УДК 517.9

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе гиперболического уравнения с быстро осциллирующей по времени внешней силой

Рассматривается квазилинейное диссипативное волновое уравнение при периодических граничных условиях с внешней силой $g(x,t/\varepsilon)$, быстро осциллирующей по t. Кроме того, предполагается, что при $\varepsilon\to 0+$ функция $g(x,t/\varepsilon)$ в слабом смысле (в $L^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R},L_2(\mathbb{T}^n))$) стремится к функции $\overline{g}(x)$, а усредненное волновое уравнение (с внешней силой $\overline{g}(x)$) имеет лишь конечное число стационарных точек $\{z_i(x),\ i=1,\dots,N\}$, каждая из которых является гиперболической. Доказано, что глобальный аттрактор $\mathscr{A}_\varepsilon$ исходного уравнения отклоняется в энергетической норме от глобального аттрактора $\mathscr{A}_0$ усредненного уравнения на величину $C\varepsilon^\rho$, причем для ρ дается явная формула. Кроме того, доказано, что любой кусок траектории $u^\varepsilon(t)$ исходного уравнения, лежащей на $\mathscr{A}_\varepsilon$ и временной длины $C\log(1/\varepsilon)$, допускает аппроксимацию порядка $C_1\varepsilon^{\rho_1}$ с помощью конечного числа кусков траекторий, лежащих на неустойчивых многообразиях $M^u(z_i)$ усредненного уравнения. Для ρ_1 дается явное выражение.

Библиография: 14 названий.

Рассматривается следующее модельное неавтономное диссипативное гиперболическое уравнение:

$$\partial_t^2u+\gamma\partial_tu=\Delta u-\delta^2u-f(u)+g\biggl(x,\frac{t}{\varepsilon}\biggr) \tag{0.1}$$

при периодических граничных условиях: $x\in\mathbb{T}^n$. Здесь $\delta^2>0$, $\gamma>0$, $|f(u)|\leqslant C(|u|^{\rho+1}+1)$, где $\rho<2/(n-2)$ при $n\geqslant 3$ и ρ – любое число при $n=1,2$. Кроме того, $f(u)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, которые сформулированы в § 2. Функция $g(x,z)$ – трансляционно компактная (тр.к.) в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H)$, $H=L_2(\mathbb{T}^n)$. Это означает, что множество сдвигов $\{g(x,z+h),\ h\in\mathbb{R}\}$ образует предкомпактное множество в $L_2([-T,T],H)$ при любом фиксированном $T\in\mathbb{R}_+$. Отметим, что тр.к. являются функции $g(x,z)$, периодические по z со значениями в H, квазипериодические и почти периодические функции $g(x,z)$ по z со значениями в H. Однако класс тр.к. функций $g(x,z)$ является значительно более широким (см. [1]).

Уравнения вида (0.1) встречаются в релятивистской квантовой механике (см., например, [2] и приведенную там литературу).

Предполагается, что при $\varepsilon\to 0+$ функция $g(x,t/\varepsilon)\rightharpoonup\overline{g}(x)$ в $L^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R},H)$ (см. § 2). Функция $\overline{g}(x)$ называется *усреднением функции* $g(x,t/\varepsilon)$.

Наряду с уравнением (0.1) рассматривается усредненное уравнение

$$\partial_t^2\overline{u}+\gamma\partial_t\overline{u}=\Delta\overline{u}-\delta^2\overline{u}-f(\overline{u})+\overline{g}(x),\qquad x\in\mathbb{T}^n. \tag{0.2}$$

Уравнение (0.2) обладает глобальной функцией Ляпунова:

$$
\begin{gathered}
\mathscr{L}(\overline{u})=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|\partial_t\overline{u}(\,\cdot\,,t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\overline{u}(\,\cdot\,,t)|^2+\frac{\delta^2}{2}|\overline{u}|^2+F(\overline{u})-\overline{g}(\,\cdot\,)\overline{u}(\,\cdot\,,t)\right)dx,\\
F(\overline{u})=\int_0^{\overline{u}}f(v)\,dv.
\end{gathered}
\tag{0.3}
$$

Предполагается, что уравнение (0.2) имеет конечное число стационарных точек $\{z_i(x), i=1,\dots,N\}$:

$$
\Delta z_i-\delta^2 z_i-f(z_i)+\overline{g}(x)=0,\qquad x\in\mathbb{T}^n,
$$

и притом каждая из них является гиперболической (см. [3]–[5]). Тогда, как показано, например, в [3], [4], глобальный аттрактор $\overline{\mathscr{A}}$ уравнения (0.2) имеет следующую структуру:

$$
\overline{\mathscr{A}}=\bigcup_{i=1}^N M^u(z_i),
$$

где $M^u(z_i)$ – полное неустойчивое многообразие, проходящее через точку z_i.

Через H_s, $s\in\mathbb{R}$, как обычно, обозначается шкала пространств Соболева, где $H_0=H=L_2(\mathbb{T}^n)$, $H_1=H_1(\mathbb{T}^n)$.

Сформулируем основной результат, полученный в настоящей статье. Пусть $\{u^\varepsilon(x,t),\ t\in\mathbb{R}\}$ – любая полная траектория уравнения (0.1), ограниченная в энергетическом пространстве $E:=H_1\times H$. Рассмотрим кусок этой траектории временной длины $r_\varkappa(\varepsilon)=(\varkappa/((\rho+\nu)2(2+\varkappa)))\log(1/\varepsilon)$, $0<\varkappa<+\infty$: $\{u^\varepsilon(x,t),\ \theta\leqslant t\leqslant\theta+r_\varkappa(\varepsilon)\}$, $\theta\in\mathbb{R}$. Здесь ν – коэффициент экспоненциального притяжения траекторий $\overline{u}(x,t)$ уравнения (0.2) его глобальным аттрактором $\overline{\mathscr{A}}$. Число ρ – коэффициент экспоненциального расхождения траекторий уравнения (0.2) от траекторий уравнения (0.1) при одинаковых начальных условиях (см. §3). Число $\varkappa$ – любое фиксированное положительное число. Тогда найдется такая конечномерная составная траектория $\widetilde{u}^0\in\bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$ (см. §4), что

$$
\begin{gathered}
\big\|(u^\varepsilon(\,\cdot\,,t),\partial_t u^\varepsilon(\,\cdot\,,t))-(\widetilde{u}^0(\,\cdot\,,t),\partial_t\widetilde{u}^0(\,\cdot\,,t))\big\|_E\leqslant C\varepsilon^{\alpha_\varkappa},\\
\alpha_\varkappa=\frac{\nu}{(2+\varkappa)(\rho+\nu)}\,,\qquad \theta\leqslant t\leqslant\theta+r_\varkappa(\varepsilon),
\end{gathered}
\tag{0.4}
$$

причем C не зависит от u^ε и θ. Таким образом, грубо говоря, куски полных траекторий $u^\varepsilon(x,t)$ уравнения (0.1), имеющие временную длину, пропорциональную $\log(1/\varepsilon)$, могут быть аппроксимированы с помощью нескольких кусков траекторий усредненного уравнения (0.2), лежащих на $\bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$. При этом (0.4) дает равномерную оценку сверху их отклонений в метрике E.

Для доказательства этого результата в первых параграфах приводятся необходимые сведения и результаты. В §1 дается определение глобального аттрактора $\mathscr{A}$ неавтономного эволюционного уравнения

$$
\partial_t u=L(u,t).\tag{0.5}
$$

Кроме того, приводится определение ядра $\mathscr{K}$ этого уравнения: $\mathscr{K}$ является объединением всех ограниченных полных траекторий уравнения (0.5). Для уравнения

$$\partial_t u = L(u) + g_0(x,t) \tag{0.6}$$

с тр.к. функцией $g_0(x,t) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$ приводится формула, описывающая структуру глобального аттрактора $\mathscr{A}$ уравнения (0.6).

В §2 изучается уравнение (0.1) с быстро осциллирующей внешней силой $g(x,t/\varepsilon)$, причем $g(\,\cdot\,,z)$ – тр.к. функция в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H_{\sigma_2})$, а $g'_{x_i}(\,\cdot\,,z)$, $i=1,\dots,N$, – тр.к. функция в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H_{\sigma_2-1})$, где $\sigma_2 = 1-2\rho/(n-2)$ (напомним, что $(\rho+1)$ – порядок роста $f(u)$ по u) (см. §2). При выполнении этих условий доказывается, что уравнение (0.1) обладает равномерным глобальным аттрактором $\mathscr{A}_\varepsilon$ в энергетическом пространстве E.

В §3 исследуется отклонение $w = u^\varepsilon - u^0$, где u^ε – решение уравнения (0.1), u^0 – решение уравнения (0.2), удовлетворяющие одинаковым начальным условиям. При этом налагается дополнительное условие на разность $g(x,t/\varepsilon) - \overline{g}(x) := \widetilde{g}(x,t/\varepsilon)$. Предполагается, что существует первообразная $\widetilde{G}(\,\cdot\,,z)$ функции $\widetilde{g}(x,z)$ по z, удовлетворяющая следующему условию:

$$\|\widetilde{G}(\,\cdot\,,z)\|_{H_1} \leqslant M \qquad \forall\, z\in\mathbb{R}, \quad \partial_z \widetilde{G}(x,z) = \widetilde{g}(x,z).$$

Отметим, что в случае квазипериодической по z функции $\widetilde{g}(x,z)$ это условие сводится к выполнению диофантова условия частотами функции $\widetilde{g}(x,z)$.

При выполнении этого условия доказана следующая оценка:

$$\begin{gathered}\|(w,\partial_t w)\|_E := \bigl(\|w(\,\cdot\,,\tau+t)\|_{H_1}^2 + \|\partial_t w(\,\cdot\,,\tau+t)\|_H^2\bigr)^{1/2} \leqslant C\varepsilon^{1/2}e^{\rho t} \\ \forall\, t\geqslant 0, \qquad \forall\, \tau\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{0.7}$$

Из указанных выше фактов в §4 выводится аппроксимация (0.4) траекторий $u^\varepsilon(x,t)$ с помощью траекторий $\widetilde{u}^0(x,t) \in \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$.

В §4 дается также оценка отклонения глобальных аттракторов $\mathscr{A}_\varepsilon$ от аттрактора $\mathscr{A}_0 = \overline{\mathscr{A}}$:

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) \leqslant C\varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))}. \tag{0.8}$$

Для неавтономных уравнений типа сайн-Гордона оценка вида (0.8) получена в [6].

Для гиперболических уравнений с коэффициентами, быстро осциллирующими по x (например, $g = g(x, x/\varepsilon)$), оценки вида (0.8) получены в [7]. Для более общих, чем (0.1), гиперболических уравнений с быстро осциллирующими по x членами доказана лишь сходимость $\mathscr{A}_\varepsilon$ к $\mathscr{A}_0$ в соответствующих функциональных пространствах [1], [8], [9].

§ 1. Глобальный аттрактор неавтономного эволюционного уравнения

1.1. Рассматривается неавтономное эволюционное уравнение вида:

$$\partial_t u = L(u,t), \qquad t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Здесь $L(u,t)$ – нелинейный оператор $L(\,\cdot\,,t)\colon E_1 \to E_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$, где E_1 и E_0 – банаховы пространства такие, что $E_1 \subseteq E_0$. Изучаются решения $u(t)$ уравнения (1.1), определенные при $t \geqslant \tau$. При $t=\tau$ задается начальное условие:

$$u\big|_{t=\tau} = u(\tau) := u_\tau, \qquad u_\tau \in E, \tag{1.2}$$

где E – банахово пространство такое, что $E_1 \subseteq E \subseteq E_0$. Предполагается, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любого $u_\tau \in E$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет, и притом единственное, решение $u(t)$ такое, что $u(t) \in E$ для любых $t \geqslant \tau$. При этом в каждом конкретном случае объясняется, в каком смысле $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Пусть $\{U(t,\tau)\}$, $t \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, следующее двупараметрическое семейство операторов, порожденное задачей (1.1), (1.2), действующих в пространстве E по формуле

$$U(t,\tau)u_\tau = u(t), \qquad t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

где $u(t)$ – решение задачи (1.1), (1.2). Семейство операторов $\{U(t,\tau)\}$ обладает следующими свойствами:

1) $U(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ для любого $\tau \in \mathbb{R}$;
2) $U(t,s)\circ U(s,\tau) = U(t,\tau)$ для любых $t \geqslant s \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Семейство операторов $\{U(t,\tau)\}$ называется *процессом, порожденным задачей* (1.1), (1.2).

