Математические заметки

том 71 выпуск 2 февраль 2002

УДК 517.95

ТРАЕКТОРНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОРЫ 3D СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Построен траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ для трехмерной системы Навье–Стокса с возбуждающей силой $g(x) \in H$. Множество $\mathfrak{A}$ состоит из некоторого класса ограниченных в H решений этой системы, заданных на положительной полуоси времени $\mathbb{R}_+$, которые допускают продолжение на всю временную ось $\mathbb{R}$, оставаясь ограниченными в H решениями системы Навье–Стокса. При этом любые ограниченные в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ семейства решений этой системы неограниченно приближаются к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}$. Доказано, что решения $\{u(x,t),\ t \geqslant 0\}$, принадлежащие $\mathfrak{A}$, непрерывны по t, если их рассматривать в пространстве функций со значениями в $H^{-\delta}$, $0<\delta\leqslant 1$. Сужение траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ при $t=0$: $\mathfrak{A}|_{t=0} =: \mathscr{A}$ называется глобальным аттрактором системы Навье–Стокса. Доказазано, что так определенный глобальный аттрактор $\mathscr{A}$ обладает свойствами, характерными для общеизвестных глобальных аттракторов эволюционных уравнений. Доказана сходимость при $m \to \infty$ траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_m$ и глобальных аттракторов $\mathscr{A}_m$ галёркинских приближений порядка m системы Навье–Стокса к траекторному и глобальному аттракторам $\mathfrak{A}$ и $\mathscr{A}$ соответственно. Аналогичные проблемы изучены для случаев возбуждающей силы вида $g=g(x,t)$, зависящей от времени t и внешней силы g, быстро осциллирующей по пространственным переменным или по переменной времени t.

Библиография: 14 названий.

Введение. Как известно, для трехмерной системы Навье–Стокса до сих пор не доказана теорема единственности решения основной краевой задачи. В связи с этим для изучения поведения при $t \to +\infty$ решений этой системы нельзя применить известные методы, связанные с исследованием глобального аттрактора соответствующей ей полугруппы (или процесса). В настоящей статье построен траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ для трехмерной системы Навье–Стокса. Он состоит из некоторого класса ограниченных в пространстве H бездивергентных векторных полей решений этой системы, заданных на положительной полуоси времени $\mathbb{R}_+$, которые допускают продолжение на всю временну́ю ось $\mathbb{R}$, оставаясь ограниченными в H решениями системы. При этом любые ограниченные в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ семейства решений B системы Навье–Стокса неограниченно приближаются к аттрактору $\mathfrak{A}$ на интервале $[h,h+T]$ при $h \to +\infty$ и при любом фиксированном $T>0$. Решения $\{u(x,t),\ t\geqslant 0\}$, принадлежащие траекторному аттрактору $\mathfrak{A}$, непрерывны по t, если рассматривать их в пространстве функций со значениями в $H^{-\delta}$, где $\delta>0$ и сколь угодно мало. Поэтому существует сужение $\mathfrak{A}|_{t=0}$ при $t=0$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00304, и фонда INTAS, грант № 899.

траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$. Множество $\mathfrak{A}|_{t=0} = \mathfrak{A}(0) =: \mathscr{A}$ называется *глобальным аттрактором* 3D системы Навье–Стокса; $\mathscr{A}$ – ограниченное в H множество, компактное в $H^{-\delta}$. Оно обладает свойством притяжения, характерным для глобальных аттракторов эволюционных уравнений, для которых теорема единственности имеет место.

В статье построены и изучены траекторный и глобальный аттракторы трехмерной системы Навье–Стокса с возбуждающей силой вида $g(x)$ или $g(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, доказана сходимость при $m \to +\infty$ траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_m$ и глобального аттрактора $\mathscr{A}_m$ галёркинского приближения порядка m к траекторному и глобальному аттракторам $\mathfrak{A}$ и $\mathscr{A}$ соответственно. Наконец, изучены некоторые вопросы усреднения этих аттракторов для системы Навье–Стокса с внешней силой вида $g(x, x/\varepsilon)$ или $g(x,t,t/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$.

В заключение отметим, что примененные в статье методы построения траекторного и глобального аттракторов применимы также для исследования других диссипативных уравнений математической физики.

1. Траекторные аттракторы. Рассматривается абстрактное эволюционное уравнение вида

$$\partial_t u = A(u). \tag{1.1}$$

Мы будем исследовать семейства решений $u(t)$ уравнения (1.1), заданные при всех $t \geqslant 0$. Опишем более подробно интересующий нас класс решений уравнения (1.1). Пусть E и E_0 – банаховы пространства, причем $E \subseteq E_0$ (случай $E = E_0$ также допускается). Изучаются решения $u(t)$, $t \geqslant 0$, уравнения (1.1), принадлежащие пространству $C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, которое состоит из функций $f(t)$, $t \geqslant 0$, непрерывных со значениями в E_0 и существенно ограниченных со значениями в E. На самом деле, если $f(\,\cdot\,) \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, то $f(t) \in E$ при всех $t \geqslant 0$. Этот факт вытекает из следующей известной леммы.

