ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2005, том 400, № 5, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

АППРОКСИМАЦИЯ ТРАЕКТОРНОГО АТТРАКТОРА 3D СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА α-МОДЕЛЬЮ ЛЕРЭ

© 2005 г. М. И. Вишик, Е. С. Тити, В. В. Чепыжов

Представлено академиком В.А. Ильиным 13.06.2004 г.

Поступило 16.06.2004 г.

В [1] построена модель турбулентности, названная α-моделью Лерэ, и приведено обоснование ее использования при подсеточном моделировании турбулентных потоков. В настоящем сообщении статье изучается связь долговременной динамики α-модели Лерэ с трехмерной системой Навье–Стокса (3D Н С) при $\alpha \to 0+$. В частности, показано, что траекторный аттрактор α-модели Лерэ сходится к траекторному аттрактору 3D системы НС при $\alpha \to 0+$.

1. ТРЕХМЕРНАЯ α-МОДЕЛЬ ЛЕРЭ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается следующая система

$$\partial_t v = \nu\Delta v - P[(u\cdot\nabla)v] + g(x),$$
$$x \in \mathbb{T}^3 := [\mathbb{R}\mathrm{mod}(2\pi L)]^3, \quad t \geq 0; \tag{1}$$

$$v = u - \alpha^2\Delta u, \quad \nabla\cdot v = 0, \quad \nabla\cdot v = 0, \tag{2}$$

где $\nu > 0$ – вязкость, и P – проектор Лерэ, который будет определен ниже. Система (1), (2) была введена в [1] (см. также [2, 3]) в качестве подсеточной модели трехмерной турбулентности. В этой системе функция Грина оператора Гельмгольца $I - \alpha^2\Delta$ выбрана в качестве ядра фильтрования с пространственной шириной α.

Приведем некоторые физические мотивации, оправдывающие интерес к исследованию α-модели Лерэ.

Использование α-системы Лерэ в качестве модели замыкания усредненных уравнений Рейнольдса, описывающих течения в каналах и трубах, приводит в точности к той же системе уравнений, что и в α-модели НС. (которую еще называют системой Камассы–Холма с вязкостью, а также осредненной по Лагранжу α-системой НС) при соответствующих симметриях (см., например, [4–6]). Поэтому, аналитические решения α-модели Лерэ хорошо согласуются с эмпирическими данными, полученными для турбулентных потоков в каналах и трубах при широком спектре чисел Рейнольдса (см. [4–6]). Отметим, однако, что Лерэ рассматривал систему (1), (2) с более общим, чем в (2), сглаживающим ядром ϕ_α, $u = \phi_\alpha * v$, для приближения решений 3D системы НС в $\mathbb{R}^3$ (см. [7]).

Неизвестными функциями в системе (1), (2) являются векторные поля $v = v(x, t) = (v^1(x, t), v^2(x, t), v^3(x, t))$ и $u = u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t), u^3(x, t))$. Внешняя сила $g(x) = (g^1(x), g^2(x), g^3(x))$ считается известной. Предполагается, что средние по $\mathbb{T}^3$ всех этих функций равны нулю, т.е., $\int_{\mathbb{T}^3} u(x, t)dx = 0$, $\int_{\mathbb{T}^3} v(x, t)dx = 0$ при $t \geq 0$ и $\int_{\mathbb{T}^3} g(x)dx = 0$.

Обозначим через $\mathcal{V}$ пространство, состоящее из тригонометрических вектор-полиномов $y(x) = (y^1(x), y^2(x), y^3(x))$ с периодом $2\pi L$ по $x = (x^1, x^2, x^3)$, причем $\nabla\cdot y = 0$ и $\int_{\mathbb{T}^3} y(x)dx = 0$. Через H и V обозначаются замыкания пространства $\mathcal{V}$ в нормах $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ пространств $(L^2(\mathbb{T}^3))^3$ и $(H^1(\mathbb{T}^3))^3$, соответственно. P – ортогональный проектор Лерэ на H, P: $(L^2(\mathbb{T}^3))^3 \to H$. Обозначим $u(t) := u(\cdot, t)$ и $v(t) := v(\cdot, t)$ при $t \geq 0$.