Для определения глобального аттрактора $\mathscr{A}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ введем сначала некоторые необходимые для этого понятия. Через $\mathscr{B}(E)$ обозначается семейство всех ограниченных множеств в E. Множество B_0 называется *поглощающим*, если для любого $B \in \mathscr{B}(E)$ существует число $h = h(B)$ такое, что

$$U(t,\tau)B \subset B_0 \qquad \forall\, t,\ \tau,\ \ t-\tau \geqslant h. \tag{1.4}$$

Множество $P \subset E$ называется *притягивающим* для процесса $\{U(t,\tau)\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathscr{O}_\varepsilon(P)$ является поглощающим для этого процесса. (Здесь и ниже через $\mathscr{O}_\varepsilon(M)$ обозначается ε-окрестность множества M в пространстве E.) Очевидно, множество P является притягивающим тогда и только тогда, когда для любого $B \in \mathscr{B}(E)$

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}_E(U(\tau+h,\tau)B, P) \to 0, \qquad h \to +\infty. \tag{1.5}$$

Здесь $\operatorname{dist}_E(X,Y)$ понимается в смысле Хаусдорфа:

$$\operatorname{dist}_E(X,Y) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} \|x-y\|_E.$$

Определение 1.1. Множество $\mathscr{A} \subset E$ является *глобальным аттрактором процесса* $\{U(t,\tau)\}$, если оно замкнутое притягивающее множество этого процесса и обладает следующим свойством минимальности: оно принадлежит любому замкнутому притягивающему множеству $\mathscr{A}'$ процесса $U(t,\tau)$: $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$.

Это понятие глобального аттрактора $\mathscr{A}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ было введено в [10], [11], [1]. Процесс $\{U(t,\tau)\}$, обладающий компактным поглощающим множеством, называется *компактным процессом.* Процесс $\{U(t,\tau)\}$, обладающий замкнутым притягивающим множеством, называется *асимптотически компактным процессом.*

Теорема 1.1. *Если процесс* $\{U(t,\tau)\}$ *является асимптотически компактным, то он обладает компактным в* E *глобальным аттрактором* $\mathscr{A}$.

Доказательство этой теоремы дано в [1]. Там же приведена следующая формула для указанного в теореме 1.1 глобального аттрактора:

$$\mathscr{A} = \omega(P) := \bigcap_{h \geqslant 0} \Bigl[\bigcup_{t-\tau \geqslant h} U(t,\tau)P \Bigr]_E, \tag{1.6}$$

где P является любым притягивающим множеством процесса $\{U(t,\tau)\}$, $[B]_E$ – замыкание множества B в E.

1.2. Введем теперь понятие *ядра* процесса $\{U(t,\tau)\}$.

Функция $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, со значениями в E называется *полной траекторией процесса* $U(t,\tau)$, если

$$U(t,\tau)u(\tau) = u(t) \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Полная траектория называется *ограниченной*, если множество $\{u(s),\ s \in \mathbb{R}\}$ ограничено в E.

Определение 1.2. Множество всех ограниченных полных траекторий $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ называется его *ядром* и обозначается буквой $\mathscr{K}$:

$$\mathscr{K} = \{u(\,\cdot\,) \mid u(t), t \in \mathbb{R}, \text{удовлетворяет (1.7) и } \|u(s)\|_E \leqslant C_u \ \ \forall\, s \in \mathbb{R}\}.$$

Множество

$$\mathscr{K}(t) = \{u(t) \mid u(\,\cdot\,) \in \mathscr{K}\}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

называется *сечением ядра в момент* t.

Предложение 1.1. *Если процесс* $\{U(t,\tau)\}$ *обладает глобальным аттрактором* $\mathscr{A}$, *то*

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathscr{K}(t) \subseteq \mathscr{A}. \tag{1.8}$$

(*см.* [1]).

Отметим, что, как правило, включение в (1.8) является строгим, т.е. существуют точки глобального аттрактора $\mathscr{A}$, которые не являются значениями полных, ограниченных траекторий данного процесса $\{U(t,\tau)\}$. Ниже на конкретных примерах будет показано на каких полных траекториях “близких процессов” такие точки лежат. В весьма общем случае процессов уравнений вида (1.1) эта проблема изучена в [1]. Ниже мы ограничимся выяснением этого вопроса для неавтономного эволюционного уравнения вида

$$\partial_t u - L(u) = g_0(x,t) \tag{1.9}$$

и соответствующего ему процесса $\{U(t,\tau)\}$. В дальнейшем изучаются лишь уравнения вида (1.9), причем $g_0(x,t) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (или $g_0(x,t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$ или другому аналогичного типа пространству). Здесь H обозначает гильбертово или банахово пространство.

Напомним, что $g_0(x,t) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$, если $g_0(x,t) \in L_2([-T,T], H)$ для любого $T > 0$. Последовательность $\{g_0(x, t+h_n)\}$, $h_n \in \mathbb{R}$, сходится при $n \to +\infty$ к функции $g(x,t)$ в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$, если она сходится к $g(x,t)$ в $L_2([-T,T], H)$ для любого $T > 0$.

Определение 1.3. Множество

$$\mathscr{H}(g_0) = [\{g_0(x, t+h),\ h \in \mathbb{R}\}]_{L_2^{\mathrm{loc}}} \tag{1.10}$$

называется *оболочкой функции* $g_0(x,t)$ в L_2^{loc}. В (1.10) $[\,\cdot\,]_{L_2^{\mathrm{loc}}}$ означает замыкание в топологическом пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H) := L_2^{\mathrm{loc}}$.

Определение 1.4. Функция $g_0(x,t)$ называется *трансляционно компактной* (тр.к.), если ее оболочка $\mathscr{H}(g_0)$ является компактным множеством в L_2^{loc}.

Аналогично определяется оболочка $\mathscr{H}(g_0)$ и тр.к. функция $g_0(x,t)$ в $C(\mathbb{R}, H)$.

Рассмотрим некоторые примеры тр.к. функций.

Пример 1. Пространство $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$ состоит из функций $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, со значениями в H, квадрат нормы которых локально интегрируем в смысле Бохнера:

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\xi(t)\|_H^2 dt < +\infty \qquad \forall\, [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}.$$

Последовательность $\{\xi_n(t)\}$ сходится к $\xi(t)$, $n \to +\infty$, в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$, если

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\xi_n(t) - \xi(t)\|_H^2 dt \to 0, \qquad n \to \infty,$$

для любого интервала $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$. Приведем критерий тр.к. функции $g_0(x,t) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (см., например, [1]).

Функция $g_0(t)$ со значениями в H тр.к. в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$ тогда и только тогда, когда:

1) для любого $h \geqslant 0$ $\left\{\int_t^{t+h} g_0(s)\,ds,\ t \in \mathbb{R}\right\}$ – предкомпактное множество в H;
2) существует положительная функция $\beta(s) > 0$, $\beta(s) \to 0$, $s \to 0+$, такая, что
$$\int_t^{t+1} \|g_0(s) - g_0(s+l)\|_H^2 ds \leqslant \beta(|l|) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что для любой тр.к. функции g_0 в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|g_0(s)\|_H^2\, ds < +\infty \tag{1.11}$$

(см. [1]).

Пример 2. Аналогично определяется тр.к. функция в пространстве $C(\mathbb{R}, H)$. Критерий тр.к. функции $g_0 \in C(\mathbb{R}, H)$ аналогичен (с очевидными изменениями) критерию, приведенному в примере 1 (см. [1]).

Пример 3. Почти периодическая (п.п.) функция $g_0(t)$ со значениями в H является тр.к. функцией в $C_b(\mathbb{R}, H)$. Отметим, что в доказательстве этого факта используется критерий Бохнера–Амерно п.п. функции в $C_b(\mathbb{R}, H)$ (см. [1], [12]). Подклассом п.п. функции являются квазипериодические функции. Функция $g_0(t) \in C_b(\mathbb{R}, H)$ является квазипериодической (к.п.), если она представима в виде

$$g_0(t) = \Phi(\alpha_1 t, \dots, \alpha_k t) = \Phi(\overline{\alpha} t), \qquad \overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \tag{1.12}$$

причем функция $\Phi(\overline{\omega}) = \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k)$ непрерывная и 2π-периодическая по $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$:

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_i + 2\pi, \dots, \omega_k) = \Phi(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_k), \qquad i = 1, \dots, k.$$

Через $\mathbb{T}^k = [\mathbb{R} \mod 2\pi]^k$ обозначим k-мерный тор. Тогда $\Phi \in C(\mathbb{T}^k, H)$. Предполагается, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ в (1.12) рационально независимы. Легко доказать, что оболочка $\mathscr{H}(g_0)$ к.п. функции $g_0(t)$ в $C_b(\mathbb{R}, H)$ совпадает со следующим множеством функций:

$$\left\{ g_0(\overline{\alpha} t + \overline{\omega}_0) \mid \overline{\omega}_0 \in \mathbb{T}^k \right\} = \mathscr{H}(g_0). \tag{1.13}$$

Следовательно, $\mathscr{H}(g_0)$ является непрерывным образом k-мерного тора $\mathbb{T}^k$.

В [1] приведены и другие примеры тр.к. функций.

1.3. Рассмотрим теперь семейство уравнений вида

$$\partial_t u = L(u) + g(x, t), \tag{1.14}$$

где $g(x,t)$ – любая функция из оболочки $\mathscr{H}(g_0(x,t))$ в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$. Предполагается, что $g_0(x,t)$ – тр.к. функция в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$ (или $C(\mathbb{R}, H)$). Пусть задача Коши (1.14), (1.2) имеет, и притом единственное, решение при любых $\tau \in \mathbb{R}$ и $u_\tau \in E$, причем $u(t) \in E$ при всех $t \geqslant \tau$. Следовательно, определено семейство процессов $\{U_g(t,\tau)$, $g \in \mathscr{H}(g_0)\}$, действующих в E и соответствующих задаче (1.14), (1.2). Аналогично определению 1.1 дается определение равномерного (по $g \in \mathscr{H}(g_0)$) глобального аттрактора семейства процессов $\{U_g(t,\tau),\, g \in \mathscr{H}(g_0)\}$.

Теорема 1.2. *Предположим, что функция* $g_0(x,t)$ – *тр.к. в* $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H)$. *Пусть процесс* $\{U_{g_0}(t,\tau)\}$ *асимптотически компактен в* E, *и пусть семейство процессов* $\{U_g(t,\tau),\ g\in\mathscr{H}(g_0)\}$ *непрерывно в* $E\times\mathscr{H}(g_0)$, *т.е.* $U_g(t,\tau)u_\tau$ *непрерывно по* (u_τ,g), *принимая значения в* E.

Тогда существует равномерный (*относительно* $g\in\mathscr{H}(g_0)$) *глобальный аттрактор* $\mathscr{A}$ *семейства процессов* $\{U_g(t,\tau)\}$. *Аттрактор* $\mathscr{A}$ *допускает следующее представление*:

$$\mathscr{A}=\bigcup_{g\in\mathscr{H}(g_0)}\mathscr{K}_g(0)=\bigcup_{g\in\mathscr{H}(g_0)}\mathscr{K}_g(t),\qquad t\in\mathbb{R},\tag{1.15}$$

где $\mathscr{K}_g$ – *ядро процесса* $U_g(t,\tau)$. *Здесь* $t\in\mathbb{R}$ – *фиксированное число. Ядро* $\mathscr{K}_g$ *является непустым множеством при любом* $g\in\mathscr{H}(g_0)$.

Доказательство теоремы 1.2 дано в [1] и [11].

Предположим, что множество $\mathscr{P}$, $[\mathscr{P}]_H\Subset H$, является равномерно (по $g\in\mathscr{H}(g_0)$) притягивающим множеством семейства процессов $\{U_g(t,\tau),\ g\in\mathscr{H}(g_0)\}$. Как и выше, предполагается, что $\{U_g(t,\tau)\}u_\tau$ непрерывно по $(u_\tau,g)\in E\times\mathscr{H}(g_0)$, принимая значения в E. Тогда для равномерного аттрактора $\mathscr{A}$ семейства процессов $\{U_g(t,\tau),\ g\in\mathscr{H}(g_0)\}$ имеет место формула

$$\mathscr{A}=\bigcap_{h\geqslant 0}\Bigl[\bigcup_{t-\tau\geqslant h}U_{g_0}(t,\tau)\mathscr{P}\Bigr]_E.\tag{1.16}$$

§ 2. Диссипативное гиперболическое уравнение с быстро осциллирующей по t внешней силой и его глобальный аттрактор

Рассматривается диссипативное гиперболическое уравнение вида

$$\partial_t^2u+\gamma\partial_tu=\Delta u-\delta^2u-f(u)+g\Bigl(x,\frac{t}{\varepsilon}\Bigr),\qquad x\in\mathbb{T}^n,\tag{2.1}$$

где $\gamma>0$, $\delta^2>0$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, при периодических граничных условиях: $x\in\mathbb{T}^n$. Как известно, уравнению (2.1) можно придать вид (1.9) эволюционного уравнения:

$$\begin{cases}\partial_tu=p;\\ \partial_tp=-\gamma p+\Delta u-\delta^2u-f(u)+g\Bigl(x,\dfrac{t}{\varepsilon}\Bigr).\end{cases}\tag{2.1$'$}$$

Обозначив $(u,p)=y$, эту систему можно записать в виде (1.9):

$$\partial_ty=L(y)+G\Bigl(x,\frac{t}{\varepsilon}\Bigr),\qquad G=(0,g),\quad x\in\mathbb{T}^n.\tag{2.2}$$

Однако ниже в основном используется уравнение (2.1). Предполагается, что функция $g(x,z)$, $z\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{T}^n$, – тр.к. по z в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H)$ $(H=L_2(\mathbb{T}^n))$, т.е.

$$\begin{gathered}\{g(\,\cdot\,,z+h),\ h\in\mathbb{R}\}\text{ – предкомпактное множество в }L_2([z_1,z_2],H)\\ \text{при любых }z_1,z_2\in\mathbb{R},\ z_1<z_2.\end{gathered}\tag{2.3}$$

Отсюда следует, что

$$\|g(\,\cdot\,,\cdot\,)\|^2_{L_2^b} := \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_z^{z+1} |g(\,\cdot\,,\xi)|^2\,d\xi \leqslant \frac{1}{2}M < +\infty, \tag{2.4}$$

здесь и далее $|\cdot| = \|\cdot\|_H$ (см. [1], [11]). Кроме того,

$$\begin{aligned}\left\|g\left(\,\cdot\,,\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2^b} &:= \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \left|g\left(\,\cdot\,,\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right|^2 d\tau \\ &= \varepsilon \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{t/\varepsilon}^{(t+1)/\varepsilon} |g(\,\cdot\,,z)|^2\,dz \leqslant M, \qquad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0. \end{aligned} \tag{2.4$'$}$$

Относительно функции взаимодействия $f(v)$ предполагается, что

$$\begin{gathered} f(v)\in C^1(\mathbb{R}), \qquad |f'(v)| \leqslant C_0(|v|^\rho+1), \\ 0\leqslant\rho<\frac{2}{n-2}\,, \quad n\geqslant 3; \qquad n=1,2, \quad \rho - \text{любое число}, \quad \rho\in\mathbb{R}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered} F(v)\geqslant -mv^2-C_m, \quad F(v)=\int_0^v f(w)dw, \\ f(v)v-\gamma_1F(v)+mv^2\geqslant -C_m, \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $m>0, \gamma_1>0$, m достаточно мало.

