УДК 517.95

Траекторный аттрактор неавтономного уравнения Гинзбурга–Ландау

М.И.Вишик, В.В.Чепыжов*

Автономное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (Г.–Л.) и его глобальный аттрактор были изучены в ряде работ и книг (см., например, [1] – [5] и цитированную там литературу). В настоящей заметке исследуется неавтономное уравнение Г.–Л. и его траекторный аттрактор. При этом основное внимание уделяется тем случаям, когда единственность решения задачи Коши для этого уравнения к настоящему времени не установлена.

1. Рассматривается комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с коэффициентами и возбуждающей силой, зависящими от времени:

$$\partial_t u = (1+i\alpha_0(t))\Delta u + R_0(t)u - (1+i\beta_0(t))|u|^2 u + g_0(x,t),\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

$x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,\ u = u_1 + iu_2$. Предполагается, что вещественные функции $\alpha_0(t), \beta_0(t), R_0(t) \in C_b(\mathbb{R}_+)$, а $g_0(x,t) \in L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}')$. То есть, $\|g\|^2_{L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}')} = \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1}\|g(\cdot,\tau)\|^2_{\mathbf{V}'}d\tau < \infty,\ \mathbf{V} = \mathbf{H}^1 = H_0^1(\Omega;\mathbb{C}),\ \mathbf{V}' = \mathbf{H}^{-1}$. Как известно, если $|\beta_0(t)| \leq \sqrt{3}$ $(t \geq 0)$, то задача Коши для уравнения (1) при начальном условии $u|_{t=0} = u_0(x),\ u_0(\cdot) \in \mathbf{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C})$ имеет, и притом единственное, решение в следующем слабом смысле: функция $\{u(x,t), t \geq 0\} \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V}) \cap L_4^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_4)$, где $\mathbf{L}_4 = L_4(\Omega;\mathbb{C})$. При этом $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в смысле теории распределений в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r})$, где $\mathbf{H}^{-r} = H^{-r}(\Omega;\mathbb{C}),\ r = \max\{1, n/4\}$ (см., например, [6]).

Ниже изучается тот случай, когда

$$|\beta_0(t)| > \sqrt{3},\ t \in L, \tag{2}$$

где $L \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное множество в $\mathbb{R}_+$. При условии (2) единственность задачи Коши для (1) не доказана. Однако, слабое решение $\{u(x,t), t \geq 0\}$ этой задачи существует при любом $u_0(\cdot) \in \mathbf{H}$. Это устанавливается, например, с помощью метода Галеркина.

Любое слабое решение $u(x,t)$ уравнения (1) обладает следующими свойствами: а) функция $u(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+;\mathbf{H})$; б) функция $\|u(t)\|^2_{\mathbf{H}}$ абсолютно непрерывна по t на $\mathbb{R}_+$, и при почти всех $t \geq 0$ выполнено дифференциальное тождество

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{\mathbf{H}} + \|u(t)\|^2_{\mathbf{V}} + \|u(t)\|^4_{\mathbf{L}_4} - R(t)\|u(t)\|^2_{\mathbf{H}} = \langle g(t), u(t)\rangle\,. \tag{3}$$

При доказательстве этих свойств используется теорема Р.Темама (см. [9, Гл. III, Лемма 1.2]) и ее обобщение, данное в [6].

Для построения траекторного аттрактора уравнения (1) нам понадобятся некоторые понятия и определения. Обозначим через $\sigma_0(t) = (\alpha_0(t), \beta_0(t), R_0(t), g_0(\cdot,t))$,

*Институт проблем передачи информации РАН, Москва

$t \in \mathbb{R}_+$. Функцию $\sigma_0(t)$ мы будем называть *символом* уравнения (1). Обозначим через $\Xi_+ = C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \times C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \times C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \times L_{2,\mathrm{w}}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}')$ — пространство с топологией локальной сходимости последовательностей его элементов. Под оболочкой $\Sigma := \mathcal{H}_+(\sigma_0)$ функции $\{\sigma_0(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ в пространстве Ξ_+ подразумевается следующее множество функций $\{\sigma(t), t \in \mathbb{R}_+\} = \{(\alpha(t), \beta(t), R(t), g(\cdot, t)), t \in \mathbb{R}_+\}$:

$$\Sigma := \mathcal{H}_+(\sigma_0) := \left[\bigcup_{h \geq 0} T(h)\sigma_0(\cdot)\right]_{\Xi_+} = \left[\bigcup_{h \geq 0} \{\sigma_0(t+h), t \in \mathbb{R}_+\}\right]_{\Xi_+}, \tag{4}$$

где $T(h)\sigma_0(t) = \sigma_0(t+h)$. Предполагается, что оболочка Σ компактна в Ξ_+. Необходимое и достаточное условие такой компактности приведены в [6]. Если множество $\Sigma := \mathcal{H}_+(\sigma_0)$ компактно в Ξ_+, то функция $\sigma_0(\cdot)$ называется *трансляционно компактной* в Ξ_+.

