Введение

В курсе математического анализа первого семестра одно из центральных мест занимает теорема Ролля.

Теорема Ролля. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *дифференцируема на интервале* (a, b) *и* $f(a) = f(b)$. *Тогда найдется такая точка* $c \in (a, b)$, *что* $f'(c) = 0$. (Здесь и далее предполагается, что $a < b$.)

Эта теорема так или иначе используется в доказательствах теорем Коши и Лагранжа, правила Лопиталя, формулы Тейлора. В данном пособии предлагается ряд других применений теоремы Ролля, несколько выходящий за рамки стандартного курса. В частности, приводится правило Декарта для оценки числа корней произвольного многочлена от вещественной переменной.

Правило Декарта. *Число положительных корней многочлена* $P(x) = a_k x^{m_k} + \ldots + a_1 x^{m_1}$, $m_k > \ldots > m_1 \geqslant 0$, *не превосходит числа смен знаков в упорядоченной последовательности чисел* $a_k, \ldots, a_1$.

Напомним, что многочлены также называют *полиномами*, а слагаемые $a_i x^{m_i}$ — *мономами*. Можно считать, что все коэффициенты a_i отличны от нуля. В противном случае в записи $P(x)$ просто будет меньше мономов. Сразу оговоримся, что здесь мы рассматриваем функции только вещественной переменной $x \in \mathbb{R}$.

Мы также приводим теорему об оценке числа нулей решения линейного дифференциального уравнения. Последний параграф состоит из упражнений, приводящих к обобщению формулы Тейлора.

Одной из основных целей предлагаемого пособия является ознакомление студентов на конкретном примере с интересными взаимосвязями различных математических результатов, с их развитием от простых к более сложным.

1. Теорема Ролля и корни многочлена

Определение 1. Точки на числовой оси, в которых значения функции $f(x)$ равны нулю, называются *нулями* этой функции. В случае многочлена его нули также называются корнями.

Для функции $f(x)$ с конечным числом нулей введем следующие обозначения:
$N_{[a,b]}(f)$ — количество нулей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$;
$N_+(f)$ — количество положительных нулей функции $f(x)$.
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то из теоремы Ролля следует, что между двумя ее соседними нулями на $[a,b]$ расположен хотя бы один нуль производной $f'(x)$, поэтому $N_{[a,b]}(f') \geqslant N_{[a,b]}(f) - 1$, или

$$N_{[a,b]}(f) \leqslant N_{[a,b]}(f') + 1. \tag{1}$$

Аналогично

$$N_+(f) \leqslant N_+(f') + 1. \tag{2}$$

Как известно, число корней многочлена не превосходит степени этого многочлена. Оказывается, что число корней зависит не столько от степени многочлена, сколько от количества его мономов.

Предложение 1. *Для числа $N_+(P)$ положительных корней многочлена $P(x) = a_k x^{m_k} + \ldots + a_1 x^{m_1}$ справедлива оценка*

$$N_+(P) \leqslant k - 1. \tag{3}$$

Доказательство. Проведем доказательство с помощью индукции по числу k.

При $k = 1$ многочлен $P(x)$ — это моном $a_1 x^{m_1}$, который не имеет положительных корней. Поэтому оценка (3) верна при $k = 1$.

Предположим, что оценка (3) верна при $k = n$, и докажем ее при $k = n + 1$.

При $k = n + 1$ имеем

$$\begin{aligned} P(x) &= a_{n+1} x^{m_{n+1}} + \ldots + a_1 x^{m_1} = \\ &= x^{m_1}(a_{n+1} x^{m_{n+1} - m_1} + \ldots + a_2 x^{m_2 - m_1} + a_1) = x^{m_1} Q(x), \end{aligned}$$

поэтому с учетом оценки (2)

$$N_+(P) = N_+(Q) \leqslant N_+(Q') + 1.$$

Но число мономов в многочлене Q' равно n (при дифференцировании постоянная a_1 исчезает), следовательно, по предположению индукции $N_+(Q') \leqslant n - 1$. Тогда $N_+(P) \leqslant N_+(Q') + 1 \leqslant n$ и оценка (3) верна при $k = n + 1$. □

Аналогичная оценка имеет место для числа отрицательных корней многочлена. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 2. *Число ненулевых корней многочлена $P(x) = a_k x^{m_k} + \ldots + a_1 x^{m_1}$ не превосходит $2k - 2$.*

Далее приводится некоторая разновидность теоремы Ролля и следующее из нее уточнение оценки (1).