Предполагается, что внешняя сила $g(x,t/\varepsilon)$ обладает равномерным усреднением $\overline{g}(x)$ в $L^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R},H)$ при $\varepsilon\searrow 0$. Это означает, что для любой функции $\varphi(x,t)$, принадлежащей $L_2([-T,T],H)$, где $T>0$ – любое число из $\mathbb{R}_+$,

$$\int_{-T}^{+T} \left\langle g\left(\,\cdot\,,\frac{t+h}{\varepsilon}\right), \varphi(\,\cdot\,,t)\right\rangle_H dt \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \int_{-T}^{+T} \big\langle \overline{g}(\,\cdot\,),\varphi(\,\cdot\,,t)\big\rangle_H dt \tag{2.7}$$

равномерно по $h\in\mathbb{R}$ (см. [9]). Сформулируем достаточное условие, при котором (2.7) выполняется:

$$\frac{1}{\lambda}\int_h^{h+\lambda} g(x,z_1)\,dz_1 \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{g}(x) \quad \text{в} \quad H, \tag{2.8}$$

причем эта сходимость равномерная по $h\in\mathbb{R}$.

Отметим, что условие (2.8) выполняется для любой п.п. по z функции $g(x,z)$ со значениями в H (см. [12]).

Пусть $\mathscr{H}(g(x,z))$ – оболочка функции $g(x,z)$ в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H)$ и $\mathscr{H}(g(x,t/\varepsilon))$ – оболочка функции $g(x,t/\varepsilon)$ в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H)$ (при фиксированном ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$). Так как $g(x,z)$ – тр.к. в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H)$ (см. (2.3)), то $\widehat{g}(x,t/\varepsilon)\in\mathscr{H}(g(x,t/\varepsilon))$, если существует последовательность $\{h_n\}$, $h_n\in\mathbb{R}$, такая, что

$$g\left(\,\cdot\,,\frac{t+h_n}{\varepsilon}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{g}\left(\,\cdot\,,\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad \text{в} \quad L_2^{\mathrm{loc}}([-T,T],H) \qquad \forall\, T>0. \tag{2.9}$$

Обозначим для краткости $\widehat{g}(x,t/\varepsilon) := \widehat{g}^{\,\varepsilon}(t) := \widehat{g}(t)$, $g(x,t/\varepsilon) := g^{\varepsilon}(t) := g(t)$.

Имеют место равномерные оценки

$$\|\widehat{g}^{\,\varepsilon}\|^2_{L_2^b} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |\widehat{g}^{\,\varepsilon}(\,\cdot\,,t_1)|^2\,dt_1 \leqslant \|g^{\varepsilon}\|_{L_2^b} \leqslant M, \tag{2.10}$$

где M – такое же, как в (2.4$'$). Из (2.7) следует, что функция $\widehat{g}(x,t/\varepsilon)$ обладает при $\varepsilon \to 0+$ таким же равномерным усреднением $\overline{g}(x)$ в $L^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R},H)$, как и функция $g(x,t/\varepsilon)$:

$$\widehat{g}\biggl(x,\frac{t}{\varepsilon}\biggr) \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \overline{g}(x) \quad \text{в} \quad L^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R},H)$$

(см. [9]).

Кроме того, предполагается, что функция $g(x,z)$ тр.к. по z в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H_{\sigma_2})$, где $\sigma_2 = 1-\rho(n-2)/2$, $n \geqslant 3$, ρ – такое же, как в (2.5). Отсюда следует, что $\partial_{x_i} g(x,z)$, $i=1,\dots,n$, тр.к. по z в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H_{\sigma_2-1})$. Следовательно, для $\widehat{g} \in \mathscr{H}(g)$ имеем

$$\begin{gathered} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \biggl\|\widehat{g}_{x_i}\biggl(\,\cdot\,,\frac{t_1}{\varepsilon}\biggr)\biggr\|^2_{H_{\sigma_2-1}} dt_1 \leqslant M_1 < +\infty \\ \forall\, \widehat{g} \in \mathscr{H}(g), \quad i=1,\dots,n, \qquad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Отметим, что M_1 не зависит от ε (см. (2.4), (2.4$'$)) и от $\widehat{g} \in \mathscr{H}(g)$.

Зададим при $t=\tau$ начальные условия:

$$u\big|_{t=\tau} = u_0(x), \quad \partial_t u\big|_{t=\tau} = u_1(x), \qquad (u_0,u_1) := y(\tau) \in H_1 \times H := E. \tag{2.12}$$

Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим усредненное уравнение

$$\partial_t^2 \overline{u} + \gamma\partial_t \overline{u} = \Delta\overline{u} - \delta^2\overline{u} - f(\overline{u}) + \overline{g}(x), \qquad x \in \mathbb{T}^n, \tag{2.13}$$

где $\overline{g}(x)$ – усреднение функции $g(x,t/\varepsilon)$ в $L^{\mathrm{loc}}_{2,w}(\mathbb{R},H)$ при $\varepsilon \to 0+$. Задача (2.1), (2.12) и задача (2.13), (2.12) имеют, и притом единственное, решение

$$\begin{gathered} y_g(t) := y(t) = (u(t),\partial_t u(t)) = U_g(t,\tau)y(\tau), \qquad y(\tau) = (u_0,u_1), \\ y_{\overline{g}}(t) := (\overline{u}(t),\partial_t\overline{u}(t)) = U_{\overline{g}}(t,\tau)y(\tau). \end{gathered}$$

Так как уравнение (2.13) автономно, то $U_{\overline{g}}(t,\tau)y(\tau) = S(t-\tau)y(\tau)$, где $\{S(t_1),\ t_1 \geqslant 0\}$ – полугруппа, порожденная (2.13). Доказательство этих фактов стандартно (см., например, [2], [4]). Аналогично, если в (2.1) $g = \widehat{g}$, $\widehat{g} \in \mathscr{H}(g)$, то соответствующая задача Коши (2.1), (2.12) имеет, и притом единственное, решение $y_{\widehat{g}}(t) = U_{\widehat{g}}(t,\tau)y_{\widehat{g}}(\tau)$.

Ниже изучается семейство процессов $\{U_{\widehat{g}}(t,\tau),\ \widehat{g} \in \mathscr{H}(g)\}$, порожденное уравнениями вида (2.1), где g заменено на $\widehat{g}$. Сначала устанавливается существование равномерно притягивающего множества $\mathscr{P}$ для этого семейства процессов.

Теорема 2.1. *При выполнении указанных выше условий при любом фиксированном ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, семейство процессов*

$$\biggl\{U_{\widehat{g}}(t,\tau),\ \widehat{g}\biggl(x,\frac{t}{\varepsilon}\biggr) := \widehat{g} \in \mathscr{H}\biggl(g\biggl(x,\frac{t}{\varepsilon}\biggr)\biggr)\biggr\} \cup \{U_{\overline{g}}(t,\tau)\} \tag{2.14}$$

обладает равномерно (по $\widehat{g}$ и по $\overline{g}$) притягивающим множеством $\mathscr{P}$, компактным в E. Множество $\mathscr{P}$ не зависит от ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.

Доказательство. Рассматривается задача Коши

$$\partial_t^2\widehat{u}+\gamma\partial_t\widehat{u}=\Delta\widehat{u}-\gamma^2\widehat{u}-f(\widehat{u})+\widehat{g}\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right),\qquad x\in\mathbb{T}^n, \tag{2.15}$$

$$\widehat{u}\big|_{t=\tau}=u_0(x),\quad \partial_t\widehat{u}\big|_{t=\tau}=u_1(x),\qquad (u_0(x),u_1(x)):=y_\tau(x)\in E. \tag{2.16}$$

Здесь $\widehat{g}(x,t/\varepsilon)\in\mathscr{H}(g(x,t/\varepsilon))$. Решение $\widehat{u}_{\widehat{g}}(x,t)$ задачи (2.15), (2.16) можно представить в виде

$$y_{\widehat{g}}(t):=\widehat{y}=\Sigma(t-\tau)y_\tau+\widetilde{U}_{\widehat{g}}(t,\tau)y_\tau. \tag{2.17}$$

Здесь

$$\Sigma(t-\tau)y_\tau=(u_2(t),\partial_t u_2(t)):=y_2(t), \tag{2.18}$$

где $u_2(t)$ – решение следующей линейной задачи:

$$\partial_t^2u_2+\gamma\partial_tu_2+Au_2=0,\qquad Av(x):=-\Delta v(x)+\delta^2v(x),\quad x\in\mathbb{T}^n, \tag{2.19}$$

$$u_2\big|_{t=\tau}=u_0(x),\qquad \partial_tu_2\big|_{t=\tau}=u_1(x). \tag{2.20}$$

Как известно (см. [1], [2]), решение $(u_2(t),\partial_tu_2(t)):=y_2(t)$ задачи (2.19), (2.20) экспоненциально убывает по $(t-\tau)$:

$$\|y_2(t)\|_E\leqslant\|y_\tau\|_Ee^{-\alpha_1(t-\tau)},\qquad \alpha_1>0,\quad t\geqslant\tau. \tag{2.21}$$

Определим второе слагаемое в (2.17):

$$\begin{gathered}\widetilde{y}(t):=(\widetilde{u}(t),\partial_t\widetilde{u}(t)):=\widetilde{U}_{\widehat{g}}(t,\tau)y_\tau,\\ y_\tau=(u_0(x),u_1(x))=\left(\widehat{u}\big|_{t=\tau},\partial_t\widehat{u}\big|_{t=\tau}\right),\end{gathered} \tag{2.22}$$

причем функция $\widetilde{u}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2\widetilde{u}+\gamma\partial_t\widetilde{u}+A\widetilde{u}=\widehat{g}\left(x,\frac{t}{\varepsilon}\right)-f(\widehat{u}(t)),\qquad x\in\mathbb{T}^n, \tag{2.23}$$

$$\widetilde{u}\big|_{t=\tau}=0,\quad \partial_t\widetilde{u}\big|_{t=\tau}=0\qquad \left(\text{или } \widetilde{y}\big|_{t=\tau}=\widetilde{y}_\tau=0\right). \tag{2.24}$$

Отметим, что $\widetilde{y}(t)$ однозначно определяется через $y_\tau=(u_0(x),u_1(x))$, так как $\widetilde{u}(t)$ однозначно определяется через y_τ (см. (2.15), (2.16)). Действительно, через $\widehat{u}(t)$ выражается правая часть (2.23). Зная правую часть (2.23), мы однозначно находим $(\widetilde{u}(t),\partial_t\widetilde{u}(t))=\widetilde{y}(t)$ – решение задачи Коши для (2.23), (2.24). Заметим, что семейство операторов $\{\widetilde{U}_{\widehat{g}}(t,\tau)\}$ не является процессом.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.1. *Семейство процессов $\{U_{\widehat{g}}(t,\tau),\ \widehat{g}=\widehat{g}(x,t/\varepsilon)\in\mathscr{H}(g(x,t/\varepsilon))\}$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, обладает равномерным (по $\widehat{g}$) поглощающим множеством B_0, ограниченным в E. Множество B_0 не зависит от ε.*

Доказательство. Решение задачи (2.15), (2.16) $\big(\widehat{u}(t), \partial_t \widehat{u}(t)\big) := \widehat{y}(t) \in C_b(\mathbb{R}_\tau, E)$ (см. [1]) удовлетворяет следующей оценке:

$$\begin{aligned}\|\widehat{y}(t)\|_E^2 &:= \|\widehat{u}(t)\|_{H_1}^2 + \|\partial_t \widehat{u}(t)\|_H^2 := \|\widehat{u}(t)\|_1^2 + |\partial_t \widehat{u}(t)|^2 \\ &\leqslant C_4(\|y(\tau)\|_E^{\rho+2} + 1)e^{-\beta(t-\tau)} + \int_\tau^t (C' + C_1' |\widehat{g}(\tau_1)|_H^2) e^{-\beta(t-\tau_1)}\, d\tau_1,\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$H = H(\mathbb{T}^n), \qquad H_1 = H_1(\mathbb{T}^n), \qquad \beta > 0.$$

Здесь C_4, C', C_1' – константы, не зависящие от $\widehat{y}(\tau) = y_\tau \in E$, $\widehat{g} \in \mathscr{H}(g)$. Ниже приводится идея доказательства (2.25).