Наряду с α-моделью Лерэ (1), (2) рассматривается ее предельная система при $\alpha = 0$, совпадающая с 3D системой НС, в которой давление исключено стандартным способом (см., например, [8, 9]):

$$\partial_t u = \nu\Delta u - P[(u\cdot\Delta)]u + g(x), \quad x \in \mathbb{T}^3, \ t \geq 0, \tag{3}$$

причем $\int_{\mathbb{T}^3} u(x, t)dx = 0$.

Основной результат настоящего сообщения статьи заключается в том, что сдвиги по времени

Институт проблем передачи информации, Российской Академии наук, Москва
Калифорнийский университет, Ирвайн, США
Научный институт Вейцмана, Реховот, Израиль

$\{T(h), h \geq 0\}$ $(T(h)w(t) = w(t + h))$ ограниченных (в определяемой ниже метрике) семейств решений $B_\alpha = \{v_\alpha(t), t > 0\}$, $0 < \alpha \leq 1$, α-модели Лерэ при $\alpha \to 0+$ и при $h \to +\infty$ сходятся (в указанном ниже смысле) к траекторному аттрактору $\mathcal{A}$ 3D системы НС (3).

2. ТРАЕКТОРНЫЙ АТТРАКТОР 3D СИСТЕМЫ НС

Рассматривается семейство $\mathcal{K}^+$ всех слабых решений $\{u(t), t \geq 0\}$ уравнения (3), обладающих следующими свойствами: 1) $u(\cdot) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, 2) $u(t)$ удовлетворяет энергетическому неравенству

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} |u(s)|^2 \psi'(s)ds + \nu\int_0^{+\infty} |\nabla u(s)|^2 \psi(s)ds \leq \leq \int_0^{+\infty} \langle g, u(s)\rangle \psi(s)ds \tag{4}$$

при любой скалярной функции $\psi(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\psi(s) \geq 0$ при $s \geq 0$.

Отметим, что любое решение $u(t)$ задачи Коши для (3) с начальным условием $u(0) \in H$, полученное с помощью метода Галёркина, принадлежит $\mathcal{K}^+$ (см., например, [9]). Следовательно, множество $\mathcal{K}^+$, называемое пространством траекторий 3D системы НС, не пусто.

Введем банахово пространство

$$\mathcal{F}_+^b = \{w(\cdot) | w(\cdot) \in L_2^b(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H), \partial_t w(\cdot) \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; V')\}$$

(здесь V' – сопряженное пространство к V) с нормой

$$\|w\|_{\mathcal{F}_+^b} = \|w\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+;\, V)} + \|w\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;\, H)} + \|\partial_t w\|_{L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+;\, V')},$$

где $\|w\|_{L_2^b(\mathbb{R}_+;\, V)} = \sup\limits_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|w(s)\|_V^2 ds$, и аналогично определяется норма в пространстве $L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; V')$.

Утверждение 1. *Пусть* $g \in V'$. *Тогда*: 1) $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{F}_+^b$; 2) *для любой функции* $u(\cdot) \in \mathcal{K}^+$ *выполнено неравенство*

$$\|T(h)u(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq C_0 \|U(\cdot)\|_{L_\infty(0.1;\, H)}^2 \exp(-\gamma h) + R_0, \quad \gamma = \nu\lambda_1, \tag{5}$$

где λ_1 – *первое положительное собственное значение оператора Стокса* A *в* (2), $A = -\Delta$ *при периодических граничных условиях и константы* C_0, R_0 *зависят только от* ν, λ_1 и $\|g\|_{V'}$.

Доказательство этого предложения дано, например, в [9] (см. также [10, 11]).

