На правах рукописи

ЧЕПЫЖОВ Владимир Викторович

КОЛМОГОРОВСКАЯ ε-ЭНТРОПИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ АТТРАКТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.17 – “Теоретические основы информатики”

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2003 г.

Работа выполнена в Институте проблем передачи информации РАН

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Волевич Л.Р. доктор физико-математических наук Козякин В.С. доктор физико-математических наук, профессор Тихомиров В.М.

Ведущая организация:	Московский государственный институт электронного машиностроения (технический университет)

Защита диссертации состоится “ ” 2003 года в час. на заседании Диссертационного совета Д.002.077.01 в Институте проблем передачи информации РАН по адресу: 101447, г. Москва, ГСП-4, Большой Каретный пер., дом 19.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем передачи информации РАН.

Автореферат разослан “ ” 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.002.077.01
доктор технических наук, профессор Степанов С.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Проблематика изучения ε-энтропии классов аналитических функций, ограниченных на действительной оси возникла в связи с ключевыми идеями теории информации. В теории информации большую роль играет то обстоятельство, что сигналы с ограниченным спектром, помещающимся в полосе частот ширины 2σ, определяются по дискретной совокупности своих значений, взятых в равноотстоящих друг от друга точках действительной оси. В применении к функциям $f(t)$, преобразование Фурье которых (спектр) обращается в нуль вне некоторого отрезка длины 2σ, возможность восстановления такой функции по дискретной совокупности ее значений, взятых в точках, образующих арифметическую прогрессию с разностью π/σ, была обоснована в ряде математических работ. В.А.Котельников независимо нашел важное применение этого свойства для теории связи и передачи информации. Им было открыто, что количество информации, содержащееся в задании на отрезке времени длины T функции со спектром, ограниченным полосой частот длины 2σ, при больших T эквивалентно количеству информации в задании $\frac{2\sigma}{\pi}T$ действительных чисел. В литературе это утверждение именуется теоремой Котельникова. Эту же идею в несколько иной форме высказал также К.Шеннон.

В связи с этими идеями Андрей Николаевич Колмогоров ввел понятие ε-энтропии различных классов функций. Напомним, что ε-энтропия $\mathbf{H}_\varepsilon(X)$ компактного множества X в банаховом пространстве E равняется $\log_2 \mathbf{N}_\varepsilon(X)$, где $\mathbf{N}_\varepsilon(X)$ – минимальное число шаров в E радиуса ε, объединение которых покрывает X.

В.М.Тихомировым была найдена оценка ε-энтропия класса $B(\sigma)$ целых аналитических на всей оси t функций, обладающих ограниченным спектром, заключающимся в полосе ширины 2σ. Им доказано, что плотность ε-энтропии $\overline{\mathbf{H}}_\varepsilon(B(\sigma))$ на единицу длины оси t имеет порядок $\frac{2\sigma}{\pi}\log_2(1/\varepsilon)$. В этом заключался один из вариантов обоснования теоремы В.А.Котельникова.

А.Н.Колмогоров нашел применение многим понятиям и методам теории информации в теории эволюционных уравнений и динамических систем. В полной мере это относится к понятию ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(X)$ компактного множества X в банаховом (конечномерном или бесконечномерном) пространстве E.

Колмогоровская ε-энтропия и связанная с ней энтропийная размерность являются важными базовыми характеристиками, которые описывают сложность компактных множеств, что весьма существенно в теории приближений функций и функциональных множеств. В известной работе А.Н.Колмогорова и В.М.Тихомирова[1] приведены оценки сверху и снизу для ε-энтропии многих классов функциональных множеств, что послужило истоком целого научного направления.

Новый интерес к колмогоровской ε-энтропии возник в связи с исследованием нерегулярных аттракторов динамических систем, которые появляются во многих моделях так называемого детерминированного хаоса. Аттрактором динамической системы называется компактное множество фазового пространства, которое инвариантно относительно сдвигов вдоль траекторий данной системы, и к которому притягиваются все траектории системы при $t \to +\infty$. Особенно важным это понятие становится

[1] *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональных пространствах // УМН. 1959. Т. 14. N 2. С. 3–86.

при исследовании бесконечномерных динамических систем, имеющих компактные аттракторы весьма сложной структуры, которые, возможно, тесно связаны с проблемой объяснения турбулентных явлений во многих задачах динамики сплошных сред.

Одной из фундаментальных проблем, возникающих при исследовании эволюционных уравнений математической физики, является описание поведения решений этих уравнений при больших временах или когда время стремится к бесконечности.

В последние тридцать лет при решении подобных задач большую популярность приобрел подход, основанный на теории динамических систем, который изначально применялся при исследовании конечномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Прежде всего этот интерес был связан с открытием детерминированного хаоса, то есть достаточно простых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, у которых, однако, наблюдается весьма нерегулярное (хаотическое) поведение траекторий, когда время стремится к бесконечности. Классическим примером такой системы служит трехмерная система Лоренца, которая получается из галеркинского приближения системы уравнений Бусинеска, описывающей конвекцию подогреваемой жидкости. Однако механизм возникновения нерегулярности при больших значениях времени в конкретных динамических системах остается достаточно запутанным, и определенный прогресс связан с применением численного моделирования.

Многие идеи, понятия и методы теории конечномерных динамических систем легли в основу теории бесконечномерных динамических систем, порождаемых дифференциальными уравнениями с частными производными. С этой точки зрения стали изучаться, например, системы уравнений Навье–Стокса, различные уравнения и системы реакции-диффузии, комплексные уравнения Гинзбурга–Ландау, нелинейные диссипативные волновые уравнения и многие другие эволюционные уравнения математической физики. Целью этих исследований было построение глобальных аттракторов таких систем и исследование их структуры. При этом существенной характеристикой сложности этих множеств может служить колмогоровская ε-энтропия и энтропийная размерность.

Дадим определение колмогоровской ε-энтропии компактного множества X в банаховом пространства E. Через $N_\varepsilon(X,E) = N_\varepsilon(X)$ обозначается наименьшее число шаров радиуса ε в пространстве E, которые покрывают множество X :

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,\varepsilon), \quad N_\varepsilon(X) = \min N. \tag{1}$$

Здесь $B(x_i,\varepsilon) = \{x \in E \mid \|x - x_i\|_E < \varepsilon\}$ – шар в E с центром в x_i и радиусом ε. Важно отметить, что $N_\varepsilon(X) < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$, так как множество X компактно в E.

Определение 1 *Колмогоровской ε-энтропией* множества X в пространстве E называется число

$$\mathbf{H}_\varepsilon(X,E) := \mathbf{H}_\varepsilon(X) := \log_2 N_\varepsilon(X). \tag{2}$$

Для конкретных множеств X задача заключается в исследовании асимптотического поведения по ε функции $\mathbf{H}_\varepsilon(X)$ при $\varepsilon \to 0+$. Ясно, что ε-энтропия позволяет узнать, сколько необходимо задать точек (или функций) в пространстве E, для того чтобы определить множество X с погрешностью ε. С ε-энтропией тесно связано важное понятие *энтропийной размерности*, которую часто называют *фрактальной размерностью* компактного множества.

Определение 2 *Фрактальной размерностью* компактного множества X в пространстве E называется число

$$\mathbf{d}_F(X,E) := \mathbf{d}_F(X) := \varlimsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mathbf{H}_\varepsilon(X)}{\log_2(1/\varepsilon)}. \tag{3}$$

Если фазовое пространство E имеет конечную размерность, то легко видеть, что $\mathbf{d}_F(X) < +\infty$, причем $\mathbf{d}_F(X) \le \dim E$. В бесконечномерном пространстве E фрактальная размерность компактных множеств может быть бесконечной. Однако если известно, что $0 < \mathbf{d}_F(X) < +\infty$, то $\mathbf{H}_\varepsilon(X) \approx \mathbf{d}_F(X)\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, и значит, потребуется $N_\varepsilon(X) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\mathbf{d}_F(X)}$ точек для того, чтобы приблизить такое множество X с точностью до ε. В работе А.Н.Колмогорова и В.М.Тихомирова рассматривались примеры множеств в различных функциональных пространствах, для которых $\mathbf{H}_\varepsilon(X) \approx D\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^a$, где $a > 1$, и даже $\mathbf{H}_\varepsilon(X) \approx D\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^a$. Для таких множеств, очевидно, фрактальная размерность равна бесконечности, однако ε-энтропия этих множеств остается конечной, и ее величина характеризует сложность множества бесконечной размерности.

Отметим, что фрактальная размерность бывают также весьма полезными при исследовании различных "негладких" множеств, например самоподобных множеств или фракталов. Другой существенной характеристикой компактного множества X служит его хаусдорфова размерность $\mathbf{d}_H(X)$. Известно, что всегда $\mathbf{d}_H(X) \le \mathbf{d}_F(X)$. Можно привести примеры множеств, для которых $\mathbf{d}_H(X) = 0$, но $\mathbf{d}_F(X) = +\infty$. Таким образом, хаусдорфова размерность является более слабой характеристикой компактных множеств с точки зрения теории приближения.