Сначала заметим, что последний интеграл в (2.25) допускает следующую оценку:

$$\begin{aligned}&\int_\tau^t (C' + C_1' |\widehat{g}(\tau_1)|^2) e^{-\beta(t-\tau_1)} d\tau_1 \\ &\leqslant C_2' + C_3' \left(\int_{t-1}^t |\widehat{g}(\tau_1)|^2 e^{-\beta(t-\tau_1)} d\tau_1 + \int_{t-2}^{t-1} |\widehat{g}(\tau_1)|^2 e^{-\beta(t-\tau_1)} d\tau_1 + \cdots \right) \\ &\leqslant C_2' + C_3' \left(\int_{t-1}^t |\widehat{g}(\tau_1)|^2 d\tau_1 + e^{-\beta} \int_{t-2}^{t-1} |\widehat{g}(\tau_1)|^2\, d\tau_1 + e^{-2\beta} \int_{t-3}^{t-2} |\widehat{g}(\tau_1)|^2 d\tau_1 + \cdots \right) \\ &\leqslant C_2' + C_3'(1 - e^{-\beta})^{-1} \|\widehat{g}\|_{L_2^b}^2 \leqslant C_3(M),\end{aligned} \tag{2.25$'$}$$

где $\|\widehat{g}\|_{L_2^b}^2 \leqslant M$ (см. (2.10)).

Отсюда и из (2.25) следует, что

$$\|\widehat{y}(t)\|_E^2 \leqslant C_4(\|\widehat{y}(\tau)\|_E^{\rho+2} + 1)e^{-\beta(t-\tau)} + C_3(M). \tag{2.26}$$

Доказательство оценки (2.25) дано в [1; гл. VI, лемма 4.1]. Приведем лишь основную идею этого доказательства. Введем функцию

$$z(t) = \int_{\mathbb{T}^n} \big(|\nabla \widehat{u}(x,t)|^2 + \delta^2 |\widehat{u}(x,t)|^2 + |\partial_t \widehat{u}(x,t) + \alpha \widehat{u}(x,t)|^2 - 2F(\widehat{u}(x,t))\big)\, dx, \tag{2.27}$$

где $\alpha > 0$ и достаточно мало, $\widehat{u}(x,t)$ – решение задачи (2.15), (2.16), $F(u) = \int_0^u f(v)\, dv$. Используя условия (2.3)–(2.6), из (2.27) выводится следующее дифференциальное неравенство:

$$d_t z(t) + \beta z(t) \leqslant C + C_1 |\widehat{g}(t)|^2, \qquad \beta > 0.$$

Отсюда, по неравенству Гронуола следует, что

$$z(t) \leqslant z(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} + \int_\tau^t (C + C_1 |\widehat{g}(\tau_1)|^2) e^{-\beta(t-\tau_1)}\, d\tau_1. \tag{2.28}$$

Учитывая (2.25′) и степенной рост функции $F(u)$, из (2.28) выводится (2.25) (см. [1; гл. VI, лемма 4.1]).

Из неравенства (2.26) следует, что множество

$$B_0 = \{y \subset E \mid \|y\|_E^2 \leqslant 2C_3(M)\} \tag{2.29}$$

является равномерно (по $\widehat{g} = \widehat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathscr{H}(g)$, $\tau \in \mathbb{R}$ и ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$) поглощающим множеством для семейства процессов $\{U_{\widehat{g}}(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ \widehat{g} \in \mathscr{H}(g)\}$ при любом фиксированном ε.

Заметим, что B_0 не зависит от ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, так как $C_3 = C_3(M)$, а M не зависит от ε (см. (2.4), (2.4$'$)).

Кроме того, из (2.26) следует, что для любого ограниченного множества $B_1 \in \mathscr{B}(E)$

$$U_{\widehat{g}}(\tau + h, \tau)B_1 \subset B_0, \qquad t \geqslant h(B_1), \tag{2.30}$$

где $h(B_1)$ не зависит от $\widehat{g} \in \mathscr{H}(g)$, а также от $\tau \in \mathbb{R}$ и от ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Таким образом, без ограничения общности (как будет доказано ниже) можно считать, что $y_\tau = \widehat{y}(\tau) \in B_0$.

Продолжим теперь доказательство теоремы 2.1.

Применим оценку (2.25) к уравнению (2.23), считая, что член $\widehat{g}(x, t/\varepsilon) + f(\widehat{u}(t))$ является известной правой частью, а начальное условие $\widetilde{y}\big|_{t=\tau} = (\widetilde{u}(\tau), \partial_t \widetilde{u}(\tau)) = 0$ (согласно (2.24)). Учитывая (2.23), (2.24) и тот факт, что в левой части (2.23) отсутствует нелинейный член, мы получаем

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{y}(t)\|_E^2 &:= \|\widetilde{u}(t)\|_1^2 + |\partial_t \widetilde{u}(t)|^2 \\
&\leqslant C \int_\tau^t \big(|\widehat{g}(t_1)|^2 + |f(\widehat{u}(t_1))|^2\big) e^{-\alpha_1(t-t_1)}\,dt_1 \\
&\leqslant C_5 + C_6 \|\widehat{g}\|_{L_2^b}^2 + C_7 \int_\tau^t \big(\|\widehat{y}(t_1)\|_E^{2(\rho+1)} + 1\big) e^{-\alpha_1(t-t_1)}\,dt_1 \\
&\leqslant C(M, \|B_0\|_E), \qquad \alpha_1 > 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

(см. [1], [2]). При этом мы воспользовались тем, что $\widehat{y}(\tau) \in B_0$, оценками (2.25), (2.25$'$) и тем, что $\|\widehat{g}\|_{L_2^b}^2 \leqslant M$. Отметим, что оценка (2.31) не зависит от ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Дифференцируя (2.23) и (2.24) по x_i, получаем

$$\partial_t^2(\partial_{x_i}\widetilde{u}) + \gamma\partial_t(\partial_{x_i}\widetilde{u}) - \Delta(\partial_{x_i}\widetilde{u}) + \delta^2\partial_{x_i}\widetilde{u} = f'_u(\widehat{u})\partial_{x_i}\widehat{u} + \widehat{g}_{x_i}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{2.32}$$

$$\partial_{x_i}\widetilde{u}\big|_{t=\tau} = 0, \quad \partial_t(\partial_{x_i}\widetilde{u})\big|_{t=\tau} = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{2.33}$$

Обозначив в (2.32) и (2.33) $\partial_{x_i}\widetilde{u} := v$, получим

$$\partial_t^2 v + \gamma\partial_t v + Av = -f'_u(\widehat{u})\partial_{x_i}\widehat{u} + \widehat{g}'_{x_i}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{2.34}$$

$$Av = -\Delta v + \delta^2 v,$$

$$v\big|_{t=\tau} = 0, \qquad \partial_t v\big|_{t=\tau} = 0. \tag{2.35}$$

Пусть $\sigma_2 = 1 - \rho(n-2)/2$, $n \geqslant 3$, где ρ – такое же, как в (2.5). Очевидно $\sigma_2 > 0$. (Случай $n = 1, 2$ трактуется аналогично.)

Для $\theta(x) \in L_2(\mathbb{T}^n) := H$ и $\nu(x) \in H_1(\mathbb{T}^n)$ имеет место неравенство

$$\|f'(\nu)\theta\|_{H_{\sigma_2-1}} \leqslant C_2' C_3'(\|\nu\|_1)|\theta|, \tag{2.36}$$

где $C_3'(s)$ – возрастающая степенная функция (степень которой определяется с помощью теоремы вложения Соболева). Доказательство (2.36) дано в [2; гл. IV, лемма 3.3]. Применяя оператор $A^{(\sigma_2-1)/2}$ к обеим частям (2.34) и (2.35), получаем

$$\begin{aligned} &\partial_t^2(A^{(\sigma_2-1)/2}v) + \gamma\partial_t(A^{(\sigma_2-1)/2}v) + A(A^{(\sigma_2-1)/2}v) \\ &\qquad = -A^{(\sigma_2-1)/2}\big(f_u'(\widehat{u})\partial_{x_i}\widehat{u}\big) + A^{(\sigma_2-1)/2}\widehat{g}_{x_i}'\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$A^{(\sigma_2-1)/2}v\big|_{t=\tau} = 0, \qquad \partial_t A^{(\sigma_2-1)/2}v\big|_{t=\tau} = 0. \tag{2.38}$$

Отметим, что из (2.36) следует

$$\begin{aligned} \big|A^{(\sigma_2-1)/2}\big(f'(\widehat{u}(t))\partial_{x_i}\widehat{u}\big)\big| &\leqslant C\|f'(\widehat{u})\partial_{x_i}\widehat{u}\|_{H_{\sigma_2-1}} \\ &\leqslant CC_2'C_3'(\|\widehat{u}(t)\|_1)|\partial_{x_i}\widehat{u}(t)| \\ &\leqslant C_0(\|B_0\|_E, M). \end{aligned} \tag{2.39}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $(\widehat{u}(\tau), \partial_t\widehat{u}(\tau)) = \widehat{y}(\tau) \in B_0$ и оценкой (2.25), согласно которой

$$\|\widehat{y}(t)\|_E^2 = \|(\widehat{u}, \partial_t\widehat{u}(t))\|_E^2 \leqslant C_4(\|B_0\|_E, M) \qquad \forall\, t \geqslant \tau.$$

Уравнение (2.37) относительно $(A^{(\sigma_2-1)/2}v) := w$ является неоднородным линейным гиперболическим уравнением с правой частью

$$-A^{(\sigma_2-1)/2}\big(f_u'(\widehat{u}(t))\partial_{x_i}\widehat{u}(t)\big) + A^{(\sigma_2-1)/2}\left(\widehat{g}_{x_i}'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) := \varphi(t).$$

Таким образом, имеем

$$\partial_t^2 w + \gamma\partial_t w + Aw = \varphi(t), \qquad w\big|_{t=\tau} = 0, \quad \partial_t w\big|_{t=\tau} = 0.$$

Как известно, для $w(t)$ имеет место оценка

$$\|w(t)\|_1^2 + |\partial_t w(t)|^2 \leqslant C_1 \int_\tau^t |\varphi(\tau_1)|^2 e^{-\alpha_1(t-\tau_1)}\, d\tau_1,$$

где $\alpha_1 > 0$.

Отсюда, подставляя вместо $w(t)$ и $\varphi(t)$ их выражения, получаем

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_{\sigma_2}}^2 + \|\partial_t v\|_{H_{\sigma_2-1}}^2 &\leqslant C_2\big(\|A^{(\sigma_2-1)/2}v(t)\|_1^2 + |\partial_t A^{(\sigma_2-1)/2}v(t)|^2\big) \\ &\leqslant C_3 \int_\tau^t \bigg(\big|A^{(\sigma_2-1)/2}\big(f'(\widehat{u}(\tau_1))\partial_{x_i}\widehat{u}(\tau_1)\big)\big|^2 \\ &\qquad + \left|A^{(\sigma_2-1)/2}\widehat{g}_{x_i}'\left(\,\cdot\,, \frac{\tau_1}{\varepsilon}\right)\right|^2\bigg) e^{-\alpha_1(t-\tau_1)}\, d\tau_1. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Учитывая оценки (2.39) и (2.11), из (2.40) выводим

$$\|v\|^2_{H_{\sigma_2}} + \|\partial_t v\|^2_{H_{\sigma_2-1}} \leqslant C_5(\|B_0\|_E, M) + C_6\big(\|\widehat{g}_{x_i}\|_{L_2^b(H_{\sigma_2-1})}\big)$$
$$\leqslant C_7(\|B_0\|_E, M, M_1), \tag{2.41}$$

где M_1 выражается по формуле (2.11). Отметим, что при оценке последнего слагаемого в (2.40) мы использовали (2.25′). Так как $v = \partial_{x_i}\widetilde{u}$, $i = 1, \dots, n$, то из (2.41) следует

$$\sum_{i=1}^{n}\big(\|\partial_{x_i}\widetilde{u}(t)\|_{H_{\sigma_2}} + \|\partial_t(\partial_{x_i}\widetilde{u}(t))\|_{H_{\sigma_2-1}}\big) \leqslant C_8(\|B_0\|_E, M, M_1), \quad t \geqslant \tau. \tag{2.42}$$

Согласно оценке (2.31)

$$\|\widetilde{y}(t)\|^2_E = \|\widetilde{u}(t)\|^2_1 + |\partial_t\widetilde{u}(t)|^2 \leqslant C(\|B_0\|_E, M).$$

Отсюда и из (2.42) следует

$$\|\widetilde{y}(t)\|_{E_{\sigma_2}} := \big(\|\widetilde{u}(t)\|^2_{H_{\sigma_2+1}} + \|\partial_t u(t)\|^2_{H_{\sigma_2}}\big)^{1/2}$$
$$\leqslant C_9(\|B_0\|_E, M, M_1), \qquad t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \sigma_2 > 0. \tag{2.43}$$

Так как $\sigma_2 > 0$, то в силу (2.43) множество $\mathscr{P} = \bigcup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\{\widetilde{y}(t),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R} \mid \widetilde{y}(t)$ – решение задачи Коши (2.23), (2.24), $\widehat{g} \in \mathscr{H}(g)$ и $\widehat{u}$ – решение задачи Коши (2.15), (2.16) с $y_\tau = (u_0(x), u_1(x)) \in B_0\}$ предкомпактно в E. Покажем теперь, что $\mathscr{P}$ является равномерно притягивающим множеством для семейства процессов $\{U_{\widehat{g}}(t,\tau),\ \widehat{g} \in \mathscr{H}(g),\ \widehat{g} = \widehat{g}(x, t/\varepsilon)\}$ и притом в силу (2.43) $\mathscr{P}$ предкомпактно в E.