Наряду с уравнением (1) рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t u = (1 + i\alpha(t))\Delta u + R(t)u - (1 + i\beta(t))|u|^2 u + g(x,t),\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

символы которых $\sigma(t) = (\alpha(t), \beta(t), R(t), g(\cdot, t)) \in \mathcal{H}_+(\sigma_0) = \Sigma$. Через $\mathcal{K}_\sigma^+$ обозначается семейство всех слабых решений на $\mathbb{R}_+$ уравнения (5), которое называется *пространством траекторий* уравнения (5) с символом $\sigma(\cdot)$. Имеет место следующее *трансляционное соотношение*: $T(h)\mathcal{K}_\sigma^+ \subseteq \mathcal{K}_{T(h)\sigma}^+$, при любом $h \geq 0$ и всех $\sigma \in \mathcal{H}_+(\sigma_0)$ $(T(h)u(x,t) = u(x, t+h))$. Обозначим через $\mathcal{K}_\Sigma^+ = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{K}_\sigma^+$. Рассмотрим *трансляционную полугруппу* $\{T(h)\} := \{T(h), h \geq 0\}$ на объединенном пространстве траекторий $\mathcal{K}_\Sigma^+$. Имеет место включение: $T(h)\mathcal{K}_\Sigma^+ \subseteq \mathcal{K}_\Sigma^+$ при всех $h \geq 0$.

Введем пространства $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$, $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и Θ_+^{loc} :

$$\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}} = L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_4^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_4) \cap \left\{v \mid \partial_t v \in L_{4/3}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r})\right\}, \tag{6}$$

$$\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}} = L_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap L_2^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_4^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_4) \cap \left\{v \mid \partial_t v \in L_{4/3}^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{-r})\right\}, \tag{7}$$

где норма в $L_p^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+; E)$ равна $\|\varphi\|_{L_p^{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+;E)}^p = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|\varphi(\tau)\|_E^p d\tau$. Очевидно, $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}}$ равной сумме норм пространств, пересечением которых оно является. Через Θ_+^{loc} обозначается пространство $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$, снабженное топологией, порожденной слабой локальной сходимостью элементов $\mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$. По определению, последовательность функций $\{v_m\} \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ сходится к $v \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{loc}}$ при $m \to \infty$ в Θ_+^{loc}, если для любого $M > 0$ последовательность $v_m \rightharpoondown v$ $(m \to \infty)$ слабо в $L_2(0, M; \mathbf{V})$, слабо в $L_4(0, M; \mathbf{L}_4)$ и $*$-слабо в $L_\infty(0, M; \mathbf{H})$, и, кроме того, $\partial_t v_m \rightharpoondown \partial_t v$ $(m \to \infty)$ слабо в $L_{4/3}(0, M; \mathbf{V}^{-r})$. Топологическое пространство Θ_+^{loc} легко также определить в терминах соответствующих окрестностей (см. [6]).

Заметим, что $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}} \subset \Theta_+^{\mathrm{loc}}$, и любой шар $B_d = \left\{w(\cdot) \in \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}} \mid \|w\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} \leq d\right\}$ в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ является компактным множеством в топологии Θ_+^{loc} (см., например, [6]).

Множество $P \subseteq \Theta_+^{\mathrm{loc}}$ называется *равномерно* (относительно $\sigma \in \Sigma$) *притягивающим* для полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}_\Sigma^+$ в топологии Θ_+^{loc}, если для любого множества $B \subseteq \mathcal{K}_\Sigma^+$, ограниченного в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, множество P притягивает $T(h)B$ при $h \to +\infty$ в топологии Θ_+^{loc}.

