ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 425, № 2, с. 155–159

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФУКСОВЫХ УРАВНЕНИЙ, УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ VI И СИСТЕМЫ ГАРНЬЕ

© 2009 г. Р. Р. Гонцов

Представлено академиком Д.В. Аносовым 15.10.2008 г.

Поступило 24.10.2008 г.

А. Пуанкаре [7] показал, что число параметров, от которых зависит линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^p u}{dz^p} + b_1(z)\frac{d^{p-1}u}{dz^{p-1}} + \ldots + b_p(z)u = 0 \qquad (1)$$

порядка p с n фуксовыми особыми точками a_1, $a_2, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{C}}$, меньше числа параметров, от которых зависит представление

$$\chi\colon \pi_1(\overline{\mathbb{C}}\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, z_0) \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}). \qquad (2)$$

(Напомним, что особая точка a_i уравнения (1) называется фуксовой, если в ее окрестности любое решение уравнения имеет не более чем степенной рост, см. также [3], лекция 8].) Поэтому в общем случае при решении задачи Римана – построении фуксова уравнения с заданными особенностями и монодромией (2) необходимо возникают дополнительные (помимо $a_1, a_2, \ldots, a_n$) ложные особые точки, в которых коэффициенты уравнения имеют особенности, но решения являются однозначными мероморфными функциями и, следовательно, матрицы монодромии в этих точках единичны. (В дальнейшем под дополнительными особыми точками уравнения будем понимать именно такие особенности.) Таким образом, в общем случае задача Римана имеет отрицательное решение.

Аналогичная задача для систем линейных дифференциальных уравнений называется проблемой Римана–Гильберта и состоит в построении фуксовой системы

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{z-a_i}\right)y, \;\; y(z) \in \mathbb{C}^p, \;\; B_i \in \mathrm{Mat}(p, \mathbb{C}), \; (3)$$

p линейных дифференциальных уравнений с заданными особыми точками $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $\Bigl($если бесконечность не входит в число особенностей системы, то $\sum_{i=1}^{n} B_i = 0\Bigr)$ и монодромией (2). В общем случае эта задача также имеет отрицательное решение (контрпример был получен А.А. Болибрухом [1]).

Наряду с линейными фуксовыми уравнениями рассмотрим теперь известные нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка – уравнения Пенлеве VI (P_{VI}) и системы Гарнье.

Уравнение $P_{VI}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – это нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t}\right)\frac{du}{dt} + \frac{u(u-1)(u-t)}{t^2(t-1)^2} \times \left(\alpha + \beta\frac{t}{u^2} + \gamma\frac{t-1}{(u-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(u-t)^2}\right) \qquad (4)$$

второго порядка относительно неизвестной функции $u(t)$, где α, β, γ, δ – комплексные параметры. Это уравнение имеет три фиксированные особые точки 0, 1, ∞, а его подвижными особенностями (положение которых зависит от начальных условий) могут быть только полюсы. В таком случае говорят, что уравнение удовлетворяет свойству Пенлеве.

Система Гарнье $\mathcal{G}_n(\theta)$, зависящая от $n+3$ комплексных параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n+2}, \theta_\infty$, – это вполне интегрируемая гамильтонова система

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{\partial H_j}{\partial v_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial a_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial u_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

с некоторыми гамильтонианами $H_i = H_i(a, u, v, \theta)$, рационально зависящими от $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$,

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской Академии наук, Москва

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n+2}, \theta_\infty)$ (см. [4, III, §4]). При $n = 1$ система Гарнье $\mathcal{G}_1$ представляет собой эквивалентную запись уравнения P_{VI} в гамильтоновой форме.

В данной работе мы дополняем классические результаты Р. Фукса и Р. Гарнье о связи скалярных фуксовых уравнений второго порядка с уравнениями P_{VI} и системами Гарнье (см., например, [4, теорема 4.1.2]) некоторыми теоремами существования для обратных задач монодромии (теоремы 2, 3).

1. МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Локально, в окрестности каждой точки a_k нетрудно предъявить систему, для которой a_k была бы фуксовой особенностью, а матрица монодромии в этой точке совпадала бы с соответствующей образующей G_k представления (2). Пусть $\Lambda_k = \mathrm{diag}(\lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^p)$ – диагональная целочисленная матрица, элементы λ_k^j которой образуют невозрастающую последовательность, $E_k = \frac{1}{2\pi i}\ln G_k$, а S_k – невырожденная матрица, приводящая матрицу E_k к верхнетреугольному виду $E_k' = S_k E_k S_k^{-1}$. Ветвь логарифма матрицы G_k выбирается таким образом, чтобы собственные значения ρ_k^j матрицы E_k удовлетворяли условию

$$0 \le \mathrm{Re}\rho_k^j < 1. \qquad (5)$$

Тогда для системы

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{\Lambda_k}{z-a_k} + (z-a_k)^{\Lambda_k}\frac{E_k'}{z-a_k}(z-a_k)^{-\Lambda_k}\right)y \qquad (6)$$

точка a_k является фуксовой особенностью, а матрица G_k – матрицей монодромии. Будем называть набор $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ матриц, обладающих описанными выше свойствами, набором допустимых матриц.

Согласно теореме Левеля [5], фуксова система (3) в окрестности особой точки a_k голоморфно эквивалентна системе вида (6). Собственные значения β_k^j матрицы-вычета B_k называются показателями фуксовой системы (3) в особой точке a_k и являются инвариантом класса голоморфной эквивалентности этой системы. Из (6) следует, что показатели совпадают с собственными значениями $\lambda_k^j + \rho_k^j$ матрицы $\Lambda_k + E_k'$. Матрица Λ_k называется матрицей нормирований фуксовой системы (3) в особой точке a_k. Согласно (5), ее диагональные элементы $\lambda_k^1 \ge \lambda_k^2 \ge \ldots \ge \lambda_k^p$ совпадают с целыми частями чисел $\mathrm{Re}\beta_k^j$ (расположенными по невозрастанию).

Проблема Римана–Гильберта решается положительно, если от локальных систем (6) удается перейти к глобальной фуксовой системе, заданной на всей сфере Римана. При исследовании этого вопроса эффективным оказывается использование голоморфных векторных расслоений и мероморфных связностей. По представлению (2) над сферой Римана строится семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений F^Λ ранга p с логарифмическими (фуксовыми) связностями ∇^Λ, имеющими заданные особые точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и монодромию (2). Пара $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda)$ полностью определяется набором $\{\Lambda_i, S_i\}$ допустимых матриц. Проблема Римана–Гильберта для данного представления (2) имеет положительное решение, если окажется, что одно из расслоений семейства $\mathcal{F}$ голоморфно тривиально (тогда логарифмическая связность будет задавать фуксову систему с заданными особенностями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и монодромией (2), определенную на всей сфере Римана). Подробно построение семейства $\mathcal{F}$ описано в [3].

Рассмотрим теперь неприводимое двумерное представление

$$\chi\colon \pi_1(\overline{\mathbb{C}}\setminus\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}),$$
$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D(a^0),$$

где $D(a^0)$ – шар малого радиуса с центром в точке $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0)$ пространства $\mathbb{C}^n\setminus\bigcup_{i\ne j}\{a_i = a_j\}$, и семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений с логарифмическими связностями, построенное по представлению χ. В дальнейшем будут использованы следующие утверждения, основанные на результатах работы [9].

Л е м м а 1. *Пусть* $(F^\Lambda, \nabla^\Lambda) \in \mathcal{F}$ *и* $\deg F^\Lambda = 0$. *Тогда для всех* $a \in D(a^0)$, *за исключением, быть может, некоторого аналитического подмножества коразмерности один, расслоение* F^Λ *голоморфно тривиально* (*т.е. для почти всех* $a \in D(a^0)$ *существует фуксова система с заданными особыми точками* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *монодромией* χ *и набором* Λ *матриц нормирований*).

С л е д с т в и е 1. *Если* χ – *неприводимое* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-*представление с образующими* $G_1, G_2, \ldots, G_n$, *то для почти всех* $a \in D(a^0)$ *существует семейство* (*зависящее от параметра* $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$)

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i^{\mathbf{m}}(a)}{z-a_i}\right)y, \quad \sum_{i=1}^{n}B_i^{\mathbf{m}}(a) = 0,$$

фуксовых систем с особенностями $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *монодромией* χ *и показателями* $\pm(m_k + \rho_k)$, *где* ρ_k – *одно из собственных значений матрицы* $E_k = \frac{1}{2\pi i}\ln G_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. *При этом* $B_n^{\mathbf{m}}(a) = \operatorname{diag}(m_n + \rho_n, -m_n - \rho_n)$.