Действительно, пусть $B_1 \in \mathscr{B}(E)$ – любое ограниченное множество в E.

Так как B_0 – равномерно поглощающее множество для семейства процессов $\{U_{\widehat{g}}(t,\tau),\ \widehat{g} \in \mathscr{H}(g),\ \widehat{g} = \widehat{g}(x, t/\varepsilon)\}$, то найдется такое $h = h(B_1)$, что $\forall\,\tau_1 \geqslant \tau + h(B_1) := \tau_0(\tau, B_1) := \tau_0$

$$U_{\widehat{g}}(t_1, \tau)B_1 \subset B_0.$$

Поэтому при $t \geqslant \tau_0$ в силу (2.17)

$$U_{\widehat{g}}(t,\tau_0)B_0 = \Sigma(t-\tau_0)B_0 + \widetilde{U}(t,\tau_0)B_0 \subset \Sigma(t-\tau_0)B_0 + \mathscr{P}.$$

Так как $\Sigma(t-\tau_0)$ экспоненциально убывает, то для любого $\eta > 0$

$$U_{\widehat{g}}(t,\tau_0)B_0 \subset \mathscr{O}_\eta(\mathscr{P}), \qquad t - \tau_0 \geqslant \tau_1(\eta).$$

Следовательно,

$$U_{\widehat{g}}(t,\tau)B_1 \subset U_{\widehat{g}}(t,\tau_0)U(\tau_0,\tau)B_1 \subset U_{\widehat{g}}(t,\tau_0)B_0 \subset \mathscr{O}_\eta(\mathscr{P}), \quad t > \tau + h(B_1) + \tau_1(\eta).$$

Таким образом, $\mathscr{P}$ является равномерно по $\widehat{g}^{\,\varepsilon} = \widehat{g}(x, t/\varepsilon) \in \mathscr{H}(g(x, t/\varepsilon)) := \mathscr{H}(g^\varepsilon)$ притягивающим множеством процессов $\{U_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t,\tau)\}$ при фиксированном ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. При этом $\mathscr{P}$ не зависит от ε. Очевидно, что аналогичный факт имеет место и для $U_{\overline{g}}(t,\tau) = S(t-\tau)$.

Для доказательства существования равномерного (по $\widehat{g}^{\,\varepsilon} \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$) аттрактора $\mathscr{A}_\varepsilon$ семейства процессов $\{U_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t,\tau)\}$ необходимо еще установить справедливость следующего предложения (см. [1; p. 127–128]).

Предложение 2.1. *Семейство процессов* $\{U_{\widehat{g}^{\varepsilon}}(t,\tau)y(\tau)\}$ *при любом фиксированном* ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, *является* $((E,\mathscr{H}(g^{\varepsilon})),E)$ *непрерывным* (*т.е. если* $(y_n(\tau),\widehat{g}_n^{\varepsilon})\to(y(\tau),\widehat{g}^{\varepsilon})$ *в* $(E,\mathscr{H}(g^{\varepsilon}))$, *то* $U_{\widehat{g}_n^{\varepsilon}}(t,\tau)y_n(\tau)\to U_{\widehat{g}^{\varepsilon}}(t,\tau)y(\tau)$) *в* E.

Доказательство этого предложения проводится стандартно. Оно приведено в [1; с. 127–128].

Из теоремы 2.1 и предложения 2.1 следует, что семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^{\varepsilon}}(t,\tau)\}$ обладает компактным в E равномерным (по $\widehat{g}^{\varepsilon}\in\mathscr{H}(g^{\varepsilon})$) глобальным аттрактором $\mathscr{A}_{\varepsilon}$.

Для $\mathscr{A}_{\varepsilon}$ имеет место следующая формула, аналогичная (1.16):

$$\mathscr{A}_{\varepsilon}=\bigcap_{h\geqslant 0}\biggl[\,\bigcup_{t-\tau\geqslant h}U_{g^{\varepsilon}}(t,\tau)\mathscr{P}\biggr]_E.$$

Отсюда и из указанных выше свойств равномерного притягивающего множества $\mathscr{P}$, $[\mathscr{P}]\Subset E$, следует, что

$$\mathscr{A}_{\varepsilon}\subset[\mathscr{P}], \tag{2.44}$$

причем $[\mathscr{P}]$ – фиксированное, компактное в E множество.

Кроме того,

$$\mathscr{A}_{\varepsilon}=\bigcup_{\widehat{g}^{\varepsilon}\subset\mathscr{H}(g^{\varepsilon})}\mathscr{K}_{\widehat{g}^{\varepsilon}}(0)=\bigcup_{\widehat{g}^{\varepsilon}\in\mathscr{H}(g^{\varepsilon})}\mathscr{K}_{\widehat{g}_{\varepsilon}}(t) \tag{2.45}$$

для любого фиксированного $t\in\mathbb{R}$. Здесь $\mathscr{K}_{\widehat{g}^{\varepsilon}}$ – ядро процесса $\{U_{\widehat{g}^{\varepsilon}}(t,\tau)\}$:

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_{\widehat{g}^{\varepsilon}}=\bigl\{u^{\varepsilon}(t),\ t\in\mathbb{R}\mid u^{\varepsilon}(t)-\text{решение (2.1) при } t\in\mathbb{R},\\ \|(u^{\varepsilon}(t),\partial_t u^{\varepsilon}(t))\|_E\leqslant M_{u^{\varepsilon}}\ \ \forall\,t\in\mathbb{R}\bigr\}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

§ 3. Оценка отклонения траекторий

Пусть $u^{\varepsilon}(x,t):=u_{\widehat{g}^{\varepsilon}}(x,t):=u_{\widehat{g}}(x,t)$, $\widehat{g}^{\varepsilon}=\widehat{g}(x,t/\varepsilon)\in\mathscr{H}(g^{\varepsilon})=\mathscr{H}(g(x,t/\varepsilon))$, является решением уравнения

$$\partial_t^2u^{\varepsilon}+\gamma\partial_t u^{\varepsilon}=\Delta u^{\varepsilon}-\delta^2u^{\varepsilon}-f(u^{\varepsilon})+\widehat{g}\biggl(x,\frac{t}{\varepsilon}\biggr), \tag{3.1}$$

$x\in\mathbb{T}^n$, при начальных условиях

$$u^{\varepsilon}\big|_{t=\tau}=u_0(x),\qquad \partial_t u^{\varepsilon}\big|_{t=\tau}=u_1(x), \tag{3.2}$$

$(u_0,u_1):=y\in E$. Предполагается, что $\widehat{g}^{\varepsilon}$ и $f(v)$ обладают свойствами, сформулированными в § 2. Пусть $\overline{u}(x,t):=u^0(x,t):=u^0$ – решение усредненного уравнения (2.13) с внешней силой $g^0(x)=\overline{g}(x)$, удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и u^{ε}:

$$u^0\big|_{t=\tau}=u_0(x),\qquad \partial_t u^0\big|_{t=\tau}=u_1(x). \tag{3.2$'$}$$

Предполагается, что

$$\|u_0\|_1^2+|u_1|^2:=\|y\|_E^2\leqslant R^2, \tag{3.3}$$

где $R > 0$ фиксированно. Разность $w(x,t) = u^\varepsilon(x,t) - u^0(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 w + \gamma\partial_t w = \Delta w - \delta^2 w - \big(f(u^\varepsilon) - f(u^0)\big) + \widetilde{g}\bigg(x, \frac{t}{\varepsilon}\bigg), \tag{3.4}$$

где $\widetilde{g}(x,t/\varepsilon) = \widehat{g} - \overline{g} = \widehat{g} - g^0 = \widehat{g}(x,t/\varepsilon) - g^0(x)$, и начальным условиям

$$w\big|_{t=\tau} = 0, \qquad \partial_t w\big|_{t=\tau} = 0. \tag{3.5}$$

Обозначим

$$f(u^\varepsilon) - f(u^0) = \int_0^1 f'_u\big(u^0 + s(u^\varepsilon - u^0)\big)\, ds\, (u^\varepsilon - u^0) := f'_u w. \tag{3.6}$$

Умножим скалярно уравнение (3.4) на $\partial_t w$. Учитывая (3.6), после стандартных преобразований, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\partial_t|\partial_t w|^2 + \frac{1}{2}(\partial_t|\nabla w|^2 + \delta^2|w|^2) + \gamma|\partial_t w|^2 + \langle f'_u w, \partial_t w\rangle \\ &\qquad = \langle \widehat{g} - g^0, w\rangle := \langle \widetilde{g}, w\rangle, \qquad \widehat{g} - g^0 := \widetilde{g}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Предположим дополнительно, что существует первообразная $\widetilde{G}(x,z)$ функции $\widetilde{g}(x,z)$ по z:

$$\partial_z \widetilde{G}(x,z) = \widetilde{g}(x,z), \qquad \varepsilon\partial_t \widetilde{G}\bigg(x, \frac{t}{\varepsilon}\bigg) = \widetilde{g}\bigg(x, \frac{t}{\varepsilon}\bigg), \tag{3.8}$$

обладающая следующим свойством:

$$\|\widetilde{G}(\,\cdot\,, z)\|_1 \leqslant M_1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

где M_1 не зависит от $\widehat{g} \in \mathscr{H}(g)$. Ниже приводятся примеры функций $\widehat{g}(x,z) - g^0(x) = \widetilde{g}(x)$, обладающих свойствами (3.8), (3.9).

Интегрируя (3.7) по t и используя (3.5), (3.6) и (3.8), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(|\partial_t w(\tau+t)|^2 + \|w(\tau+t)\|_1^2 + \delta^2|w(\tau+t)|^2) + \gamma\int_0^t |\partial_t w(\tau+t)| d\tau_1 \\ &= -\int_0^t \big\langle f'_u w(\tau+\tau_1), \partial_t w(\tau+\tau_1)\big\rangle d\tau_1 + \varepsilon\int_0^t \bigg\langle \partial_t \widetilde{G}\bigg(\frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\bigg), \partial_t w(\tau+\tau_1)\bigg\rangle d\tau_1 \\ &= -\int_0^t \big\langle f'_u w(\tau+\tau_1), \partial_t w(\tau+\tau_1)\big\rangle d\tau_1 + \varepsilon\bigg\langle \widetilde{G}\bigg(\,\cdot\,, \frac{\tau+t}{\varepsilon}\bigg), \partial_t w(\,\cdot\,, \tau+t)\bigg\rangle \\ &\quad - \varepsilon\int_0^t \bigg\langle \widetilde{G}\bigg(\frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\bigg), \partial_t^2 w(\tau+\tau_1)\bigg\rangle\, d\tau_1 := \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Интеграл I оценим с помощью неравенства Гёльдера с показателями $1/2$, $(n-2)/(2n)$, $1/n$:

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}| &= \left|\int_0^t \langle f_u' w(\tau+\tau_1), \partial_t w(\tau+\tau_1)\rangle \, d\tau_1\right| \\
&\leqslant \int_0^t \|f_u'\|_{L_n(\Omega)} \|w\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \|\partial_t w\|_{L_2(\Omega)} \, d\tau_1 \\
&\leqslant C \int_0^t \bigl(1 + \|u^\varepsilon\|^{2/(n-2)}_{L_{2n/(n-2)}} + \|u^0\|^{2/(n-2)}_{L_{2n/(n-2)}}\bigr) \|w\|_1 |\partial_t w| \, d\tau_1 \\
&\leqslant C_1(R,M) \int_0^t \bigl(\|w\|_1^2 + |\partial_t w|^2\bigr) \, d\tau_1, \qquad \|y^0\|_E^2, \|y^\varepsilon\|_E^2 \leqslant C_0(R^2).
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

При этом мы воспользовались тем, что $\|(u_0^\varepsilon(\tau), \partial_t u^\varepsilon(\tau))\|_E^2 \leqslant R^2$ и, как показано в § 2, отсюда следует, что $\|(u^\varepsilon(\tau+\tau_1), \partial_t u^\varepsilon(\tau+\tau_1))\|_E^2 \leqslant C_0(R^2)$.

