УДК 517.956

А. Ю. Горицкий, В. В. Чепыжов

Свойство дихотомии решений квазилинейных уравнений в задачах об инерциальных многообразиях

Изучены свойства экспоненциальной дихотомии неавтономных квазилинейных уравнений с частными производными, которые можно записать в виде дифференциального уравнения $du/dt + Au = F(u,t)$ в гильбертовом пространстве H. Предполагается, что нелинейная функция $F(u,t)$ существенно подчинена линейному оператору A, а именно, выполнено условие спектральной щели, возникающее в теории инерциальных многообразий. Построены интегральные многообразия M_+ и M_-, к которым экспоненциально приближается любое решение этого уравнения при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ соответственно. Доказанные общие результаты применены к исследованию свойств дихотомии решений одномерной системы реакции-диффузии, а также диссипативного гиперболического уравнения типа sin-Гордона.

Библиография: 18 названий.

Введение

В настоящей работе исследуются свойства дихотомии решений неавтономных уравнений с частными производными, которые можно записать в форме абстрактного квазилинейного эволюционного уравнения в некотором гильбертовом пространстве H

$$\frac{dy}{dt} + Ay = F(y,t), \tag{1}$$

дополненного начальным условием

$$y\big|_{t=\tau} = y_\tau \in H. \tag{2}$$

В уравнении (1) A – линейный замкнутый (возможно, неограниченный) оператор с плотной в H областью определения $\mathscr{D}(A)$. Кроме того, предполагается, что оператор A удовлетворяет некоторым условиям, обеспечивающим при любом $y_\tau \in H$ однозначную разрешимость соответствующей *линейной* задачи Коши, т.е. задачи (1), (2) с $F \equiv 0$. (Например, оператор A может иметь компактную резольвенту.) Эти условия следует формулировать отдельно для каждого конкретного уравнения с частными производными.

Предполагается, что фазовое пространство H разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств, $H = P(H) \oplus Q(H)$, причем $P(H)$ и $Q(H)$ являются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00227), Фонда содействия отечественной науке, Alexander von Humboldt Foundation, CRDF (грант № 2343), а также фонда INTAS (грант № 00-899).

инвариантными подпространствами оператора A, а подпространство $P(H)$ имеет конечную размерность. Предполагается, что квадратичная форма оператора A удовлетворяет следующим неравенствам:

$$(Ap,p) \leqslant (\theta-\delta)|p|^2 \qquad \forall\, p \in P(H), \tag{3}$$
$$(Aq,q) \geqslant (\theta+\delta)|q|^2 \qquad \forall\, q \in Q(H)\cap\mathscr{D}(A), \tag{4}$$

где $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Здесь и далее $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H, а $|\cdot|$ – соответствующую норму в H. Например, неравенства (3) и (4) выполнены, если известно, что оператор A самосопряжен в H, а его спектр σ, лежащий на вещественной оси $\mathbb{R}$, не содержит интервал $(\theta-\delta,\theta+\delta)$. Для несамосопряженных операторов, у которых спектр σ, лежащий в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, отделен от вертикальной прямой $\{\operatorname{Re}\xi=\theta\}$, также иногда удается подобрать скалярное произведение в H, эквивалентное исходному, так, что справедливы неравенства (3) и (4) (см. в §4 пример квазилинейного гиперболического уравнения с диссипацией).

Из теории линейных уравнений в гильбертовых пространствах известно (см., например, [1]–[3]), что при выполнении условий (3) и (4) любое решение $y(t)$, $t>\tau$, линейной (т.е. при $F\equiv 0$) задачи (1), (2) представимо в виде $y(t)=y_+(t)+y_-(t)$, где $y_+(t)\in P(H)$, $y_-(t)\in Q(H)$, причем для любого $t\geqslant\tau$, $\tau\in\mathbb{R}$, выполнены следующие неравенства:

$$|y(t)-y_+(t)| = |y_-(t)| \leqslant |y_-(\tau)|e^{-(\theta+\delta)(t-\tau)}, \tag{5}$$
$$|y(\tau)-y_-(\tau)| = |y_+(\tau)| \leqslant |y_+(t)|e^{(\theta-\delta)(t-\tau)}. \tag{6}$$

Это свойство называется *экспоненциальной дихотомией* решений линейного дифференциального уравнения (здесь рассмотрен простейший случай *линейного автономного* уравнения), которое обычно формулируется при значении $\theta=0$.

В настоящей работе аналогичное свойство будет доказано для решений квазилинейных уравнений вида (1) при условии существенного подчинения нелинейной функции $F(y,t)$ линейному оператору A в следующем смысле. Предполагается, что функция $F(y,t)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица

$$|F(y_1,t)-F(y_2,t)| \leqslant L|y_1-y_2| \qquad \forall\, y_1,y_2\in H, \tag{7}$$

причем для константы Липшица L выполнена оценка

$$L<\delta, \tag{8}$$

где число δ взято из неравенств (3) и (4).

При выполнении условия (7) задача Коши (1), (2) порождает процесс

$$\{Y(t,\tau),\ t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R}\} \equiv \{Y(t,\tau)\},$$

т.е. семейство отображений $Y(t,\tau)\colon H\to H$, действующих в пространстве H по формуле $Y(t,\tau)y_\tau = y(t)$, где $y(t)$ – решение задачи (1), (2).

Предполагается, что уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение $\overline{y}(t)$, определенное при всех $t \in \mathbb{R}$. Это условие не является ограничительным и всегда выполняется в конкретных приложениях.

Сформулируем основной результат статьи. При выполнении перечисленных условий в расширенном фазовом пространстве $H \times \mathbb{R}_t$ можно построить два множества M_+ и M_-, содержащие интегральную кривую $(\overline{y}(t), t)$ и имеющие следующие свойства.

1) Множество M_+ является графиком функции $\Phi\colon P(H) \times \mathbb{R}_t \to Q(H)$, а множество M_- является графиком функции $\Psi\colon Q(H) \times \mathbb{R}_t \to P(H)$, причем обе функции непрерывны по Липшицу вдоль $P(H)$ и $Q(H)$ соответственно, а их константы Липшица меньше 1, поэтому $M_+ \cap M_- = \{(\overline{y}(t), t), t \in \mathbb{R}\}$.
2) Множество M_+ инвариантно под действием операторов сдвига вдоль траекторий уравнения (1), т.е. $Y(t,\tau)M_+(\tau) = M_+(t)$ при всех $t \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, а множество M_- полуинвариантно под действием операторов этого процесса, т.е. $Y(t,\tau)M_-(\tau) \subseteq M_-(t)$ при всех $t \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Здесь $M_+(s)$ и $M_-(s)$ обозначают сечения плоскостью $\{t = s\}$ множеств M_+ и M_- соответственно.
3) Любое решение $y(t) = Y(t,\tau)y_\tau$ задачи (1), (2) имеет на M_+ экспоненциальный след, т.е. существует интегральная кривая $(y_+(t), t) \in M_+$, $t \in \mathbb{R}$, такая, что
$$|y(t) - y_+(t)| \leqslant C|y(\tau) - y_+(\tau)|\, e^{-(\theta+\mu)(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \tag{9}$$
где $\mu = \delta - L > 0$ (см. (8)). Число C не зависит от y_τ.

   Если решение $y(t)$ продолжаемо назад на интервал (T, τ), где $-\infty \leqslant T < \tau$, то существует интегральная кривая $(y_-(t), t) \in M_-$, $t \geqslant T$, такая, что
$$|y(t) - y_-(t)| \leqslant C|y(\tau) - y_-(\tau)| e^{(\theta-\mu)(\tau-t)} \qquad \forall\, t \in (T, \tau]. \tag{10}$$
   При этом след $y_+(t)$, удовлетворяющий неравенству (9), единствен, а след $y_-(t)$ единствен, если $T = \infty$.

В теории нелинейных эволюционных уравнений с частными производными большое внимание уделяется методам построения конечномерных инвариантных многообразий M_+, которые притягивают любые решения этих уравнений при $t \to +\infty$ с экспоненциальной скоростью. Такие многообразия принято называть *инерциальными* (см. [4]–[8]). Инерциальные многообразия позволяют свести изучение поведения решений бесконечномерной динамической системы к исследованию этого вопроса для некоторой конечномерной динамической системы, порождаемой исходной системой на инерциальном многообразии.

Однако существенным препятствием для построения инерциальных многообразий для конкретных уравнений с частными производными остается сильнейшее ограничение (8). Для произвольной нелинейной функции $F(y,t)$, удовлетворяющей условию Липшица (7) с большой константой L, условие (8) можно установить, если проекция спектра σ линейного оператора A на вещественную ось достаточно разрежена, т.е. на вещественной оси имеются широкие интервалы (вида $[\theta - \delta, \theta + \delta]$

ширины больше $2L$), не пересекающие проекцию спектра. Это условие имеет место лишь для уравнений с частными производными в областях малой размерности (1 или 2).

В работе показано, что при выполнении условия (8) кроме конечномерного инерциального многообразия M_+ можно также построить "трансверсальное" ему бесконечномерное многообразие M_-, которое в определенном смысле описывает поведение решений уравнения (1) при $t \to -\infty$. Такое поведение для *линейных* уравнений, как уже указывалось, принято называть *дихотомией*. Этим объясняется употребление нами термина "дихотомия" применительно к *нелинейному* уравнению. Как правило, свойство дихотомии формулируется при $\theta = 0$. В этом случае имеется экспоненциальное притяжение к многообразию M_+ при $t \to +\infty$ и к многообразию M_- при $t \to -\infty$. Отметим, что к этому случаю можно свести общий случай $\theta \neq 0$, если в уравнении (1) сделать замену $y = e^{-\theta t}u$. Такое поведение решений нелинейных систем иногда называют свойством *седловидности* (см., например, [9]).

Опишем кратко структуру статьи. В § 1 рассмотрено общее неавтономное эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве и сформулирована основная теорема о структуре и свойствах многообразий M_+ и M_-. При этом для удобства изложения сначала рассматривается случай $\theta = 0$, а потом формулируются результаты для общего случая $\theta \in \mathbb{R}$. В § 2 приводится доказательство основной теоремы, в котором используются методы дифференциальных неравенств, разработанные авторами при построении инерциальных многообразий для неавтономных уравнений в работах [10], [11].

В § 3 строятся инвариантные многообразия для одномерной системы реакции-диффузии, в которой линейный оператор A является самосопряженным. В § 4 свойство экспоненциальной дихотомии устанавливается для гиперболического уравнения с диссипацией, частным случаем которого служит уравнение sin-Гордона. Основное внимание уделено нахождению явных соотношений между основными параметрами задачи (коэффициентом диссипации, собственными значениями оператора Лапласа и константой Липшица нелинейной функции), при которых выполнены условия основной теоремы о существовании инвариантных многообразий. Отметим, что инерциальные многообразия для диссипативных гиперболических уравнений изучались в работах [7], [12].