2. ЗАДАЧА РИМАНА И УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ VI

Как говорилось ранее, задача о построении фуксова дифференциального уравнения (1) с заданными особенностями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и монодромией (2) в общем случае имеет отрицательное решение. При построении необходимо возникают дополнительные особые точки. В случае, когда представление (2) неприводимо, А.А. Болибрухом [2] была получена формула для минимального числа таких особенностей, которую мы приводим ниже.

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ голоморфных векторных расслоений F^Λ с логарифмическими связностями ∇^Λ, построенное по представлению (2).

Согласно теореме Биркгофа–Гротендика, любое голоморфное векторное расслоение E ранга p над сферой Римана эквивалентно прямой сумме

$$E \cong \mathcal{O}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(k_p)$$

одномерных расслоений, имеющей координатное описание вида

$$(U_0 = \mathbb{C},\ U_\infty = \overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\},\ g_{0\infty} = z^K),$$
$$K = \operatorname{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_p),$$

где $k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_p$ – набор целых чисел, который называется типом расщепления расслоения E. (Расслоение E голоморфно-тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет нулевой тип расщепления.)

Фуксовым весом расслоения F^Λ называется величина

$$\gamma(F^\Lambda) = \sum_{i=1}^{p}(k_1 - k_i),$$

где $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ – тип расщепления расслоения F^Λ.

Если представление (2) неприводимо, то для типа расщепления расслоения F^Λ имеют место неравенства

$$k_i - k_{i+1} \le n - 2, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1 \tag{7}$$

(см. [3, теорема 11.1]). Поэтому для такого представления определена величина

$$\gamma_{\max}(\chi) = \max_{F^\Lambda \in \mathcal{F}} \gamma(F^\Lambda) \le \frac{(n-2)p(p-1)}{2},$$

называемая максимальным фуксовым весом неприводимого представления χ.

Минимально возможное число m_0 дополнительных особых точек, возникающих при построении фуксова уравнения (1) по неприводимому представлению (2), выражается формулой

$$m_0 = \frac{(n-2)p(p-1)}{2} - \gamma_{\max}(\chi). \tag{8}$$

Рассмотрим четыре точки $t, 0, 1, \infty$ $(t \in D(t^*)$, где $D(t^*) \subset \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ – диск малого радиуса с центром в точке $t^*)$ и неприводимое $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-представление

$$\chi^*: \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{t, 0, 1\}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \tag{9}$$

порожденное матрицами G_1, G_2, G_3, соответствующими точкам $t, 0, 1$.

В зависимости от расположения точки t возможны два случая.

1) Любое векторное расслоение F^Λ из семейства $\mathcal{F}$, построенного по данным четырем точкам и представлению χ^*, такое, что $\deg F^\Lambda = 0$, голоморфно тривиально (из леммы 1 следует, что данный случай имеет место для почти всех значений $t \in D(t^*)$).

2) Среди элементов семейства $\mathcal{F}$ существует голоморфно нетривиальное расслоение F^Λ степени нуль. (Обозначим через $\tilde{\Theta}$ множество точек t, соответствующих этому случаю.)

Из неравенств (7) следует, что $\gamma_{\max}(\chi^*) \le 2$, поэтому в первом случае типы расщепления голоморфно-нетривиальных расслоений F^Λ (ненулевой степени) могут быть только $(k, k-1)$ или (k, k). Вариант $(k+1, k-1)$ невозможен, поскольку тогда расслоение, построенное по набору матриц $\Lambda_1 - kI$, $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$, имеет нулевую степень, т.е. голоморфно-тривиально, но в то же время его тип расщепления равен $(1, -1)$. Следовательно, в первом случае $\gamma_{\max}(\chi^*) = 1$.

Во втором случае тип расщепления голоморфно нетривиального расслоения нулевой степени равен $(1, -1)$, и в этом случае $\gamma_{\max}(\chi^*) = 2$.

Итак, ввиду формулы (8) для почти всех значений $t \in D(t^*)$ набор точек $t, 0, 1, \infty$ и представление χ^* реализуются фуксовым дифференциальным уравнением второго порядка с одной дополнительной особенностью. Обозначим ее через $u(t)$ (рассматривая как функцию параметра t).