Изложим теперь вкратце некоторые фундаментальные результаты об ε-энтропии и размерности глобальных аттракторов автономных эволюционных уравнений с частными производными. Основной результат можно сформулировать так: для многих важных диссипативных автономных уравнений и систем уравнений математической физики доказаны теоремы о существовании глобальных аттракторов и установлена конечномерность этих аттракторов. Эти результаты, по-видимому, впервые были получены для двумерной системы Навье–Стокса, которая является весьма популярным объектом исследований в области аттракторов бесконечномерных динамических систем. Эти и другие результаты были получены в работах О.А.Ладыженской[2], М.И.Вишика, А.В.Бабина[3], П.Константина, С.Фояш, Р.Темама[4], Дж.Хейла[5] их учеников и многих других математиков.

---

[2] *Ладыженская О.А.* О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1972. Т. 27. С. 91–115.

[3] *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // УМН. 1983. Т. 38. N 4, С. 133–187.

[4] *Constantin P., Foias C., Temam R.* Attractors representing turbulent flows. Mem. Amer. Math. Soc. V. 53. 1985.

[5] *Hale J.K.* Asymptotic behaviour of dissipative systems. Math. Surveys and Mon. V. 25. Providence: AMS. 1988.

Автономное эволюционное уравнение можно записать в следующей форме:

$$\partial_t u = A(u),\ u|_{t=0} = u_0(x) \in E,\ t \geq 0. \tag{4}$$

Здесь $u = u(x,t)$ – решение уравнения (4), x – пространственная переменная, а t – время. Правая часть $A(u)$ уравнения (4) является некоторым (нелинейным) оператором, зависящим от функции u и от ее частных производных по x. Функция $u_0(x)$ в (4) определяет начальное состояние динамической системы, описываемой этим уравнением, т.е., $u(x,0) = u_0(x)$. Начальное условие $u_0(x)$ принадлежит некоторому бесконечномерному банахову пространству E, которое называется *фазовым пространством* задачи (4). Фазовое пространство E выбирается, исходя из физического смысла задачи. Например, это может быть некоторое пространство Соболева. Значение $u_0(x)$ можно выбрать произвольно в этом пространстве. Предполагается, что при любой функции $u_0(x)$ из E задача (4) имеет, и притом единственное, решение $u(x,t),\ t \geq 0$, в некотором классе функций, причем $u(\cdot,t) \in E$ при всех $t \geq 0$. Тогда с задачей (4) можно связать семейство нелинейных операторов $\{S(t),\ t \geq 0\}$, $S(t) : E \to E$, действующих по формуле $u_0(x) \longmapsto S(t)u_0(x) = u(x,t)$, где $u(x,t)$ – решение задачи (4) с начальным условием $u_0(x)$. Операторы $\{S(t)\} = \{S(t),\ t \geq 0\}$ образуют *полугруппу*, т.е., $S(0) = \mathrm{Id}$ – тождественный оператор, и $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$ для любых чисел $t_1, t_2 \geq 0$.

В качестве примера задачи (4) рассмотрим двумерную систему Навье–Стокса, которая описывает плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$ с условием прилипания на границе $\partial\Omega$. Система Навье–Стокса имеет вид

$$\begin{cases} \partial_t u = -\nu L u - B(u,u) + g\,(x)\,,\ \operatorname{div} u = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x) \in H. \end{cases} \tag{5}$$

Система записана в проекции на пространство соленоидальных векторных полей в $\mathbb{R}^2$, поэтому в ней отсутствует переменная давления $p(x,t)$. Требуется определить поле скоростей жидкости $u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t))$ в каждой точке $x \in \Omega$ в любой момент времени $t \geq 0$, если известно начальное распределение скорости $u_0(x)$. Условие несжимаемости жидкости записано в виде тождества $\operatorname{div} u = \partial_{x_1} u + \partial_{x_2} u = 0$. В системе (5) $\nu > 0$ – вязкость жидкости, $L = -\Pi\Delta$ – оператор Стокса, $B(u,u) = \Pi \sum_{i=1}^{2} u^i \partial_{x_i} u$ – билинейный оператор. Через Π обозначается ортопроектор в пространстве $(L_2(\Omega))^2$ на подпространство H соленоидальных (то есть, с нулевой дивергенцией) векторных полей. Функция $g\,(x) = (g^1(x), g^2(x))$ является внешней силой системы. Предполагается, что $g \in H$. Известно, что при любой функции $u_0(\cdot) \in H$ задача (5) имеет, и притом единственное, решение $u(\cdot,t), t \geq 0$, принадлежащее соответствующему функциональному пространству. При этом $u(\cdot,t) \in H$ при любом $t \geq 0$ и кроме того $u(\cdot,t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Следовательно, задача (5) порождает полугруппу $\{S(t)\}$, действующую в гильбертовом пространстве H.

Дадим определение глобального аттрактора полугруппы $\{S(t)\}$, действующей в некотором банаховом пространстве E.

Определение 3 Компактное множество $\mathcal{A}$ из E называется *глобальным аттрактором* полугруппы $\{S(t)\}$, если

1) множество $\mathcal{A}$ строго инвариантно относительно $\{S(t)\}$, т.е.

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A} \text{ для всех } t \geq 0,$$

2) множество $\mathcal{A}$ притягивает множество $S(t)B$ при $t \to +\infty$, где B – любое ограниченное (в пространстве E) множество начальных условий $\{u_0(x)\} = B$:

$$\mathrm{dist}_E(S(t)B, \mathcal{A}) \to 0, \ t \to +\infty.$$

Здесь $\mathrm{dist}_E(A_1, A_2) = \sup\limits_{a_1 \in A_1} \inf\limits_{a_2 \in A_2} \|a_1 - a_2\|_E$.

Рассмотрим теперь систему Навье–Стокса (5). Если внешняя сила $g(x)$ достаточно мала, то система (5) имеет, и притом единственное, стационарное решение $z(x)$, которое является экспоненциально асимптотически устойчивым. Точнее, рассмотрим следующую безразмерную величину $G = \frac{\|g\|_H}{\lambda_1 \nu^2}$, которая называется числом Грасхофа системы (5). Здесь λ_1 – первое собственное значение оператора Стокса L. Тогда существует абсолютная константа $c_0 > 0$ такая, что если $G < c_0$, то имеется единственное решение $z = z(x)$ стационарной задачи Навье–Стокса

$$-\nu Lz - B(z, z) + g(x) = 0, \ \mathrm{div} z = 0, \ u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

При этом для любого решения $u(t) = S(t)u_0$ ($u(t) := u(x, t)$) уравнения (5), выполнено неравенство

$$\|u(t) - z\|_H \leq C\|u_0 - z\|_H e^{-\gamma t}, \ \forall t \geq 0 \ (\gamma > 0). \tag{7}$$

Из (7) следует, что при $G < c_0$ глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ полугруппы $\{S(t)\}$ задачи (5) состоит из одной точки z : $\mathcal{A} = \{z(x)\}$.

Если число Грасхофа G велико, то стационарное решение $z(x)$ теряет устойчивость. Появляются другие стационарные решения и новые предельные траектории, например, предельные циклы, предельные торы, неустойчивые многообразия, выходящие из стационарных точек. Все эти траектории включаются в глобальный аттрактор $\mathcal{A}$. С ростом G картина еще больше запутывается. Появляются хаотические траектории наподобие странного аттрактора Лоренца. Общая структура глобального аттрактора сильно усложняется и становится нерегулярной, хаотической. Отметим, что большинство из этих заключений сделаны на основе компьютерного моделирования системы (5). Строгие результаты доказаны только для отдельных частных случаев. В общем случае доказано существование глобального аттрактора $\mathcal{A}$ системы (5) и изучены некоторые его свойства. Установлен важный результат о конечномерности глобального аттрактора двумерной системы Навье–Стокса. Оценки сверху для размерности глобального аттрактора неоднократно улучшались в работах многих авторов. Наилучшие известные оценки получаются с помощью неравенств Либа–Тирринга. Они имеют следующий вид

$$\mathbf{d}_H(\mathcal{A}) \leq c_1 G, \ \mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \leq c_2 G. \tag{8}$$

Однако, константы c_1 и c_2, полученные в этих работах, отличаются, то есть $c_1 < c_2$. Из второго неравенства (8) следует оценка для колмогоровской ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \lesssim c_2 G \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{9}$$

Оценки, аналогичные (8) и (9) для хаусдорфовой и фрактальной размерности глобальных аттракторов широкого класса автономных уравнений математической физики были доказаны в работах Р.Темама[6], А.В.Бабини, М.И.Вишика[7] и других математиков. В основе доказательства лежит исследование свойств сжатия конечномерных объемов под действием квазидифференциалов полугрупп, порождаемых этими автономными уравнениями. Для удобства изложения приведем один общий результат об оценивании ε-энтропии и фрактальной размерности инвариантных множеств полугрупп. Он является следствием более общих теорем, доказанных в диссертации для ε-энтропии глобальных аттракторов неавтономных эволюционных уравнений.