§ 1. Основной результат

1.1. Разделение спектра в точке 0. Рассматривается задача Коши для неавтономного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве H вида

$$\frac{du}{dt} + Au = F(u,t), \tag{11}$$

$$u\big|_{t=\tau} = u_\tau. \tag{12}$$

Мы предполагаем, что спектр $\sigma(A)$ линейного (возможно, неограниченного и несамосопряженного) оператора A отделен от мнимой оси. Обозначим через P ортопроектор на инвариантное подпространство оператора A, соответствующее части спектра $\sigma \cap \{\operatorname{Re}\xi < 0\}$. Предполагается, что пространство $P(H)$ конечномерно. Положим $Q = \operatorname{Id} - P$. Пусть в пространстве H задано скалярное произведение так, что пространства $P(H)$ и $Q(H)$ ортогональны, $P(H) \perp Q(H)$, и выполнены неравенства

$$(Ap, p) \leqslant -\delta|p|^2 \qquad \forall\, p \in P(H), \tag{13}$$
$$(Aq, q) \geqslant +\delta|q|^2 \qquad \forall\, q \in Q(H) \cap \mathscr{D}(A) \tag{14}$$

для некоторого числа $\delta > 0$. Нелинейная функция $F(u,t)$ удовлетворяет условиям

$$|F(u_1,t) - F(u_2,t)| \leqslant L|u_1 - u_2| \qquad \forall\, u_1, u_2 \in H, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$
$$F(0,t) \equiv 0, \tag{16}$$

причем для глобальной константы Липшица L имеет место оценка

$$L < \delta. \tag{17}$$

Предполагается, что для любого $u_\tau \in H$ задача (11), (12) имеет, и притом единственное, решение $u(t)$, $t \geqslant \tau$, такое, что $u(t) \in H$ при всех $t \geqslant \tau$. Рассмотрим операторы

$$U(t,\tau)\colon H \to H, \qquad t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

действующие по формуле $U(t,\tau)u_\tau = u(t)$, где $u(t)$ – решение задачи (11), (12) с начальным условием $u_\tau \in H$. Семейство операторов $\{U(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\} \equiv \{U(t,\tau)\}$ называется *процессом, соответствующим задаче* (11), (12). Пусть процесс $\{U(t,\tau)\}$ слабо непрерывен по совокупности переменных (u_τ, t). Последнее означает, что для всех $w \in H$ и $\tau \in \mathbb{R}$ функция $\varphi(u_\tau, t) = (U(t,\tau)u_\tau, w)$, определенная при $t \geqslant \tau$, является непрерывным отображением из $H \times \mathbb{R}_t$ в $\mathbb{R}$ (через $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ мы обозначаем скалярное произведение в H). Также мы предполагаем сильную непрерывность в H операторов $\{U(t,\tau)\}$.

Отметим, что предполагаемые в предыдущем абзаце свойства уравнения (11), как правило, выполнены для корректно поставленных задач. В настоящей статье изучаются некоторые квазилинейные уравнения с частными производными вида (11), для которых эти свойства будут проверяться особо.

Определим множества M_+ и M_- в расширенном фазовом пространстве $H \times \mathbb{R}_t$. Множество M_+ задается как объединение интегральных кривых, соответствующих решениям уравнения (11), которые определены при всех $t \in \mathbb{R}$ и ограничены при $t \to -\infty$, т.е.

$$M_+ = \bigl\{(u(t),t) \bigm| u(t),\ t \in \mathbb{R},\ \text{– решение (11)},\ |u(t)| = O(1),\ t \to -\infty\bigr\},$$

а M_- состоит из всех интегральных кривых, соответствующих ограниченным при $t \to +\infty$ решениям:

$$M_- = \bigl\{(u_\tau, \tau) \bigm| |u(t)| = O(1),\ t \to +\infty,\ \text{где } u(t) = U(t,\tau)u_\tau,\ t \geqslant \tau\bigr\}.$$

Замечание 1.1. В силу определения множество M_+ инвариантно, а M_- полуинвариантно относительно операторов процесса $\{U(t,\tau)\}$, т.е.

$$U(s,\tau)M_+(\tau) = M_+(s), \qquad U(s,\tau)M_-(\tau) \subseteq M_-(s) \qquad \forall\, s \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Здесь $M_+(s)$ и $M_-(s)$ обозначают соответственно сечения множеств $M_+(s)$ и $M_-(s)$ плоскостью $\{t = s\}$.

Замечание 1.2. Ввиду условия $F(0,t) \equiv 0$ уравнение (11) имеет нулевое решение, следовательно, $(0,t) \in M_+$ и $(0,t) \in M_-$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Положим $\mu = \delta - L > 0$ и определим число β, $0 < \beta < 1$, из уравнения

$$\frac{1}{2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{2\delta - L}{L} = 1 + 2\,\frac{\mu}{L}\,. \tag{18}$$

Замечание 1.3. При стремлении константы Липшица L функции $F(u,t)$ к нулю задача приближается к линейной. В этом случае $\mu \to \delta$ и $\beta \to 0$ при $L \to 0+$.

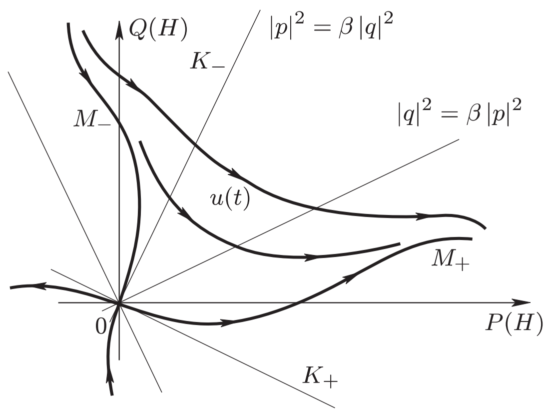

Рис. 1. Интегральные многообразия $M_\pm$

Теорема 1.1 (основная). *Пусть выполнены условия* (13)–(17). *Тогда* (*см. рис.* 1) *справедливо следующее.*

1) (+) *Множество M_+ является графиком Липшиц-непрерывной по p функции*

$$\Phi\colon P(H) \times \mathbb{R}_t \to Q(H), \qquad |\Phi(p_1,t) - \Phi(p_2,t)| \leqslant \sqrt{\beta}\,|p_1 - p_2|.$$

(−) *Множество M_- является графиком Липшиц-непрерывной по q функции*

$$\Psi\colon Q(H) \times \mathbb{R}_t \to P(H), \qquad |\Psi(q_1,t) - \Psi(q_2,t)| \leqslant \sqrt{\beta}\,|q_1 - q_2|.$$

В частности, M_+ конечномерно, а M_- имеет конечную коразмерность, и эти два множества пересекаются ровно по оси времени: $M_+ \cap M_- = \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (*ввиду* $\sqrt{\beta} < 1$).

2) (+) *Для любых двух решений* $u_1(t)$ *и* $u_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *лежащих на* M_+ *(под этим здесь и ниже мы подразумеваем, что* $(u_i(t), t) \in M_+$ *при всех* $t \in \mathbb{R}$*), выполнено*

$$|u_1(t) - u_2(t)| \geqslant \sqrt{1-\beta}\,|u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, e^{\mu(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau.$$

В частности, положив $u_2(t) \equiv 0$, *будем иметь, что* $|u_1(t)| \to 0$ *с экспоненциальной скоростью при* $t \to -\infty$ *и* $|u_1(t)| \to \infty$ *при* $t \to +\infty$ *(если только* $u_1(t) \not\equiv 0$*).*

(−) *Для любых решений* $u_1(t)$ *и* $u_2(t)$, $t \geqslant \tau$, *лежащих на* M_-,

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\beta}}\,|u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, e^{-\mu(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau.$$

В частности, $|u_1(t)| \to 0$ *с экспоненциальной скоростью при* $t \to +\infty$.

3) (+) *Для любого решения* $u(t) = U(t,\tau)u_\tau$ *существует его "след" при* $t \to +\infty$ *на* M_+, *т.е. такое решение* $u_+(t)$, $(u_+(t), t) \in M_+$, *уравнения* (11), *для которого выполнено*

$$|u(t) - u_+(t)| \leqslant C|u_\tau|\, e^{-\mu(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \tag{19}$$

где $C = \sqrt{(1+\beta)^3/(1-\beta)^3}$, *причем этот "след"* $u_+(t)$ *единственный.*

(−) *Если решение* $u(t) = U(t,\tau)u_\tau$ *может быть продолжено назад на временной интервал* (T,τ), $-\infty \leqslant T < \tau$, *то существует интегральная кривая* $(u_-(t), t) \in M_-$, *также определенная при* $t > T$, *для которой*

$$|u(t) - u_-(t)| \leqslant C|u_\tau|\, e^{-\mu(\tau-t)} \qquad \forall\, t \in (T,\tau]. \tag{20}$$

Такой "след" $u_-(t)$ *будет единственным, если* $T = -\infty$.

Замечание 1.4. Утверждения п. 3) теоремы 1.1 о единственности "следов" на M_+ и M_- непосредственно следуют из оценки скорости расхождения при $t \to \pm\infty$ любых двух интегральных кривых, лежащих на этих множествах (п. 2) этой теоремы).

Часть утверждений теоремы 1.1, касающихся многообразия M_+, доказана в [10], [11]. В теории линейных дифференциальных уравнений свойство разложения любого решения $u(t)$ на составляющие $u_+(t)$ и $u_-(t)$, которые удовлетворяют (19), (20), называется *экспоненциальной дихотомией*. Существование множеств M_+ и M_- с описанными в теореме свойствами иногда называют *свойством седловидности* (см. [9]).

1.2. Разделение спектра в точке θ. В этом пункте свойство экспоненциальной дихотомии будет сформулировано для задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} + Ay = F(y,t), \qquad y\big|_{t=\tau} = y_\tau, \tag{21}$$

когда спектр линейного оператора A отделен не от мнимой оси, а от некоторой вертикальной прямой $\{\operatorname{Re}\xi = \theta\}$. Уравнение рассматривается в гильбертовом пространстве H. С помощью подходящей замены координат такая задача сводится к случаю $\theta = 0$, рассмотренному в п. 1.1.

Обозначим через P ортопроектор на инвариантное подпространство оператора A, соответствующее части спектра, лежащей левее прямой $\{\operatorname{Re}\xi = \theta\}$, а через Q – оператор $Q = \operatorname{Id} - P$. Предположим, что вместо (13), (14) выполнены неравенства

$$(Ap,p) \leqslant (\theta - \delta)|p|^2 \quad \forall\, p \in P(H), \tag{22}$$

$$(Aq,q) \geqslant (\theta + \delta)|q|^2 \quad \forall\, q \in Q(H) \cap \mathscr{D}(A) \tag{23}$$

для некоторого числа $\delta > 0$. Условия (15) и (17) считаются выполненными для задачи (21).

Сделаем замену переменных $y = e^{-\theta t}u$, $y_\tau = e^{-\theta\tau}u_\tau$ и перепишем уравнение (21) в виде

$$\frac{du}{dt} + (A - \theta\operatorname{Id})u = F(ue^{-\theta t}, t)e^{\theta t}. \tag{24}$$

Принимая $(A - \theta\operatorname{Id})$ за новый линейный оператор (но сохраняя прежнее обозначение A), мы тем самым сдвигаем спектр этого оператора на θ и из (22), (23) получаем в точности неравенства (13), (14).

Заметим, что нелинейный оператор $F(ue^{-\theta t}, t)e^{\theta t}$ в правой части уравнения (24) удовлетворяет глобальному условию Липшица с той же константой L, что и исходный оператор $F(u,t)$. Для нового нелинейного оператора сохраним старое обозначение F.