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и выполняется одно из двух условий:*

1) $f(a)f'(a) > 0$, $f(b) = 0$;

2) $f(a) = 0$, $f(b)f'(b) < 0$.

Тогда найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим первый случай (второй разбирается аналогично).

Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, то она непрерывна на отрезке $[a, b]$, и, следовательно, найдутся точки $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$, в которых $f(x)$ достигает своих соответственно минимального и максимального значений на $[a, b]$.

Если $f(a) > 0$ и $f'(a) > 0$, то $x_{\max} \neq a$ ($f'(a) > 0 \Longrightarrow f(x)$ возрастает в точке $a \Longrightarrow$ значения правее точки a больше, чем в самой точке) и $x_{\max} \neq b$ (поскольку $f(b) = 0 < f(a)$). Следовательно, $x_{\max}$ — внутренняя точка интервала (a, b), т. е. $x_{\max}$ — локальный максимум и $f'(x_{\max}) = 0$.

Аналогично, если $f(a) < 0$ и $f'(a) < 0$, то $x_{\min}$ — локальный минимум и $f'(x_{\min}) = 0$. □

Определение 2. Для произвольных двух чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ определим величину $d(a, b)$ следующим образом:

$$d(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } ab < 0; \\ 0, & \text{если } ab > 0. \end{cases}$$

Следствие 1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $f(a)f'(a) \neq 0$ и $f(b)f'(b) \neq 0$.*

Тогда для числа $N_{[a,b]}(f)$ нулей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ справедлива оценка

$$N_{[a,b]}(f) \leqslant N_{[a,b]}(f') + d(f(a), f'(a)) - d(f(b), f'(b)). \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_N \in (a,b)$ — нули функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. По теореме Ролля на каждом интервале (x_i, x_{i+1}) найдется, по меньшей мере, один нуль производной $f'(x)$ (всего, значит, $N-1$ нуль $f'(x)$ на (x_1, x_N)). Кроме того, если $f(a)f'(a) > 0$, то по теореме 1 производная $f'(x)$ имеет нуль и на интервале (a, x_1), а если $f(b)f'(b) < 0$, то также и на интервале (x_N, b). Таким образом, число нулей $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$ можно увеличить еще на $1 - d(f(a), f'(a)) + d(f(b), f'(b))$ и

$$\begin{aligned} N_{[a,b]}(f') &\geqslant N - 1 + 1 - d(f(a), f'(a)) + d(f(b), f'(b)) = \\ &= N - d(f(a), f'(a)) + d(f(b), f'(b)), \end{aligned}$$

откуда следует требуемая оценка

$$N \leqslant N_{[a,b]}(f') + d(f(a), f'(a)) - d(f(b), f'(b)).$$

$\square$

Доказательство правила Декарта. Обозначим через $c\,(a_k, \ldots, a_1)$ число смен знаков в упорядоченной последовательности ненулевых чисел $a_k, \ldots, a_1$. Например, для многочлена $2x^5 + x^3 - x + 3$ имеем

$$c\,(2, 1, -1, 3) = 2.$$

Докажем требуемую оценку

$$N_+(P) \leqslant c\,(a_k, \ldots, a_1) \qquad (5)$$

индукцией по числу k мономов многочлена $P(x) = a_k x^{m_k} + \ldots + a_1 x^{m_1}$.

При $k = 1$ многочлен $P(x)$ — это моном $a_1 x^{m_1}$, который не имеет положительных корней. Но и $c(a_1) = 0$, поэтому оценка (5) верна при $k = 1$.