Пусть задана некоторая полугруппа $\{S(t)\}$, действующая в гильбертовом пространстве H. Рассматривается компактное множество X в H, $X \Subset H$. Пусть множество X строго инвариантно относительно $\{S(t)\}$, т.е. $S(t)X = X$ для всех $t \geq 0$. Например, множество X может быть глобальным аттрактором полугруппы $\{S(t)\}$, $X = \mathcal{A}$ (см. определение 3). Предполагается, что полугруппа $\{S(t)\}$ *равномерно квазидифференцируема на* X в следующем смысле: для любого $t \geq 0$ и для каждого $u \in X$ имеется линейный ограниченный оператор $L(t,u) : E \to E$ (*квазидифференциал*) такой, что

$$\|S(t)u_1 - S(t)u - L(t,u)(u_1 - u)\|_H \leq \gamma(\|u_1 - u\|_H, t)\|u_1 - u\|_H \tag{10}$$

для любых $u, u_1 \in X$, причем функция $\gamma = \gamma(\xi, t) \to 0+$ при $\xi \to 0+$ для каждого фиксированного $t \geq 0$. Предполагается, что линейные операторы $L(t,u)$ порождаются уравнением в вариациях вида

$$\partial_t v = A_u(u(t))v, \;\; v|_{t=0} = v_0 \in H, \tag{11}$$

где $u(t) = S(t)u_0$, $u_0 \in X$, а $A_u(\cdot)$ – формальная производная по u оператора $A(\cdot)$, причем область определения H_1 оператора $A_u(u(t))$ плотна в H. Предполагается, что линейная задача (11) однозначно разрешима для любого $v_0 \in H$ при всех $u_0 \in X$. По нашему предположению в неравенстве (10) квазидифференциалы $L(t, y_0)z_0 = z(t)$, где $z(t)$ – решение уравнения (11).

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $L : H_1 \to H$ – линейный, возможно, неограниченный оператор. Тогда m-мерным следом оператора L называется число

$$\mathrm{Tr}_m L = \sup_{\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,m}} \sum_{i=1}^{m} (L\varphi_i, \varphi_i), \tag{12}$$

где точная верхняя грань взята по всевозможным ортонормированным в H семействам векторов $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,m}$, лежащим в H_1.

Определение 4 Введем следующие числа:

$$\tilde{q}_j = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_{u_0 \in X} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{Tr}_j(A_u(u(s))ds, \; j = 1, 2, \dots \;, \tag{13}$$

где $u(t) = S(t)u_0$.

[6] *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1988, 1997.

[7] *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

Утверждение 1 *Предположим, что полугруппа $\{S(t)\}$, действующая в пространстве H, имеет компактное строго инвариантное множество X и является равномерно квазидифференцируемой на X. Пусть выполнены неравенства*

$$\tilde{q}_j \leq q_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

где числа $\tilde{q}_j$ определены в (13). Предполагается, что функция q_j выпукла вверх по j (как $\cap$). Пусть m – наименьшее число, такое что $q_{m+1} < 0$ (очевидно, что $q_m \geq 0$). Обозначим

$$d = m + \frac{q_m}{q_m - q_{m+1}}. \tag{15}$$

Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся такие числа $\alpha \in (0, 1)$ и $\varepsilon_0 > 0$, что для ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(X)$ множества X выполнена следующая оценка:

$$\mathbf{H}_\varepsilon(X) \leq (d + \delta) \log_2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha \varepsilon} \right) + \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(X), \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{16}$$

Кроме того, множество X имеет конечную фрактальную размерность и

$$\mathbf{d}_F(X) \leq d. \tag{17}$$

Доказательство приведено в § 4 главы III.

Замечание 1 Отметим, что оценки вида (17) для хаусдорфовой размерности $\mathbf{d}_H(X)$ были доказаны в работе А.Дуади и Ж.Остерле для $q_j \equiv \tilde{q}_j$ без условия выпуклости функции $\tilde{q}_j$ по j. Однако в конкретных приложениях бывает очень трудно вычислить точное значение $\tilde{q}_j$. Вместо этого используются разные оценки сверху этой величины вида (14). При этом функции q_j обычно получаются выпуклыми по j. В результате с помощью утверждения 1 устанавливаются оценки фрактальной размерности, совпадающие с известными оценками хаусдорфовой размерности глобальных аттракторов конкретных уравнений математической физики (ср. с (8), где $c_1 < c_2$).

Предмет исследований. Основные результаты данной диссертации относятся к построению глобальных аттракторов и оценке их колмогоровской ε-энтропии для неавтономных уравнений математической физики.

Неавтономные уравнения естественно возникают во многих задачах физики и механики, когда необходимо учесть зависимость от времени основных параметров изучаемых моделей и соответствующих им уравнений с частными производными. Такими параметрами могут быть зависящие от времени внешние силы, функции взаимодействия, различные коэффициенты, функции управления процессами, например входные сигналы, зависящие от времени и многие другие члены уравнений. Все эти явно зависящие от времени функции могут существенно влиять на динамику решений изучаемых уравнений, которые не являются автономными и к ним становится неприменимой изложенная выше теория. Трудность возникает уже при определении глобального аттрактора неавтономного уравнения.

Важной количественной характеристикой глобальных аттракторов автономных уравнений служит его размерность (хаусдорфова или фрактальная). Напомним, что глобальный аттрактор – это компактное множество бесконечномерного фазового пространства, к которому притягиваются все траектории данной системы. Его конечномерность означает возможность описания, хотя бы в принципе, предельной динамической системы с помощью эволюции конечного множества параметров, число которых зависит от размерности этого аттрактора. В некоторых частных случаях даже удается свести задачу к системе конечного числа обыкновенных уравнений в конечномерном пространстве.

Как уже отмечалось для многих основных классов автономных диссипативных эволюционных уравнений математической физики была доказана конечномерность их глобальных аттракторов. Однако при исследовании глобальных аттракторов неавтономных уравнений наблюдается совершенно иная картина. Уже простые примеры показывают, что глобальный аттрактор неавтономного уравнения с достаточно общей зависимостью его членов и коэффициентов от времени имеет бесконечную размерность, являясь при этом компактным множеством фазового пространства. Ниже мы рассмотрим такой пример. Это явление приводит к необходимости исследовать другие численные характеристики компактных множеств, среди которых важное значение имеет колмогоровская ε-энтропия. Колмогоровская ε-энтропия позволяет оценить сложность глобального аттрактора при решении задач аппроксимации изучаемых неавтономных динамических систем более простыми, конечномерными системами.

Цель работы. Изучение глобальных аттракторов эволюционных уравнений математической физики. Построение общей теории аттракторов неавтономных эволюционных уравнений. Доказательство теорем о существовании и структуре глобальных аттракторов широкого класса неавтономных уравнений с частными производными.

Разработка методов для определения колмогоровской ε-энтропии глобальных аттракторов неавтономных динамических систем в бесконечномерных фазовых пространствах. Доказательство оптимальных оценок сверху для ε-энтропии и для фрактальной размерности глобальных аттракторов основных неавтономных уравнений математической физики.

Методы исследования. В работе использовались методы теории нелинейных уравнений математической физики, основанные на последовательном применении теории обобщенных функций, пространств Соболева и теорем вложения. Эти методы были глубоко развиты применительно к автономным эволюционным уравнениям математической физики в работах Лионса[8], Ладыженской[9], Вишика, Бабина, Темама и других математиков. В данной диссертации эти методы обобщаются для исследования неавтономных эволюционных уравнений математической физики.

При исследовании предельного поведения решений неавтономных эволюционных уравнений применяются методы теории бесконечномерных динамических систем, которые изначально были развиты для применения к автономным эволюционным уравнениям. Главное место занимает построение глобального аттрактора соответствующей динамической системы, действующей в некотором бесконечномерном фазовом пространстве задачи. Глобальный аттрактор является объектом, который содержит

[8] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

[9] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.

в себе всевозможные стационарные и нестационарные предельные траектории данной динамической системы.

При изучении колмогоровской ε-энтропии глобальных аттракторов применялись и обобщались глубокие результаты об оценках коэффициентов сжатия объемов под действием квазидифференциалов полугрупп, которые позволили обобщить известные оценки размерности глобальных аттракторов автономных уравнений математической физики и доказать соответствующие оценки для ε-энтропии глобальных аттракторов неавтономных аналогов и обобщений этих уравнений.

Научная новизна. В диссертации излагается общая теория глобальных аттракторов неавтономных эволюционных уравнений математической физики. Доказаны теоремы о существовании и структуре глобальных аттракторов динамических процессов, порождаемых неавтономными эволюционными уравнениями. Построенная теория охватывает весьма широкий класс неавтономных уравнений с трансляционно-компактными по времени членами.

Полученные результаты применяются для построения глобальных аттракторов многих классов неавтономных уравнений математической физики, автономные аналоги которых были подробно изучены в математической литературе.

Предложены новые методы для вывода оценок сверху для колмогоровской ε-энтропии глобальных аттракторов общих неавтономных эволюционных уравнений в бесконечномерных фазовых пространствах. Получены конкретные оптимальные (в некотором смысле) оценки сверху ε-энтропии глобальных аттракторов многих неавтономных эволюционных уравнений математической физики. Особое внимание уделено случаям почти периодической и квазипериодической зависимости от времени. В последнем случае доказана конечность фрактальной размерности глобальных аттракторов и выведены явные формулы для оценок сверху, зависящие от основных параметров конкретной задачи.

Все результаты являются новыми и находятся на высоком мировом уровне.

Практическая и теоретическая ценность. Работа имеет теоретическое значение. Проведено исследование глобальных аттракторов неавтономных уравнений математической физики. Предложены новые эффективные методы для количественного оценивания сложности глобальных аттракторов неавтономных динамических систем с помощью колмогоровской ε-энтропии. Разработанные методы могут быть применены для исследования структуры многих неавтономных эволюционных уравнений и систем математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались в Институте проблем передачи информации на семинаре Лаб.1 по нелинейному функциональному анализу под рук. проф. М.И.Вишика и проф. А.М.Красносельского в 2000–2003 гг.;

в Московском государственном университете на механико-математическом факультете на семинаре по уравнениям с частными производными под рук. проф. М.И.Вишика в 2001–2003 гг;

в Университете Пуатье (Франция) на семинаре по уравнениям математической физики под рук. проф. А.Миранвиля в 2002 г.

