.
[16] Haraux A. Two remarks on dissipative hyperbolic problems // Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications / ed. H. Brezis, J.L. Lions. Collège de France Seminar № 7. Research Notes in Math. V. 112. Boston: Pitman, 1985. P. 161–179.
[17] Ball J. M. Global attractors for damped semilinear wave equations // Discr. Cont. Dynamic Systems. 2004. V. 10. № 1–2. P. 31–62.
[18] Боголюбов Н. Н., Митропольский Я. А. Асимптотические методы в теории нелинейных осцилляций. М.: Физматгиз, 1963.
[19] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд. МГУ, 1978.
[20] Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
[21] Fiedler B., Vishik M. I. Quantative homogenization of global attractors for reaction-diffusion systems with rapidly oscillating terms // Preprint № A-18-2000. Berlin: Free Univ. Berlin, 2000.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: vishik@iitp.ru, chep@iitp.ru

Поступило
31.03.2005