Замечание 1.5. Условие (16) не является ограничительным. Действительно, если зафиксировать некоторое решение $\overline{u}(t)$ (или $\overline{y}(t)$) рассматриваемого уравнения, определенное при всех $t \in \mathbb{R}$, то уравнение

$$\frac{d(u - \overline{u})}{dt} + A(u - \overline{u}) = F((u - \overline{u}) + \overline{u}(t), t) - F(\overline{u}(t), t),$$

написанное для разности $(u - \overline{u})$, имеет ровно тот же вид, что и уравнение для $u(t)$. При этом линейный оператор A не меняется, новая правая часть уравнения удовлетворяет по пространственной переменной тому же условию Липшица (15), что и $F(u,t)$, но кроме этого мы имеем тождество (16).

Совершенные преобразования приводят к уравнению (11).

Формулировка основной теоремы 1.1 в приложении к задаче (21) претерпит только изменения в показателях всех экспонент, где появится число θ. Кроме того, в том случае, когда наложенные выше условия выполняются не в исходной метрике (и скалярном произведении) пространства H, а в эквивалентной, изменятся и различные константы в утверждениях теоремы 1.1 (см. §4, где рассмотрено уравнения типа sin-Гордона). Для удобства читателей приведем полную формулировку теоремы в этом случае. Обозначим через $\{Y(t,\tau)\}$ процесс, соответствующий задаче (21) в пространстве H.

Теорема 1.2. *Для задачи Коши (21) существуют такие два множества M_+ и M_-, лежащие в расширенном фазовом пространстве $H \times \mathbb{R}_t$, для которых справедливо следующее.*

0) (+) *Пространство M_+ является инвариантным относительно процесса $\{Y(t,\tau)\}$:*

$$Y(s,\tau)M_+(\tau) = M_+(s) \qquad \forall\, s \geqslant \tau.$$

(−) *Пространство M_- полуинвариантно относительно процесса $\{Y(t,\tau)\}$:*

$$Y(s,\tau)M_-(\tau) \subseteq M_-(s) \qquad \forall\, s \geqslant \tau$$

($M_\pm(s)$ – сечение множества $M_\pm$ плоскостью $\{t = s\}$).

1) (+) *Пространство M_+ – график Липшиц-непрерывной по p функции Φ: $P(H) \times \mathbb{R}_t \to Q(H)$.*

(−) *Пространство M_- – график Липшиц-непрерывной по q функции Ψ: $Q(H) \times \mathbb{R}_t \to P(H)$.*

2) (+) *Для любых двух решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, лежащих на M_+, выполнено*

$$|y_1(t) - y_2(t)| \geqslant c|y_1(\tau) - y_2(\tau)|\, e^{-(\theta-\mu)(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \quad c > 0.$$

(−) *Для любых решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$, $t \geqslant \tau$, лежащих на M_-,*

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leqslant C|y_1(\tau) - y_2(\tau)|\, e^{-(\theta+\mu)(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \quad C > 0.$$

3) (+) *Для любого решения $y(t) = Y(t,\tau)y_\tau$ задачи (21) существует, и притом единственный, его “след” $y_+(t)$ на множестве M_+ при $t \to +\infty$, т.е. $(y_+(t), t) \in M_+$, и*

$$|y(t) - y_+(t)| \leqslant C|y(\tau) - y_+(\tau)|\, e^{-(\theta+\mu)(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau.$$

(−) *Если решение $y(t) = Y(t,\tau)y_\tau$ может быть продолжено назад на временной интервал (T,τ), $-\infty \leqslant T < \tau$, то существует интегральная кривая $(y_-(t), t) \in M_-$, $t > T$, для которой*

$$|y(t) - y_-(t)| \leqslant C|y(\tau) - y_-(\tau)|\, e^{(\theta-\mu)(\tau-t)} \qquad \forall\, t \in (T,\tau].$$

Если $T = -\infty$, то такое решение $y_-(t)$ единственно.

§ 2. Доказательство основной теоремы 1.1

2.1. Предварительные утверждения. Рассмотрим два решения $u_1(t) = p_1(t) + q_1(t)$ и $u_2(t) = p_2(t) + q_2(t)$ уравнения (11), $p_i \in P(H), q_i \in Q(H), i = 1, 2$. Обозначим $p(t) = p_1(t) - p_2(t)$ и $q(t) = q_1(t) - q_2(t)$.

Лемма 2.1. *Функции $z(t) = |p(t)|^2 - \beta\,|q(t)|^2$ и $w(t) = |q(t)|^2 - \beta\,|p(t)|^2$ удовлетворяют следующим дифференциальным неравенствам:*

$$\dot z(t) \geqslant 2\mu z(t), \qquad \dot w(t) \leqslant -2\mu w(t),$$

и, значит, при всех $t_1 \geqslant t_2$ выполнено

$$z(t_1) \geqslant z(t_2) e^{2\mu(t_1 - t_2)}, \tag{25}$$

$$w(t_1) \leqslant w(t_2) e^{-2\mu(t_1 - t_2)}. \tag{26}$$

Доказательство. Функции $p(t) = P(u_1(t) - u_2(t))$ и $q(t) = Q(u_1(t) - u_2(t))$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp}{dt} + Ap = P(F(u_1, t) - F(u_2, t)), \qquad \frac{dq}{dt} + Aq = Q(F(u_1, t) - F(u_2, t)).$$

Умножим скалярно первое уравнение на p, а второе – на q. Используя (13)–(15), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} z(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|p(t)|^2 - \beta\,|q(t)|^2)\\
&= -(p, Ap) + (p, F(u_1, t) - F(u_2, t)) + \beta(q, Aq) - \beta(q, F(u_1, t) - F(u_2, t))\\
&= -(p, Ap) + \beta(q, Aq) + (p - \beta q, F(u_1, t) - F(u_2, t))\\
&\geqslant \delta|p|^2 + \beta\delta|q|^2 - |p - \beta q| L |u_1 - u_2|\\
&\geqslant \delta|p|^2 + \beta\delta|q|^2 - \frac{L}{2}|p - \beta q|^2 - \frac{L}{2}|p + q|^2\\
&= \delta|p|^2 + \beta\delta|q|^2 - \frac{L}{2}(|p|^2 + \beta^2|q|^2) - \frac{L}{2}(|p|^2 + |q|^2)\\
&= (\delta - L)|p|^2 + \beta\left(\delta - \frac{L}{2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right)|q|^2.
\end{aligned}$$

Вспоминая, что $\delta - L = \mu$, из (18) имеем

$$\delta - \frac{L}{2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \delta - (2\delta - L) = L - \delta = -\mu.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} z(t) \geqslant \mu|p|^2 - \beta\mu|q|^2 = \mu z(t).$$

Аналогично имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}w(t) &= \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(|q(t)|^2 - \beta\,|p(t)|^2) \\
&= -(q, Aq) + \beta(p, Ap) + (q - \beta p, F(u_1, t) - F(u_2, t)) \\
&\leqslant -\delta|q|^2 - \beta\delta|p|^2 + \frac{L}{2}(|q|^2 + \beta^2|p|^2) + \frac{L}{2}(|q|^2 + |p|^2) \\
&= -(\delta - L)|q|^2 + \beta\left(-\delta + \frac{L}{2}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right)|p|^2 \\
&= -\mu|q|^2 + \beta\mu|p|^2 = -\mu w(t).
\end{aligned}
$$

Определим в фазовом пространстве H два конуса

$$
\begin{aligned}
K_+ &= \{u = p + q \mid w \equiv |q|^2 - \beta\,|p|^2 \leqslant 0\}, \\
K_- &= \{u = p + q \mid z \equiv |p|^2 - \beta\,|q|^2 \leqslant 0\}.
\end{aligned}
$$

Предложение 2.1. *Пусть $u_1(\tau) - u_2(\tau) \in K_+$, где $u_1(t)$ и $u_2(t)$, $t \geqslant \tau$, – два решения уравнения* (11), $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$. *Тогда при всех $t \geqslant \tau$ выполнено $u_1(t) - u_2(t) \in K_+$, а также*

$$
|u(t)| \geqslant \sqrt{1 - \beta}\,|u(\tau)|e^{\mu(t-\tau)}.
$$

Доказательство. Вводя в рассмотрение, как в лемме 2.1, функции $z(t)$ и $w(t)$, по условию имеем, что $w(\tau) \leqslant 0$. Тогда из (26) следует, что $w(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant \tau$, и первое утверждение доказано.

Из (25) и $w(\tau) \leqslant 0$ следует

$$
|u(t)|^2 \geqslant |p(t)|^2 \geqslant z(t) \geqslant z(\tau)e^{2\mu(t-\tau)} \geqslant (z(\tau) + \beta w(\tau))e^{2\mu(t-\tau)}.
$$

Учитывая, что

$$
z(\tau) + \beta w(\tau) = (1 - \beta^2)|p(\tau)|^2,
$$

а также

$$
|u(\tau)|^2 = |p(\tau)|^2 + |q(\tau)|^2 \leqslant (1 + \beta)|p(\tau)|^2,
$$

получаем

$$
|u(t)|^2 \geqslant (1 - \beta^2)|p(\tau)|^2 e^{2\mu(t-\tau)} \geqslant (1 - \beta^2)\,\frac{|u(\tau)|^2}{1 + \beta}\,e^{2\mu(t-\tau)}.
$$

Предложение 2.2. *Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения* (11), *определенные при $t \in [\tau, T]$ и $u_1(T) - u_2(T) \in K_-$. Тогда при всех $t \in [\tau, T]$ выполнено $u_1(t) - u_2(t) \in K_-$, а также*

$$
|u(t)| \leqslant \frac{|u(\tau)|}{\sqrt{1 - \beta}}\,e^{-\mu(t-\tau)}.
$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.1 сначала получим, что

$$z(t) = |p(t)|^2 - \beta\,|q(t)|^2 \leqslant 0,$$

а затем

$$|u(t)|^2 = |p(t)|^2 + |q(t)|^2 \leqslant (1+\beta)|q(t)|^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta^2}\,(w(t) + \beta z(t))$$
$$\leqslant \frac{w(t)}{1-\beta} \leqslant \frac{w(\tau)}{1-\beta}\,e^{-2\mu(t-\tau)} \leqslant \frac{|q(\tau)|^2}{1-\beta}\,e^{-2\mu(t-\tau)} \leqslant \frac{|u(\tau)|^2}{1-\beta}\,e^{-2\mu(t-\tau)}.$$

Замечание 2.1. Предложения 2.1 и 2.2 получаются друг из друга заменой времени t на $-t$ в уравнении (11). При этом оператор A заменяется на $-A$, и соответственно пространства $P(H)$ и $Q(H)$ меняются местами; конусы K_+ и K_- переходят друг в друга. (Конечномерность пространства $P(H)$ в этих доказательствах не используется.)