Лемма 1.1 (Лионс–Madженес). *Пусть $g(\,\cdot\,) \in L_\infty([0,M]; E)$ и известно, что функция $g(t)$ слабо непрерывна в E_0: $g(\,\cdot\,) \in C_w([0,M]; E_0)$, т.е. при любой функции $\varphi \in E_0^*$ функция $\langle g(t), \varphi\rangle \in C([0,M])$. Здесь E_0^* обозначает пространство, сопряженное к E_0. Тогда $g(t) \in E$ при всех $t \geqslant 0$, функция $g(t)$ слабо непрерывна в E: $g(\,\cdot\,) \in C_w([0,M]; E)$, и, кроме того,*

$$\|g(t)\|_E \leqslant \|g(\,\cdot\,)\|_{L_\infty([0,M];E)} \qquad \forall t \in [0,M]. \tag{1.2}$$

Эта лемма доказана в [1] (см. также [2]).

Мы не будем пока уточнять, в каком смысле функция $u(\,\cdot\,) \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ является решением уравнения (1.1). Это будет сделано в каждом конкретном примере особо. Обычно для этого используется то или иное пространство обобщенных функций.

Рассмотрим некоторое семейство решений уравнения (1.1) и обозначим его $\mathscr{K}^+$. Предполагается, что $\mathscr{K}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$. Для каждой функции $u \in \mathscr{K}^+$ мы будем часто обозначать ее аргумент (переменную времени) буквой s и писать $u(s)$, $s \geqslant 0$. Множество $\mathscr{K}^+$ будем называть *пространством траекторий* уравнения (1.1), а его элементы – *траекториями*. Предполагается, что рассматриваемое пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ является *трансляционно инвариантным* в следующем смысле: если

$u(\cdot) \in \mathscr{K}^+$, то при любом $h \geqslant 0$ функция $u_h(\cdot) \in \mathscr{K}^+$, где $u_h(s) = u(h+s)$, $s \geqslant 0$. Это свойство обычно выполнено для решений автономных уравнений.

Рассмотрим операторы сдвигов $T(h)$, $h \geqslant 0$, действующие на пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ в положительном направлении оси времени по формуле

$$T(h)f(\cdot) = f_h(\cdot), \quad h \geqslant 0, \qquad f_h(s) \equiv f(s+h). \tag{1.3}$$

Легко видеть, что семейство операторов $\{T(h),\, h \geqslant 0\}$ образует полугруппу, т.е. $T(h_1 + h_2) = T(h_1)T(h_2)$ при любых $h_1, h_2 \geqslant 0$ и $T(0) = \mathrm{Id}$ – тождественный оператор. Заменим переменную h на переменную t. Полугруппа $\{T(t)\} \equiv \{T(t),\, t \geqslant 0\}$ называется *полугруппой трансляций*.

Мы будем изучать действие полугруппы трансляций $\{T(t)\}$ на пространстве траекторий $\mathscr{K}^+$ уравнения (1.1). В силу условия трансляционной инвариантности заключаем, что

$$T(t)\mathscr{K}^+ \subseteq \mathscr{K}^+ \quad \text{при} \ \ t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Мы построим аттрактор трансляционной полугруппы $\{T(t)\}$, действующей на $\mathscr{K}^+$. Для этого необходимо, прежде всего, ввести топологию на $\mathscr{K}^+$. Проще всего это сделать, определив, когда последовательность функций $\{f_n(s)\}$ из $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ сходится к некоторой функции из этого пространства. Будем считать, что последовательность $\{f_n(s)\}$ сходится к функции $f(s)$, если для любого числа $M \geqslant 0$ выполнено соотношение

$$\max_{s\in[0,M]} \|f_n(s) - f(s)\|_{E_0} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{1.5}$$

Введенную топологию в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ будем обозначать $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E_0)$. Легко видеть, что $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E_0)$ является пространством Фреше. В частности, оно метризуемо и соответствующее метрическое пространство полно. Топологическое пространство $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E_0)$ индуцирует топологию в $\mathscr{K}^+$. Очевидно следующее

Утверждение 1.1. *Полугруппа трансляций $\{T(t)\}$ непрерывна в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E_0)$. В частности, она непрерывна в $\mathscr{K}^+$.*

Нам также потребуется определение ограниченных множеств в $\mathscr{K}^+$. Для этого воспользуемся нормой пространства $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$. По определению множество $B \subset \mathscr{K}^+$ называется ограниченным, если оно ограничено по норме в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, т.е. если найдется число $C = C(B)$ такое, что

$$\|u(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; E)} \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{s\geqslant 0} \|u(s)\|_E \leqslant C \qquad \forall u(\cdot) \in B. \tag{1.6}$$

Дадим определения притягивающего множества и траекторного аттрактора полугруппы $\{T(t)\}$, действующей на $\mathscr{K}^+$. Через Π_M обозначается оператор ограничения на отрезок $[0, M]$. Например, если $f(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, то $\Pi_M f(\cdot) \in C([0, M]; E_0) \cap L_\infty([0, M]; E)$ и $\Pi_M f(s) = f(s)$ при $s \in [0, M]$.