в Университете Тулузы (Франция) на семинаре по динамическим системам под рук. проф. Ю.М.Егорова в 2002 г.;

в Свободном университете Берлина (Германия) на семинаре по уравнениям с частными производными под рук. проф. Б.Фидлера в 1999 г.;

в Университете Париж–11 (Франция) на семинаре по нелинейному функциональному анализу под рук. проф. Р.Темама в 2001 г.;

в Политехническом институте Милана (Италия) на семинаре по уравнениям математической физики под рук. проф. Дж.Проузе в 1997 г.;

на международной конференции EQUADIFF99 (Берлин) в 1999 г.;

на Математическом симпозиуме по уравнениям с частными производными в Свободном университете, Берлин в 2001г.

на международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" посвященной столетию со дня рождения И.Г.Петровского в МГУ в 2001 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано более 30 работ. В конце настоящего автореферата приведен список из 20 статей и одной книги, в которых изложено основное содержание диссертации.

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Часть результатов получена совместно с М.И.Вишиком.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 236 страницах, состоит из введения, пяти глав, разбитых на 36 параграфов, одного рисунка, списка цитированной литературы, включающего 171 ссылку, и предметного указателя.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава I имеет вводный характер. В ней приводятся основные обозначения, которые используются в следующих главах. Даются определения основных функциональных пространств и формулируются классические теоремы вложения. Кроме того, здесь формулируются некоторые важные теоремы относительно различных классов функций со значениями банаховых пространствах (§ 1). Приводятся основные сведения, касающиеся почти периодических и квазипериодических функций со значениями в метрических и банаховых пространствах (§ 2). Далее в этой главе излагаются основы теории полугрупп, соответствующих автономным диссипативным эволюционным уравнениям. Вводится основное понятие глобального аттрактора полугруппы и формулируется фундаментальная теорема о существовании глобального аттрактора полугруппы (§ 3). В главе также рассматриваются основные примеры автономных эволюционных уравнений математической физики, для которых строятся их глобальные аттракторы. Здесь рассматриваются различные системы параболических уравнений с частными производными, которые являются модельными системами реакции-диффузии различных типов, уравнение Гинзбурга–Ландау, двумерная система Навье–Стокса, а также диссипативное квазилинейное волновое уравнение гиперболического типа. Для всех изучаемых уравнений приводятся точные постановки задач в соответствующих функциональных пространствах, формулируются основные теоремы о существовании и единственности решений соответствующих начальных задач Коши. Затем проверяется свойство диссипативности для этих уравнений, которое позволяет применить к исследованию этих уравнений общую теорию полугрупп и построить глобальные аттракторы для всех рассматриваемых уравнений и систем (§ 4).

Далее в главе I дается краткий обзор основных известных результатов относительно размерности глобальных аттракторов автономных уравнений с частными производными. Приводится основная теорема о конечности хаусдорфовой размерности компактного множества, инвариантного под действием некоторой полугруппы, квазидифференциал которой сжимает конечномерные объемы соответствующей размерности. Приводятся элементы методов, которые используются при получении этих фундаментальных результатов. В основе лежит исследование показателей Ляпунова соответствующих уравнений в вариациях, которые получаются из исходных эволюционных уравнений. Основная теорема применяется к оценке сверху хаусдорфовой размерности глобальных аттракторов автономных уравнений математической физики, рассматриваемых в этой главе (§ 5).

Главе II диссертации посвящена неавтономным эволюционным уравнениям и их глобальным аттракторам. В этой главе подробно и систематически изучаются общие неавтономные эволюционные уравнения и порождаемые ими процессы. Понятие процесса является обобщением понятия полугруппы, известного из теории автономных эволюционных уравнений. Здесь вводится важное понятие временного символа неавтономного уравнения, которое позволяет сводить задачу об изучении структуры глобального аттрактора исходного неавтономного уравнения к исследованию свойств некоторого семейства родственных неавтономных уравнений, временные символы которых получаются из пространства символов, совпадающего с оболочкой символа исходного уравнения. Приводятся основные примеры таких семейств процессов, для которых пространствами символов служат оболочки символов исходных уравнений, которые предполагаются трансляционно-компактными функциями в соответствующих топологических пространствах (§§ 1,2). Далее в этой главе дается определение глобального аттрактора неавтономного уравнения и соответствующего процесса, которое обобщает понятие глобального аттрактора автономного уравнения (§ 3). Здесь же обсуждается соотношение между различными определениями равномерных и неравномерных глобальных аттракторов процессов и семейств процессов. Затем доказываются основные теоремы о существовании и структуре глобальных аттракторов общих неавтономных уравнений с трансляционно-компактными символами. Эти теоремы доказываются с помощью метода сведения задачи к изучению глобальных аттракторов некоторых полугрупп, действующих в расширенных фазовых пространствах, включающих в себя пространства символов изучаемых неавтономных уравнений (§ 4,5).

Неавтономное эволюционное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\partial_t u = A(u,t), \quad u|_{t=\tau} = u_\tau \in E, \quad t \geq \tau. \tag{18}$$

Нелинейный оператор $A(u,t)$ зависит от функции u, ее частных производных по x, а также от времени $t \in \mathbb{R}$. Начальное условие u_τ, принадлежащее банахову пространству E, задается при $t = \tau$, где τ – любое фиксированное число. Предполагается, что при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и любом $u_\tau \in E$ задача (18) имеет, и притом единственное, решение $u(t)$ такое, что $u(t) \in E$ при всех $t \geq \tau$. Рассматривается двупараметрическое семейство нелинейных операторов $\{U(t,\tau)\}$, $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, в E, которое строится по формуле

$$U(t,\tau)u_\tau = u(t), \ \ t \geq \tau, \ \ \tau \in \mathbb{R}, \ u_\tau \in E, \tag{19}$$

где $u(t)$ – решение (18) с начальным условием $u_\tau \in E$. Семейство операторов $\{U(t,\tau)\}$ называется *процессом*, порожденным задачей (18). Процесс имеет следующие свойства: 1) $U(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$; 2) $U(t,s) \circ U(s,\tau) = U(t,\tau)$ при всех $t \geq s \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$. Если операторы $A(u,t)$ в (18) не зависят от времени, то процесс $\{U(t,\tau)\}$ является полугруппой $U(t,\tau) = S(t-\tau)$, порождаемой автономной задачей (4).

В качестве примера рассмотрим двумерную систему Навье–Стокса, в которой внешняя сила зависит от времени,

$$\begin{cases} \partial_t u = -\nu L u - B(u,u) + g_0(x,t), \ \operatorname{div} u = 0, \ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=\tau} = u_\tau(x) \in H. \end{cases} \tag{20}$$

Все обозначения имеют тот же смысл, что и в системе (5). Предполагается, что зависящая от времени внешняя сила $g_0(\cdot,t) \in C_b(\mathbb{R}; H)$, то есть, она является непрерывной ограниченной функцией времени со значениями в пространстве H. Как и в автономном случае справедлива теорема о существовании и единственности решения этой задачи: для любого $u_\tau(\cdot) \in H$ существует, и притом единственное, решение $u(x,t)$ задачи (20), причем $u(\cdot,t) \in C_b(\mathbb{R}_\tau; H)$. Здесь обозначено $\mathbb{R}_\tau = [\tau, +\infty)$. Следовательно задача (20) порождает процесс $\{U(t,\tau)\}$, действующий в H по формуле (19).

Дадим определение *глобального аттрактора* $\mathcal{A}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$. Через $\mathcal{B}(E)$ обозначается семейство всех ограниченных множеств в E. Множество $P \subset E$ называется (равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$) *притягивающим* для процесса $\{U(t,\tau)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого множества $B \in \mathcal{B}(E)$

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \operatorname{dist}_E \left(U(\tau+h,\tau)B, P\right) \to 0, \ \ h \to +\infty. \tag{21}$$

Процесс $\{U(t,\tau)\}$ называется *асимптотически компактным*, если он имеет компактное притягивающее множество.

Определение 5 Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется *глобальным аттрактором* процесса $\{U(t,\tau)\}$, если оно замкнуто в E, является притягивающим для процесса $\{U(t,\tau)\}$ и обладает свойством минимальности, т.е. $\mathcal{A}$ принадлежит любому замкнутому притягивающему множеству этого процесса.

Понятие глобального аттрактора процесса было введено в работах А.Аро[10] (см. также книгу В.В.Чепыжова и М.И.Вишика[11]).

Рассмотрим процесс $\{U(t,\tau)\}$, отвечающий системе (20). В § 6.1 доказано, что этот процесс имеет *компактное* в E *поглощающее* множество. Это доказывается с помощью основных энергетических априорных оценок задачи.

[10] *Haraux A.* Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Paris: Masson, 1991.

[11] *Чепыжов В.В., Вишик М.И.* Attractors for equations of mathematical physics. AMS Colloquium Publications. V. 49. Providence: AMS, 2002.