Предположим, что оценка (5) верна при $k = n$, и докажем ее при $k = n+1$.

При $k = n + 1$ имеем

$$\begin{aligned} P(x) &= a_{n+1} x^{m_{n+1}} + \ldots + a_1 x^{m_1} = \\ &= x^{m_1}(a_{n+1} x^{m_{n+1} - m_1} + \ldots + a_2 x^{m_2 - m_1} + a_1) = x^{m_1} Q(x). \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, а $A > 0$ столь большим, чтобы на интервале (ε, A) поместились все положительные корни многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$. Тогда с учетом оценки (4) имеем

$$N_+(P) = N_+(Q) = N_{[\varepsilon,A]}(Q) \leqslant N_{[\varepsilon,A]}(Q') + d(Q(\varepsilon), Q'(\varepsilon)) - d(Q(A), Q'(A)).$$

Но число мономов в многочлене Q' равно n (его коэффициенты суть $(m_{n+1} - m_1)a_{n+1}, \dots, (m_2 - m_1)a_2$), следовательно, по предположению индукции $N_{[\varepsilon,A]}(Q') = N_+(Q') \leqslant c\,(a_{n+1}, \dots, a_2)$. Таким образом:

$$N_+(P) \leqslant c\,(a_{n+1}, \dots, a_2) + d(Q(\varepsilon), Q'(\varepsilon)) - d(Q(A), Q'(A)).$$

Заметим, что при достаточно больших A знаки $Q(A)$ и $Q'(A)$ совпадают (они совпадают со знаком коэффициента a_{n+1}). Следовательно, $d(Q(A), Q'(A)) = 0$. В то же время, при достаточно малых ε знак $Q(\varepsilon)$ совпадает со знаком a_1, а знак $Q'(\varepsilon)$ — со знаком a_2. Поэтому $d(Q(\varepsilon), Q'(\varepsilon)) = d(a_1, a_2) = c\,(a_2, a_1)$. Итак, $d(Q(\varepsilon), Q'(\varepsilon)) - d(Q(A), Q'(A)) = c\,(a_2, a_1)$ и

$$N_+(P) \leqslant c\,(a_{n+1}, \dots, a_2) + c\,(a_2, a_1) = c\,(a_{n+1}, \dots, a_1).$$

Таким образом, оценка (5) верна при $k = n + 1$. $\square$

Поскольку отрицательные корни многочлена $P(x) = a_k x^{m_k} + \dots + a_1 x^{m_1}$ — это положительные корни многочлена $P(-x) = (-1)^{m_k} a_k x^{m_k} + \dots + (-1)^{m_1} a_1 x^{m_1}$, то следствием правила Декарта является следующее утверждение.

Теорема 2. *Число ненулевых корней многочлена $P(x) = a_k x^{m_k} + \dots + a_1 x^{m_1}$ не превосходит величины $c\,(a_k, \dots, a_1) + c\,((-1)^{m_k} a_k, \dots, (-1)^{m_1} a_1)$.*

Пример 1. а) Число корней многочлена $P(x) = x^{15} + 3x^{11} + 2x^4 + 2$ не превосходит $c\,(1, 3, 2, 2) + c\,(-1, -3, 2, 2) = 0 + 1 = 1$ (0 не является корнем данного многочлена). Заметим, что $x = -1$ — корень многочлена $P(x)$. Таким образом, это его единственный корень.

б) Число корней многочлена $Q(x) = x^{14} + 5x^{11} + 2x^4 + 2$ не превосходит $c\,(1, 5, 2, 2) + c\,(1, -5, 2, 2) = 0 + 2 = 2$ (0 не является корнем данного многочлена). Поскольку $x = -1$ — корень многочлена $Q(x)$, то, поделив $Q(x)$ на $x + 1$, получим разложение

$$\begin{aligned} Q(x) \;\; = \;\; & (x+1)(x^{13} - x^{12} + x^{11} + 4x^{10} - 4x^9 + 4x^8 - 4x^7 + \\ & + 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

Следовательно, второй сомножитель в скобках имеет не более одного корня (-1 не является его корнем). Но как многочлен нечетной степени один корень он все же имеет. Поэтому число корней многочлена $Q(x)$ в точности равно двум.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Для произвольной функции $f(x)$ рассмотрим следующую задачу: *по заданному набору точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ построить многочлен, значения которого в этих точках совпадают со значениями функции.* Геометрически это означает, что через n заданных точек на графике функции $f(x)$ нужно провести кривую, являющуюся графиком некоторого многочлена.