Используя следствие 1, выберем значение $t = t^0 \in D(t^*)$, при котором представление χ^* реализуется фуксовыми системами

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B_1^{\mathbf{m}}}{z - t^0} + \frac{B_2^{\mathbf{m}}}{z} + \frac{B_3^{\mathbf{m}}}{z-1}\right)y, \qquad \mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, m_\infty) \in \mathbb{Z}_+^4, \tag{10}$$

с особыми точками t^0, 0, 1, ∞ (при этом собственные значения матриц $B_k^{\mathbf{m}}$ суть $\pm(m_k + \rho_k)$, а матрицы $B_\infty^{\mathbf{m}} = -B_1^{\mathbf{m}} - B_2^{\mathbf{m}} - B_3^{\mathbf{m}}$ диагональны).

Всякая система вида (10) может быть вложена в изомонодромное[1] семейство Шлезингера [8]

$$\frac{dy}{dz} = \left(\frac{B_1^{\mathbf{m}}(t)}{z-t} + \frac{B_2^{\mathbf{m}}(t)}{z} + \frac{B_3^{\mathbf{m}}(t)}{z-1}\right)y, \qquad B_k^{\mathbf{m}}(t^0) = B_k^{\mathbf{m}}, \tag{11}$$

фуксовых систем с особенностями t, 0, 1, ∞, голоморфно зависящее от параметра $t \in D(t^0)$, где $D(t^0)$ – диск малого радиуса с центром в точке t^0. При этом $B_1^{\mathbf{m}}(t) + B_2^{\mathbf{m}}(t) + B_3^{\mathbf{m}}(t) = -B_\infty^{\mathbf{m}} = \mathrm{diag}(-m_\infty - \rho_\infty, m_\infty + \rho_\infty)$. Б. Мальгранж [6] показал, что матричные функции $B_k^{\mathbf{m}}(t)$ продолжаются на универсальное накрытие H пространства $\mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ как мероморфные функции.

Обозначим через $B_{\mathbf{m}}(z, t) = (b_{ij}^{\mathbf{m}}(z, t))$ матрицу коэффициентов семейства (11). Поскольку верхний правый элемент матрицы $B_1^{\mathbf{m}}(t) + B_2^{\mathbf{m}}(t) + B_3^{\mathbf{m}}(t) = -B_\infty^{\mathbf{m}}$ равен нулю, то такой же элемент матрицы $z(z-1)(z-t)B_{\mathbf{m}}(z, t)$ при каждом фиксированном t является многочленом первой степени по z. Определим $\tilde{u}_{\mathbf{m}}(t)$ как единственный корень этого многочлена. Далее мы воспользуемся следующей теоремой (см. [4, следствие 6.2.2]).

Т е о р е м а 1. *Функция* $\tilde{u}_{\mathbf{m}}(t)$ *удовлетворяет уравнению* P_{VI} (4), *где константы* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *связаны с параметром* $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, m_\infty)$ *соотношениями*

$$\alpha = \frac{(2m_\infty + 2\rho_\infty - 1)^2}{2}, \quad \beta = -2(m_2 + \rho_2)^2,$$
$$\gamma = 2(m_3 + \rho_3)^2, \quad \delta = \frac{1}{2} - 2(m_1 + \rho_1)^2.$$

В силу неприводимости представления χ^* имеем $b_{12}^{\mathbf{m}}(z, t) \not\equiv 0$. Поэтому, как показано в [4, лемма 6.1.1], от системы (11) можно перейти к скалярному фуксову уравнению

$$\frac{d^2w}{dz^2} + a_{\mathbf{m}}(z, t)\frac{dw}{dz} + b_{\mathbf{m}}(z, t)w = 0 \tag{12}$$

с особыми точками t, 0, 1, ∞, монодромией χ^* и одной дополнительной особенностью $u_{\mathbf{m}}(t)$ – нулем функции $b_{12}^{\mathbf{m}}(z, t)$. В силу теоремы 1 функция $u_{\mathbf{m}}(t)$ удовлетворяет уравнению P_{VI}.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 2. (i) *Множество точек* t, 0, 1, ∞ *и неприводимое* $SL(2, \mathbb{C})$-*представление* (9) *реализуются семейством* (*зависящим от параметра* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^4$) *скалярных фуксовых уравнений* (12) *с одной дополнительной особенностью, при этом дополнительная особая точка* $u_{\mathbf{m}}(t)$ *каждого из уравнений этого семейства* (*как функция переменной* $t \in D(t^*)$) *удовлетворяет уравнению* P_{VI} *с параметрами* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *выраженными в теореме* 1.