Для описания общей структуры глобального аттрактора процесса необходимы некоторые дополнительные понятия. Функция $u(s), s \in \mathbb{R}$, со значениями в E называется *полной траекторией* процесса $\{U(t,\tau)\}$, если

$$U(t,\tau)u(\tau) = u(t) \text{ для всех } t \geq \tau,\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Определение 6 Ядром $\mathcal{K}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ называется семейство всех ограниченных полных траекторий этого процесса:

$$\mathcal{K} = \{u(\cdot) \mid u \ \text{ удовлетворяет (22) и } \|u(s)\|_E \leq C_u,\ \forall s \in \mathbb{R}\}.$$

Множество $\mathcal{K}(t) = \{u(t) \mid u(\cdot) \in \mathcal{K}\} \subset E,\ \ t \in \mathbb{R}$, называется *сечением* ядра в момент времени t. Легко проверяется следующее свойство.

Утверждение 2 *Если процесс $\{U(t,\tau)\}$ имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, то все сечения его ядра принадлежат $\mathcal{A}$:*

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{K}(t) \subseteq \mathcal{A}. \tag{23}$$

Отметим, что в общем случае включение (23) является строгим, т.е. на глобальном аттракторе $\mathcal{A}$ могут лежать точки, которые не являются значениями ограниченных полных траекторий исходного уравнения (18). Однако, как будет показано ниже, такие точки являются значениями ограниченных полных траекторий уравнений, "родственных" исходному уравнению. Чтобы описать эти "родственные" уравнения, вводится понятие *временного символа* рассматриваемого уравнения. Предположим, что все члены уравнения (18), которые явно зависят от времени t, можно записать в виде функции $\sigma(t),\ \ t \in \mathbb{R}$, со значениями в некотором банаховом пространстве Ψ. При этом само уравнение (18) можно переписать в следующем виде:

$$\partial_t u = A_{\sigma(t)}(u),\ \ y|_{t=\tau} = y_\tau \in E,\ \ t \geq \tau. \tag{24}$$

Функция $\sigma(t)$ называется временны́м символом уравнения. Например, в неавтономной системе (18) символом является внешняя сила $g_0(\cdot,t),\ \ \sigma(t) = g_0(\cdot,t)$, значения которой принадлежат пространству $H = \Psi$. Для простоты будем предполагать, что $\sigma(t) \in C(\mathbb{R};\Psi)$.

Символ исходного уравнения (18) обозначим через $\sigma_0(t)$. Вместе с этим уравнением, имеющим символ $\sigma_0(t)$, мы также рассмотрим уравнения (18), в которых символами служат функции $\sigma(t) = \sigma_0(t+h)$ при любом $h \in \mathbb{R}$. Кроме того, рассматриваются также уравнения, символы $\sigma(t)$ которых получаются предельными переходами из последовательностей вида $\sigma_0(t+h_n)$ при $n \to \infty$. Пределы берутся в пространстве $C(\mathbb{R};\Psi)$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, которая определяется следующим образом. По определению последовательность функций $\{\xi_n(t)\}$ из $C(\mathbb{R};\Psi)$ сходится к функции $\xi(t)$ при $n \to \infty$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, если для любого фиксированного $M > 0$

$$\max_{t\in[-M,M]} \|\xi_n(t) - \xi(t)\|_\Psi \to 0,\ \ n \to \infty.$$

Введенная топология локальной равномерной сходимости в $C(\mathbb{R};\Psi)$ является метризуемой, а соответствующее метрическое пространство полно.

Определение 7 Множество

$$\mathcal{H}(\sigma_0) = [\{\sigma_0(t+h) \mid h \in \mathbb{R}\}]_{C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)} \tag{25}$$

называется оболочкой функции $\sigma_0(t)$ в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Здесь, как обычно, квадратные скобки $[\,\cdot\,]_{C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)}$ обозначают замыкание в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$.

Рассматривается семейство уравнений (24), символы которых $\sigma(t)$ принадлежат оболочке $\mathcal{H}(\sigma_0)$ символа $\sigma_0(t)$ исходного уравнения (18). Будем предполагать, что $\sigma_0(t)$ является *трансляционно-компактной* функцией в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$.

Определение 8 Функция $\sigma_0(t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$ называется трансляционно-компактной в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, если ее оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактна в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$.

Рассмотрим некоторые примеры трансляционно-компактных функций.

Пример 1 Пусть функция $\sigma_0(t)$ является почти периодической со значениями в банаховом пространстве Ψ. По определению это означает, что ее оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактна в пространстве $C_b(\mathbb{R};\Psi)$ с топологией равномерной сходимости на всей оси $\mathbb{R}$. Топология $C_b(\mathbb{R};\Psi)$, очевидно, сильнее топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, поэтому, если множество $\mathcal{H}(\sigma_0)$ компактно в $C_b(\mathbb{R};\Psi)$, то оно компактно и в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$, т.е. функция $\sigma_0(t)$ трансляционно-компактна в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$.

Пример 2 Важным частным случаем почти периодических функций являются квазипериодические функции со значениями в Ψ. Функция $\sigma_0(t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$ называется квазипериодической, если она представима в виде

$$\sigma_0(t) = \phi(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_k t) = \phi(\bar{\alpha} t), \quad \phi(\bar{\alpha} t) \in \Psi, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

где функция $\phi(\bar{\omega}) = \phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ является непрерывной и 2π-периодической по каждому аргументу $\omega_i \in \mathbb{R}$. При $k=1$ получаются периодические функции. Пусть $\mathbb{T}^k = [\mathbb{R} \bmod 2\pi]^k$ обозначает k-мерный тор. Тогда $\phi(\bar{\omega}) \in C(\mathbb{T}^k;\Psi)$. Предполагается, что компоненты вектора $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ в (26) являются рационально независимыми числами (иначе можно сократить число независимых аргументов ω_i в представлении (26)). Легко показать, что оболочку квазипериодической функции $\sigma_0(t)$ в $C_b(\mathbb{R};\Psi)$ образуют функции

$$\left\{\phi(\bar{\alpha} t + \bar{\omega}_1) \mid \bar{\omega}_1 \in \mathbb{T}^k\right\} = \mathcal{H}(\sigma_0). \tag{27}$$

Следовательно, оболочка $\mathcal{H}(\sigma_0)$ является непрерывным образом k-мерного тора $\mathbb{T}^k$. В частности, если функция $\phi(\bar{\omega})$ является гладкой, то фрактальная размерность множества $\mathcal{H}(\sigma_0)$ не превосходит k :

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{H}(\sigma_0)) \le \mathbf{d}_F(\mathbb{T}^k) = k, \tag{28}$$

и в случае общего положения равна k (неравенство в (28) может быть строгим).

В диссертации приведены другие примеры трансляционно-компактных функций, которые не являются почти периодическими или квазипериодическими.

Рассмотрим теперь семейство уравнений (24) с символами $\sigma(t) \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, где $\sigma_0(t)$ – трансляционно-компактная функция $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Предполагается, что для каждого символа $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$ задача Коши (24) однозначно разрешима при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и для каждого начального условия $u_\tau \in E$. Следовательно, имеется семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, действующих в пространстве E. Семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, называется $(E \times \mathcal{H}(\sigma_0), E)$-непрерывным, если для любых t и $\tau, t \geq \tau$, отображение $(u,\sigma) \mapsto U_\sigma(t,\tau)u$ непрерывно из $E \times \mathcal{H}(\sigma_0)$ в E.

Сформулируем основную теорему о структуре глобального аттрактора уравнения (24) с трансляционно-компактным символом $\sigma_0(t)$, доказанную в диссертации. Процесс, порожденный этим символом, обозначим $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$.

Теорема 1 *Предположим, что функция $\sigma_0(t)$ трансляционно-компактна в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Пусть процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ является асимптотически компактным, а соответствующее ему семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}, \sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, является $(E \times \mathcal{H}(\sigma_0), E)$-непрерывным. Тогда процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A} \Subset E$, для которого справедливо следующее равенство:*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)} \mathcal{K}_\sigma(0) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)} \mathcal{K}_\sigma(t), \qquad (29)$$

где $\mathcal{K}_\sigma$ – ядро процесса $\{U_\sigma(t,\tau)\}$ с символом $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. Здесь t – любое фиксированное число. Ядро $\mathcal{K}_\sigma$ не пусто при любом $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$.

Полученные общие результаты применяются к исследованию неавтономных уравнений математической физики, которые являются объектами изучения данной диссертации. Соответствующие автономные уравнения рассмотрены в главе I. Исследуются следующие уравнения и системы уравнений с частными производными: двумерная система Навье–Стокса с зависящей от времени внешней силой, различные неавтономные системы уравнений реакции-диффузии, в которых функции взаимодействия и внешние силы зависят от времени, неавтономное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, неавтономное волновое уравнение с диссипацией и с зависящими от времени членами и коэффициентами. Для каждого из изучаемых уравнений рассматриваются следующие вопросы: выделяется временной символ уравнения как функция времени со значениями в подходящем функциональном пространстве, адекватно отражающем физический смысл задачи; формулируется критерий трансляционно компактности временного символа изучаемого уравнения; приводится теорема существования и единственности решений задачи Коши, соответствующей данному уравнению; строится процесс, порождаемый данным уравнением, а также соответствующее семейство родственных уравнений, символы которых берутся из оболочки исходного уравнения; доказываются основные свойства этих семейств процессов; строится компактное поглощающее или притягивающее множество изучаемого процесса а также ядро уравнения; наконец, строится глобальный аттрактор исходного неавтономного уравнения и дается описание его структуры в терминах сечений ядер семейства родственных уравнений (§ 6).