Определение 1.1. Множество $P \subseteq C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ называется *притягивающим* для пространства траекторий $\mathscr{K}^+$ уравнения (1.1) в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$, если для любого ограниченного (в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$) множества $B\subseteq\mathscr{K}^+$ и для любого числа $M\geqslant 0$ выполнено соотношение

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];E_0)}(\Pi_M T(t)B,\Pi_M P)\to 0 \qquad (t\to+\infty). \tag{1.7}$$

Здесь, как обычно, $\operatorname{dist}_{\mathscr{M}}(A,B)$ обозначает расстояние по Хаусдорфу от множества $A\subseteq\mathscr{M}$ до множества $B\subseteq\mathscr{M}$ в метрическом пространстве $\mathscr{M}$ с метрикой $\rho_{\mathscr{M}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$:

$$\operatorname{dist}_{\mathscr{M}}(A,B)=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\rho_{\mathscr{M}}(a,b).$$

Определение 1.2. Множество $\mathfrak{A}\subseteq\mathscr{K}^+$ называется *траекторным аттрактором* в пространстве траекторий $\mathscr{K}^+$ относительно топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$, если

i) $\mathfrak{A}$ компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$;

ii) $\mathfrak{A}$ строго инвариантно относительно $\{T(t)\}$, т.е.

$$T(t)\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\qquad\forall t\geqslant 0;$$

iii) $\mathfrak{A}$ является притягивающим множеством в пространстве $\mathscr{K}^+$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$.

Замечание 1.1. Если траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ в $\mathscr{K}^+$ существует, то он, очевидно, единственный.

Сформулируем основную теорему о существовании траекторного аттрактора.

Теорема 1.1. *Пусть пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ трансляционно инвариантно. Предположим, что существует притягивающее множество P для пространства траекторий $\mathscr{K}^+$ такое, что $P\subseteq\mathscr{K}^+$, причем P компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$. Тогда в пространстве $\mathscr{K}^+$ имеется траекторный аттрактор $\mathfrak{A}\subseteq P$. При этом множество $\mathscr{K}^+$ компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, полугруппа трансляций $\{T(t)\}$ непрерывна в $\mathscr{K}^+$ (см. утверждение 1.1). Рассмотрим ω-предельное множество $\omega(P)$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$:

$$\omega(P):=\bigcap_{\tau\geqslant 0}\biggl[\bigcup_{t\geqslant\tau}T(t)P\biggr]_{C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)}.$$

Стандартным образом проверяется, что $\omega(P)\subseteq P$, $\omega(P)$ компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$, ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$, строго инвариантно относительно $\{T(t)\}$ и, наконец, что $\omega(P)$ является притягивающим множеством для $\mathscr{K}^+$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$. Следовательно, множество $\mathfrak{A}=\omega(P)$ – искомый траекторный аттрактор (см. подробное доказательство в [3]; аналогичные теоремы доказаны также в [4]–[6]).

Замечание 1.2. В приложениях пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ может быть снабжено более сильной, чем $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E_0)$, топологией Θ_+^{loc}. В этих случаях если удается построить компактное притягивающее множество P_1 в топологии Θ_+^{loc}, то траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ притягивает ограниченные множества $B \subset \mathscr{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc} (см. [3]).

Для описания общей структуры траекторного аттрактора воспользуемся понятием полной траектории уравнения (1.1). Рассмотрим уравнение (1.1) на всей оси времени $-\infty < t < \infty$:

$$\partial_t u = A(u), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Функция $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, принадлежащая пространству $C(\mathbb{R}; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}; E)$, называется *полной траекторией* уравнения (1.8) в $\mathscr{K}^+$, если для любого $h \in \mathbb{R}$ функция

$$\Pi_+ u_h(s) \in \mathscr{K}^+, \qquad u_h(s) := u(h+s).$$

Здесь Π_+ обозначает оператор сужения (по s) на полуось $\mathbb{R}_+$.

Определение 1.3. Ядро $\mathscr{K}$ уравнения (1.1) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}; E)$ есть объединение всех полных траекторий уравнения (1.8).

Замечание 1.3. Как видно из этого определения, ядро $\mathscr{K}$ уравнения (1.1) состоит из решений этого уравнения, заданных на всей оси времени, принадлежащих $C(\mathbb{R}; E_0)$ и ограниченных в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}; E)$.

По аналогии с пространством $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E_0)$ рассматривается пространство $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; E_0) := C(\mathbb{R}; E_0)$, снабженное топологией локальной равномерной сходимости на каждом отрезке $[-M, M] \subset \mathbb{R}$. Из свойства строгой инвариантности траекторного аттрактора выводится следующая

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда имеет место равенство*

$$\mathfrak{A} = \Pi_+ \mathscr{K}.$$

При этом ядро $\mathscr{K}$ компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}; E)$.

Доказательство более общей теоремы приведено в [3].

Из теорем 1.1 и 1.2 видно, что для построения траекторного аттрактора уравнения (1.1) необходимо построить притягивающее (или поглощающее) множество P, которое компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$. Для решения этой задачи будет использоваться следующая лемма о компактном вложении.