Множество $\mathfrak{A}_\Sigma \subseteq \mathcal{K}_\Sigma^+$ называется *равномерным* (относительно $\sigma \in \Sigma$) *траекторным аттрактором* трансляционной полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}_\Sigma^+$ в топологии Θ_+^{loc}, если: а) $\mathfrak{A}_\Sigma$ ограничено в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$ и компактно в Θ_+^{loc}; б) $\mathfrak{A}_\Sigma$ строго инвариантно относительно $\{T(h)\}$: $T(h)\mathfrak{A}_\Sigma = \mathfrak{A}_\Sigma$ $\forall h \geq 0$; в) $\mathfrak{A}_\Sigma$ является равномерно (относительно $\sigma \in \Sigma$) притягивающим множеством полугруппы $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}_\Sigma^+$ в топологии Θ_+^{loc}.

В терминологии [7, 6] равномерный траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\Sigma$ является глобальным $\left(\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}, \Theta_+^{\mathrm{loc}}\right)$-аттрактором полугруппы $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}_\Sigma^+}$.

Утверждение 1 *Объединенное пространство траекторий $\mathcal{K}_\Sigma^+$ является замкнутым множеством в топологии Θ_+^{loc}.*

Теорема 1 *Пусть символ $\sigma_0(t) = (\alpha_0(t), \beta_0(t), R_0(t), g_0(x,t))$ исходного уравнения Г.–Л. (1) является трансляционно-компактной функцией в $\Xi_+ : \mathcal{H}_+(\sigma_0) = \Sigma \Subset \Xi_+$. Рассмотрим семейство уравнений (5) с символами $\sigma \in \Sigma$. Тогда: а) пространство траекторий $\mathcal{K}_\Sigma^+ \subset \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$; б) для любой траектории $u_\sigma \in \mathcal{K}_\Sigma^+$ имеет место неравенство*

$$\|T(h)u_\sigma(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} \le C\|u_\sigma(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} e^{-\lambda_1 h} + R,\ \forall h \ge 0, \tag{8}$$

где константы C и R не зависят от $u_\sigma(\cdot)$; λ_1 — первое собственное значение оператора $\{-\Delta u,\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$.

Из оценки (8) следует, что множество $B_0 = \left\{u(\cdot) \in \mathcal{K}_\Sigma^+ \mid \|u(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}} \le 2R\right\}$ является поглощающим для полугруппы $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}_\Sigma^+}$. Отметим, что B_0 замкнуто и ограничено в $\mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$, B_0 компактно в Θ_+^{loc}. Отсюда выводится следующая теорема.

Теорема 2 *При выполнении условий теоремы 1 полугруппа $\{T(h)\}|_{\mathcal{K}_\Sigma^+}$ обладает равномерным (по $\sigma \in \Sigma$) траекторным аттрактором $\mathfrak{A}_\Sigma \subset \mathcal{K}_\Sigma^+ \cap B_0$ в топологии Θ_+^{loc}, притягивающим любые ограниченные множества траекторий $B \subset \mathcal{K}_\Sigma^+ \cap \mathcal{F}_+^{\mathrm{b}}$.*

Ниже рассматривается уравнение (1), символ которого $\sigma_0(t) = (\alpha_0(t), \beta_0(t), R_0(t), g_0(x,t)), t \ge 0$, является почти периодической (п.п.) функцией на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в $\mathbb{R}^3 \times \mathbf{V}'$. Напомним, что такая функция $\sigma_0(t)$ однозначно продолжается на всю ось $\mathbb{R}$, оставаясь п.п. функцией. Это продолжение обозначим также через $\sigma_0(t)$. Очевидно, что функция $\sigma_0(t)$ является трансляционно компактной в пространстве $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3 \times \mathbf{V}')$ (и в $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3 \times \mathbf{V}')$). Оболочку функции $\{\sigma_0(t), t \in \mathbb{R}\}$ в этом пространстве обозначим через $\Sigma_\infty := \mathcal{H}_\infty(\sigma_0) := \left[\bigcup_{h\in\mathbb{R}} T(h)\sigma_0(\cdot)\right]_{C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^3\times\mathbf{V}')}$. Любой функции $\sigma(t) \in \mathcal{H}_\infty(\sigma_0)$ соответствует уравнение Г.–Л. на всей оси $t \in \mathbb{R}$. Аналогично предыдущему определяются пространства $\mathcal{F}^{\mathrm{loc}}$, $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$ и Θ^{loc} функций, заданных на всей оси $\mathbb{R}$.