Применяя теорему 1 к исследованию неавтономной системы Навье–Стокса (20), получаем следующий результат.

Утверждение 3 *Предположим, что внешняя сила $g_0(\cdot,t)$ в уравнении (20) является трансляционно-компактной функцией в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Тогда процесс $\{U_{g_0}(t,\tau)\}$ задачи (20) имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}\Subset E=H$, причем*

$$\mathcal{A}=\bigcup_{g\in\mathcal{H}(g_0)}\mathcal{K}_g(0), \tag{30}$$

где $\mathcal{K}_g$ – ядро системы Навье–Стокса с внешней силой $g(\cdot,t)\in\mathcal{H}(g_0)$.

Сформулируем неавтономный аналог утверждения (7). Обозначим

$$\|g_0\|^2_{L_2^b(\mathbb{R};H)}\equiv\|g_0\|^2_{L_2^b}:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|g_0(\cdot,s)|^2ds.$$

Отметим, что $\|g_0\|^2_{L_2^b}<\infty$, если функция g_0 является трансляционно-компактной в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Предположим, что число Грасхофа G неавтономной системы Навье–Стокса (20) удовлетворяет неравенству

$$G:=\frac{\|g_0\|_{L_2^b}}{\lambda\nu^2}<\frac{1}{c_0}, \tag{31}$$

где константа c_0 та же, что и в автономном случае.

Тогда система (20) имеет, и притом единственное, решение $z_0(t), t\in\mathbb{R}$, ограниченное в H, (то есть ядро $\mathcal{K}_{g_0}$ состоит из единственной траектории $z_0(t)$). Это решение $z_0(t)$ является экспоненциально устойчивым: для любого решения $u(t)$ уравнения (20) выполнено следующее неравенство:

$$|u(t)-z_0(t)|\le C_0|u_\tau-z_0(\tau)|e^{-\beta(t-\tau)}\ \forall t\ge\tau, \tag{32}$$

где $u(t)=U_{g_0}(t,\tau)u_\tau$ (константы C_0 и β не зависят от u_τ и τ). Если известно, что $g_0(x,t)=\phi(x,\alpha_1t,\alpha_2t,\dots,\alpha_kt)$ – квазипериодическая функция, причем функция $\phi(\bar\omega)\in C^{Lip}(\mathbb{T}^k;H)$ непрерывная по Липшицу, то $z_0(x,t)$ также квазипериодическая с тем же набором рационально независимых частот, т.е.

$$z_0(x,t)=\Phi(x,\alpha_1t,\alpha_2t,\dots,\alpha_kt), \tag{33}$$

где $\Phi(x,\bar\omega)\in C^{Lip}(\mathbb{T}^k;E)$ – некоторая непрерывная по Липшицу, периодическая функция относительно $\bar\omega\in\mathbb{T}^k$.

С помощью неравенства (32) из утверждения 3 легко выводится, что глобальным аттрактором системы (20) при условии (31) служит множество

$$\mathcal{A}=\left[\{z(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\right]_H. \tag{34}$$

Если дополнительно известно, что $g_0(x,t)=\phi(x,\alpha_1t,\alpha_2t,\dots,\alpha_kt)$ является квазипериодической функцией, то из представления (33) ограниченной траектории $z_0(t)$ и из (34) находим, что $\mathcal{A}=\Phi(\mathbb{T}^k)$. Поэтому, из непрерывности по Липшицу функции Φ, получаем оценку для фрактальной размерности аттрактора $\mathcal{A}$: $\mathbf{d}_F(\mathcal{A})=\mathbf{d}_F(\Phi(\mathbb{T}^k))\le\mathbf{d}_F(\mathbb{T}^k)=k$, а для его ε-энтропии справедливо неравенство

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A})\lesssim k\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{35}$$

Легко построить примеры функций $g_0(x,t)$ для которых $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = k$. Для этого достаточно выбрать подходящую гладкую функцию $z_0(x,t)$ вида (33) и подставить ее в систему (20) для нахождения $g_0(x,t)$. Так же строится пример почти периодической функции $g_0(x,t)$ с бесконечным набором рационально независимых частот, для которой $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = +\infty$.

Эти примеры указывают на целесообразность изучения в общем случае колмогоровской ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}$ неавтономной системы Навье–Стокса.

В главе III изучается ε-энтропия и фрактальная размерность инвариантных множеств и глобальных аттракторов полугрупп автономных уравнений. Целью этого исследования является доказательство того факта, что оценки для хаусдорфовой размерности этих множеств, приведенные в главе I, справедливы также и для более сильной, фрактальной размерности этих множеств, причем с той же верхней границей (§ 2). Отметим, что при доказательстве этой теоремы используется техника исследования коэффициентов сжатия объемов под действием квазидифференциалов полугрупп, а также некоторые известные свойства решеток в конечномерном евклидовом пространстве, которые используются при построении оптимальных конечных покрытий компактных множеств шарами в бесконечномерных гильбертовых пространствах (§§ 3,4).

Построенная теория применяется далее для оценки ε-энтропии и фрактальной размерности сечений ядер неавтономных эволюционных уравнений. Доказываются оценки, которые являются обобщениями оценок, полученных ранее для глобальных аттракторов соответствующих автономных уравнений (§§ 5,6). Установленные общие теоремы далее применяются к исследованию сечений ядер конкретных неавтономных уравнений математической физики, которые изучались в главе II, при этом уже не предполагается трансляционная компактность временных символов этих уравнений (§ 7). Глава III завершается рассмотрением простых примеров неавтономных эволюционных уравнений, имеющих почти периодические символы, для которых фрактальная (и хаусдорфова) размерность множества, получающегося замыканием объединения всех сечений ядра, равна бесконечности. Напомним, что это замыкание всегда принадлежит глобальному аттрактору уравнения. Это указывает на то, что в случае общей зависимости от времени коэффициентов эволюционного уравнения, фрактальная размерность глобального аттрактора не может служить подходящей характеристикой этого компактного множества. Необходимо использовать другие, более адекватные характеристики, которые позволили бы судить о сложности глобального аттрактора и были бы инструментами при решении задач аппроксимации глобальных аттракторов. Такой характеристикой может служить колмогоровская ε-энтропия глобального аттрактора.

В главе IV излагаются результаты исследования колмогоровской ε-энтропии глобальных аттракторов общих неавтономных эволюционных уравнений. Доказывается основная теорема о виде верхней границы для ε-энтропии глобального аттрактора неавтономного уравнения с трансляционно компактным временным символом. Главный результат показывает, что в эту оценку входит член, определяемый ε-энтропией оболочки символа исходного уравнения. Кроме того, эта оценка содержит слагаемое, получающееся из верхних оценок сечений ядра этого уравнения, найденное в главе III (§ 1). Далее в § 2 рассматриваются важные частные случаи неавтономных уравнений, для которых удается доказать конечномерность фрактальной размерности глобальных аттракторов. Этот факт имеет место, если оболочка временного символа имеет конечную фрактальную размерность, например, если символ уравнения является квазипериодической функцией с конечным числом k рационально независимых частот. Тогда верхняя граница размерности состоит из двух слагаемых: числа k и оценки размерности сечений ядра этого уравнения, полученной в главе III.

Рассматривается семейство уравнений (24), в котором $\sigma(t) \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. Предполагается, что исходный символ $\sigma_0(t)$ является трансляционно-компактной функцией в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\Psi)$. Рассматривается соответствующее ему семейство процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$, действующих в E. Предполагаются выполненными условия теоремы 1. Тогда процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, который представим в виде (29).

Задача заключается в исследовании ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, E)$ глобального аттрактора $\mathcal{A}$ в пространстве E. При этом предполагается известной ε-энтропия множества $\Pi_{0,l}\mathcal{H}(\sigma_0)$ в пространстве $C([0,l];\Psi)$. Здесь $\Pi_{0,l}$ обозначает оператор сужения на отрезок $[0,l]$.

Сформулируем некоторые дополнительные условия для $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$. Прежде всего, необходимо обобщить понятие квазидифференцируемости, введенное для полугрупп в формуле (10). Пусть $\{U(t,\tau)\}$ – некоторый процесс в E. Пространство E предполагается гильбертовым. Рассмотрим ядро $\mathcal{K}$ этого процесса. Из определения ядра вытекает следующее свойство строгой инвариантности сечений ядра:

$$U(t,\tau)\mathcal{K}(\tau) = \mathcal{K}(t), \ \forall t \geq \tau, \ \ \tau \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

Определение 9 Процесс $\{U(t,\tau)\}$ в E называется *равномерно квазидифференцируемым на* $\mathcal{K}$, если найдется семейство линейных ограниченных операторов $\{L(t,\tau,u)\}$, где $u \in \mathcal{K}(\tau), \ t \geq \tau, \ \tau \in R$, такое что

$$\|U(t,\tau)u_1 - U(t,\tau)u - L(t,\tau,u)(u_1-u)\|_E \leq \gamma(\|u_1-u\|_E, t-\tau)\|u_1-u\|_E \tag{37}$$

для любых $u, u_1 \in \mathcal{K}$, *причем функция* $\gamma = \gamma(\xi,s) \to 0+$ *при* $\xi \to 0+$ *для каждого фиксированного* $s \geq 0$.