Пусть Y – некоторое банахово пространство такое, что $E \subseteq Y$. Рассмотрим пространство

$$W_{\infty,p}(0, M; E, Y) = \bigl\{\psi(s),\ s \in [0, M] \bigm| \psi(\,\cdot\,) \in L_\infty(0, M; E),\ \psi'(\,\cdot\,) \in L_p(0, M; Y)\bigr\},$$

где $p > 1$, с нормой

$$\|\psi\|_{W_{\infty,p}} = \operatorname{ess\,sup}\bigl\{\|\psi\|_E \bigm| s \in [0, M]\bigr\} + \left(\int_0^M \|\psi'(s)\|_Y^p \, ds\right)^{1/p}.$$

Здесь производная $\psi'(s)$, $s \in [0, M]$, понимается в смысле обобщенных функций из пространства $D'(0, M; Y)$.

Лемма 1.2. *Предположим, что $E \Subset E_0 \subseteq Y$. Тогда следующее вложение компактно*:

$$W_{\infty,p}(0,M;E,Y) \Subset C([0,M];E_0).$$

Доказательство приведено в [7].

Замечание 1.4. В приложениях обычно E, E_0 и Y – различные пространства Соболева, причем Y может быть пространством Соболева отрицательного порядка. Например, $E = H_0^1(\Omega)$, $E_0 = L_2(\Omega)$, $Y = H^{-1}(\Omega)$, где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$. Другие пространства будут рассмотрены в приводимых ниже примерах.

Замечание 1.5. Для применения леммы 1.2 в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$ заметим, что множество P компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$, если и только если множество $\Pi_M P$ компактно в $C^{\mathrm{loc}}([0,M];E_0)$ при каждом $M \geqslant 0$.

2. Глобальные аттракторы. В этом пункте мы построим глобальный аттрактор для уравнения (1.1), используя понятие траекторного аттрактора. Отметим, что при этом не будет предполагаться однозначная разрешимость соответствующей задачи Коши.

Рассмотрим автономное уравнение (1.1), для которого определено пространство траекторий $\mathscr{K}^+ \subset C(\mathbb{R}_+;E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$, удовлетворяющее свойству трансляционной инвариантности (см. (1.4)). Как уже отмечалось, в силу леммы 1.1 для каждой траектории $u(\,\cdot\,) \in \mathscr{K}^+$

$$u(t) \in E \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Для каждого множества траекторий $B \subset \mathscr{K}^+$ мы определим его сечение $B(t) \subseteq E$ в момент времени $t \geqslant 0$:

$$B(t) = \{u(t) \mid u \in B\} \subseteq E. \tag{2.2}$$

Аналогично определяются множества

$$\mathfrak{A}(t) = \{u(t) \mid u \in \mathfrak{A}\} \subseteq E, \qquad t \geqslant 0,$$
$$\mathscr{K}(t) = \{u(t) \mid u \in \mathscr{K}\} \subseteq E, \qquad t \in \mathbb{R},$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathscr{K}$ обозначают траекторный аттрактор и ядро уравнения (1.1) соответственно. Отметим, что сечения $\mathfrak{A}(t)$ и $\mathscr{K}(t)$ не зависят от времени t в силу свойства строгой инвариантности траекторного аттрактора.

Определение 2.1. Множество $\mathscr{A} \subset E$ называется *глобальным аттрактором* (в E_0) уравнения (1.1), если

i) $\mathscr{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E;

ii) для любого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ множества траектороий $B \subset \mathscr{K}^+$ выполнено свойство притяжения сечений $B(t)$ к $\mathscr{A}$ при $t \to +\infty$ по норме в E_0:

$$\operatorname{dist}_{E_0}(B(t),\mathscr{A}) \to 0 \qquad (t \to +\infty); \tag{2.3}$$

iii) $\mathscr{A}$ – минимальное множество, удовлетворяющее i) и ii), т.е. $\mathscr{A}$ принадлежит любому компактному в E_0 и ограниченному в E притягивающему множеству.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда существует глобальный аттрактор* (*в* E_0) $\mathscr{A}$ *уравнения* (1.1), *причем*

$$\mathscr{A} = \mathfrak{A}(0) \equiv \mathscr{K}(0),$$

где $\mathfrak{A}$ – *траекторный аттрактор, а* $\mathscr{K}$ – *ядро уравнения* (1.1).

Доказательство. В самом деле, траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ уравнения (1.1) компактен в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничен в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$. Следовательно, его сечение $\mathfrak{A}(0)$ компактно в E_0 и ограничено в E. Пусть $B \subset \mathscr{K}^+$ и множество B ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$. Тогда в силу определения траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ для любого $M \geqslant 0$

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];E_0)}(\Pi_M T(t)B, \Pi_M \mathfrak{A}) \to 0 \qquad (t \to +\infty). \tag{2.4}$$

Заметим, что $\Pi_0 T(t)B = B(t)$ и $\Pi_0 \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(0) =: \mathscr{A}$. Поэтому из (2.4) при $M = 0$ получаем свойство притяжения (2.3). Мы доказали свойства i) и ii) из определения 2.1.