Например, через две точки можно провести единственную прямую (график многочлена первой степени). Через три точки прямую уже не проведешь (если только эти три точки не лежат на одной прямой), но можно провести единственную квадратичную параболу (график многочлена второй степени). В общем случае имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. *Для произвольной функции $f(x)$ и набора различных точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существует единственный многочлен $P_{n-1}(x)$ степени не выше $n-1$ такой, что $P_{n-1}(\alpha_i) = f(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $P(x) = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$ степени n и многочлены $Q_i(x) = P(x)/(x-\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, n$, степени $n-1$. По многочленам $Q_i(x)$ определим многочлены $R_i(x) = Q_i(x)/Q_i(\alpha_i)$ степени $n-1$. Заметим, что по построению

$$R_i(\alpha_i) = 1, \qquad R_i(\alpha_j) = 0, \quad j \neq i. \tag{6}$$

Теперь в качестве $P_{n-1}(x)$ можно предъявить многочлен

$$P_{n-1}(x) = f(\alpha_1)R_1(x) + \ldots + f(\alpha_n)R_n(x),$$

поскольку из (6) следует, что $P_{n-1}(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

Докажем единственность многочлена $P_{n-1}(x)$. Если $\widetilde{P}_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, значения которого в точках $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ также совпадают со значениями функции $f(x)$, то разность $P_{n-1}(x) - \widetilde{P}_{n-1}(x)$ является многочленом степени не выше $n-1$, имеющим, по меньшей мере, n корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Таким образом, $P_{n-1}(x) - \widetilde{P}_{n-1}(x) \equiv 0$ и $\widetilde{P}_{n-1}(x) \equiv$ $\equiv P_{n-1}(x)$. $\square$

Определение 3. Многочлен $P_{n-1}(x)$ называется *интерполяционным многочленом Лагранжа* функции $f(x)$ с узлами интерполяции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Предложение 4. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз на интервале $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и $P_{n-1}(x)$ — ее интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами интерполяции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [a, b]$. Тогда найдется такая точка $c \in [a, b]$, что*

$$f(b) - P_{n-1}(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-\alpha_1)\ldots(b-\alpha_n). \tag{7}$$

Доказательство. Определим число M соотношением

$$f(b) - P_{n-1}(b) - M(b-\alpha_1)\ldots(b-\alpha_n) = 0.$$

(Можно считать, что ни один из узлов интерполяции не совпадает с точкой b. В противном случае соотношение (7) очевидным образом выполнено.) Тогда функция $g(x) = f(x) - P_{n-1}(x) - M(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$ имеет $n+1$ нуль $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, b$ на отрезке $[a, b]$. Из оценки (1) следует, что $g'(x)$ имеет, по меньшей мере, n нулей на отрезке $[a, b]$, $g''(x)$ имеет $n-1$ нуль, и т.д. Наконец, $g^{(n)}(x)$ имеет хотя бы один нуль $c \in [a, b]$. Таким образом,

$$0 = g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) - n!M$$

(n-я производная от многочлена $P_{n-1}(x)$ степени не выше $n-1$ равна нулю). Следовательно, $M = f^{(n)}(c)/n!$ и

$$f(b) - P_{n-1}(b) = M(b-\alpha_1)\ldots(b-\alpha_n) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-\alpha_1)\ldots(b-\alpha_n).$$

□

3. Нули решений линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \tag{8}$$

относительно неизвестной функции $y(x)$, где $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — непрерывные функции на интервале $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Из теории линейных дифференциальных уравнений нам понадобится лишь тот факт, что решения уравнения (8) определены на всем интервале

$(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ и образуют векторное пространство размерности n. Таким образом, любое решение $y(x)$ уравнения (8) может быть представлено в виде линейной комбинации

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

некоторых базисных решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ с коэффициентами $c_i \in \mathbb{R}$.