Решение $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$ уравнения (5), принадлежащее $L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \mathbf{V}) \cap L_4^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \mathbf{L}_4)$, будем называть полным решением этого уравнения. *Ядром* $\mathcal{K}_\sigma$ в пространстве $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$ уравнения (5) с символом $\sigma(t), t \in \mathbb{R}$, называется совокупность всех полных траекторий $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$ этого уравнения, ограниченных в пространстве $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$. Введем объединение ядер $\mathcal{K}_{\Sigma_\infty} = \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\infty} \mathcal{K}_\sigma$.

Теорема 3 *Ядро $\mathcal{K}_\sigma$ уравнения (5) не пусто при любом $\sigma \in \Sigma_\infty$, а соответствующее множество $\mathcal{K}_{\Sigma_\infty}$ ограничено в $\mathcal{F}^{\mathrm{b}}$ и компактно в Θ^{loc}. Кроме того, равномерный траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\Sigma \subset \mathcal{K}_\Sigma^+$ семейства уравнений (5) с символами $\sigma \in \Sigma$ совпадает с $\Pi_+\mathcal{K}_{\Sigma_\infty}$ $(\Pi_+ f(t) = f(t), t \ge 0)$:*

$$\mathfrak{A}_\Sigma = \Pi_+\mathcal{K}_{\Sigma_\infty} = \Pi_+ \bigcup_{\sigma\in\Sigma_\infty} \mathcal{K}_\sigma. \tag{9}$$

2. Возмущенное уравнение Гинзбурга–Ландау. Рассматривается уравнение

$$\begin{aligned}\partial_t u \;&=\; (1 + i\,(\alpha_0(t) + \alpha_1(t)))\Delta u + (R_0(t) + R_1(t))\, u - (1 + i\,(\beta_0(t) + \beta_1(t)))|u|^2 u + \\ &\quad + g_0(x,t) + g_1(x,t).\end{aligned} \tag{10}$$

Предполагается, что $\sigma_0(t) = (\alpha_0(t), \beta_0(t), R_0(t), g_0(\cdot,t))$ п.п. в $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3 \times \mathbf{V}')$. Относительно вектора возмущений $\sigma_1(t) = (\alpha_1(t), \beta_1(t), R_1(t), g_1(\cdot,t))$ предполагается, что эта функция принадлежит $C_{\rm b}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^3\times\mathbf{V}')$ и обладает следующим свойством: для каждого $M>0$ функции $\alpha_1(t+h)\rightharpoondown 0,\ \beta_1(t+h)\rightharpoondown 0,\ R_1(t+h)\rightharpoondown 0\ (h\to+\infty)$ сходятся $*$-слабо в $L_\infty(0,M;\mathbb{R})$, а функция $g_1(\cdot,t+h)\rightharpoondown 0\ (h\to+\infty)$ сходится $*$-слабо в $L_\infty(0,M;\mathbf{V}')$.

Наряду с уравнением (10) рассматривается "невозмущенное" уравнение Г.–Л. (1) с п.п. символом $\sigma_0(t)=(\alpha_0(t),\beta_0(t),R_0(t),g_0(\cdot,t))$.

Предполагается, что $|\beta_0(t)|>\sqrt{3}$ или $|\beta_0(t)+\beta_1(t)|>\sqrt{3}$ при $t\in L$, где L – некоторое неограниченное множество на $\mathbb{R}_+$. Как уже указывалось выше, в этом случае теорема единственности задачи Коши для соответствующего уравнения Г.–Л. (1) или (10) не доказана. Рассмотрим семейство решений $B:=\{u(x,t),t\geq 0\}$ возмущенного уравнения (10), ограниченное в пространстве $\mathcal{F}_+^{\rm b}=L_\infty(\mathbb{R}_+;\mathbf{H})\cap L_2^{\rm b}(\mathbb{R}_+;\mathbf{V})\cap L_4^{\rm b}(\mathbb{R}_+;\mathbf{L}_4)\cap\left\{v\mid\partial_t v\in L_{4/3}^{\rm b}(\mathbb{R}_+;\mathbf{H}^{-r})\right\}$,т.е. $\|u\|_{\mathcal{F}_+^{\rm b}}\leq N<\infty$, для некоторого N при всех $u\in B$. Отметим, что в качестве множества B можно взять, например, семейство решений $\{u(x,t),t\geq 0\}$ уравнения (10) при начальных условиях $u|_{t=0}=u_0(x),\ \|u_0\|_{\mathbf{H}}\leq M_1,\ M_1>0$, полученных с помощью метода Галеркина.