Второе слагаемое справа в (3.10) оценивается с помощью (3.9)

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{II}| &\leqslant \varepsilon \left| \left\langle \widetilde{G}\Bigl(\,\cdot\,, \frac{\tau+t}{\varepsilon}\Bigr), \partial_t w(\tau+t) \right\rangle \right| \\
&\leqslant \varepsilon M_1 |\partial_t w(\tau+t)| \leqslant \varepsilon M_1 \frac{1}{2}\bigl(|\partial_t w(\tau+t)|^2 + 1\bigr).
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Интеграл III в (3.10) допускает следующую оценку:

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{III}| &= \varepsilon \left| \int_0^t \left\langle \widetilde{G}\Bigl(\frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\Bigr), \partial_t^2 w(\tau+\tau_1) \right\rangle d\tau_1 \right| \\
&\leqslant \varepsilon \int_0^t \left\| \widetilde{G}\Bigl(\,\cdot\,, \frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\Bigr) \right\|_1 \|\partial_t^2 w(\,\cdot\,, \tau+\tau_1)\|_{-1} \, d\tau_1 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^t \left\| \widetilde{G}\Bigl(\,\cdot\,, \frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\Bigr) \right\|_1^2 d\tau_1 + \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^t \|\partial_t^2 w(\,\cdot\,, \tau+\tau_1)\|_{-1}^2 \, d\tau_1.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле оценивается из уравнений (3.1) и (2.13):

$$
\|\partial_t^2 w\|_{-1}^2 \leqslant 2\bigl(\|\partial_t^2 u^\varepsilon\|_{-1}^2 + \|\partial_t u^0\|_{-1}^2\bigr), \tag{3.14}
$$

$$
\|\partial_t^2 u^\varepsilon\|_{-1}^2 \leqslant C\bigl(\|u^\varepsilon\|_1^2 + \|u^\varepsilon\|_{-1}^2 + \|\partial_t u^\varepsilon\|_{-1}^2 + \|f(u^\varepsilon)\|_{-1}^2 + \|\widehat{g}\|_{-1}^2\bigr). \tag{3.15}
$$

Учитывая (2.5) при $n \geqslant 3$ (случай $n \leqslant 2$ проще), имеем

$$
\|f(u^\varepsilon)\|_{-1}^2 \leqslant C_1 \|f(u^\varepsilon)\|_H^2 \leqslant C_2(\|u^\varepsilon\|_1 + |u^\varepsilon| + 1)^{2n/(n-2)} \tag{3.15$'$}
$$

и аналогичную оценку для $\|f(u^0)\|_{-1}^2$. Так как

$$
\|y^0(\tau)\|_E^2 = \|y^\varepsilon(\tau)\|_E^2 = \|u_0\|_1^2 + |u_1|^2 \leqslant R^2,
$$

то

$$
\|y^0(\tau+t)\|_E^2 \leqslant C_3(R^2), \qquad \|y^\varepsilon(\tau+t)\|_E^2 \leqslant C_3(R^2). \tag{3.16}
$$

Из (3.14)–(3.16) следует, что

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \int_0^t \|\partial_t^2 w(\,\cdot\,,\tau+\tau_1)\|_{-1}^2\,d\tau_1 \\
&\qquad \leqslant \varepsilon C_4 \biggl(\int_0^t \bigl(|\partial_t u^\varepsilon|^2 + |\partial_t u^0|^2\bigr)\,d\tau_1 + \int_0^t \bigl(\|u^\varepsilon\|_1^2 + \|u^0\|_1^2\bigr)\,d\tau_1 \\
&\qquad\qquad + \int_0^t C_5(R^2)\,d\tau_1 + \int_0^t \bigl(|g^\varepsilon|^2 + |g^0|^2\bigr)\,d\tau_1 \biggr) \\
&\qquad \leqslant \varepsilon C_6(t+1), \qquad C_6 = C_6(R, \|g^\varepsilon\|_{L_2^b}, |g^0|).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Из (3.8)–(3.17) следует

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{y}(\tau+t)\|_E^2 &:= \|w(\tau+t)\|_1^2 + |\partial_t w(\tau+t)|^2 \\
&\leqslant |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| + |\mathrm{III}| \\
&\leqslant C_1(R,M) \int_0^t \|\widetilde{y}(\tau+\tau_1)\|_E^2\,d\tau_1 + \varepsilon M_1 \bigl(|\partial_t w(\tau+t)|^2 + 1\bigr) \\
&\qquad + \varepsilon \frac{1}{2} \int_0^t \biggl\| \widetilde{G}\Bigl(\,\cdot\,, \frac{\tau+\tau_1}{\varepsilon}\Bigr) \biggr\|_1^2 d\tau_1 + \frac{1}{2}\varepsilon C_6(t+1).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

При достаточно малом ε имеем $\varepsilon M_1 < \frac{1}{2}$. Отсюда, из (3.18) и (3.9)

$$\|\widetilde{y}(\tau+t)\|_E^2 \leqslant C_7 \int_0^t \|\widetilde{y}(\tau+\tau_1)\|_E^2\,d\tau_1 + \varepsilon C_8(t+1). \tag{3.19}$$

Обозначив $\|\widetilde{y}(\tau+t)\|_E^2/(t+1) = v(t)$, из (3.19) выводим дифференциальное неравенство:

$$v(t) \leqslant C_7 \int_0^t v(\tau_1)\,d\tau_1 + \varepsilon C_8.$$

Отсюда по неравенству Гронуола следует, что

$$v(t) \leqslant \varepsilon C_8 e^{C_7 t}$$

и

$$\|\widetilde{y}(\tau+t)\|_E^2 \leqslant (t+1)v(t) \leqslant \varepsilon C_8 (t+1) e^{C_7 t} \leqslant \varepsilon C_8 e^{2\rho t}, \tag{3.20}$$

где $2\rho = C_7 + 1$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.1. *При выполнении условий* (3.8) *и* (3.9) *для отклонения* $w(\tau+t) = u_{\widehat{g}}(\tau+t) - u_{g^0}(\tau+t)$ *решений задач Коши* (3.1), (3.2) *и* (2.13), (3.2) (*при одинаковых начальных условиях* $(u_0(x), u_1(x))$) *имеет место оценка* (3.20)

$$\|\widetilde{y}(\tau+t)\|_E = \bigl(\|w(\tau+t)\|_1^2 + |\partial_t w(\tau+t)|^2\bigr)^{1/2} \leqslant C\varepsilon^{1/2} e^{\rho t}, \tag{3.21}$$

где $C = C_8(M, M_1, R)$, $\rho = \rho(M, R)$.

Приведем некоторые примеры функций $g(x,z)$, которые удовлетворяют условиям (3.8) и (3.9).

a) Пусть $g(x,z)$ – тригонометрический полином по z с рационально независимыми частотами $(\alpha_1,\dots,\alpha_l)=\overline{\alpha}$:

$$g(x,z)=a_0(x)+\sum_{0<|\overline{k}|\leqslant N}a_{\overline{k}}(x)e^{i(\overline{\alpha},\overline{k})z}:=g^0(x)+\widetilde{g}(x,z). \tag{3.22}$$

Здесь $\overline{k}=(k_1,\dots,k_l)\in\mathbb{Z}^l\setminus\{0\}$, $|\overline{k}|=k_1+\dots+k_l$, $x\in\mathbb{T}^n$, $z\in\mathbb{R}$. Предполагается, что $\overline{a}_{\overline{k}}=a_{-\overline{k}}$ для $0<|\overline{k}|\leqslant N$ и $a_{\overline{k}}(x)\in H_1=H_1(\mathbb{T}^n)$. Очевидно, $a_0(x)=g^0(x)=\overline{g}(x)$ – усреднение $g(x,t/\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0+$. В этом случае

$$\widetilde{G}(x,z)=\sum_{0<\overline{k}\leqslant N}\frac{a_{\overline{k}}(x)}{i(\overline{\alpha},\overline{k})}e^{i(\overline{\alpha},\overline{k})z},\qquad \partial_z\widetilde{G}=\widetilde{g}(x,z)=g(x,z)-g^0(x). \tag{3.23}$$

Так как α_j рационально независимы, то

$$|(\overline{\alpha},\overline{k})|\geqslant\delta>0\qquad\forall\,\overline{k}\colon\ 0<|\overline{k}|\leqslant N.$$

Функция $\widetilde{G}$ удовлетворяет условию (3.9), так как

$$\|\widetilde{G}(\,\cdot\,,z)\|_1\leqslant C\sum_{0<\overline{k}\leqslant N}\frac{\|a_{\overline{k}}(\,\cdot\,)\|_1}{\delta}\leqslant M_1. \tag{3.24}$$

Любая функция $\widehat{g}(x,z)\subset\mathscr{H}(g)$ также имеет вид (3.22), а соответствующая ей функция $\widehat{G}(x,z)$, очевидно, также удовлетворяет оценке (3.24) с той же константой M_1.

b) Рассмотрим теперь случай квазипериодической по z внешней силы $g(x,z)$, т.е.

$$g(x,z)=\Phi(x,z\overline{\alpha}),\qquad \overline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_l),$$

где $\Phi(x,\overline{\omega})=\Phi(x,\omega_1,\dots,\omega_l)$ – 2π-периодическая функция по каждому ω_j, $j=1,\dots,l$. Для простоты предположим, что $\Phi(x,\overline{\omega})\in C(\mathbb{T}^n,\mathbb{T}^l)$. Обозначим

$$\widetilde{\Phi}(x,\overline{\omega})=\Phi(x,\overline{\omega})-g^0(x),\qquad g^0(x)=\frac{1}{(2\pi)^l}\int_{\mathbb{T}^l}\Phi(x,\overline{\omega})\,\mu(d\overline{\omega}),$$

где $\mu(d\overline{\omega})$ – лебегова мера на $\mathbb{T}^l$. Тогда

$$\widetilde{g}(x,z)=\Phi(x,\overline{\alpha}z)-g^0(x)=g(x,z)-g^0(x).$$

Очевидно, $g^0(x)$ – усреднение функции $g(x,t/\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0+$. Предположим, что частоты $(\alpha_1,\dots,\alpha_l)=\overline{\alpha}$ рационально независимы и удовлетворяют следующему диофантову условию:

$$|(\overline{\alpha},\overline{k})|\geqslant C_{\overline{\alpha}}|\overline{k}|^{-(l-1+\delta)}\qquad\forall\,\overline{k}\in\mathbb{Z}^l\setminus\{0\},\quad \delta>0. \tag{3.25}$$

Как известно, неравенство (3.25) имеет место, если $\overline{\alpha}$ принадлежит множеству $\mathbb{R}^l \setminus Q^l := S^l$, где Q^l имеет лебегову меру в $\mathbb{R}^l$, равную нулю: $\mu(Q^l) = 0$ (см. [13], [14]). Пусть $\overline{\alpha} \in S^l$. Разложим функцию $\widetilde{\Phi}$ в ряд Фурье по ω_j, $j = 1, \dots, l$, и положим $\omega_j = z\alpha_j$, $z \in \mathbb{R}$. Мы получим

$$\widetilde{g}(x,z) = \widetilde{\Phi}(x, z\overline{\alpha}) = \sum_{\overline{k} \neq 0} a_{\overline{k}}(x) e^{i(\overline{\alpha},\overline{k})z}. \tag{3.26}$$

Аналогично (3.23) имеем

$$\widetilde{G}(x,z) = \sum_{\overline{k} \neq 0} \frac{a_{\overline{k}}(x)}{i(\overline{\alpha},\overline{k})} e^{i(\overline{\alpha},\overline{k})z}. \tag{3.27}$$

Если выполнено

$$\sum_{\overline{k} \neq 0} \|a_{\overline{k}}(\,\cdot\,)\|_1 |\overline{k}|^{l-1+\delta} < +\infty, \tag{3.28}$$

то, очевидно,

$$\|\widetilde{G}(\,\cdot\,,z)\|_1 \leqslant M_1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Отметим, что если выполнены оценки (3.28), (3.29) для функций $\widetilde{g}(x,z)$ и $\widetilde{G}(x,z)$, то аналогичные оценки справедливы также для любой функции $\widetilde{\widehat{g}}(x,z) = \widehat{g} - g^0(x)$, где $\widehat{g}(x,z) \in \mathscr{H}(g(x,z))$. Точнее, для этих функций $\widetilde{\widehat{g}}(x,z)$ существуют функции $\widetilde{\widehat{G}}$, удовлетворяющие оценке вида (3.29) с той же константой M_1.

§ 4. Количественная аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе $\mathscr{A}_\varepsilon$

Выше был построен равномерный (по $\widehat{g}(x,t/\varepsilon) \in \mathscr{H}\,(g(x,t/\varepsilon))$) глобальный аттрактор $\mathscr{A}_\varepsilon$ семейства процессов $\{U_{\widehat{g}}(t,\tau),\ \widehat{g}(x,t/\varepsilon) := \widehat{g}^{\,\varepsilon} \in \mathscr{H}(g(x,t/\varepsilon))\}$. Кроме того, был построен глобальный аттрактор $\overline{\mathscr{A}} := \mathscr{A}_0$ усредненного уравнения (2.13). В настоящем параграфе будет построена аппроксимация траекторий $u_{\widehat{g}^\varepsilon}(x,t) \in \mathscr{A}_\varepsilon$ через траектории $u_{g^0}(x,t) \in \mathscr{A}_0$ и будет дана оценка отклонений $u_{\widehat{g}}(x,t)$ от $u_{g^0}(x,t)$ ($g^0 := \overline{g}$ – усреднение g^ε при $\varepsilon \to 0$).