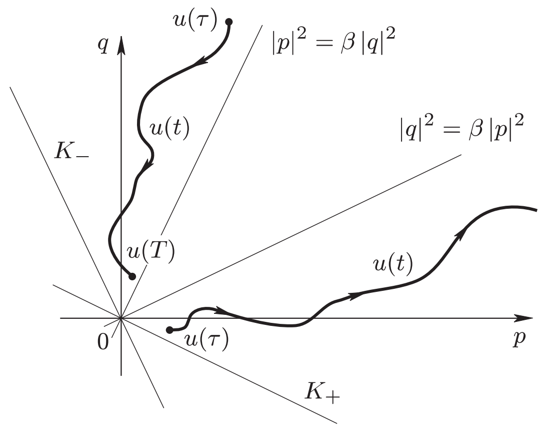

Рис. 2. Поведение траекторий в K_+ и K_-

Полагая в предложениях 2.1 и 2.2 одно из решений тождественно равным нулю (см. замечание 1.2), имеем следующие два следствия (см. рис. 2).

Следствие 2.1. *Пусть* $u(t) = U(t,\tau)u_\tau$, $t \geqslant \tau$, *– решение задачи* (11), (12) *и* $u(\tau) \in K_+$. *Тогда* $u(t) \in K_+$ *при всех* $t \geqslant \tau$ *и*

$$|u(t)| \geqslant \sqrt{1-\beta}\,|u(\tau)|e^{\mu(t-\tau)}.$$

Следствие 2.2. *Если для некоторого решения* $u(t)$, $t \geqslant \tau$, *уравнения* (11) *точка* $u(T)$ *принадлежит* K_-, *то* $u(t) \in K_-$ *при всех* $t \in [\tau, T]$ *и*

$$|u(t)| \leqslant \frac{|u(\tau)|}{\sqrt{1-\beta}}\,e^{-\mu(t-\tau)}.$$

Докажем еще два вспомогательных утверждения.

Предложение 2.3. *Пусть дана произвольная точка* $u_1 \in H$. *Тогда для любой точки* u_2 *такой, что* $u_2 \in K_+$ *и* $u_1 - u_2 \in K_-$, *выполнено*

$$|u_1 - u_2| \leqslant C_0 |u_1|, \qquad C_0 = \frac{(1+\beta)^{3/2}}{1-\beta}\,.$$

Доказательство. Обозначим $p_i = Pu_i$, $q_i = Qu_i$. Из условий имеем

$$|p_1 - p_2| \leqslant \sqrt{\beta}\,|q_1 - q_2|, \qquad |q_2| \leqslant \sqrt{\beta}\,|p_2|.$$

Тогда

$$|p_2| - |p_1| \leqslant |p_1 - p_2| \leqslant \sqrt{\beta}\,|q_1 - q_2| \leqslant \sqrt{\beta}\,|q_1| + \sqrt{\beta}\,|q_2| \leqslant \sqrt{\beta}\,|q_1| + \beta\,|p_2|.$$

Откуда

$$(1-\beta)|p_2| \leqslant |p_1| + \sqrt{\beta}\,|q_1|,$$

и с учетом $\beta < 1$ имеем

$$|p_2| \leqslant \frac{|p_1| + \sqrt{\beta}\,|q_1|}{1-\beta}\,.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |q_1 - q_2| &\leqslant |q_1| + |q_2| \leqslant |q_1| + \sqrt{\beta}\,|p_2| \leqslant |q_1| + \sqrt{\beta}\,\frac{|p_1| + \sqrt{\beta}\,|q_1|}{1-\beta} \\ &= \frac{\sqrt{\beta}\,|p_1| + |q_1|}{1-\beta} \leqslant \frac{\sqrt{1+\beta}}{1-\beta}\,\sqrt{|p_1|^2 + |q_1|^2} = \frac{\sqrt{1+\beta}}{1-\beta}\,|u_1|. \end{aligned}$$

Окончательно

$$|u_1 - u_2|^2 = |p_1 - p_2|^2 + |q_1 - q_2|^2 \leqslant (1+\beta)|q_1 - q_2|^2 \leqslant \frac{(1+\beta)^3}{(1-\beta)^2}\,|u_1|^2.$$

Заменой $P \leftrightarrow Q$ и $K_+ \leftrightarrow K_-$ получается симметричное утверждение:

Предложение 2.4. *Пусть* $u_2 \in K_-$, *а также* $u_1 - u_2 \in K_+$. *Тогда выполнено* $|u_1 - u_2| \leqslant C_0|u_1|$.

2.2. Структура интегральных многообразий. Обозначим через $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ проекторы, действующие в расширенном фазовом пространстве $H \times \mathbb{R}_t$ по правилу $\mathscr{P}(u,t) = (Pu,t)$, $\mathscr{Q}(u,t) = (Qu,t)$, $u \in H$. В этом пункте будет доказано, что проектор $\mathscr{P}$ отображает множество M_+ на все пространство $P(H) \times \mathbb{R}_t \equiv \mathscr{P}(H \times \mathbb{R}_t)$, а проектор $\mathscr{Q}$ отображает множество M_- на все $Q(H) \times \mathbb{R}_t \equiv \mathscr{Q}(H \times \mathbb{R}_t)$. При этом будет использована следующая гомотопическая лемма (см., например, [13]).

Лемма 2.2. *Пусть* $\rho\colon [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ – *непрерывное отображение, причем* $\rho(0,x) \equiv x$. *Пусть для некоторой точки* $p \in B_R$ *выполнено* $p \notin \rho(t, \partial B_R)$ *при всех* $t \in [0,T]$, *где* ∂B_R – *граница шара* $B_R \subset \mathbb{R}^N$ *радиуса* $R > 0$. *Тогда* $p \in \rho(T, B_R)$.

Предложение 2.5. *Имеет место равенство* $\mathscr{P}(M_+) = P(H) \times \mathbb{R}_t$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\tau \in \mathbb{R}$ и $p_\tau \in P(H)$. Сначала для любого $T > 0$ докажем существование такой точки $u_{\tau-T} \in P(H)$, что $P(U(\tau, \tau - T)u_{\tau-T}) = p_\tau$. Для этого рассмотрим отображение

$$\rho\colon \mathbb{R}_+ \times P(H) \to P(H), \qquad \rho(t,p) = P(U(\tau - T + t, \tau - T)(p + 0)), \quad 0 \in Q(H).$$

Так как $P(H) \subset K_+$, то в силу следствия 2.1 при всех $t \geqslant 0$ выполнено

$$U(\tau - T + t, \tau - T)(p + 0) \subset K_+, \qquad |U(\tau - T + t, \tau - T)(p + 0)| \geqslant \sqrt{1-\beta}\,|p|e^{\mu t}.$$

Так как $|Pu| \geqslant |u|/\sqrt{1+\beta}$ для любой точки $u \in K_+$, получаем

$$\begin{aligned}|\rho(t,p)| &= |P(U(\tau - T + t, \tau - T)(p + 0))|\\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}\,|U(\tau - T + t, \tau - T)(p + 0)| \geqslant \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}\,|p|e^{\mu t}.\end{aligned}$$

Выбирая $R > |p_\tau|\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$, мы будем иметь $p_\tau \notin \rho(t, \partial B_R)$ при всех $t \geqslant 0$, а следовательно, по лемме 2.2 выполнено $p_\tau \in \rho(t, B_R)$. Последнее и означает существование такой точки $u_{\tau-T} \in P(H)$, для которой $P(U(\tau, \tau - T)u_{\tau-T}) = p_\tau$.

Обозначим через $u_T(t) = U(t, \tau - T)u_{\tau-T}$, $T \geqslant 0$, решение уравнения (11), определенное при $t \geqslant \tau - T$, с начальным условием $u_T(\tau - T) = u_{\tau-T}$. Про решения $u_T(t)$, $T \geqslant 0$, известно, что $u_T(t) \in K_+$, кроме того, $Pu_T(\tau) = p_\tau$. В частности, множество точек $\{u_T(\tau) \mid T \geqslant 0\}$ ограничено. Из следствия 2.1 тогда вытекает равномерная ограниченность решений $u_T(t)$ при $t \leqslant \tau$, т.е. существует такая константа C_1, что

$$|u_T(t)| \leqslant C_1 \quad \forall\ T \geqslant 0, \quad \tau - T \leqslant t \leqslant \tau. \tag{27}$$

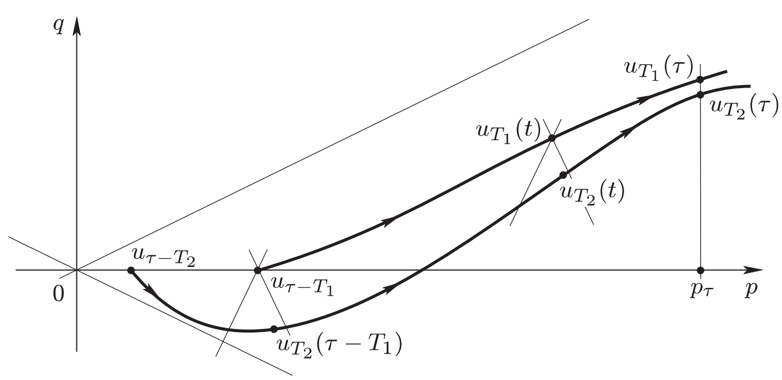

Рис. 3. Построение M_+

Рассмотрим два таких решения $u_{T_1}(t)$ и $u_{T_2}(t)$, $T_2 \geqslant T_1$. Оба эти решения определены при $t \geqslant \tau - \min\{T_1, T_2\} = \tau - T_1$ и удовлетворяют $u_{T_1}(\tau) - u_{T_2}(\tau) \in K_-$ (так как $Pu_{T_1}(\tau) = Pu_{T_2}(\tau) = p_\tau$, см. рис. 3). Значит, в силу предложения 2.2 и (27)

$$|u_{T_1}(t) - u_{T_2}(t)| \leqslant \frac{|u_{T_1}(\tau - T_1) - u_{T_2}(\tau - T_1)|}{\sqrt{1-\beta}}\, e^{-\mu T_1} \leqslant \frac{2C_1}{\sqrt{1-\beta}}\, e^{-\mu \min\{T_1, T_2\}} \tag{28}$$

при $t \in [\tau - \min\{T_1, T_2\}, \tau]$.

При фиксированном значении t, $t \leqslant \tau$, рассмотрим функцию $T \mapsto u_T(t)$ как отображение из $[\tau - t, +\infty)$ в H. В силу (28) эта функция удовлетворяет критерию Коши при $T \to +\infty$ и, следовательно, имеет предел в H. Определим

$$u(t) = \begin{cases} \lim\limits_{T\to+\infty} u_T(t), & t \leqslant \tau; \\ U(t,\tau)u(\tau), & t > \tau. \end{cases}$$

При $t \geqslant \tau$ функция $u(t)$ является, очевидно, решением уравнения (11). А в силу непрерывности оператора $U(\tau - t_1, \tau - t_2)$ в H при $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned} U(\tau - t_1, \tau - t_2)u(\tau - t_2) &= U(\tau - t_1, \tau - t_2) \lim_{T\to+\infty} U(\tau - t_2, \tau - T)u_{\tau - T} \\ &= \lim_{T\to+\infty} U(\tau - t_1, \tau - t_2) \circ U(\tau - t_2, \tau - T)u_{\tau-T} \\ &= \lim_{T\to+\infty} U(\tau - t_1, \tau - T)u_{\tau - T} = u(\tau - t_1). \end{aligned}$$

Таким образом, $u(t)$ является решением уравнения (11), определенным при всех $t \in \mathbb{R}$, оно ограничено при $t \to -\infty$ (ввиду ограниченности всех $u_T(t)$, см. (27)) и $Pu(\tau) = p_\tau$, так как $Pu_T(\tau) = p_\tau$. Тем самым показано, что $(p_\tau, \tau) \in \mathscr{P}(M_+)$.