Предполагается, что процесс $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ является равномерно квазидифференцируемым на ядре $\mathcal{K}_{\sigma_0}$, причем его квазидифференциал порождается уравнением в вариациях

$$\partial_t z = A_{\sigma_0 u}(u(t))z, \ \ z|_{t=\tau} = z_\tau \in E, \tag{38}$$

где $u(t) = U_{\sigma_0}(t,\tau)u_\tau$, $u_\tau \in \mathcal{K}_{\sigma_0}(\tau)$, т.е., $L(t,\tau,u_\tau)z_\tau = z(t)$, где $z(t)$ – решение задачи (38), которая предполагается однозначно разрешимой при всех $u_\tau \in \mathcal{K}_{\sigma_0}(\tau)$ для любого $z_\tau \in E$. Аналогично (13) вводятся числа

$$\tilde{q}_j = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \sup_{u_0\in\mathcal{K}(\tau)} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Tr}_j(A_{\sigma_0 u}(u(s)))ds, \tag{39}$$

где $u(t) = U_{\sigma_0}(t,\tau)u_\tau$, а след $\mathrm{Tr}_j(L)$ линейного оператора L определен в (12).

Предполагается также выполненным следующее условия Липшица для семейства процессов $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$:

$$\begin{array}{rcl} \|U_{\sigma_1}(h,0)u - U_{\sigma_2}(h,0)u\|_E & \leq & C(h)\|\sigma_1-\sigma_2\|_{C([0,h];\Psi)}, \\ \forall \sigma_1,\sigma_2 \in \mathcal{H}(\sigma_0), & & u \in \mathcal{A},\ h \geq 0. \end{array} \tag{40}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия теоремы 1 и кроме того, пусть исходный процесс* $\{U_{\sigma_0}(t,\tau)\}$ *является равномерно квазидифференцируемым на* $\mathcal{K}_{\sigma_0}$, *причем его квазидифференциалы порождены уравнением в вариациях* (38), *а для чисел* $\tilde{q}_j$ (см. (39)) *выполнены неравенства*

$$\tilde{q}_j \leq q_j,\ j = 1,2,3,\dots \tag{41}$$

Предполагается выполненным условие Липшица (40) *для семейства* $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \mathcal{H}(\sigma_0)$. *Предполагается, что функция* q_j *выпукла вверх по* j. *Пусть* m *– наименьшее число, такое что* $q_{m+1} < 0$ (*тогда* $q_m \geq 0$). *Обозначим*

$$d = m + q_m/(q_m - q_{m+1}).$$

Тогда для любого $\delta > 0$ *найдутся такие числа* $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon_0 > 0$, $h \geq 0$, *что*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon\alpha}{4C(h)}}\left(\Pi_{0,h\log_{1/\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)}\mathcal{H}(\sigma_0)\right),\ \ \forall\varepsilon < \varepsilon_0. \tag{42}$$

Число $C(h)$ *такое же, как в условии Липшица (40).*

Доказательство этой теоремы приведено в главе IV. Сформулируем некоторые важные следствия.

Следствие 1 *Предположим, что функция* $\sigma_0(t)$ *является почти периодической. Тогда неравенство* (42) *можно упростить:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon\alpha}{4C(h)}}\left(\mathcal{H}(\sigma_0)\right),\ \ \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \tag{43}$$

где $\mathbf{H}_\epsilon\left(\mathcal{H}(\sigma_0)\right)$ *–* ϵ*-энтропия оболочки* $\mathcal{H}(\sigma_0)$ *в пространстве* $C_b(\mathbb{R};\Psi)$.

В самом деле, ϵ-энтропия множества $\Pi_{0,l}\mathcal{H}(\sigma_0)$ в пространстве $C([0,l];\Psi)$ не превосходит ϵ-энтропию $\mathcal{H}(\sigma_0)$ в $C_b(\mathbb{R};\Psi)$. Из оценки (43) видно, что в случае общей почти периодической функции $\sigma_0(t)$, имеющей бесконечное число рационально независимых частот, основной вклад в оценку ε-энтропии глобального аттрактора $\mathcal{A}$ вносит ε/L-энтропия оболочки $\mathcal{H}(\sigma_0)$, где $L = \frac{4C(h)}{\alpha}$. Однако если функция $\sigma_0(t)$ имеет конечное число частот, являясь квазипериодической, то вклад этой величины сравним с вкладом $d\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)$, что приводит к конечномерности глобального аттрактора.

Следствие 2 *Пусть в условиях теоремы 1 функция $\sigma_0(t)$ – квазипериодическая вида $\sigma_0(t) = \phi(\alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_k t) = \phi(\bar{\omega} t)$, где $\phi(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) = \phi(\bar{\omega}) \in C^{\mathrm{Lip}}(\mathbb{T}^k; \Psi)$. Тогда оценка* (43) *выглядит так:*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le (d+\delta)\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + k\log_2\left(\frac{8C(h)}{K\alpha\varepsilon}\right), \ \ \forall\varepsilon < \varepsilon_0, \tag{44}$$

где K – константа Липшица из неравенства

$$\|\phi(\bar{\omega}_1) - \phi(\bar{\omega}_2)\|_\Psi \le K\|\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2\|_{\mathbb{R}^k}, \ \ \forall\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \in \mathbb{T}^k.$$

Кроме того,

$$\mathbf{d}_F(A) \le d + k. \tag{45}$$

Напомним, что в автономном случае при $k = 0$ аналогом оценки (45) является оценка (17), в которой $X = \mathcal{A}$: $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \le d$. В неавтономном случае, когда $k \ne 0$, имеет место оценка (45), в которой справа к d прибавляется число k рационально независимых частот квазипериодической функции $\sigma_0(t)$.

Рассмотрим еще две важные характеристики компактного множества X в пространстве E, введенные А.Н.Колмогоровым и В.М.Тихомировым. Число

$$\mathbf{df}(X,E) = \mathbf{df}(X) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \frac{\log_2(\mathbf{H}_\varepsilon(X))}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)} \tag{46}$$

называется *функциональной размерностью* множества X в E, а число

$$\mathbf{q}(X,E) = \mathbf{q}(X) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0+}} \frac{\log_2(\mathbf{H}_\varepsilon(X))}{\log_2(1/\varepsilon)} \tag{47}$$

называется его *метрическим порядком* в E. Легко видеть, что $\mathbf{df}(X) = 1$, $\mathbf{q}(X) = 0$, если $\mathbf{d}_F(X) < +\infty$. Поэтому величины $\mathbf{df}(X)$ и $\mathbf{q}(X)$ характеризуют бесконечномерные множества.

Следствие 3 *Пусть $\sigma_0(t)$ – почти периодическая функция, тогда*

$$\mathbf{df}(\mathcal{A}) \le \mathbf{df}\left(\mathcal{H}(\sigma_0), C_b(\mathbb{R};\Psi)\right), \tag{48}$$

$$\mathbf{q}(\mathcal{A}) \le \mathbf{q}\left(\mathcal{H}(\sigma_0), C_b(\mathbb{R};\Psi)\right). \tag{49}$$

Теперь коротко изложим применение теоремы 2 и следствий 1 – 3 к неавтономной системе Навье–Стокса (20). Как уже отмечалось (см. утверждение 3), эта система имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ в $E = H$, который представим в виде (30).

Теорема 3 *При выполнении условий утверждения 3 найдутся числа $h > 0, L > 0, \varepsilon_0 > 0$ и $\alpha < 1$ такие, что*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le cG\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right) + \mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A}) + \mathbf{H}_{\frac{\varepsilon}{L}}\left(\mathcal{H}(g_0)_{0,h\log_{1/\alpha}\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)}\right) \tag{50}$$

для любого $\varepsilon \le \varepsilon_0$, где G – число Грасхофа, определенное в (31), а c – некоторая абсолютная константа.

Следствие 4 *Если функция $g_0(s)$ является квазипериодической, у которой имеется k рационально независимых частот, то*

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) &\leq cG\log_2\left(\frac{\varepsilon_0}{\alpha\varepsilon}\right)+\mathbf{H}_{\varepsilon_0}(\mathcal{A})+k\log_2\left(\frac{L}{\varepsilon}\right),\ \ \forall\varepsilon\leq\varepsilon_0,\\ \mathbf{d}_F\mathcal{A} &\leq cG+k \qquad (51)\end{aligned}$$

для некоторых положительных чисел α, L и ε_0.

При $k = 0$ оценка (51) совпадает с оценкой (8) для фрактальной размерности глобального аттрактора автономной 2D системы Навье–Стокса.

Аналогичные результаты об оценках сверху ε-энтропии и фрактальной размерности глобальных аттракторов получены для многих классов уравнений математической физики, а именно для неавтономных систем реакции-диффузии, для уравнений Гинзбурга–Ландау, содержащих члены, зависящие от времени, а также для неавтономных диссипативных волновых уравнений (§ 5). Для всех изучаемых уравнений выводятся оценки, которые явно зависят от основных параметров уравнений. Подробно изучаются важные частные случаи, когда символы этих уравнений являются квазипериодическими функциями времени. Приводятся оценки сверху фрактальной размерности глобальных аттракторов таких неавтономных уравнений. Отметим, что методы, разработанные в диссертации применимы к исследованию весьма широких классов неавтономных уравнений математической физики.