Проверим свойство минимальности iii). Пусть множество $\mathscr{A}_1$ компактно в E_0 и

$$\operatorname{dist}_{E_0}(B(t), \mathscr{A}_1) \to 0 \qquad (t \to +\infty)$$

для любого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества траекторий $B \subset \mathscr{K}^+$. Положим $B = \mathfrak{A}$. Ясно, что $\mathfrak{A}$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ и $\mathfrak{A} \subset \mathscr{K}^+$. Следовательно, $\operatorname{dist}_{E_0}(\mathfrak{A}(t), \mathscr{A}_1) \to 0$ $(t \to +\infty)$. В силу свойства строгой инвариантности $T(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, $t \geqslant 0$, имеем $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}(0)$ при всех $t \geqslant 0$. Поэтому $\operatorname{dist}_{E_0}(\mathfrak{A}(0), \mathscr{A}_1) \equiv \operatorname{dist}_{E_0}(\mathscr{A}, \mathscr{A}_1) = 0$. Поскольку множество $\mathscr{A}_1$ замкнуто в E_0, то $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}_1$. Отсюда следует, что $\mathscr{A}$ принадлежит любому множеству, удовлетворяющему i) и ii). Значит, $\mathscr{A}$ – минимальное множество. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Легко видеть, что $\mathscr{A} = \mathfrak{A}(\tau)$ для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, глобальный аттрактор $\mathscr{A}$ есть объединение всех значений $\{u(t),\ t \geqslant 0\}$ всех траекторий $u(\,\cdot\,)$, принадлежащих траекторному аттрактору $\mathfrak{A}$.

Определение 2.1 обобщает известное понятие глобального (E, E_0)-аттрактора полугруппы, соответствующей задаче Коши уравнения (1.1) при выполнении условия единственности решения этой задачи (см. [4]–[6]).

Предположим, что пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ уравнения (1.1) удовлетворяет следующему условию: для любого $u_0 \in E$ существует, и при том единственная, траектория $u(\,\cdot\,) \in \mathscr{K}^+$ такая, что

$$u(0) = u_0. \tag{2.5}$$

Используя стандартную схему, определим операторы $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$, соответствующие задаче Коши (2.5) уравнения (1.1), по формуле

$$S(t)u_0 = u(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Операторы $\{S(t)\}$, действующие в пространстве E, образуют полугруппу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Множество $\mathscr{A} \subset E$ называется *глобальным* (E, E_0)*-аттрактором* полугруппы $\{S(t)\}$, действующей в E, если

i) $\mathscr{A}$ ограничено в E и компактно в E_0;

ii) $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ при всех $t \geqslant 0$;

iii) для любого множества $B_0 \subset E$, ограниченного по норме в E, выполнено условие

$$\operatorname{dist}_{E_0}(S(t)B_0, \mathscr{A}) \to 0 \qquad (t \to +\infty). \tag{2.7}$$

Напомним, что полугруппа $\{S(t)\}$ называется *ограниченной* в E, если для любого множества B_0, ограниченного в E, множество $\bigcup_{t\geqslant 0} S(t)B_0$ ограничено в E.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и, кроме того, полугруппа* $\{S(t)\}$ *ограничена в* E. *Тогда множество*

$$\mathscr{A} = \mathfrak{A}(0) \equiv \mathscr{K}(0)$$

является (E, E_0)*-аттрактором полугруппы* $\{S(t)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что множество $\mathscr{A} = \mathfrak{A}(0)$ удовлетворяет свойствам i) и ii) из определения 2.2. Проверим свойство iii). Пусть B_0 ограничено в E. Тогда в силу ограниченности полугруппы $\{S(t)\}$ множество траекторий

$$B = \{u(s),\ s \geqslant 0 \mid u(t) = S(t)u_0,\ u_0 \in B_0\}$$

ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, и, следовательно, в силу теоремы 2.1 его сечения $B(t)$ притягиваются к $\mathscr{A}$ в E_0 при $t \to +\infty$. Осталось заметить, что $B(t) = S(t)B_0$, т.е.

$$\operatorname{dist}_{E_0}(S(t)B_0, \mathscr{A}) = \operatorname{dist}_{E_0}(B(t), \mathscr{A}) \to 0 \qquad (t \to +\infty).$$

3. Траекторный и глобальный аттракторы системы Навье–Стокса. Исключив давление, 3D систему Навье–Стокса можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \partial_t u + \nu L u + B(u) = g(x), \qquad (\nabla, u) = 0, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad t \geqslant 0, \\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \qquad u = (u^1, u^2, u^3). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\Omega \Subset \mathbb{R}^3$, $u = u(t) = u(x,t)$, $g = g(x) = (g^1, g^2, g^3)$; L является оператором Стокса: $Lu = -P\Delta u$; $B(u) = B(u,u) = P\sum_{i=1}^3 u^i \partial_{x_i} u$, $\nu > 0$; P обозначает ортопроектор в $(L_2(\Omega))^3$ на подпространство H соленоидальных векторных полей. Подпространство H есть замыкание по норме пространства $(L_2(\Omega))^3$ множества функций $\mathscr{V} = \{v(x) \in C_0^\infty(\Omega),\ (\nabla, v(x)) = 0\}$ (см. [8], [9], [2]). Через V обозначается замыкание $\mathscr{V}$ по норме пространства $(H_0^1(\Omega))^3$. Скалярное произведение в H обозначается через

$$(u, v) = \sum_{i=1}^3 \int_\Omega u^i(x) v^i(x)\, dx,$$

а норма – через

$$|u| = \biggl(\sum_{i=1}^3 \int_\Omega |u^i(x)|^2\, dx\biggr)^{1/2}.$$

Норма в пространстве V равна

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} |\nabla u^i(x)|^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Пусть $V' = (V)^*$ – пространство, сопряженное к V. Предположим, что $g \in V'$.