Предложение 2.6. *Имеет место равенство* $\mathscr{Q}(M_-) = Q(H) \times \mathbb{R}_t$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\tau \in \mathbb{R}$ и $q_\tau \in Q(H)$. Рассмотрим отображение

$$\rho\colon \mathbb{R}_+ \times P(H) \to P(H), \qquad \rho(t,p) = P(U(\tau + t, \tau)(p + q_\tau)).$$

Пусть $R > \sqrt{\beta}\,|q_\tau|$, тогда $0 \notin \rho(t, \partial B_R)$ при всех $t > 0$. Действительно, в противном случае было бы $U(\tau + t, \tau)(p + q_\tau) \in K_-$ и в силу следствия 2.2 мы имели бы $p + q_\tau \in K_-$, что противоречит $|p| = R > \sqrt{\beta}\,|q_\tau|$. Таким образом, из леммы 2.2 следует, что $0 \in \rho(T, B_R)$ при каждом $T > 0$.

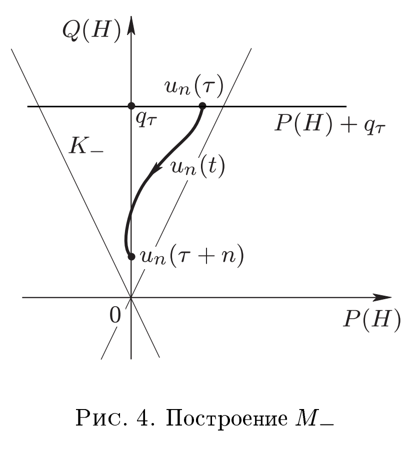

Рис. 4. Построение M_-

Итак, полагая $T = n \in \mathbb{N}$, мы можем определить (см. рис. 4) точку $u_n(\tau) \in P(H) + q_\tau$ такую, что выпущенное из нее решение $u_n(t) = U(\tau + t, \tau)u_n(\tau)$, $t \geqslant \tau$, удовлетворяет $P(u_n(\tau + n)) = 0$ и, в частности, $u_n(\tau + n) \in K_-$.

Из следствия 2.2 тогда имеем $u_n(\tau) \in K_-$, т.е. $|u_n(\tau)|^2 \leqslant (1 + \beta)|q_\tau|^2$, а также

$$|u_n(t)| \leqslant \frac{|u_n(\tau)|}{\sqrt{1-\beta}}\, e^{-\mu(t-\tau)} \leqslant \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,|q_\tau| e^{-\mu(t-\tau)}, \qquad t \in [\tau, \tau + n]. \tag{29}$$

Из ограниченной конечномерной последовательности точек $\{u_n(\tau)\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $u_{n_k}(\tau) \to u_\tau$ и обозначим $u(t) = U(t, \tau)u_\tau$, $t \geqslant \tau$. В силу непрерывности процесса $\{U(t, \tau)\}$ мы будем иметь $u_{n_k}(t) \to u(t)$ при всех $t \geqslant \tau$. Переходя в неравенстве (29) с фиксированным $t \geqslant \tau$ к пределу при $n_k \to \infty$, получаем

$$|u(t)| \leqslant \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,|q_\tau| e^{-\mu(t-\tau)} = O(1), \qquad t \to +\infty.$$

Таким образом, для любых $\tau \in \mathbb{R}$ и $q_\tau \in Q(H)$ найдена такая точка u_τ, что $Q(u_\tau) = q_\tau$ и выходящее из этой точки решение $u(t) = U(t, \tau)u_\tau$ задачи (11), (12) ограничено при $t \to +\infty$, т.е. $(u_\tau, \tau) \in M_-$ по определению M_-.

Предложение 2.7. *Пусть две точки $(u_i, \tau) = (p_i + q_i, \tau)$, $i = 1, 2$, принадлежат M_+. Тогда $u_1 - u_2 \in K_+$, т.е.*

$$|q_1 - q_2|^2 \leqslant \beta\, |p_1 - p_2|^2, \tag{30}$$

где β определено в (18).

Если же $(u_i, \tau) \in M_-$, $i = 1, 2$, то $u_1 - u_2 \in K_-$, что означает

$$|p_1 - p_2|^2 \leqslant \beta\, |q_1 - q_2|^2. \tag{31}$$

Доказательство. Через точки $(p_i + q_i, \tau) \in M_+$ проходят интегральные кривые $(u_i(t), t) \in M_+$, $i = 1, 2$, соответствующие решениям $u_i(t)$ уравнения (11). По определению M_+ решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ определены при $t \in \mathbb{R}$ и ограничены при $t \to -\infty$. Тогда

$$w(t) = |Q(u_1(t) - u_2(t))|^2 - \beta\, |P(u_1(t) - u_2(t))|^2 = O(1), \qquad t \to -\infty,$$

и из (26) следует

$$w(\tau) \leqslant w(t) e^{-2\mu(\tau - t)} = o(1), \qquad t \to -\infty.$$

Таким образом, $w(\tau) \leqslant 0$, что и означает (30), так как $w(\tau) = |q_1 - q_2|^2 - \beta\, |p_1 - p_2|^2$.

Аналогично докажем неравенство (31). Из точек $(p_i + q_i, \tau) \in M_-$ выпустим интегральные кривые $(u_i(t), t) \in M_-$, $i = 1, 2$. По определению M_- решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ ограничены при $t \to +\infty$. Тогда

$$z(t) = |P(u_1(t) - u_2(t))|^2 - \beta\, |Q(u_1(t) - u_2(t))|^2 = O(1), \qquad t \to +\infty,$$

и из (25) получаем

$$z(\tau) \leqslant z(t) e^{2\mu(\tau - t)} = o(1), \qquad t \to +\infty,$$

т.е. $z(\tau) \leqslant 0$. Следовательно, $|p_1 - p_2|^2 - \beta\, |q_1 - q_2|^2 = z(\tau) \leqslant 0$ и (31) доказано.

Следствие 2.3. *Выбирая* $u_2 = 0$ (*ввиду* $(0,t) \in M_+ \cap M_-$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_t$), *в частности, имеем*

$$M_+ \subset K_+ \times \mathbb{R}_t, \qquad M_- \subset K_- \times \mathbb{R}_t.$$

Приступим к доказательству теоремы 1.1: п. 1) (+) следует из предложения 2.5 и неравенства (30), а п. 1) (−) вытекает из предложения 2.6 и неравенства (31).

Докажем п. 2) теоремы 1.1. Рассмотрим любые две интегральные кривые $(u_1(t),t)$ и $(u_2(t),t)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (11), лежащие на M_+ (или $(u_i(t),t) \in M_-$, $t \geqslant \tau$, $i = 1,2$). Как следует из предложения 2.7, $u_1(t) - u_2(t) \in K_+$ при всех $t \in \mathbb{R}$ (соответственно $u_1(t) - u_2(t) \in K_-$ при всех $t \geqslant \tau$) и п. 2) теоремы 1.1 есть прямое следствие предложений 2.1 и 2.4.

2.3. Притяжение к интегральным многообразиям. В этом пункте будет завершено доказательство теоремы 1.1. Для произвольного решения $u(t)$, $t \geqslant \tau$, уравнения (11) на многообразиях M_+ и M_- будут построены его “следы”, притягивающие это решение с экспоненциальной скоростью при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

Предложение 2.8 (притяжение к M_+). *Для произвольного решения* $u(t) = U(t,\tau)u_\tau = p(t)+q(t)$, $t \geqslant \tau$, *уравнения* (11) *существует интегральная кривая* $(\widetilde{u}(t),t)$, $t \in \mathbb{R}$, *лежащая на* M_+, *такая, что разность решений* $u(t)$ *и* $\widetilde{u}(t)$ *удовлетворяет оценке*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant C|u_\tau|e^{-\mu(t-\tau)}, \qquad t \geqslant \tau, \quad C = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{3/2}.$$

Замечание. Данное предложение имеет место с немного улучшенной константой, а именно $C = \sqrt{1+\beta}/(1-\beta)^{3/2}$ (см. [10]).

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим решение $u_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (11) такое, что $(u_n(t),t) \in M_+$ и $u_n(\tau+n) - u(\tau+n) \in K_-$ (см. рис. 5). Существование этого решения следует из инвариантности множества M_+ и того факта, что $\mathscr{P}(M_+) = P(H) \times \mathbb{R}_t$.

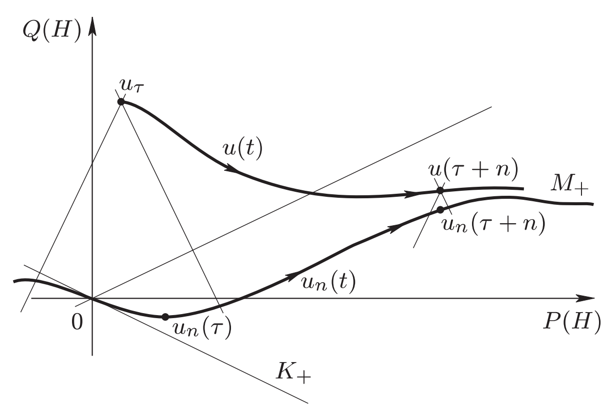

Рис. 5. Притяжение к M_+

Из предложения 2.2 тогда имеем $u_n(\tau) - u(\tau) \in K_-$, а также

$$|u(t) - u_n(t)| \leqslant \frac{|u(\tau) - u_n(\tau)|}{\sqrt{1-\beta}}\, e^{-\mu(t-\tau)} \leqslant C|u_\tau|e^{-\mu(t-\tau)}, \qquad \tau \leqslant t \leqslant \tau + n,$$

где $C = C_0/\sqrt{1-\beta} = (1+\beta)^{3/2}(1-\beta)^{-3/2}$. (Последнее неравенство – следствие предложения 2.3, примененного к точкам $u(\tau) = u_\tau$ и $u_n(\tau) \in M_+(\tau) \subset K_+$.)

В частности, при $t = \tau$ имеем $|u_n(\tau)| \leqslant (C+1)|u_\tau|$. Из ограниченной последовательности точек $\{u_n(\tau)\}$ на конечномерном липшицевом многообразии $M_+(\tau)$ выберем сходящуюся подпоследовательность[1] $u_{n_k}(\tau) \to \widetilde{u}_\tau, n_k \to +\infty, (\widetilde{u}_\tau, \tau) \in M_+$, и определим решение $\widetilde{u}(t) = U(t,\tau)\widetilde{u}_\tau$. Соответствующая этому решению интегральная кривая $(\widetilde{u}(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, лежит на M_+. В силу непрерывности операторов $U(t,\tau)$

$$u_{n_k}(t) = U(t,\tau)u_{n_k}(\tau) \to \widetilde{u}(t) = U(t,\tau)\widetilde{u}_\tau \qquad \forall\, t \geqslant \tau.$$

Как мы установили, для каждого фиксированного значения $t \geqslant \tau$ выполнено

$$|u(t) - u_{n_k}(t)| \leqslant C|u_\tau|e^{-\mu(t-\tau)},$$

если только $n_k \geqslant t - \tau$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n_k \to +\infty$, получаем

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant C|u_\tau|e^{-\mu(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau.$$

Таким образом, в предложении 2.8 построен след $\widetilde{u}(t) = u_+(t)$ (при $t \to +\infty$) на интегральном многообразии M_+ любого решения $u(t) = U(t,\tau)u_\tau$ задачи (11), (12). В замечании 1.4 было указано, что такой след всегда единствен. Тем самым доказан п. 3) $(+)$ теоремы 1.1.