(ii) *Особые точки функции* $u_{\mathbf{m}}(t)$, *продолженной на универсальное накрытие* H *пространства* $\mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$, *являются полюсами, а множество* $\tilde{\Theta} \supset \bigcup_{\mathbf{m}} \{t \in D(t^*) | u_{\mathbf{m}}(t) = t, 0, 1, \infty\}$ *является счетным множеством значений параметра, при которых рассматриваемая задача Римана решается без дополнительных особенностей.*

Приведенные выше рассуждения можно распространить на общий случай $n + 3$ особенностей $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = 0, a_{n+2} = 1, a_{n+3} = \infty$ и неприводимого $SL(2, \mathbb{C})$-представления

$$\chi^*: \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 1\}) \to SL(2, \mathbb{C}), \tag{13}$$

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D(a^*)$, где $D(a^*)$ – диск малого радиуса с центром в точке a^* пространства $(\mathbb{C}\backslash\{0, 1\})^n \backslash \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$. Тогда, используя аргументы, аналогичные приведенным в случае $n = 1$ (а также следствие 6.2.2 из [4]), получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Множество точек* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 0, 1, ∞ *и неприводимое* $SL(2, \mathbb{C})$-*представление* (13) *реализуются семейством* (*зависящим от параметра* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^{n+3}$) *скалярных фуксовых уравнений*

$$\frac{d^2w}{dz^2} + a_{\mathbf{m}}(z, a)\frac{dw}{dz} + b_{\mathbf{m}}(z, a)w = 0$$

с n *дополнительными особенностями* $u_{\mathbf{m}}^1(a), u_{\mathbf{m}}^2(a), \ldots, u_{\mathbf{m}}^n(a)$, *при этом для каждого из уравнений этого семейства функции* $u_{\mathbf{m}}^1(a), u_{\mathbf{m}}^2(a), \ldots, u_{\mathbf{m}}^n(a), v_{\mathbf{m}}^1(a), v_{\mathbf{m}}^2(a), \ldots, v_{\mathbf{m}}^n(a)$, $v_{\mathbf{m}}^i = \mathrm{res}_{z = u_{\mathbf{m}}^i} b_{\mathbf{m}}(z, a)$, $a \in D(a^*)$, *являются решением системы Гарнье* $\mathcal{G}_n$ *с параметрами* $2(m_1 + \rho_1)$, $2(m_2 + \rho_2), \ldots, 2(m_{n+2} + \rho_{n+2}), 2(m_\infty + \rho_\infty) - 1$.

[1] Изомонодромность означает, что монодромия систем этого семейства не зависит от значения параметра t. Более того, собственные значения матриц $B_k^{\mathbf{m}}(t)$ также не зависят от t и совпадают с собственными значениями $\pm(m_k + \rho_k)$ матриц $B_k^{\mathbf{m}}(t^0) = B_k^{\mathbf{m}}$.

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ–3038.2008.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А.А.* // Мат. заметки. 1989. Т. 46. № 3. С. 118–120.
2. *Bolibruch A.A.* // J. Dyn. Control Syst. 1995. V. 1. № 2. P. 229–252.
3. *Болибрух А.А.* Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения. М.: МЦНМО, 2000. 120 с.
4. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé. Aspects Math. Braunschweig: Vieweg, 1991.
5. *Levelt A.H.M.* // Proc. Konikl. Nederl. Acad. Wetensch. Ser. A. 1961. V. 64. P. 361–401.
6. *Malgrange B.* // Progress Math. 1983. V. 37. P. 401–426.
7. *Пуанкаре А.* О группах линейных уравнений. В кн.: Избранные труды в 3-х томах М.: Наука, 1974. Т. 3. С. 145–234.
8. *Schlesinger L.* Uber Losungen gewisser Differentialgleichungen als Funktionen der singularen Punkte // J. Reine Angew. Math. 1905. Bd. 129. S. 287–294.
9. *Болибрух А.А.* // Мат. заметки. 2003. Т. 74. № 2. С. 184–191.