Нетрудно показать, что для любого набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in [a, b]$, состоящего из $n-1$ точки, найдется нетривиальное решение уравнения (8), для которого эти точки будут нулями. Действительно, существование такого решения равносильно существованию ненулевого решения $(c_1, \ldots, c_n)$ системы линейных однородных уравнений

$$y_1(\alpha_i)c_1 + \ldots + y_n(\alpha_i)c_n = 0, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

а таких решений много (поскольку число уравнений системы меньше числа неизвестных). Оказывается, что при некотором условии на длину $\rho = b - a$ отрезка $[a, b]$ число нулей любого решения уравнения (8) на этом отрезке не превосходит $n-1$. Точная формулировка этого утверждения, принадлежащего Шарлю де ля Валле Пуссену [1], приводится ниже (теорема 3).

Поскольку коэффициенты $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ уравнения (8) непрерывны на отрезке $[a, b]$, то они ограничены на этом отрезке. Пусть

$$|p_1(x)| \leqslant C_1, \quad \ldots, \quad |p_n(x)| \leqslant C_n$$

для любого $x \in [a, b]$, где C_i — неотрицательные постоянные.

Теорема 3. *Если длина ρ отрезка $[a, b]$ удовлетворяет условию*

$$C_1\rho + C_2\frac{\rho^2}{2!} + \ldots + C_n\frac{\rho^n}{n!} < 1, \tag{9}$$

то любое решение $y(x) \not\equiv 0$ уравнения (8) на этом отрезке имеет не более чем $n-1$ нуль.

Доказательство. Допустим, некоторое решение $y(x) \not\equiv 0$ уравнения (8) имеет n нулей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на отрезке $[a, b]$. Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа функции $y(x)$ с узлами интерполяции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеет n корней – $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а его степень не превосходит $n-1$. Поэтому он тождественно равен нулю и из предложения 4 следует, что для любого $x \in [a, b]$ найдется точка $c(x) \in [a, b]$ такая, что

$$y(x) = \frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n). \tag{10}$$

Поскольку функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (8), то ее n-я производная $y^{(n)}(x) = -p_1(x)y^{(n-1)}(x) - \ldots - p_n(x)y(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ (все входящие в правую часть последнего равенства функции непрерывны на этом отрезке). Следовательно, $|y^{(n)}(x)|$ достигает своего максимального значения $M > 0$ в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, $|y^{(n)}(x_0)| = M$. (Величина M не равна нулю, поскольку в противном случае $y^{(n)}(x) \equiv 0$ и $y(x)$ — ненулевой многочлен степени $n-1$, имеющий n корней, а это невозможно.)

Из соотношения (10) следует, что $|y(x)| \leqslant (M/n!)\rho^n$ для любого $x \in [a, b]$, поскольку $|y^{(n)}(c)|$ не превосходит M, а разности $|x - \alpha_i|$ не превосходят ρ. Заметим, что последнее неравенство получено для функции, имеющей n нулей на отрезке $[a, b]$ и модуль n-й производной, не превосходящий M. Согласно (1) функция $y'(x)$ имеет, по меньшей мере, $n-1$ нуль на отрезке $[a, b]$, а ее $(n-1)$-я производная $y^{(n)}(x)$ по модулю не превосходит M, поэтому $|y'(x)| \leqslant (M/(n-1)!)\rho^{n-1}$ для любого $x \in [a, b]$, и т. д. Итак,

$$|y(x)| \leqslant \frac{M}{n!}\rho^n, \quad |y'(x)| \leqslant \frac{M}{(n-1)!}\rho^{n-1}, \quad \ldots, \quad |y^{(n-1)}(x)| \leqslant M\rho$$

для любого $x \in [a, b]$.