Докажем п. 3) $(-)$ теоремы 1.1, полностью завершив ее доказательство.

Предложение 2.9 (притяжение к M_-). *Пусть решение $u(t) = U(t,\tau)u_\tau$ задачи (11), (12) продолжается назад по времени на конечный отрезок $[T,\tau]$, $-\infty < T < \tau$ (или на всю полуось $(-\infty,\tau]$). Тогда существует интегральная кривая $(\widetilde{u}(t), t) \in M_-$, $t \geqslant T$ (или $t \in \mathbb{R}$), такая, что разность решений $u(t)$ и $\widetilde{u}(t)$ удовлетворяет оценке*

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant C|u_\tau|e^{\mu(t-\tau)} \tag{32}$$

при $t \in [T,\tau]$ (или $t \leqslant \tau$); константа C та же, что и в предложении 2.8. Если решение $u(t)$ продолжаемо по времени до $-\infty$, то такой след $\widetilde{u}(t)$ единственный.

---

[1] Используя те же соображения, что и при доказательстве предложения 2.9, можно показать, что сходится и сама последовательность $\{u_n(\tau)\}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда решение $u(t)$ продолжается назад по времени на конечный отрезок $[T,\tau]$. Тогда для построения его "следа" на интегральном многообразии M_- достаточно зафиксировать точку $(\widetilde{u}(T),T)\in M_-$ такую, что $u(T)-\widetilde{u}(T)\in K_+$. Такая точка, очевидно, всегда найдется. Далее положим $\widetilde{u}(t)=U(t,T)\widetilde{u}(T)$, $(\widetilde{u}(t),t)\in M_-$ при $t\geqslant T$. Из предложения 2.1 следует, что $u(t)-\widetilde{u}(t)\in K_+$ при всех $t\geqslant T$, и в силу того же предложения имеем

$$|u(\tau)-\widetilde{u}(\tau)|\geqslant\sqrt{1-\beta}\,|u(t)-\widetilde{u}(t)|e^{\mu(\tau-t)},\qquad t\in[T,\tau].$$

Последнее неравенство с учетом предложения 2.4 (так как $\widetilde{u}(\tau)\in M_-(\tau)\subset K_-$) переписывается в виде

$$|u(t)-\widetilde{u}(t)|\leqslant\frac{|u(\tau)-\widetilde{u}(\tau)|}{\sqrt{1-\beta}}\,e^{-\mu(\tau-t)}\leqslant C|u(\tau)|e^{-\mu(\tau-t)},\qquad t\in[T,\tau],$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь решение $u(t)$ продолжается на всю полуось $t\in(-\infty,\tau)$. Как только что было доказано, для каждого фиксированного $n\in\mathbb{N}$ найдется такое решение $u_n(t)$, определенное при $t\geqslant\tau-n$ и лежащее на M_- (точнее, $(u_n(t),t)\in M_-$), для которого выполнено

$$|u(t)-u_n(t)|\leqslant C|u_\tau|e^{\mu(t-\tau)},\qquad \tau-n\leqslant t\leqslant\tau. \tag{33}$$

Зафиксируем произвольный момент времени $t_0\leqslant\tau$ и покажем, что последовательность точек $\{u_n(t_0)\}$, определенная при $n\geqslant\tau-t_0$, является фундаментальной в H. Пусть, для определенности, $n_2\geqslant n_1$. Тогда оба решения, $u_{n_1}(t)$ и $u_{n_1}(t)$, определены при $t\geqslant\tau-\min\{n_1,n_2\}=\tau-n_1$, и соответствующие им интегральные кривые $(u_{n_i}(t),t)$, $i=1,2$, лежат на M_-. Воспользовавшись уже доказанным результатом п. 2) $(-)$ теоремы 1.1, получаем неравенство

$$|u_{n_1}(t_0)-u_{n_2}(t_0)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\beta}}\,|u_{n_1}(\tau-n_1)-u_{n_2}(\tau-n_1)|e^{-\mu(t_0-(\tau-n_1))}. \tag{34}$$

С другой стороны, переписывая оценку (33) для каждого из решений $u_{n_i}(t)$, имеем в момент времени $t=\tau-n_1$

$$|u_{n_1}(\tau-n_1)-u_{n_2}(\tau-n_1)|\leqslant 2C|u_\tau|e^{-\mu n_1}. \tag{35}$$

Из неравенств (34) и (35) следует

$$\begin{aligned}|u_{n_1}(t_0)-u_{n_2}(t_0)|&\leqslant\frac{2C}{\sqrt{1-\beta}}\,|u_\tau|e^{-\mu(t_0-(\tau-n_1))}e^{-\mu n_1}\\&=\frac{2C}{\sqrt{1-\beta}}\,|u_\tau|e^{\mu(\tau-t_0)}e^{-2\mu\min\{n_1,n_2\}},\end{aligned}$$

т.е. последовательность $\{u_n(t_0)\}$ является фундаментальной.

Определим

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} u_n(t), & t \leqslant \tau; \\ U(t,\tau)\widetilde{u}(\tau), & t > \tau. \end{cases}$$

Как и при доказательстве предложения 2.5, из непрерывности процесса $\{U(t,\tau)\}$ следует, что так определенная функция $\widetilde{u}(t)$ является решением уравнения (11), причем соответствующая интегральная кривая $(\widetilde{u}(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, лежит на M_- в силу замкнутости этого множества. Переходя в неравенстве (33) к пределу при $n \to \infty$ (при фиксированном $t \leqslant \tau$), получаем (32). Единственность следа $\widetilde{u}(t)$ была установлена в замечании 1.4.

Теорема 1.1 полностью доказана.

§ 3. Поведение решений одномерной системы реакции-диффузии на поглощающем множестве

Рассматривается квазилинейная параболическая система

$$u_t = au_{xx} - f(u,t) + g(x,t), \qquad x \in (0,\pi) \equiv \Omega, \tag{36}$$

с условиями Неймана на границе

$$u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = 0 \tag{37}$$

и начальными данными

$$u\big|_{t=\tau} = u_\tau(x) \in (L_2(0,\pi))^M = H. \tag{38}$$

(Вместо (37) также можно рассматривать условия Дирихле или периодические граничные условия.) Здесь вектор-функция $u(t,x) = \vec{u}(t,x) = (u_1, u_2, \ldots, u_M) \in \mathbb{R}^M$ зависит от t и $x \in (0,\pi)$; $f = \vec{f}(u,t)$ и $g = \vec{g}(x,t)$ – заданные вектор-функции; a – симметрическая положительно определенная матрица $M \times M$. Предполагается, что функция $f(v,t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} f(v,t)\cdot v > \gamma|v|^2 - C_1, \qquad \gamma > 0, \\ f'_v(v,t)\xi\cdot\xi \geqslant -C_2|\xi|^2 \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^M, \\ \|f'_v(v,t)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^M,\mathbb{R}^M)} \leqslant \varphi(|v|), \end{gathered}$$

где $\varphi(s)$ – некоторая монотонно возрастающая непрерывная функция. Здесь через $f'_v(v,t)$ обозначена матрица Якоби $\partial f(v,t)/\partial v = (\nabla_v f_1(v,t), \ldots, \nabla_v f_M(v,t))$. Про функцию $g(x,t)$ предполагается, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|g(\,\cdot\,,s)\|^2_{(L_2(\Omega))^M}\,ds = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1}\!\!\int_\Omega g^2(x,s)\,dx\,ds < +\infty.$$

Задача (36)–(38) переписывается в виде (11), (12), где фазовым пространством H является $(L_2(0,\pi))^M$, линейный оператор A есть оператор $-ad^2/dx^2$ с условиями (37) на границе, а $F(u,t)$ – нелинейный оператор, отображающий функцию $u(x)$ в $-f(u(x),t) + g(x,t)$. Хорошо известно (см. [14]–[17]), что при наложенных условиях задача (36)–(38) имеет единственное решение $u(t,x) = U(t,\tau)u_\tau$ в пространстве $u \in L_\infty([\tau,T];H) \cap L_2\big((\tau,T);(H^1(0,\pi))^M\big)$ для любого $T > \tau$. Кроме того, соответствующий процесс $\{U(t,\tau)\}$ непрерывен по совокупности переменных (u_τ,t) (т.е. отображение $(u_\tau,t) \mapsto U(t,\tau)u_\tau$ является непрерывным как отображение из $H \times [\tau,+\infty)$ в H).

В работе [18] показано, что уравнение (36) имеет решение $\overline{u}(t)$, заданное при всех $t \in \mathbb{R}$, которое ограничено в пространстве $(H^1(0,\pi))^M$. Используя это ограниченное решение (см. замечание 1.5), приведем уравнение (36) к виду, в котором нелинейная функция $F(u,t)$ удовлетворяет условию (16).

Также известно (см., например, [15], [17]), что процесс $\{U(t,\tau)\}$, соответствующий задаче (36)–(38), обладает поглощающим множеством в пространстве $(H^1(0,\pi))^M \subset (C[0,\pi])^M$. Точнее, существует шар $B_R = \{\|u\|_{(H^1(0,\pi))^M} < R\}$ такой, что для любого решения $u(t)$ задачи (36)–(38) выполнено $u(t) \in B_R$ при всех $t \geqslant \tau + T(|u_\tau|)$. Кроме того, если $u_\tau \in B_R$, то $u(t) \in B_R$ при всех $t \geqslant \tau$. Нас будет интересовать поведение решений $u(t)$ рассматриваемой задачи в поглощающем множестве B_R.

Множество B_R ограничено в пространстве $(C[0,\pi])^M$, поэтому нелинейный оператор $F(u,t)$ внутри шара B_R удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \varphi(R)$, а вне этого шара мы его изменим так, чтобы измененный оператор удовлетворял условию (15) уже при всех $u \in H$. Для этого достаточно в уравнение (36) вместо функции $f(u,t)$ подставить функцию $f(u\psi(u),t)$, где $\psi(u)$ – непрерывная скалярная функция, которая равна 1 при $|u| \leqslant R$ и равна $R/|u|$ при $|u| > R$.