Теорема 4 *Пусть B – ограниченное в $\mathcal{F}_+^{\rm b}$ семейство решений $\{u(x,t),t\geq 0\}$ возмущенного уравнения (10). Тогда*

$$T(h)B=\{u(t+h),t\geq 0\mid u\in B\}\to\mathfrak{A}_\Sigma \text{ при } h\to+\infty \text{ в топологии } \Theta_+^{\rm loc}. \tag{11}$$

Здесь $\mathfrak{A}_\Sigma$ – траекторный аттрактор невозмущенного уравнения (1) с п.п. символом $\sigma_0(t)=(\alpha_0(t),\beta_0(t),R_0(t),g_0(\cdot,t))$.

3. Заключительные замечания. Рассмотрим уравнение Г.–Л. (1). Пусть выполнены условия, сформулированные в начале п.**1**. В том случае, когда $|\beta_0(t)|\leq\sqrt{3},\ t\geq 0$, задача Коши для уравнения (1) имеет, и притом единственное, решение. Из результатов [6] следует (см., также [8, 10]), что в этом случае уравнение (1) имеет глобальный и траекторный аттрактор.

Предположим теперь, что функция $\sigma_0(t)=(\alpha_0(t),\beta_0(t),R_0(t),g_0(\cdot,t))$ является п.п. в $C_{\rm b}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^3\times\mathbf{V}')$. Как было отмечено выше, $\sigma_0(t)$ однозначно продолжается до п.п. функции на всей оси $\mathbb{R}$. Это продолжение также обозначим через $\sigma_0(t),t\in\mathbb{R}$. Следовательно можно считать, что уравнение (1) задано на всей оси и имеет символ $\sigma_0(t),t\in\mathbb{R}$.

Теорема 5 *Пусть выполнены сформулированные выше условия и*

$$|\beta_0(t)|\leq\sqrt{3},\ |R_0(t)|\leq\lambda_1-\delta,\forall t\in\mathbb{R},\ (\lambda_1>\delta>0). \tag{12}$$

Тогда уравнение Г.–Л. (1) имеет, и притом единственное, ограниченное в $\mathcal{F}_+^{\rm b}$ решение $\{z_0(t),\ t\in\mathbb{R}\}$. Это решение экспоненциально притягивает все остальные решения $\{u(t),t\geq\tau\}$ уравнения (1):

$$\|u(t)-z_0(t)\|_{\mathbf{H}}\leq Ce^{-\delta(t-\tau)}\|u(\tau)-z_0(\tau)\|_{\mathbf{H}},\ \forall t\geq\tau,\ \tau\in\mathbb{R}, \tag{13}$$

где C не зависит от решения $u(\cdot)$ и от τ, а число δ – такое же как в (12).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (номер проекта 02-01-00227).

Список литературы

[1] Temam R. *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Applied Mathematics Series. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1988. 648 p.

[2] *Mielke.A.* // Nonlinearity. 1997. V.10. 199–222.

[3] *Ghidaglia J.M., Héron B.* // *Physica D.* 1987. V.28. 282–304.

[4] *Doering C.R., Gibbon J.D., Holm D.D., Nicolaenco B.* // Nonlinearity. 1988. V.1. 279–309.

[5] *Doering C.R., Gibbon J.D., Levermore C.D.* // Physica D. 1994. V.71. 285–318.

[6] *Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for Equations of Mathematical Physics.* AMS Colloquium Publications. V. 49. Providence: AMS, 2002. V. 49. 363 p.

[7] Бабин А.В., Вишик М.И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989. 296 с.

[8] *Chepyzhov V.V., Vishik M.I.* // Top.Meth.Nonlin.Anal. J.Julius Schauder Center. 1996. V. 7. N 1. 49-76.

[9] Temam R. *On the Theory and Numerical Analysis of the Navier–Stokes Equations.* Amsterdam: North-Holland, 1984. 526 p.

[10] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. // J.Math.Pures Appl. 1997. V.76. N 10. 913–964.

Институт проблем передачи информации РАН
Москва 127994, ГСП4, Большой каретный пер., д.19

М.И.Вишик
117071, Москва, ул.Орджоникидзе, д.14, кв.109
домашний телефон: 954-15-86
служебный телефон: 299-83-54
факс: 209-05-79
e-mail: vishik@iitp.ru

В.В.Чепыжов
109263, Москва, ул.Малышева, д.22, кв.12
домашний телефон: 919-74-09
служебный телефон: 299-83-54
факс: 209-05-79
e-mail: chep@iitp.ru