Соотношение $y^{(n)}(x) = -p_1(x)y^{(n-1)}(x) - \ldots - p_n(x)y(x)$ влечет оценку

$$\begin{aligned} |y^{(n)}(x_0)| &\leqslant |p_1(x_0)||y^{(n-1)}(x_0)| + \ldots + |p_n(x_0)||y(x_0)| \leqslant \\ &\leqslant C_1 M\rho + \ldots + C_n \frac{M}{n!}\rho^n = M\left(C_1\rho + \ldots + C_n\frac{\rho^n}{n!}\right) < M \end{aligned}$$

(последнее неравенство следует из условия теоремы), которая противоречит равенству $|y^{(n)}(x_0)| = M$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Если любое нетривиальное решение уравнения (8) имеет не более чем $n-1$ нуль на отрезке $[a, b]$, то говорят, что уравнение *не осциллирует* на этом отрезке. Так, теорема 3 утверждает, что уравнение (8) не осциллирует на отрезке $[a, b]$, если его длина удовлетворяет условию (9).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

В качестве его базисных решений можно взять функции $\sin \omega x$, $\cos \omega x$. Таким образом, расстояние между двумя соседними нулями любого решения равно π/ω и уравнение не осциллирует на отрезке меньшей длины.

Посмотрим, что можно сказать об осцилляции этого уравнения, не прибегая к явному виду его решений, а только используя идеи доказательства теоремы 3. Непосредственное применение этой теоремы (где $C_1 = 0$, $C_2 = \omega^2$) показывает, что уравнение не осциллирует на отрезке, длина ρ которого удовлетворяет неравенству $\rho^2\omega^2/2 < 1$, т. е. $\rho < \sqrt{2}/\omega$. Однако более детальный анализ формулы (10) позволяет улучшить последнюю оценку.

Пусть a, b — соседние нули решения $y(x) \not\equiv 0$. Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа этого решения с узлами интерполяции a, b тождественно равен нулю (см. доказательство теоремы 3) и, согласно (10), для любого $x \in [a, b]$ найдется точка $c(x) \in [a, b]$ такая, что

$$y(x) = \frac{y''(c)}{2}(x-a)(x-b) = \frac{\omega^2 y(c)}{2}(x-a)(b-x).$$

Поскольку максимум многочлена $(x-a)(b-x)$ на отрезке $[a, b]$ достигается в точке $x = (a+b)/2$ и равен $\rho^2/4$, то для максимума M функции $|y(x)|$ на отрезке $[a, b]$ имеем неравенство

$$M \leqslant \frac{\omega^2 M}{2}\frac{\rho^2}{4} = \omega^2 M \frac{\rho^2}{8}.$$

Следовательно, $\rho \geqslant 2\sqrt{2}/\omega$. Величина $2\sqrt{2}/\omega \approx (2,82)/\omega$ достаточно близка к $\pi/\omega \approx (3,14)/\omega$.

Таким образом, результат теоремы 3 достаточно точен даже для уравнений, для которых можно указать явный вид решений. Тем более он полезен для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые в общем случае не решаются в явном виде.

Как следствие теоремы 3, приведем некоторую оценку для числа нулей решения уравнения (8) на отрезке $[a, b]$ произвольной длины.

Следствие 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (8) *удовлетворяют неравенствам* $|p_i(x)| \leqslant C$ *на отрезке* $[a, b]$, *где* C *— положительная постоянная. Тогда любое решение* $y(x) \not\equiv 0$ *этого уравнения имеет не более чем* $N(n-1)$ *нуль на* $[a, b]$, *где*

$$N = \left[\frac{b-a}{\ln(1 + C^{-1})}\right] + 1$$

и [ ] *— целая часть числа.*

Доказательство. Ясно, что данная оценка получается следующим образом: отрезок $[a, b]$ разбивается на отрезки длины ρ, удовлетворяющей условию

$$C\left(\rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right) < 1.$$

На каждом из этих отрезков, согласно теореме 3, число нулей решения не превосходит $n-1$. Остается показать, что количество отрезков разбиения не превосходит N.