Собственные значения λ_N $(0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots)$ оператора A растут как N^2. Поэтому найдется число N, для которого выполнено неравенство

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > 2L. \tag{39}$$

Пусть P – ортопроектор на инвариантное пространство оператора A, соответствующее первым N собственным значениям. Обозначим $Q = P^\perp$. Тогда выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &(Ap,p) \leqslant \lambda_N|p|^2 \qquad \forall\, p \in P(H),\\ &(Aq,q) \geqslant \lambda_{N+1}|q|^2 \quad\ \ \forall\, q \in Q(H) \cap \mathscr{D}(A). \end{aligned}$$

Обозначая $\theta = (\lambda_{N+1} + \lambda_N)/2$, $\delta = (\lambda_{N+1} - \lambda_N)/2$, мы получаем неравенства (22), (23), при этом условие (39) в точности совпадает с (17). Тем самым, поведение решений задачи (36)–(38) внутри поглощающего множества B_R описывается теоремой 1.2. В частности, при $t \to +\infty$ любое решение $u(t)$ задачи (36)–(38) экспоненциально приближается к некоторому другому решению $u_+(t)$, лежащему на конечномерном инвариантном многообразии M_+, причем показатель экспоненты равен $-(\theta+\mu) = -(\lambda_{N+1} - L)$, т.е.

$$\|u(t) - u_+(t)\|_H \leqslant Ce^{-(\lambda_{N+1}-L)(t-\tau)} \qquad \forall\, t \geqslant \tau.$$

Замечание 3.1. В силу того что для рассматриваемой параболической системы операторы процесса $\{U(t,\tau)\}$ удовлетворяют при $t > \tau$ на поглощающем множестве B_R условию Липшица как операторы из $(L_2(\Omega))^M$ в $(H^1(\Omega))^M$ (см. [17]), притяжение к интегральному многообразию M_+ при $t \to +\infty$ будет иметь место и в норме пространства $(H^1(\Omega))^M$, а также в случае одной пространственной переменой и в $(C[0,\pi])^M$.

§ 4. Гиперболическое уравнение с диссипацией

В ограниченной области Ω рассматривается смешанная краевая задача для квазилинейного гиперболического уравнения с диссипацией:

$$\partial_t^2 u + 2\gamma\partial_t u = \Delta u + f(u,t) + g(x,t), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{40}$$

$$u\big|_{t=\tau} = u_\tau(x) \in H_0^1(\Omega), \tag{41}$$

$$\partial_t u\big|_{t=\tau} = p_\tau(x) \in L_2(\Omega). \tag{42}$$

Здесь γ – положительный коэффициент диссипации, нелинейная функция $f(u,t)$ является непрерывно дифференцируемой и

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\right| \leqslant l \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{43}$$

Внешняя сила $g(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1}\!\!\int_\Omega g^2(x,s)\,dx\,ds < +\infty.$$

В частном случае $f(u,t) \equiv l\sin u$ уравнение (40) становится так называемым уравнением *sin-Гордона* с диссипацией.

Поставленная задача (40)–(42) имеет единственное решение $u \in C([\tau,T];H_0^1(\Omega))$, $\partial_t u \in C([\tau,T];L_2(\Omega))$ для любого $T \geqslant \tau$ (см. [14]–[17]). Этой задаче соответствует процесс $\{Y(t,\tau)\}$, $t \geqslant \tau$, действующий в пространстве $H = H_0^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$ по формуле

$$Y(t,\tau)(u_\tau(x),p_\tau(x)) = y(t) \equiv (u(t,x),p(t,x)) \in H_0^1(\Omega)\times L_2(\Omega) = H,$$

где $u(t,x)$ – решение задачи (40)–(42), $p(t,x) = \partial_t u(t,x)$ – его производная по t, $y = (u,p) \in H$. Процесс $\{Y(t,\tau)\}$ является непрерывным по совокупности переменных (y_τ,t) (см. [14], [15], [17]).

Рассматриваемая задача записывается в виде дифференциального уравнения первого порядка для нахождения неизвестной вектор-функции $y = (u,p)$

$$\frac{d}{dt}y(t) + Ay = F(y,t), \qquad Ay = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & -2\gamma \end{pmatrix} y, \qquad F(y,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u,t)+g \end{pmatrix}.$$

Выясним, при каких ограничениях линейный оператор A и нелинейный функционал F удовлетворяют условиям, наложенным в § 1.

4.1. Формулировка теоремы. Пусть $e_k(x)$ и λ_k – собственные функции и собственные значения оператора $-\Delta$ в области Ω с условиями Дирихле на границе:

$$\Delta e_k(x) = -\lambda_k e_k, \qquad e_k(x) \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega), \qquad \|e_k\|^2 = (e_k,e_k) = 1,$$
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots, \qquad \lim_{k\to+\infty}\lambda_k = +\infty.$$

Здесь через $\|\cdot\|$ и $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначены соответственно норма и скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Стандартная норма в гильбертовом пространстве $H = H_0^1(\Omega)\times L_2(\Omega)$ имеет вид

$$\|y\|_H^2 = \|(u,p)\|_H^2 = \|\nabla u\|^2 + \|p\|^2 = \sum_{k=1}^\infty (\lambda_k u_k^2 + p_k^2),$$

где $u_k = (u,e_k)$, $p_k = (p,e_k)$.

Теорема 4.1. *Пусть для некоторого числа N выполнены неравенства*

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N > 4l \tag{44}$$

и

$$\gamma^2 > \lambda_{N+1}.$$

Тогда в пространстве H можно выбрать такое скалярное произведение $[\,\cdot\,,\cdot\,]$, эквивалентное исходному, и такие ортопроекторы (в новом скалярном произведении) P и Q, для которых выполнено

1) $\dim P(H) = N,\ \ Q = \mathrm{Id} - P,\ \ Q(H) \perp P(H)$;
2) *линейный оператор A удовлетворяет неравенствам*

$$[Ay, y] \leqslant \mu_N [y, y] \qquad \forall\, y \in P(H), \tag{45}$$

$$[Ay, y] \geqslant \mu_{N+1} [y, y] \qquad \forall\, y \in Q(H) \cap \mathscr{D}(A), \tag{46}$$

где $\mu_N = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \lambda_N}$ и $\mu_{N+1} = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}$ (заметим, что $\mu_N < \mu_{N+1}$);

3) *нелинейный оператор $F(y,t)$ удовлетворяет в новой норме*

$$|||y||| = \sqrt{[y, y]}$$

условию Липшица по переменной y

$$|||F(y_1, t) - F(y_2, t)||| \leqslant L |||y_1 - y_2|||, \qquad L = \frac{l}{\sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}}; \tag{47}$$

4) *если число γ удовлетворяет неравенству*

$$\gamma^2 > \lambda_{N+1} + \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{4R(R-1)} = \lambda_{N+1} + \frac{l}{R-1}, \qquad R = \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{4l} > 1 \tag{48}$$

(см. (44)), *то имеет место оценка*

$$\mu_{N+1} - \mu_N > 2L. \tag{49}$$

Обозначим

$$\theta = \frac{\mu_{N+1} + \mu_N}{2}, \quad \delta = \frac{\mu_{N+1} - \mu_N}{2}, \qquad \text{т.е.}\ \ \mu_{N+1} = \theta + \delta, \quad \mu_N = \theta - \delta.$$

Неравенства (45), (46) принимают вид (22), (23), а условие (49) переписывается в виде $L < \delta$, совпадающем с условием (17).

Таким образом, теорема 4.1 утверждает, что если выполнено условие (44) и γ достаточно велико, то поведение решений задачи (40)–(42) описывается теоремой 1.2.

4.2. Новая норма. Разложим все фазовое пространство H в прямую сумму попарно ортогональных (в исходном скалярном произведении) пространств: $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_N \oplus H_\infty$, где каждое H_k, $k = 1,\dots,N$, – двумерное подпространство, соответствующее собственному вектору e_k по u и по p, т.е. $H_k = \{y = (u,p) = (u_k e_k, p_k e_k) \mid (u_k,p_k) \in \mathbb{R}^2\}$, $H_\infty = (H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_N)^\perp$ – подпространство коразмерности $2N$, соответствующее собственным векторам $e_{N+1}, e_{N+2}, \dots$ оператора Лапласа. Заметим, что пространства H_k являются инвариантными относительно действия линейного оператора A.

В новом скалярном произведении $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ мы сохраним попарную ортогональность пространств H_k, $k = 1,\dots,N,\infty$, но изменим скалярное произведение в каждом из них. Таким образом, если для каждого вектора $y = (u,p) \in H$ мы введем обозначения $y_k = (u_k e_k, p_k e_k) \in H_k$, $k = 1,\dots,N$, и $y_\infty = y - \sum_{k=1}^N y_k \in H_\infty$ – ортогональные проекции этого вектора, то новая норма и новое скалярное произведение в H будут определяться следующими формулами:

$$|||y|||^2 = \sum_{k=1}^N |||y_k|||_k^2 + |||y_\infty|||_\infty^2, \qquad [y,\widetilde{y}\,] = \sum_{k=1}^N [y_k,\widetilde{y}_k]_k + [y_\infty,\widetilde{y}_\infty]_\infty,$$

где через $|||\cdot|||_k^2$ и $[\,\cdot\,,\cdot\,]_k$ обозначены соответственно новая норма и новое скалярное произведение в H_k, $k = 1,\dots,N,\infty$, которые вводятся ниже.

4.3. Норма в H_∞. Определим в H_∞ новое скалярное произведение векторов $y = (u,p)$ и $\widetilde{y} = (\widetilde{u},\widetilde{p})$, $y,\widetilde{y} \in H_\infty$,

$$[y,\widetilde{y}\,]_\infty = (\nabla u, \nabla\widetilde{u}\,) + (\gamma^2 - 2\lambda_{N+1})(u,\widetilde{u}\,) + (\gamma u + p, \gamma\widetilde{u} + \widetilde{p}\,)$$

и соответственно новую норму

$$|||y|||_\infty^2 = \|\nabla u\|^2 + (\gamma^2 - 2\lambda_{N+1})\|u\|^2 + \|\gamma u + p\|^2 \qquad \forall\, y = (u,p) \in H_\infty.$$

Предложение 4.1. *В пространстве H_∞ нормы $|||y|||_\infty$ и $\|y\|_H$ эквивалентны.*

Доказательство. Для любого вектора $y = (u,p) \in H_\infty$ имеем

$$\|\nabla u\|^2 \geqslant \lambda_{N+1}\|u\|^2, \tag{50}$$

и $|||y|||_\infty^2$ оценивается сверху через $\|\nabla u\|^2$ и $\|p\|^2$ очевидным образом.

Оценим $|||y|||_\infty^2$ снизу. Так как $\gamma^2 > \lambda_{N+1}$, то $\gamma^2 \geqslant \lambda_{N+1}(1+\varepsilon)$ для некоторого ε, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда с учетом (50) имеем

$$\begin{aligned} |||y|||_\infty^2 &= \|\nabla u\|^2 + (\gamma^2 - 2\lambda_{N+1})\|u\|^2 + \|\gamma u + p\|^2 \\ &= \varepsilon\|\nabla u\|^2 + (1-\varepsilon)(\|\nabla u\|^2 - \lambda_{N+1}\|u\|^2) \\ &\quad + (\gamma^2 - \lambda_{N+1}(1+\varepsilon))\|u\|^2 + \|\gamma u + p\|^2 \\ &\geqslant \varepsilon\|\nabla u\|^2 + \|\gamma u + p\|^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{\varepsilon}{2\lambda_{N+1}}\|u\|^2 + (\gamma\|u\| - \|p\|)^2. \end{aligned}$$

В выражении справа стоит положительно определенная квадратичная форма от $\|\nabla u\|$, $\|u\|$ и $\|p\|$, и она оценивается снизу через $\|\nabla u\|^2 + \|p\|^2$.