При $t = 0$ зададим начальное условие

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad \text{где} \quad u_0(x) \in H. \tag{3.2}$$

Оператор $B(u)$ отображает V в V', и имеет место следующее неравенство:

$$|\langle B(u), v\rangle| \leqslant c_0\|u\|^2\|v\| \qquad \forall u, v \in V$$

(см. [9], [2]). Отсюда следует, что

$$\|B(u)\|_{V'} \leqslant c_0\|u\|^2 \qquad \forall u \in V. \tag{3.3}$$

Поэтому если $u(t) \in L_2(0, M; V)$, то $B(u(t)) \in L_1(0, M; V')$. Очевидно, что $Lu(t) \in L_2(0, M; V')$. Следовательно, все члены системы (3.1) (кроме $\partial_t u$) принадлежат пространству $L_1(0, M; V')$. Рассмотрим их как обобщенные функции со значениями в V', принадлежащими $D'(0, M; V')$. Функция $u(x, t) \in L_2(0, M; V)$ называется *решением системы* (3.1) *в слабом смысле* (или его *слабым решением*) на интервале $[0, M]$, если ее производная $\partial_t u(t)$ удовлетворяет (3.1) в смысле теории обобщенных функций в $D'(0, M; V')$ (см. [9], [2]). Из уравнения (3.1) вытекает, что $\partial_t u(t) \in L_1(0, M; V')$. Следовательно, $u(t) \in C([0, M]; V')$ и начальное условие (3.3) имеет смысл.

С помощью метода Галёркина устанавливается, что задача Коши (3.1), (3.2) обладает слабым решением $u(t)$ на любом интервале $[0, M]$, причем

$$u(t) \in L_2(0, M; V) \cap L_\infty(0, M; H). \tag{3.4}$$

Отсюда выводится, что данное слабое решение удовлетворяет свойству

$$B(u(t)) \in L_{4/3}(0, M; V'). \tag{3.5}$$

При выводе этого включения используется неравенство

$$\|f\|_{L_4(\Omega)} \leqslant c_1\|f\|_{L_2(\Omega)}^{1/4}\|\nabla f\|_{L_2(\Omega)}^{3/4}, \qquad f \in H_0^1(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3. \tag{3.6}$$

Константа c_1 не зависит от Ω (см. [8], [9], [2]). В самом деле, заметим, что

$$B(u) = P\sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i}(u^i u) \qquad \forall u \in V. \tag{3.7}$$

Из неравенства (3.6) следует, что

$$\|u^i u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_1'|u|^{1/2}\|u\|^{3/2},$$

и в силу (3.7) получаем, что

$$\|B(u)\|_{V'} \leqslant c_2|u|^{1/2}\|u\|^{3/2} \qquad \forall u \in V.$$

Поэтому если $u(t) \in L_2(0,M;V) \cap L_\infty(0,M;H)$, то

$$\|B(u(\,\cdot\,))\|_{L_{4/3}(0,M;V')} = \left(\int_0^M \|B(u(t))\|_{V'}^{4/3}\,dt\right)^{3/4} \leqslant c_2\left(\int_0^M |u(t)|^{2/3}\|u(t)\|^2\,dt\right)^{3/4}$$
$$\leqslant c_2\|u(\,\cdot\,)\|_{L_\infty(0,M;H)}^{1/2}\|u(\,\cdot\,)\|_{L_2(0,M;V)}^{3/2}$$

и, следовательно, имеет место (3.5).

Из уравнения (3.1) и из (3.5) вытекает, что

$$\partial_t u(t) \in L_{4/3}(0,M;V') \tag{3.8}$$

(см. [8], [9], [2]).

Отметим, что слабое решение $u(t)$ задачи (3.1), (3.2), полученное методом Галёркина, удовлетворяет следующему энергетическому неравенству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 \leqslant \langle u(t), g\rangle \qquad \forall t \in [0,M]. \tag{3.9}$$

Это неравенство следует понимать так: для любой функции $\psi(s) \geqslant 0$, $\psi(s) \in C_0^\infty(]0,M[)$ выполнено неравенство

$$-\int_{-\infty}^{\infty} |u(s)|^2\psi'(s)\,ds + \nu\int_{-\infty}^{\infty} \|u(s)\|^2\psi(s)\,ds \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(s), g\rangle\psi(s)\,ds. \tag{3.10}$$

Введем теперь пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ для уравнения (3.1).

Определение 3.1. Пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ уравнения (3.1) состоит из функций $u(t) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ таких, что при любом $M > 0$ функция $\Pi_M u(t)$ является слабым решением (3.1) на интервале $[0,M]$, которое удовлетворяет энергетическому неравенству (3.10).

Из приведенных выше результатов о слабых решениях легко вытекает

Утверждение 3.1. *Для любого $u_0 \in H$ существует траектория $u(t) \in \mathscr{K}^+$ такая, что $u(0) = u_0$.*

Доказательство проводится методом Галёркина. Оно приведено в [3] (см. также [10]).