Выясним, какой достаточно быть длине ρ отрезков разбиения, чтобы выполнялось требуемое неравенство

$$\rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} < 1/C. \tag{11}$$

Для этого применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции e^x на отрезке $[0, \rho]$. Имеем

$$e^\rho = 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}\rho^{n+1}, \quad \theta \in (0, \rho).$$

Поэтому

$$\rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} = e^\rho - 1 - \frac{e^\theta}{(n+1)!}\rho^{n+1} < e^\rho - 1.$$

Таким образом, если $e^\rho - 1 = 1/C$, то неравенство (11) выполняется. Следовательно, отрезок $[a, b]$ достаточно разбить на отрезки длины $\rho = \ln(1+C^{-1})$. Число таких отрезков не превзойдет $[(b-a)/\ln(1+C^{-1})]+1$. $\square$

4. Обобщенная формула Тейлора (в упражнениях)

Будем говорить, что x_0 является *нулем кратности* k для функции $f(x)$, если $f(x)$ дифференцируема k раз в окрестности точки x_0 и $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Например, для функции $f(x) = x^2$ точка $x_0 = 0$ является нулем кратности 2, а для нуля $x_0 = 0$ функции $g(x) = x^{4/3}$ понятие кратности не определено (поскольку $g(x)$ только один раз дифференцируема в нуле, но $g'(0) = 0$).

Упражнение 1. Покажите, что для каждого корня многочлена $P_n(x)$ степени n определена кратность. А именно, x_0 — корень кратности k

тогда и только тогда, когда $P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x)$, где $Q_{n-k}(x)$ — многочлен степени $n - k$ и $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$.

Обозначим через $N^0_{[a,b]}(f)$ число нулей функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, посчитанных с кратностями (нуль, для которого не определена кратность, считаем один раз, а для которого определена — столько раз, какова его кратность).

Упражнение 2. Для функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, докажите оценку, аналогичную (1):

$$N^0_{[a,b]}(f) \leqslant N^0_{[a,b]}(f') + 1.$$

Рассмотрим набор точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и функцию $f(x)$, дифференцируемую в этих точках $k_1 - 1, \ldots, k_n - 1$ раз соответственно. Интерполяционным многочленом Лагранжа с узлами интерполяции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$ назовем многочлен $P(x)$ такой, что в каждой точке α_i выполняются равенства $P(\alpha_i) = f(\alpha_i), \ldots, P^{(k_i-1)}(\alpha_i) = f^{(k_i-1)}(\alpha_i)$. Геометрически это означает, что через n заданных точек на графике функции $f(x)$ проходит кривая, являющаяся графиком многочлена $P(x)$, при этом оба графика касаются друг друга в указанных точках. «Плотность» касания определяется кратностями $k_1, \ldots, k_n$.

Упражнение 3. Обозначим через k сумму $k_1 + \ldots + k_n$. Докажите существование и единственность описанного выше интерполяционного многочлена Лагранжа $P_{k-1}(x)$ степени не выше $k-1$ с кратными узлами интерполяции.

Указание. Доказательство можно провести индукцией по набору кратностей $(k_1, \ldots, k_n)$. При $(k_1, \ldots, k_n) = (1, \ldots, 1)$ получаем обычный интерполяционный многочлен Лагранжа $P_{n-1}(x)$, существование и единственность которого доказаны в предложении 3. Предположив, что для некоторого набора кратностей $(k_1, \ldots, k_n)$ многочлен $P_{k-1}(x)$ существует и единственен, осуществите переход от набора $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ к набору $(k_1 + 1, k_2, \ldots, k_n)$ с помощью многочлена $P_k(x) = P_{k-1}(x) + c(x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_n)^{k_n}$ степени k, где постоянная c определяется из условия $P_k^{(k_1)}(\alpha_1) = f^{(k_1)}(\alpha_1)$.