Предложение 4.2. *Если* $y = (0, p) \in H_\infty$, *то* $|||y|||_\infty = \|y\|_H$.

Доказательство. Если $u = 0$, то $|||y|||_\infty^2 = \|p\|^2 = \|y\|_H^2$.

Предложение 4.3. *Для любого вектора* $y = (u, p) \in H_\infty$ *выполнено*

$$|||y|||_\infty \geqslant \sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}\,\|u\|.$$

Доказательство. Ввиду (50) справедливо

$$|||y|||_\infty^2 \geqslant \|\nabla u\|^2 + (\gamma^2 - 2\lambda_{N+1})\|u\|^2 \geqslant (\gamma^2 - \lambda_{N+1})\|u\|^2.$$

Предложение 4.4. *Для любого вектора* $y = (u, p) \in H_\infty \cap \mathscr{D}(A)$ *выполнено*

$$[Ay, y]_\infty \geqslant \mu_{N+1}[y, y]_\infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
Ay &= (-p, -\Delta u + 2\gamma p),\\
[Ay, y]_\infty &= -(\nabla p, \nabla u) - (\gamma^2 - 2\lambda_{N+1})(p, u)\\
&\quad + (-\gamma p - \Delta u + 2\gamma p, \gamma u + p)\\
&= (\Delta u, p) - (\gamma^2 - 2\lambda_{N+1})(u, p) + (-\Delta u + \gamma p, \gamma u + p)\\
&= \gamma\|\nabla u\|^2 + \gamma\|p\|^2 + 2\lambda_{N+1}(u, p),\\
[y, y]_\infty &= \|\nabla u\|^2 + \|p\|^2 + 2\gamma(u, p) + 2(\gamma^2 - \lambda_{N+1})\|u\|^2,\\
[Ay, y]_\infty - \gamma[y, y]_\infty &= -2\gamma(\gamma^2 - \lambda_{N+1})\|u\|^2 - 2(\gamma^2 - \lambda_{N+1})(u, p)\\
&= -2\sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}\,\big(\sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}\,u, \gamma u + p\big)\\
&\geqslant -\sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}\,\big((\gamma^2 - \lambda_{N+1})\|u\|^2 + \|\gamma u + p\|^2\big)\\
&\geqslant -\sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}\,\big(\|\nabla u\|^2 + (\gamma^2 - 2\lambda_{N+1})\|u\|^2 + \|\gamma u + p\|^2\big)\\
&= -\sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}\,[y, y]_\infty,
\end{aligned}$$

что доказывает утверждение, так как $\mu_{N+1} = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}$.

4.4. Норма в H_k, $k = 1, 2, \dots, N$. Для любого вектора $y = (u_k e_k, p_k e_k) \in H_k$ исходная норма в H_k равна

$$\|y\|_H^2 = \lambda_k u_k^2 + p_k^2.$$

Принимая во внимание, что $\|\nabla u\|^2 = \lambda_k\|u\|^2$, и действуя так же, как и в пространстве H_∞, для любого вектора $y = (u, p) = (u_k e_k, p_k e_k) \in H_k$ определим новую норму

$$\begin{aligned}
|||y|||_k^2 &= \|\nabla u\|^2 + (\gamma^2 - 2\lambda_k)\|u\|^2 + \|\gamma u + p\|^2\\
&= (\gamma^2 - \lambda_k)u_k^2 + (\gamma u_k + p_k)^2 = (My, y), \qquad M = \begin{pmatrix} 2\gamma^2 - \lambda_k & \gamma\\ \gamma & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Соответствующее этой норме скалярное произведение векторов $y = (u, p)$ и $\widetilde{y} = (\widetilde{u}, \widetilde{p})$ определяется равенством

$$[y, \widetilde{y}]_k = (My, \widetilde{y}).$$

Имеют место следующие очевидные утверждения, аналогичные предложениям 4.1–4.3.

Предложение 4.5. *В пространстве H_k нормы $|||y|||_k$ и $\|y\|_H$ эквивалентны (как и любые две нормы в конечномерном пространстве).*

Предложение 4.6. *Если $y = (0,p) \in H_k$, то $|||y|||_k = \|y\|_H$.*

Предложение 4.7. *Для любого вектора $y = (u,p) \in H_k$ выполнено*

$$|||y|||_k \geqslant \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k}\,|u_k|.$$

Матрица ограничения линейного оператора A на пространство H_k имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_k & 2\gamma \end{pmatrix}$. Собственными значениями этого оператора являются числа

$$\mu_k = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k}\,, \qquad \nu_k = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k}\,,$$

а собственными векторами соответственно векторы

$$\xi_k = \big(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k}\,, -\lambda_k\big), \qquad \eta_k = \big(-1, \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k}\,\big).$$

Предложение 4.8. *Векторы ξ_k и η_k ортогональны в новом скалярном произведении.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}(M\xi_k, \eta_k) &= \left(\begin{pmatrix} 2\gamma^2 - \lambda_k & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k} \\ -\lambda_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k} \end{pmatrix} \right) \\ &= -(2\gamma^2 - \lambda_k)\big(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k}\,\big) + \gamma\lambda_k + \gamma\big(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k}\,\big)^2 \\ &\quad - \lambda_k\big(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \lambda_k}\,\big) = 0.\end{aligned}$$

4.5. Доказательство теоремы 4.1. 1) Обозначим через H^I линейную комбинацию попарно ортогональных (как в старом, так и новом произведении) векторов $\xi_k e_k$, $k = 1, \ldots, N$, а H^{II} – линейную комбинацию векторов $\eta_k e_k$. В силу предложения 4.8 пространства H^I и H^{II} ортогональны друг другу в построенном скалярном произведении, и оба они ортогональны H^∞.

Определим P – ортопроектор на N-мерное пространство $H^I = P(H)$, тогда $Q = \mathrm{Id} - P$ – ортопроектор на $H^{II} \oplus H^\infty = Q(H)$. Пункт 1) теоремы 4.1 доказан.

2) Так как $A(\xi_k e_k) = \mu_k(\xi_k e_k)$, $A(\eta_k e_k) = \nu_k(\eta_k e_k)$, $k = 1, \ldots, N$, то

$$[Ay, y] \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \mu_k \cdot [y,y] = \mu_N [y,y] \qquad \forall\, y \in H^I, \tag{51}$$

$$[Ay, y] \geqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant N} \nu_k \cdot [y,y] = \nu_N [y,y] \qquad \forall\, y \in H^{II}. \tag{52}$$

Таким образом, неравенство (45) получено в (51), а неравенство (46) – следствие (52) и предложения 4.4, так как $\nu_N > \gamma > \mu_{N+1}$.

3) Так как вектор $F(y,t)$ имеет нулевую u-компоненту, то в силу предложений 4.2 и 4.6

$$|||F(y_1,t) - F(y_2,t)||| = \|F(y_1,t) - F(y_2,t)\|_H = \|f(u_1,t) - f(u_2,t)\|.$$

Ввиду (43) имеем $|f(u_1,t)-f(u_2,t)| \leqslant l|u_1-u_2|$, а значит,

$$|||F(y_1,t)-F(y_2,t)||| \leqslant l\|u_1-u_2\|.$$

С другой стороны, из предложений 4.3 и 4.7 следует

$$\begin{gathered}|||y|||^2 = \sum_{k=1}^{N} |||y_k|||_k^2 + |||y_\infty|||_\infty^2 \geqslant \sum_{k=1}^{N}(\gamma^2-\lambda_k)|u_k|^2 + (\gamma^2-\lambda_{N+1})|u_\infty|^2 \\ \geqslant (\gamma^2-\lambda_{N+1})\left(\sum_{k=1}^{N}|u_k|^2+|u_\infty|^2\right) = (\gamma^2-\lambda_{N+1})\|u\|^2.\end{gathered}$$

Таким образом,

$$|||F(y_1,t)-F(y_2,t)||| \leqslant \frac{l}{\sqrt{\gamma^2-\lambda_{N+1}}}|||y_1-y_2|||,$$

и неравенство (47) доказано.

4) Покажем, что неравенство (49) эквивалентно оценке (48). Воспользовавшись выражениями для чисел μ_{N+1}, μ_N и L, перепишем неравенство (49) в следующем виде:

$$\mu_{N+1}-\mu_N = \frac{\lambda_{N+1}-\lambda_N}{\sqrt{\gamma^2-\lambda_N}+\sqrt{\gamma^2-\lambda_{N+1}}} > \frac{2l}{\sqrt{\gamma^2-\lambda_{N+1}}} = 2L.$$

Разрешим это неравенство относительно γ. Совершая равносильные преобразования, имеем

$$\sqrt{\gamma^2-\lambda_N}+\sqrt{\gamma^2-\lambda_{N+1}} < 2R\sqrt{\gamma^2-\lambda_{N+1}}\,,$$

где обозначено

$$R = \frac{\lambda_{N+1}-\lambda_N}{4l} > 1,$$

или

$$\sqrt{\gamma^2-\lambda_N} < (2R-1)\sqrt{\gamma^2-\lambda_{N+1}}\,.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и приводя подобные члены, получаем

$$\begin{gathered}(\gamma^2-\lambda_N)-(\gamma^2-\lambda_{N+1}) < (4R^2-4R)(\gamma^2-\lambda_{N+1}), \\ \lambda_{N+1}-\lambda_N < 4R(R-1)(\gamma^2-\lambda_{N+1}),\end{gathered}$$

что равносильно (48). Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
3. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
4. *Foias C., Sell G. R., Temam R.* Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // J. Differential Equations. 1988. V. 73. №2. P. 309–353.
5. *Mallet-Paret J., Sell G. R.* Inertial manifolds for reaction-diffusion equations in higher space dimensions // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 4. №4. P. 805–866.
6. *Miklavčič M.* A sharp condition for existence of an inertial manifolds // J. Dynam. Differential Equations. 1991. V. 3. №3. P. 437–456.
7. *Mora X.* Finite-dimensional attracting invariant manifolds for damped semilinear wave equations // Res. Notes Math. 1987. V. 155. P. 172–183.
8. *Романов А. В.* Точные оценки размерности интегральных многообразий для нелинейных параболических уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №4. С. 36–54.
9. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1977.
10. *Chepyzhov V. V., Goritsky A. Yu.* Global integral manifolds with exponential tracking for nonautonomous equations // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. №1. P. 9–28.
11. *Chepyzhov V. V., Goritsky A. Yu.* Explicit construction of integral manifolds with exponential tracking // Appl. Anal. 1999. V. 71. №1–4. P. 237–252.
12. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию бесконечномерных динамических систем. Харьков: Акта, 1999.
13. *Hirsh M.* Differential topology. New York: Springer-Verlag, 1976.
14. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1988. (Appl. Math. V. 68.)
15. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
16. *Hale J. K.* Asymptotic behaviour of dissipative systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. (Math. Surveys Monogr. V. 25.)
17. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 49.)
18. *Chepyzhov, V. V., Vishik M. I.* A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of non-autonomous evolution equations // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. №3. P. 1057–1076.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва
E-mail: goritsky@mech.math.msu.su
chep@ippi.ras.ru

Поступила в редакцию
25.04.2004