Усредненное уравнение (2.13)

$$\partial_t^2 u^0 + \gamma \partial_t u^0 = \Delta u^0 - \delta^2 u^0 - f(u^0) + g^0(x), \qquad x \in \mathbb{T}^n, \tag{4.1}$$

обладает функцией Ляпунова

$$\mathscr{L}(y^0(t)) := \mathscr{L}(u^0(t)) = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{1}{2}|\partial_t u^0|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u^0|^2 + \frac{1}{2}\delta^2 |u^0|^2 + F(u^0) - g^0 u^0 \right) dx, \tag{4.2}$$

$y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$. Функция $\mathscr{L}(u^0(t))$ строго убывает по t вдоль траекторий $u^0(t)$, отличных от стационарных точек $z(x)$. Напомним, что имеет место следующее соотношение:

$$\mathscr{L}(u^0(t)) - \mathscr{L}(u^0(\tau)) = -\gamma \int_\tau^t |\partial_t u^0(s)|^2\, ds, \qquad t \geqslant \tau, \tag{4.3}$$

где $u^0(t)$ – решение уравнения (4.1) (см., например, [4]). Так как уравнение (4.1) автономно, то оно порождает полугруппу $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$, $S(t-\tau)y^0(\tau) = y^0(t)$, где $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$ – решение (4.1). Полугруппа $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$ обладает глобальным аттрактором $\mathscr{A}_0$.

Предполагается, что уравнение (4.1) обладает лишь конечным числом стационарных точек $z_i(x)$,

$$\Delta z_i(x) - \delta^2 z_i(x) - f(z_i) + g^0(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{T}^n,$$

$\{z_i(x),\, i = 1,\dots,N\} := \mathfrak{N}$. Предполагается, что каждая стационарная точка $z_i(x)$ является гиперболической (см. [3]–[5]). Тогда, как известно, аттрактор $\mathscr{A}_0$ является объединением полных неустойчивых многообразий $M^u(z_i)$, проходящих через эти стационарные точки $z_i(x)$:

$$\mathscr{A}_0 = \bigcup_{i=1}^{N} M^u(z_i)$$

(см. [3], [4]). Введем понятие конечномерной составной траектории, лежащей на $\mathscr{A}_0$ (см. [4]).

Определение 4.1. *Конечномерной составной траекторией* (к.с.т.), *лежащей на* $\mathscr{A}_0$, называется функция $\widetilde{y}(t)$, $\tau \leqslant t < +\infty$, со значениями в $\mathscr{A}_0$, обладающая следующими свойствами:

1) существуют такие моменты времени $\tau = t_0^0 < t_1^0 < \dots < t_m^0 < t_{m+1}^0 = +\infty$, что $\widetilde{y}(t)$ непрерывна на полуинтервалах $[t_i^0, t_{i+1}^0)$, $i = 0, 1, \dots, m$;
2) значения $\widetilde{y}(t_j \pm 0)$ в точках разрыва t_j^0, $j = 1,\dots,m$, функции $\widetilde{y}(t)$ лежат в окрестности $\mathscr{O}_\rho(z^j)$ одной из стационарных точек $z_{i(j)} = z^j$, $j = 1,\dots,m$;
3) $\widetilde{y}(t_j^0) = \widetilde{y}(t_j^0 + 0) \in M^u(z^j)$, $\widetilde{y}(t) = S(t - t_j^0)\widetilde{y}(t_j^0)$ $\forall\, t \in [t_j^0, t_{j+1}^0)$; очевидно отсюда следует, что $\widetilde{y}(t) \in M^u(z^j)$ $\forall t \in [t_j^0, t_{j+1}^0)$, $j = 1,\dots,m$, $m \leqslant N$.

Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$\|y(t_2) - y_1(t_2)\|_E \leqslant Ce^{\alpha(t_2 - t_1)}\|y(t_1) - y_1(t_1)\|_E \tag{4.4}$$

для любых $t_1, t_2 > 0$. Здесь $y(t) = S(t)y(0)$, $y_1(t) = S(t)y_1(0)$, причем $y(0), y_1(0) \in \mathscr{O}_\eta(\mathscr{A}_0)$, где $\mathscr{O}_\eta(\mathscr{A}_0) := \mathscr{O}_\eta$ – η-окрестность $\mathscr{A}_0$ в пространстве E. Числа C и α зависят только от $\mathscr{O}_\eta$.

Для полугруппы $\{S(t)\}$, порожденной уравнением (4.1), имеет место неравенство (4.4). Доказательство приведено в [4; гл. 5, §7]. В [4] доказана следующая общая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть полугруппа* $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$, *действующая в банаховом* (*или гильбертовом*) *пространстве* E, *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $\{S(t)\}$ *обладает глобальным* (E, E) *аттрактором* $\mathscr{A}_0$;
2) *выполнено условие* (4.4);
3) *существует функция Ляпунова* $\mathscr{L}(y(t))$ *полугруппы* $\{S(t)\}$, *непрерывная на* E;
4) *множество* $\mathfrak{N}$ *стационарных точек* $\{S(t)\}$ *конечно*: $\mathfrak{N} = (z_1, \dots, z_N)$;
5) *полугруппа* $\{S(t)\}$ – *класса* $C^{1+\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *в окрестности каждой точки* $z_i \in \mathfrak{N}$, *и все точки* z_i *гиперболические*;
6) $S(t)y$ *непрерывна по* $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times E$.

Пусть Q – компакт в E, $y_0 \in Q$, $y(t) = S(t)y_0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Тогда для любой такой траектории $y(t)$ полугруппы $\{S(t)\}$ найдется к.с.т. $\widetilde{y} \in \mathscr{A}_0$ (удовлетворяющая всем требованиям определения 4.1) такая, что имеет место оценка

$$\|y(t) - \widetilde{y}(t)\|_E \leqslant Ce^{-\nu t} \qquad \forall\, t \in [0, +\infty), \tag{4.5}$$

где C зависит лишь от Q, а $\nu > 0$ зависит только от $\{S(t)\}$.

Применим теорему 4.1 к уравнению (4.1) или, что эквивалентно, к порожденной ею полугруппе $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$. Предположим дополнительно, что функция взаимодействия $f(u)$ удовлетворяет условию

$$|f'(u) - f'(v)| \leqslant C|u - v|^{\alpha}(1 + |u| + |v|)^{\rho}, \qquad \alpha + \rho < \frac{2}{n-2} \tag{4.6}$$

при $n \geqslant 3$ и $\alpha > 0$ и $\rho > 0$ (ρ – любое число) при $n = 1, 2$.

Тогда, как показано в [4], если функция $f(u)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в §2, и условию (4.6), $\gamma, \delta^2 > 0$, $g_0(x) \in H$, то полугруппа $\{S(t)\}$, порожденная гиперболическим уравнением (4.1), удовлетворяет условиям 1)–6) теоремы 4.1. Следовательно, для каждой ее траектории $(u^0(t), \partial_t u^0(t)) = y^0(t)$ существует к.с.т. $\widetilde{y}(t)$ такая, что имеет место (4.5). В силу автономности уравнения (4.1) аналогичная (4.5) оценка справедлива также для траекторий $\{y(t),\, t \geqslant \tau\}$ этого уравнения при любом $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\|y^0(t + \tau) - \widetilde{y}(t + \tau)\|_E \leqslant Ce^{-\nu t} \qquad \forall\, t \in [0, +\infty), \tag{4.7}$$

где $\widetilde{y}(t) \in \bigcup_{i=1}^{N} M^u(z_i) = \mathscr{A}_0$, $\widetilde{y}(t)$ – к.с.т.

Рассмотрим равномерный глобальный аттрактор $\mathscr{A}_\varepsilon$ гиперболического уравнения

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - \delta^2 u + f(u) + \widehat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \qquad \widehat{g}\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) := \widehat{g}^{\,\varepsilon}, \tag{4.8}$$

где $\widehat{g}^{\,\varepsilon} \in \mathscr{H}(g(x, t/\varepsilon)) := \mathscr{H}(g^\varepsilon)$, $g(x, t/\varepsilon) := g^\varepsilon$, ε – фиксированное число, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Ядро $\mathscr{K}_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}$ уравнения (4.8) состоит из полных, ограниченных в E траекторий $\{y_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t),\ t \in \mathbb{R},\ \|y_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t)\|_E \leqslant M_{y_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}}$, причем $y_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t) := (u_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t), \partial_t u_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t)) \in \mathscr{A}_\varepsilon\}$. Имеет место следующая формула:

$$\mathscr{A}_\varepsilon = \bigcup_{\widehat{g}^{\,\varepsilon} \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)} \mathscr{K}_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(0) = \bigcup_{\widehat{g}^{\,\varepsilon} \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)} \mathscr{K}_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad t \text{ фиксировано}, \tag{4.9}$$

где $\mathscr{K}_{\widehat{g}}(t)$ – сечение $\mathscr{K}_{\widehat{g}}$.

Рассмотрим кусок траектории $y_{\widehat{g}^{\,\varepsilon}}(t) := \widehat{y}^{\,\varepsilon}(t) \subset \mathscr{A}_\varepsilon$:

$$\{\widehat{y}(\tau + t),\ -T \leqslant t \leqslant 0\}, \tag{4.9$'$}$$

причем T будет определено ниже. Для простоты записи будем сначала считать, что $\tau = 0$. Из точки $\widehat{y}(-T)$ выходит траектория $y^0(-T + t) = (u^0(-T + t), \partial_t u^0(-T + t))$, $t \geqslant 0$, усредненного уравнения (4.1), удовлетворяющая при $t = 0$ условию

$$\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T) = y^0(-T). \tag{4.10}$$

Как было показано в § 2, процессы $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t,\tau),\, \widehat{g}^{\,\varepsilon} \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)\}$ обладают компактным притягивающим множеством $[\mathscr{P}] \Subset E$. Поэтому $\mathscr{A}_\varepsilon \subset [\mathscr{P}]$ и $y^0(-T) \in [\mathscr{P}]$. Так как $y^0(-T)$ принадлежит фиксированному компактному множеству $[\mathscr{P}]$, то согласно теореме 4.1 можно найти к.с.т. $\{\widetilde{y}^{\,0}(-T+t),\, t \geqslant 0\} \subset \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i) = \mathscr{A}_0$ такую, что имеет место оценка

$$\bigl\|y^0(-T+t) - \widetilde{y}^{\,0}(-T+t)\bigr\|_E \leqslant C_1 e^{-\nu t} \qquad \forall\, t > 0, \tag{4.11}$$

где $C_1 = C_1([\mathscr{P}])$, а $\nu > 0$ и определяется с помощью усредненного уравнения (4.1) (или, что то же, соответствующей ему полугруппой $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$).

Так как траектории $\{\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T+t),\, t \geqslant 0\}$ и $\{y^0(-T+t),\, t \geqslant 0\}$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям (4.10), то согласно оценке (3.21)

$$\bigl\|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T+t) - y^0(-T+t)\bigr\|_E \leqslant C\varepsilon^{1/2} e^{\rho t}, \qquad t \geqslant 0. \tag{4.12}$$

Из (4.11) и (4.12) выводим

$$\begin{aligned} &\|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T+t) - \widetilde{y}^{\,0}(-T+t)\|_E \\ &\quad \leqslant \|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T+t) - y^0(-T+t)\|_E + \|y^0(-T+t) - \widetilde{y}^{\,0}(-T+t)\|_E \\ &\quad \leqslant (C + C_1)(\varepsilon^{1/2} e^{\rho t} + e^{-\nu t}). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ниже из этой оценки выводится ряд следствий.

Теорема 4.2. *Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в § 2, и условию (4.6); $\gamma > 0$, $\delta^2 > 0$; $g^0(x) \in H = L_2(\Omega)$; $\widehat{g}(x,z) - g^0(x) := \widetilde{g}(x,z)$, где $\widehat{g}(x,t/\varepsilon) = \widehat{g}^{\,\varepsilon}(x,t) \in \mathscr{H}(g^\varepsilon)$; $\widetilde{g}(x,z)$ удовлетворяет условиям (3.8), (3.9).*

Тогда имеет место следующая оценка для отклонения аттракторов $\mathscr{A}_\varepsilon$ от $\mathscr{A}_0$:

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}_\varepsilon, \mathscr{A}_0) \leqslant C\varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))}, \tag{4.14}$$

где ν и ρ определены в формулах (4.11) и (4.12).

Доказательство. Положим в (4.13) $T = T_\varepsilon = (1/(2(\rho+\nu)))\log(1/\varepsilon)$ и $t = T_\varepsilon$. Для такого значения T_ε имеем

$$e^{-\nu T_\varepsilon} = \varepsilon^{1/2} e^{\rho T_\varepsilon} = \varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))}.$$

Из (4.13) получим

$$\begin{aligned} &\|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T_\varepsilon + T_\varepsilon) - \widetilde{y}^{\,0}(-T_\varepsilon + T_\varepsilon)\|_E \\ &\quad = \|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(0) - \widetilde{y}^{\,0}(0)\|_E \leqslant 2(C + C_1)\varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))} = C_2 \varepsilon^{\nu/(2(\rho+\nu))}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Согласно (4.9) $\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t)\big|_{t=0} = \widehat{y}_{\widehat{g}^\varepsilon}(t)\big|_{t=0}$ $\forall\, \widehat{g}^{\,\varepsilon} \subset \mathscr{H}(g^\varepsilon)$ – любая точка $\mathscr{A}_\varepsilon$. Очевидно, $\widetilde{y}^{\,0}(0) \in \mathscr{A}_0$. Поэтому из (4.15) следует (4.14).