Заметим, что в случае, когда точка a — единственный узел интерполяции кратности n, интерполяционный многочлен Лагранжа $P_{n-1}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1}$ — это многочлен Тейлора степени $n - 1$ для функции $f(x)$ в точке a.

Упражнение 4 (обобщение формулы Тейлора). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $k = k_1 + \ldots + k_n$ раз на интервале $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и $P_{k-1}(x)$ — ее интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами интерполяции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [a,b]$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$ соответственно. Докажите следующее обобщение предложения 4.

Найдется такая точка $c \in [a,b]$, что

$$f(b) - P_{k-1}(b) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b-\alpha_1)^{k_1} \ldots (b-\alpha_n)^{k_n}. \tag{12}$$

В случае $n = 1$ (и $\alpha_1 = a$) формула (12) совпадает с формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} f(b) \quad = \quad & f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1} + \\ & + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b-a)^k, \qquad c \in [a,b]. \end{aligned}$$

Заметим, что интерполяционный многочлен с кратными узлами интерполяции найти не так просто, как обычный интерполяционный многочлен, для которого несложно предъявить явную формулу (см. доказательство предложения 3). Задача нахождения интерполяционного многочлена $P(x)$ с узлами интерполяции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ кратностей $k_1, \ldots, k_n$ для функции $f(x)$ сводится к решению системы линейных уравнений

$$P(\alpha_i) = f(\alpha_i), \quad \ldots, \quad P^{(k_i-1)}(\alpha_i) = f^{(k_i-1)}(\alpha_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Неизвестными данной системы, состоящей из $k = k_1 + \ldots + k_n$ уравнений, являются коэффициенты многочлена $P(x)$ степени $k-1$ (k неизвестных).

Пример 3. Найдем интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами интерполяции $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$ кратностей $k_1 = k_2 = 2$ для функции $f(x) = \sin x$.

Поскольку $k = k_1 + k_2 = 4$, то искомый многочлен $P_3(x)$ — многочлен степени не выше 3:

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где a, b, c, d — коэффициенты, которые нужно найти. Имеем

$$\begin{aligned} & P_3(0) = f(0) = 0 \Longrightarrow d = 0; \qquad P_3'(0) = f'(0) = 1 \Longrightarrow c = 1; \\ & P_3(\pi) = f(\pi) = 0 \Longrightarrow a\pi^2 + b\pi + 1 = 0; \\ & P_3'(\pi) = f'(\pi) = -1 \Longrightarrow 3a\pi^2 + 2b\pi + 1 = -1. \end{aligned}$$

Решая систему, состоящую из последних двух уравнений, находим, что $a = 0$, $b = -1/\pi$. Таким образом:

$$P_3(x) = -\frac{1}{\pi}x^2 + x = x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right).$$

Используя соотношение (12), получаем, что для любого $x \in [0, \pi]$ найдется такая точка $c(x) \in [0, \pi]$, что

$$\sin x - x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) = \frac{\sin c(x)}{24}x^2(x - \pi)^2.$$

Поскольку модуль синуса не превосходит единицы, а максимальное значение многочлена $x^2(x - \pi)^2$ на отрезке $[0, \pi]$ достигается в точке $\pi/2$ и равно $\pi^4/16$, то получаем следующую оценку:

$$0 \leqslant \sin x - x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \leqslant \frac{\pi^4}{384}, \qquad x \in [0, \pi].$$

Упражнение 5. Докажите, что в условиях теоремы 3 любое нетривиальное решение уравнения (8) на отрезке $[a, b]$ имеет не более чем $n-1$ нуль с учетом кратностей.

Библиографический список

1. **Ch. I. de la Vallée Poussin.** Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assigneés. Extension aux équations d'ordre n. J. Math. Pures Appl. 1929. V. 8(9). P. 125–144.

2. **Хованский А. Г.** О числе нулей решений дифференциальных уравнений: лекция летней школы «Современная математика» 21.07.2001 (http://www.mathnet.ru).

Содержание