Введем еще пространство

$$\mathcal{F}_+^{\text{loc}} = \{w(\cdot) | w(\cdot) \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H), \partial_t w(\cdot) \in L_{4/3}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V')\}.$$

В этом пространстве задается локальная слабая топология Θ_+^{loc}, которая порождается следующей слабой секвенциальной сходимостью: по определению, последовательность $\{w_n\} \subset \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ сходится к $w \in \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ в Θ_+^{loc} при $n \to +\infty$, если $w_n \rightharpoonup w$ в $L_{2,w}(0, M; V)$, $w_n \rightharpoonup w$ в $L_{\infty, *w}(0, M; H)$ и $w_n \rightharpoonup w$ в $L_{4/3,w}(0, M; V')$ при $n \to +\infty$ для любого $M > 0$. Очевидно, топологию Θ_+^{loc} можно задать в терминах соответствующих окрестностей (см. [9]). Заметим, что $\mathcal{F}_+^b \subset \Theta_+^{\text{loc}}$ и любой шар $B_R = \{w(\cdot) \in \mathcal{F}_+^b \mid \|w\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq R\}$ в $\mathcal{F}_+^b$ является компактом в Θ_+^{loc}.

Полугруппа трансляций $\{T(h)\} := \{T(h), h \geq 0\}$ является непрерывной в топологии Θ_+^{loc}. Кроме того, пространство траекторий $\mathcal{K}^+$ замкнуто в Θ_+^{loc}. Полугруппа $\{T(h)\}$ отображает $\mathcal{K}^+$ в себя: $T(h)\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$ при всех $h \geq 0$. Напомним, что множество $P \subset \mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ называется притягивающим для полугруппы $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}^+}$ в топологии Θ_+^{loc}, если для любого ограниченного (в $\mathcal{F}_+^b$) множества $B \subset \mathcal{K}^+$ множество $T(h)B \to P$ в топологии Θ_+^{loc} при $h \to +\infty$. Отметим, что имеется непрерывное вложение $\Theta_+^{\text{loc}} \subset L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta})$ при $1 \geq \delta > 0$. Поэтому $T(h)B \to P$ сильно в пространстве $L_2(0, M; H^{1-\delta})$ при $h \to +\infty$ для любого $M > 0$.

Определение 1. Множество $\mathfrak{A} \subset \mathcal{K}^+$ называется **траекторным аттрактором** полугруппы $\{T(h)\}$ в топологии Θ_+^{loc}, если: 1) $\mathfrak{A}$ ограничено в $\mathcal{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}; 2) $\mathfrak{A}$ строго инвариантно: $T(h)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ при всех $h \geq 0$; 3) $\mathfrak{A}$ является притягивающим множеством для полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}.

Из неравенства (5) следует, что шар $B_{R_1} = \{w(\cdot) \in \mathcal{F}_+^b \mid \|w\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq R_1, R_1 = 2R_0\}$ в $\mathcal{F}_+^b$ является притягивающим множеством для полугруппы $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}^+}$ в топологии Θ_+^{loc}. Как указано выше, шар B_{R_1} компактен в пространстве Θ_+^{loc}. Следовательно, по известной теореме об аттракторах полугрупп (см. [9, 12, 13, 14]), непрерывная полугруппа $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}^+$ обладает компактным в Θ_+^{loc} траекторным аттрактором $\mathfrak{A} \subset \mathcal{K}^+ \cap B_{R_1}$: $\mathfrak{A} = \bigcap_{s<0} [T(h)(\mathcal{K}^+ \cap B_{R_1})]_{\Theta_+^{\text{loc}}}$.