Замечание 3.1. Для трехмерной системы Навье–Стокса теорема единственности слабого решения задачи Коши остается недоказанной. Кроме того, не известно удовлетворяет ли любое слабое решение энергетическому неравенству (3.10). Однако, как уже отмечалось выше, любое решение, полученное методом Галёркина, удовлетворяет (3.10).

Построим траекторный и глобальный аттракторы уравнения (3.1). В качестве пространства E выберем H, а в качестве E_0 – пространство $H^{-\delta}$, где δ – некоторое фиксированное положительное число, $0 < \delta \leqslant 1$. Здесь H^σ, $\sigma \in \mathbb{R}$, обозначает шкалу пространств, отвечающую гильбертову пространству H. Отметим, что $H \Subset H^{-\delta}$.

Следуя схеме, изложенной в п. 1, для каждой траектории $u(\,\cdot\,) \in \mathscr{K}^+$ будем обозначать переменную времени буквой s: $u(s)$, $s \geqslant 0$.

Рассмотрим пространство $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$.

Утверждение 3.2. *Имеет место включение*

$$\mathscr{K}^+ \subset C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H).$$

Доказательство. Если $u \in \mathscr{K}^+$, то в силу определения 3.1 $u(\,\cdot\,) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Одновременно с этим из условия $u(t) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$ и из уравнения (3.1) следует, что $\partial_t u(\,\cdot\,) \in L_{4/3}(0, M; V')$ (см. (3.5) и (3.8)). Воспользуемся леммой 1.2 для пространств $E = H$, $E_0 = H^{-\delta}$, $Y = V'$ и $p = 4/3$; получим, что $u(\,\cdot\,) \in C(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$.

Рассмотрим действие трансляционной полугруппы $\{T(t)\}$ на $\mathscr{K}^+$:

$$T(t)u(s) = u(t+s), \qquad s \geqslant 0.$$

Легко видеть, что пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ является трансляционно инвариантным, т.е.

$$T(t)\mathscr{K}^+ \subseteq \mathscr{K}^+ \quad \text{при } t \geqslant 0. \tag{3.11}$$

В самом деле, любая сдвинутая траектория $u(h+s)$ является слабым решением уравнения (3.1), удовлетворяющим энергетическому неравенству (3.10).

На пространстве траекторий $\mathscr{K}^+$ рассмотрим топологию $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$. Ограниченные множества в $\mathscr{K}^+$ определяются с помощью нормы из $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Мы изучаем траекторный аттрактор в пространстве $\mathscr{K}^+$ (см. определение 1.2). Обозначим через $\mathscr{K}$ ядро уравнения (3.1) в $L_\infty(\mathbb{R}; H)$ (см. определение 1.3). Легко видеть, что ядро $\mathscr{K}$ состоит из слабых решений $u(x,s)$, $s \in \mathbb{R}$, уравнения, определенных на всей оси времени, ограниченных в $L_\infty(\mathbb{R}; H)$ и удовлетворяющих энергетическому неравенству на всей оси, т.е. имеет место (3.10) для любой функции $\psi(\,\cdot\,) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.1. *Система уравнений Навье–Стокса* (3.1) *имеет траекторный аттрактор* $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{K}^+$. *При этом*

$$\mathfrak{A} = \Pi_+ \mathscr{K}. \tag{3.12}$$

Множество $\mathfrak{A}$ *ограничено в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ *и компактно в* $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$, *а множество* $\mathscr{K}$ *ограничено в* $L_\infty(\mathbb{R}; H)$ *и компактно в* $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{-\delta})$.

При доказательстве теоремы 3.1 нам потребуются два утверждения, доказанные в [3].

Утверждение 3.3. *Пусть дана последовательность* $\{u_n(\,\cdot\,)\} \subset \mathscr{K}^+$, *ограниченная в* $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. *Предположим, что для некоторой функции* $u^*(\,\cdot\,) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$ *имеет место предельное соотношение*

$$u_n(\,\cdot\,) \to u^*(\,\cdot\,) \quad (n \to \infty) \qquad \text{в } C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta}).$$

Тогда $u^* \in \mathscr{K}^+$.

Утверждение 3.4. *Для любой функции* $u \in \mathscr{K}^+$ *выполнено следующее неравенство*:

$$\begin{aligned}
&\|T(t)u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} + \|T(t)u\|_{L_2(0,1;V)} + \|T(t)\partial_t u\|_{L_{4/3}(0,1;V')} \\
&\qquad \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{s\geqslant t} |u(s)| + \left(\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2\,ds\right)^{1/2} + \left(\int_t^{t+1} \|\partial_t u(s)\|_{V'}^{4/3}\,ds\right)^{3/4} \\
&\qquad \leqslant C\|u\|_{L_\infty(0,1;H)} \exp(-\gamma t) + R_0 \qquad \forall t \geqslant 0, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

где $C > 0$, $R_0 > 0$, $\gamma > 0$; C, γ *и* R_0 *не зависят от* $u(\,\cdot\,)$.