В § 6 рассматриваются некоторые классы множеств в различных функциональных пространствах, и доказываются оценки сверху их ε-энтропии. Функции из этих классов могут служить символами различных уравнений математической физики, к которым можно применять результаты об оценке ε-энтропии глобальных аттракторов, если известна ε-энтропия соответствующего пространства символов. Подробно рассматривается один класс почти периодических функций, а также класс функций – сигналов из теории информации. В § 7 доказываются оценки для ε-энтропии глобальных аттракторов в расширенных фазовых пространствах, когда в фазовое пространство включается пространство символов задачи (например, оболочка исходного символа). В этом случае, по неавтономному уравнению строится полугруппа, действующая в расширенном фазовом пространстве, для которой строится глобальный аттрактор. Задача заключается в оценке ε-энтропии этого глобального аттрактора. При этом получаются оценки, аналогичные оценкам глобальных аттракторов неавтономных уравнений.

В главе V изучаются динамические полупроцессы и их глобальные аттракторы. Полупроцесс порождается неавтономным эволюционным уравнением, у которого временной символ $\sigma(t)$ определен не на всей оси времени $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, а только на положительной полуоси: $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Такие эволюционные уравнения описывают динамические системы, у которых не известен закон эволюции в прошлом при отрицательных временах (т.е., не задан временной символ $\sigma(t)$ при $t < 0$). Изучается поведение траекторий таких уравнений при $t \to +\infty$. Полупроцесс определяется аналогично процессу, но для соответствующего семейства операторов $\{U(t, \tau)\}$ область определения параметров t и τ является множество $\{t \geq \tau, \tau \geq 0\}$. Для полупроцесса вводится понятие глобального аттрактора аналогично глобальному аттрактору процесса. Доказывается общая теорема о существовании глобального аттрактора полупроцесса. Устанавливается, что если символ полупроцесса удовлетворяет свойству обратной единственности, то для данного полупроцесса найдется единственный процесс, совпадающий с полупроцессом на множестве $\{t \geq \tau, \tau \geq 0\}$, который имеет такой же глобальный аттрактор, что и изучаемый полупроцесс. Такое сведение аттрактора полупроцесса к аттрактору процесса бывает особенно важным, если получаемый процесс имеет простой временной символ, который, например, является периодической или квазипериодической функцией по времени. Такое сведение обычно приводит к более простой структуре глобального аттрактора исходного неавтономного уравнения, заданного на полуоси времени. В качестве приложений построенной теории изучаются неавтономные уравнения с асимптотически почти периодическими символами и каскадные системы, у которых символ порождается некоторым автономным эволюционным уравнением. Рассматриваются конкретные неавтономные уравнения математической физики, заданные на полуоси времени, для которых строятся глобальные аттракторы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Развита теория глобальных аттракторы неавтономных диссипативных динамических систем в бесконечномерных банаховых пространствах. Доказаны общие теоремы о существовании и структуре глобальных аттракторов динамических процессов отвечающих неавтономным эволюционным уравнениям. Обобщены результаты о глобальных аттракторах нелинейных асимптотически компактных полугрупп, соответствующих автономным динамическим системам.

2. Доказаны теоремы о существовании компактных глобальных аттракторов различных классов неавтономных уравнений математической физики с трансляционно-компактными по времени членами. Показано, что в случае общего положения глобальный аттрактор неавтономного диссипативного уравнения имеет бесконечную размерность. В этом заключается принципиальное отличие неавтономных диссипативных уравнений от автономных, для которых глобальный аттрактор, как правило, имеет конечную размерность в аналогичных постановках краевых задач.

3. Разработана новая техника оценки колмогоровской ε-энтропии и фрактальной размерности глобальных аттракторов неавтономных эволюционных уравнений с частными производными. Обобщен метод оценивания коэффициентов сжатия многомерных объемов под действием квазидифференциалов динамических процессов, отвечающих неавтономным уравнениям. Показано, что оценка ε-энтропии глобального аттрактора состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое соответствует оценке сверху ε-энтропии сечений ядер изучаемого уравнения, а второе слагаемое является ε-энтропией оболочки временнóго символа этого уравнения. В автономном случае второе слагаемое отсутствует, а в неавтономном – оно вносит существенный вклад в ε-энтропию глобального аттрактора уравнения.

4. С помощью разработанной техники доказаны эффективные оценки сверху для колмогоровской ε-энтропии и фрактальной размерности глобальных аттракторов следующих неавтономных уравнений математической физики: для двумерной системы

Навье–Стокса с зависящей от времени внешней силой; для широкого класса параболических квазилинейных систем реакции–диффузии с членами, явно зависящими от времени, для неавтономных комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау, для неавтономных диссипативных волновых уравнений с зависящей от времени функцией взаимодействия и внешней силой. Полученные оценки явно зависят от параметров рассматриваемых задач. Показано, что доказанные оценки сверху в некотором смысле являются точными, а в автономном случае переходят в оценки хаусдорфовой и фрактальной размерности глобальных аттракторов из работ известных математиков по глобальным аттракторам автономных уравнений.

5. В важном частном случае, когда временной символ неавтономного эволюционного уравнения является квазипериодической функцией времени, доказана конечность фрактальной размерности глобального аттрактора уравнения. Получена явная оценки фрактальной размерности, состоящая из двух слагаемых. Первое слагаемое оценивает сверху фрактальную размерность сечений ядер уравнения, а второе слагаемое – это число рационально независимых частот квазипериодической функции. Примеры показывают, что полученная оценка является точной.

6. Исследованы свойства сечений ядер неавтономных уравнений, которые аналогичны свойствам глобальных аттракторов соответствующих автономных уравнений. Доказана конечность фрактальной размерности сечения ядер неавтономных уравнений и получены явные оценки сверху для размерности, которые не зависят от времени. Полученные оценки хорошо согласуются с аналогичными оценками, известными для глобальных аттракторов соответствующих автономных уравнений. Доказанные общие теоремы применены к исследованию ядер конкретных неавтономных эволюционных уравнений математической физики.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Вишик М.И., Чепыжов В.В. Аттракторы неавтономных динамических систем и оценка их размерности // Матем. заметки. 1992. Т. 51. N 6. С. 141–143.

2. Вишик М.И., Чепыжов В.В. Аттракторы периодических процессов и оценки их размерностей // Матем.заметки. 1995. Т. 57. N 2. С. 181–202.

3. Вишик М.И., Чепыжов В.В. Оценки колмогоровской ε-энтропии для равномерных аттракторов неавтономных систем реакции-диффузии // Матем. сборник. 1998. Т.189. N 2. С. 81–110.

4. Чепыжов В.В. Оценка фрактальной размерности аттракторов неавтономных уравнений // УМН. 1998. Т.53. N.4. С.174.

5. Чепыжов В.В. Kolmogorov epsilon-entropy of attractors of non-autonomous evolution equations. В книге: International Conference on Differential Equations. V.1. Edited by B.Fiedler, K.Groger, and J.Sprekels. Singapour: World Scientific, 2000, P. 659-664.

6. Чепыжов В.В., Ильин А.А. A note on the fractal dimension of attractors of dissipative dynamical systems // Nonlin. Anal. The. Meth. & Appl. 2001. V. 44. N 6. P. 811–819.

7. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Non-autonomous dynamical systems and their attractors. Приложение к книге: Вишик М.И. Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

8. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Non-autonomous evolution equations with almost periodic symbols // Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano. 1992. V.LXXII. P. 185–213.

9. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Attractors for non-autonomous evolution equations with almost periodic symbols // C. R. Acad. Sci. Paris. 1993. V. 316. Série I. P. 357–361.
10. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Families of semiprocesses and their attractors // C. R. Acad. Sci. Paris. 1993. V. 316. Série I. P. 441–445.
11. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Dimension estimates for attractors and kernel sections of non-autonomous evolution equations // C. R. Acad. Sci. Paris 1993. V. 317. Série I. P. 367–370.
12. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Non-autonomous evolution equations and their attractors // Russian J. Math. Physics. 1993. V. 1. N 2. P. 165–190.
13. Чепыжов В.В., Вишик М.И. A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of non-autonomous evolution equations // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. N 3. P. 1057–1076.
14. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. N 3. P. 279–333.
15. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Periodic processes and non-autonomous evolution equations with time-periodic terms // Topol. Meth. Nonl. Anal., J.Juliusz Schauder Center. 1994. V. 4. N 1. P. 1–17.
16. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Attractors of non-autonomous evolution equations with translation-compact symbols // Operator Theory: Advances and Applications. Bikhäuser Verlag. 1995 V. 78. P. 49–60.
17. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Non-autonomous evolutionary equations with translation-compact symbols and their attractors // C. R. Acad. Sci. Paris. 1995. V. 321. Série I. P. 153–158.
18. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Аттракторы неавтономных эволюционных уравнений математической физики с трансляционно-компактными символами // УМН. 1995. Т. 50. N 4. С. 146–147.
19. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. N 10. P. 913–964.
20. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Attractors for equations of mathematical physics. AMS Colloquium Publications. V. 49. Providence: AMS, 2002.
21. Чепыжов В.В., Вишик М.И. Колмогоровская ε-энтропия в задачах о глобальных аттракторах эволюционных уравнений математической физики // Проблемы передачи информации. 2003. Т.39. Вып. 1. С.4–23.