Замечание 4.1. Оценка (4.14) имеет место при менее ограничительных условиях на функцию $f(u)$. Для краткости изложения мы ограничились функциями $f(u)$, указанными в теореме 4.2.

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимизации куска траектории, например, $\{\widehat{y}(-T_\varepsilon+t), T_\varepsilon-r_\varkappa(\varepsilon)\leqslant t\leqslant T_\varepsilon\}\in\mathscr{A}_\varepsilon$ через кусок к.с.т. $\{\widetilde{y}^{\,0}(-T_\varepsilon+t), T_\varepsilon-r_\varkappa(\varepsilon)\leqslant t\leqslant T_\varepsilon\}\in\mathscr{A}_0=\bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$; $r_\varkappa(\varepsilon)>0$. (При этом T_ε можно заменить любым другим числом (см. нижеследующее).)

Теорема 4.3. *Любой кусок траектории $\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t)\in\mathscr{A}_\varepsilon$ временной длины*

$$r_\varkappa(\varepsilon)=\frac{1}{(\rho+\nu)}\,\frac{\varkappa}{2(2+\varkappa)}\log\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \varkappa>0,$$

т.е.

$$\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t)\in\mathscr{A}_\varepsilon, \qquad \theta\leqslant t\leqslant\theta+r_\varkappa(\varepsilon), \quad \theta\in\mathbb{R}, \tag{4.16}$$

можно аппроксимировать соответствующей ей к.с.т. $\{\widetilde{y}^{\,0}(t),\ \theta\leqslant t\leqslant\theta+r_\varkappa(\varepsilon)\}\in\bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$, причем на любом $M^u(z_i)$ лежит не более одного непрерывного куска $\widetilde{y}^{\,0}(t)$.

Имеет место следующая оценка

$$\|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t)-\widetilde{y}^{\,0}(t)\|_E\leqslant C_3\varepsilon^{\nu/((2+\varkappa)(\rho+\nu))}, \tag{4.17}$$

$\theta\leqslant t\leqslant\theta+r_\varkappa(\varepsilon)$.

Константа C_3 не зависит от $\varkappa,\theta$ и $\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t)$.

Доказательство. Как показано ниже, оценку (4.17) достаточно доказать для некоторого конкретного начального времени θ. Возьмем сначала

$$\begin{aligned}\theta=T_\varepsilon-r_\varkappa(\varepsilon)&=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\rho+\nu}\log\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\varkappa}{2(2+\varkappa)}\,\frac{1}{\rho+\nu}\log\frac{1}{\varepsilon}\\&=\frac{1}{2+\varkappa}\,\frac{1}{\rho+\nu}\log\frac{1}{\varepsilon}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Тогда

$$\theta+r_\varkappa(\varepsilon)=T_\varepsilon=\frac{1}{2(\rho+\nu)}\log\frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.19}$$

Аналогично (4.10) пусть $\{y^0(-T_\varepsilon+t), t\geqslant 0\}$ – траектория усредненного уравнения (4.1), которая при $t=0$ совпадает с $\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T_\varepsilon)$:

$$\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T_\varepsilon)=y^0(-T_\varepsilon). \tag{4.20}$$

Тогда, как было показано выше, имеет место оценка (4.12_ε), совпадающая с (4.12) с заменой T на T_ε. Далее, аналогично (4.10), (4.11) для траектории $y^0(-T_\varepsilon+t)$ можно найти такую к.с.т. $\{\widetilde{y}^{\,0}(-T_\varepsilon+t),\ t\geqslant 0\}\in\mathscr{A}_0=\bigcup_{i=1}^N M^u(z_i)$, что имеет место оценка (4.11_ε), совпадающая с (4.11) с заменой T на T_ε.

Из оценок (4.12_ε) и (4.11_ε) получаем (аналогично (4.13))

$$\|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(-T_\varepsilon+t)-\widetilde{y}^{\,0}(-T_\varepsilon+t)\|_E\leqslant(C+C_1)(\varepsilon^{1/2}e^{\rho t}+e^{-\nu t}). \tag{4.21}$$

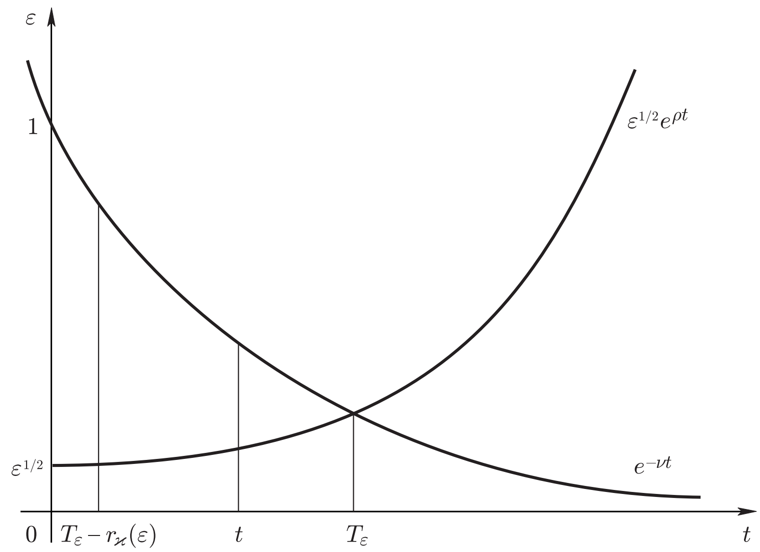

Рис. 1

Из рис. 1 видно, что при

$$T_\varepsilon - r_\varkappa(\varepsilon) < t < T_\varepsilon$$

имеем

$$\varepsilon^{1/2} e^{\rho t} < e^{-\nu t}.$$

При $t = T_\varepsilon$ имеем $\varepsilon^{1/2} e^{\rho t} = e^{-\nu t}$.

Отсюда и из (4.21) следует, что при

$$T_\varepsilon - r_\varkappa(\varepsilon) \leqslant t \leqslant T_\varepsilon \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} \|\widehat{y}(-T_\varepsilon + t) - \widetilde{y}^{\,0}(-T_\varepsilon + t)\|_E &\leqslant (C + C_1)(e^{-\nu t} + \varepsilon^{1/2} e^{\rho t}) \\ &\leqslant 2(C + C_1) e^{-\nu t} \leqslant 2(C + C_1) e^{-\nu (T_\varepsilon - r_\varkappa(\varepsilon))} \\ &:= C_3 \varepsilon^{\nu/((2+\varkappa)(\rho+\nu))}, \quad C_3 = 2(C + C_1). \end{aligned} \tag{4.23}$$

При этом мы воспользовались формулой (4.18) для $T_\varepsilon - r_\varkappa(\varepsilon)$.

Из оценки (4.23) следует оценка (4.17), в которой $\theta \leqslant t \leqslant \theta + r_\varkappa(\varepsilon)$. Действительно, (4.23) можно записать в виде

$$\|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t_1) - y^0(t_1)\|_E \leqslant C_3 \varepsilon^{\nu/((2+\varkappa)(\rho+\nu))}, \qquad -r_\varkappa(\varepsilon) \leqslant t_1 \leqslant 0. \tag{4.24}$$

Отметим, что выбор начального значения t_1, $t_1 = -r_\varkappa(\varepsilon)$, в (4.24) не играет роли.

Действительно, напомним, что в рассматриваемом в (4.9′) куске траектории $\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t)$ ($\widehat{y}^{\,\varepsilon}(\tau + t)$, $-T \leqslant t \leqslant 0$) мы могли взять значение τ любым (а не как выше $\tau = 0$) и с этим значением τ продолжить все последующие, начиная с (4.9′), выкладки. Выбрав соответствующее значение τ, мы получим в (4.24) временной интервал $\theta \leqslant$

$t \leqslant \theta + r_\varkappa(\varepsilon)$, θ – любое число, $\theta \in \mathbb{R}$, указанный в формуле (4.17). Оценка (4.17) установлена.

Отметим, что к.с.т. $y^0(t_1)$ в (4.24) состоит из кусков траекторий усредненного уравнения (4.1), причем на любом $M^u(z_i)$ лежит не более одного куска.

Следствие 4.1. *Рассмотрим кусок траектории* $\{\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t),\ \theta \leqslant t \leqslant \theta + lr_\varkappa(\varepsilon)\} \in \mathscr{A}_\varepsilon$, $l \in \mathbb{N}$. *Согласно теореме* (4.3) *для любой части этой траектории вида* $\{\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t),\ \theta + ir_\varkappa(\varepsilon) \leqslant t < \theta + (i+1)r_\varkappa(\varepsilon)\}$, $0 \leqslant i \leqslant l-1$, *существует к.с.т.* $\{\widetilde{y}^{\,0}_i,\ \theta + ir_\varkappa(\varepsilon) \leqslant t < \theta + (i+1)r_\varkappa(\varepsilon)\} \subset \mathscr{A}^0 = \bigcup_{j=1}^N M^u(z_j)$ *такая, что*

$$\|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t) - \widetilde{y}^{\,0}_i(t)\|_E \leqslant C_3 \varepsilon^{\nu/((2+\varkappa)(\rho+\nu))}, \quad \theta + ir_\varkappa(\varepsilon) \leqslant t < \theta + (i+1)r_\varkappa(\varepsilon), \tag{4.25}$$

$i = 0, 1, \dots, l-1$. *Обозначим через* $\widetilde{y}^{\,0}(t,l)$ *кусочно непрерывную траекторию усредненного уравнения* (4.1), *задаваемую формулой*

$$\widetilde{y}^{\,0}(t,l) = \bigl\{\widetilde{y}^{\,0}_i(t),\ \theta + ir_\varkappa(\varepsilon) \leqslant t < \theta + (i+1)r_\varkappa(\varepsilon),\ i = 0, 1, \dots, l-1\bigr\}.$$

Из оценок (4.25) *следует*

$$\bigl\|\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t) - \widetilde{y}^{\,0}(t,l)\bigr\|_E \leqslant C_3 \varepsilon^{\nu/((2+\varkappa)(\rho+\nu))}, \qquad \theta \leqslant t \leqslant \theta + lr_\varkappa(\varepsilon). \tag{4.26}$$

Предложение 4.4. *Для любого куска траектории* $\{\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t),\ \theta \leqslant t \leqslant \theta + lr_\varkappa(\varepsilon) \mid \{\widehat{y}^{\,\varepsilon}(t)\} \subset \mathscr{A}_\varepsilon\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, *существует такая аппроксимирующая ее кусочно непрерывная траектория* $\{\widetilde{y}^{\,0}(t),\ \theta \leqslant t \leqslant \theta + lr_\varkappa(\varepsilon)\} \subset \mathscr{A}_0 = \bigcup_{i=1}^N M^u(z_j)$, *что выполнена оценка* (4.26).

Очевидно, что с возрастанием l соответственно возрастает число кусков непрерывности $\widetilde{y}^{\,0}(t,l)$. Каждый из этих кусков лежит, очевидно, на одном из неустойчивых многообразий $M^u(z_j)$, $j = 1, \dots, N$.

Список литературы

1. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Amer. Math. Soc. Collog. Publ. V. 49.)
2. *Temam R.* Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1988. (Appl. Math. Ser. V. 68.)
3. *Hale J.* Asymptotic behaviour of dissipative systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988.
4. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
5. *Raugel G.* Global attractors in partial differential equations // Handbook of Dynamical Systems 2 / ed. B. Fiedler. Amsterdam: North-Holland, 2001.
6. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I., Wendland W.* On non-autonomous sine-Gordon type equations with a simple global attractor // Preprint № 2003/01. Stuttgart: Stuttgart Univ., 2003.
7. *Вишик М. И., Фидлер Б.* Количественное усреднение глобальных аттракторов гиперболических волновых уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // УМН. 2002. Т. 47. №4. С. 75–94.
8. *Ильин А. А.* Усреднение диссипативных систем с быстро осциллирующими правыми частями // Матем. сб. 1996. Т. 187. №5. С. 15–58.
9. *Вишик М. И., Чепыжов В. В.* Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами // Матем. сб. 2001. Т. 192. №1. С. 16–53.

10. *Haraux A.* Two remarks on dissipative hyperbolic problems // Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France. V. 7 / ed. H. Brezis, J.L. Lions. Boston, MA: Pitman, 1985. P. 161–179. (Res. Notes Math. V. 122.)
11. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. (9). 1994. V. 73. №3. P. 279–333.
12. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
13. *Kassels J. W. S.* An introduction to Diophantine approximations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1957.
14. *Fiedler B., Vishik M. I.* Quantative homogenization of global attractors for reaction-diffusion systems with rapidly oscillating terms // Preprint № A-18-2000. Berlin: Free Univ. Berlin, 2000.

Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва
E-mail: vishik@iitp.ru, chep@iitp.ru

Поступила в редакцию
21.03.2003