Введем еще понятие ядра $\mathcal{K}$ $3D$ системы НС (3). Ядро $\mathcal{K}$ состоит из всех полных решений $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$ этой системы, которые удовлетворяют энергетическому неравенству (4) с заменой интервала $(0, M)$ на интервал $(-M, M)$, и, кроме того, $u(\cdot)$ ограничено в пространстве $\mathcal{F}^b$, которое определяется аналогично $\mathcal{F}_+^b$, с заменой полуоси $\mathbb{R}_+$ на всю ось времени $\mathbb{R}$. Тогда, очевидно, $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}^b$. Сужение ядра $\mathcal{K}$ на $\mathbb{R}_+$ совпадает с траекторным аттрактором $\mathfrak{A}$: $\Pi_+\mathcal{K} = \mathfrak{A}(\Pi_+ w(t) = \{w(t), t \geq 0\}$ для любой функции $\{w(t), t \in \mathbb{R}\})$. Ядро $\mathcal{K}$ компактно в Θ^{loc}, причем топология Θ^{loc} определяется аналогично Θ_+^{loc} с заменой $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$.

3. ПРОСТРАНСТВО ТРАЕКТОРИЙ α-МОДЕЛИ ЛЕРЭ

Задача Коши системы (1), (2) обладает, и притом единственным, слабым решением в энергетическом классе функций: $v(\cdot) \in L_2(0, M; V) \cap L_\infty(0, M; H)$, $\partial_t v(\cdot) \in L_2(0, M; V')$ при любом $M > 0$. Из уравнения (2) получаем, что $u = (I + \alpha^2 A)^{-1} v$. Поэтому искомой функцией системы (1), (2) можно считать функцию $v(x, t)$. В [1] получены основные априорные оценки для этой системы. При $g \in V'$ любое слабое решение $\{v(t), t \geq 0\}$ системы (1), (2) удовлетворяет неравенству (6) с заменой u на v. Следует подчеркнуть, что в этом случае константы C_0 и R_0 не зависят от α. Аналогично пространству $\mathcal{K}^+$ вводится пространство $\mathcal{K}_\alpha^+$ слабых решений $\{v_\alpha(t), t \geq 0\}$ α-модели Лерэ. Имеет место вложение $\mathcal{K}_\alpha^+ \subset \mathcal{F}_+^b$ при любых α, $0 < \alpha \leq 1$. Кроме того, для любого $v \in \mathcal{K}_\alpha^+$ энергетическое неравенство (6) становится энергетическим равенством с заменой функции u на v, т.е.

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} |v(s)|^2 \psi'(s) ds + \nu \int_0^{+\infty} |\nabla v(s)|^2 \psi(s) ds = \int_0^{+\infty} \langle g, v(s) \rangle \psi(s) ds \tag{6}$$

для любой функции $\psi(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Справедливо следующее

Утверждение 2. *Пусть имеется последовательность* $\{v_{\alpha_n}(t)\} \subset \mathcal{K}_{\alpha_n}^+$ *при* $n \in \mathbb{N}$, *такая, что*: 1) $\{v_{\alpha_n}(\cdot)\}$ *ограничена в* $\mathcal{F}_+^b$; 2) *при* $\alpha_n \to 0+$ *функции* $v_{\alpha_n}(\cdot) \to v(\cdot)$ $(n \to \infty)$ в Θ_+^{loc}. *Тогда* $v(\cdot)$ *является слабым решением* $3D$ *системы* НС *и* $v \in \mathcal{K}^+$.

4. СХОДИМОСТЬ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ ТРАЕКТОРИЙ α-МОДЕЛИ ЛЕРЭ К ТРАЕКТОРНОМУ АТТРАКТОРУ 3D СИСТЕМЫ НС ПРИ $h \to +\infty$ И $\alpha \to +0$

Теорема 1. *Пусть* $B_\alpha = \{v_\alpha(x, t), t \geq 0\}$, $0 < \alpha \leq 1$ – *равномерно ограниченное в* $\mathcal{F}_+^b$ *семейство траекторий* α-*модели Лерэ* (1), (2):

$\|B_\alpha\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq M$. *Тогда*

$$T(h)B_\alpha \to \mathfrak{A} \ (h \to +\infty, \alpha \to 0+) \ \text{в} \ \Theta_+^{\text{loc}}, \tag{7}$$

где $\mathfrak{A}$ – *траекторный аттрактор* $3D$ *системы* НС (3) (*см. раздел* 2).

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 9 *множество* $T(h)B_\alpha$ *сходится к ядру* $\mathcal{K}$ *уравнения* (3) *при* $h \to +\infty$ *и при* $\alpha \to 0+$ *в топологии пространства* $\Theta(-M, M) = \Theta|_{[-M, M]}$ *при любом фиксированном* $M > 0$.

Очевидно, утверждения, аналогичные сформулированным в теореме 1 и следствии 1, справедливы для равномерно ограниченных семейств траекторий $\tilde{B}_\alpha = (I + \alpha^2 A)^{-1} B_\alpha = u_\alpha\{(x, t), t \geq 0, 0 < \alpha \leq 1\}$ (функции $v \in B_\alpha$ и $u \in \tilde{B}_\alpha$ связаны равенством $u_\alpha = (I + \alpha^2 A)^{-1} v_\alpha$). Например, $T(h)\tilde{B}_\alpha \to \mathfrak{A}$ $(h \to +\infty, \alpha \to 0+)$ в Θ_+^{loc}.

Следствие 2. *Траекторные аттракторы* $\mathfrak{A}_\alpha$ α-*модели Лерэ при* $\alpha \to +\infty$ *сходятся к траекторному аттрактору* $\mathfrak{A}$ $3D$ *системы НС в топологии* Θ_+^{loc}.

Так как $\Theta_+^{\text{loc}} \subset L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta})$, $1 \geq \delta > 0$, то указанные выше сходимости имеют место также в сильной метрике пространства $L_2^{\text{loc}}(0, M; H^{1-\delta})$ для любого $M > 0$.

Полученные выше результаты также справедливы для α-модели НС (также называемой системой Камассы–Холма с вязкостью или осредненной по Лагранжу α-системой НС) (см., например, [4, 15] и цитированную там литературу).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 02–01–00227), CRDF (грант RM1–2343–MO–02), INTAS (грант 00–899), NSF (грант DMS–0204794), а также стипендией MAOF Совета по высшему образованию Израиля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cheskidov A., Holm D.D., Olson E., Titi E.S.* http://www.math.uci.edu/˜etiti Prepr. 2003. P. 1–21.
2. *Geurts B.J., Holm D.D.* // Physica D. 1999. V. 133. P. 215–269.
3. *Geurts B.J., Holm D.D.* // Phys. Fluids. 2003. V. 15. P. L13—L16.
4. *Chen S., Foias C., Holm D.D. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 5338–5341.
5. *Chen S., Foias C., Holm D.D. et al.* // Phys. Fluids. 1999. V. 11. P. 2343–2353.
6. *Chen S., Foias C., Holm D.D.et al.* // Physica D. 1999. V. 133. P. 49–65.
7. *Leray J.* // Acta math. 1934. V. 63. P. 193–348.
8. *Temam R.* Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1984. 526 p.
9. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* Attractors for Equations of Mathematical Physics. AMS Colloquium Publ. Providence: AMS, 2002. V. 49. 363 p.
10. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // C. R. Acad. sci. Paris. Ser. I. 1995. V. 321. P. 1309–1314.
11. *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // J. Math. Pures and Appl. 1997. V. 76. № 10. P. 913–964.
12. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 296 с.
13. *Hale J.K.* // Math. Surv. and Mon. 1988. V. 25. 198 p.
14. *Temam R.* // Appl. Math. Ser. 1997. V. 68. 648 p.
15. *Foias C., Holm D.D., Titi E.S.* // J. Dyn. Difberent. Eqauts., 2002. V. 14. № 1. P. 1–35.