Напомним, следуя [3], идею доказательства утверждения 3.3. Из (3.13) следует, что последовательность $\{u_n\}$ обладает ограниченными нормами, стоящими слева в (3.13). Отсюда, как показано в [3], вытекает, что $B(u_{n'}) \rightharpoonup B(u^*)$ слабо в $L_{4/3}(0,M;V')$ при $n' \to \infty$, где $\{n'\}$ – некоторая подпоследовательность $\{n\}$. Доказательство сходимости $\partial_t u_{n'} + \nu L u_{n'} - g \rightharpoonup \partial_t u^* + \nu L u^* - g$ слабо в $L_{4/3}(0,M;V')$ при $n' \to \infty$ не представляет труда. Следовательно, u^* – решение (3.1). Предельный переход в неравенстве (3.10) для $\{u_n\}$ к соответствующем энергетическому неравенству для u^* приведен в [3]. Тем самым, $u^* \in \mathscr{K}^+$.

Доказательство теоремы 3.1. Для применения теорем 1.1 и 1.2 достаточно построить притягивающее множество $P \subseteq \mathscr{K}^+$, ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ и компактное в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$. Рассмотрим множество

$$P = \Bigl\{u \in \mathscr{K}^+ \Bigm| \operatorname*{ess\,sup}_{h\geqslant 0}\bigl\{\|u\|_{L_\infty(h,h+1;H)} + \|\partial_t u\|_{L_{4/3}(h,h+1;V')}\bigr\} \leqslant 2R_0\Bigr\}. \qquad (3.14)$$

Покажем, что P является поглощающим множеством трансляционной полугруппы $\{T(t)\}$. Пусть $B \subset \mathscr{K}^+$ и B ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$, т.е. $\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} \leqslant R$ для каждой траектории $u \in B$. Выберем число t_1 так, чтобы $R\exp(-\gamma t_1) + R_0 \leqslant 2R_0$. Тогда при любом $t \geqslant t_1$ в силу (3.13) получаем неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(t,t+1;H)} + \|\partial_t u\|_{L_{4/3}(t,t+1;V')} \leqslant 2R_0. \qquad (3.15)$$

Следовательно, $T(t)u \in P$, т.е. $T(t)B \subseteq P$ при $t \geqslant t_1$. Множество P, очевидно, ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$. Из леммы 1.2 вытекает, что P предкомпактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$. В самом деле, из (3.14) получаем, что при любом $M > 0$ множество $\Pi_M P$ ограничено в $W_{\infty,4/3}(0,M;H,V')$ и, следовательно, $\Pi_M P$ предкомпактно в $C([0,M];H^{-\delta})$, так как $H \Subset H^{-\delta} \subset V'$. Покажем, что P компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$, т.е. P замкнуто в $C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$. Пусть $\{u_n\} \subset P$ и $\Pi_M u_n \to \Pi_M u^*$ $(n \to \infty)$ в $C([0,M];H^{-\delta})$ при любом $M > 0$. Последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$. Применяя предложение 3.3, заключаем, что $u^* \in \mathscr{K}^+$. Кроме того, из неравенства

$$\|u\|_{L_\infty(h,h+1;H)} + \|\partial_t u\|_{L_{4/3}(h,h+1;V')} \leqslant 2R_0$$

следует, что

$$\|u^*\|_{L_\infty(h,h+1;H)} + \|\partial_t u^*\|_{L_{4/3}(h,h+1;V')} \leqslant 2R_0.$$

Поэтому $u^* \in P$, т.е. P компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$.

Мы построили поглощающее (притягивающее) множество P трансляционной полугруппы $\{T(t)\}$. Теорема доказана.

Замечание 3.2. В работе [3] показано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ притягивает ограниченные множества траекторий из $\mathscr{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, более сильной, чем топология $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$. По определению последовательность $\{u_n\} \subset \mathscr{K}^+$ сходится к функции u в Θ_+^{loc}, если для каждого $M > 0$

$$
\begin{aligned}
&\Pi_M u_n \rightharpoondown \Pi_M u \quad (n \to \infty) && \text{слабо в } L_2(0, M; V),\\
&\Pi_M u_n \rightharpoondown \Pi_M u \quad (n \to \infty) && *\text{-слабо в } L_\infty(0, M; H),\\
&\Pi_M \partial_t u_n \rightharpoondown \Pi_M \partial_t u \quad (n \to \infty) && \text{слабо в } L_{4/3}(0, M; V').
\end{aligned}
$$

Легко видеть из (3.14), что множество P компактно в Θ_+^{loc}. В [3] доказано, что $\Theta_+^{\mathrm{loc}} \Subset L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta})$, $0 < \delta \leqslant 1$. Следовательно, для каждого множества траекторий $B \subset \mathscr{K}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$,

$$
\mathrm{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\Pi_M T(t)B, \Pi_M \mathfrak{A}) \to 0 \quad (t \to \infty) \qquad \forall M > 0
$$

(см. [3]).

Воспользуемся теоремой 3.1 для построения глобального аттрактора 3D системы Навье–Стокса (3.1) (см. определение 2.1). Напомним, что из теоремы 3.1 следует, что для любого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ множества $B \subset \mathscr{K}^+$, состоящего из траекторий системы (3.1), имеет место соотношение

$$
\mathrm{dist}_{C(0,M;H^{-\delta})}(\Pi_M T(t)B, \Pi_M \mathfrak{A}) \to 0 \quad (t \to \infty) \qquad \forall M > 0. \tag{3.16}
$$

Следствие 3.1. *Множество*

$$
\mathscr{A} = \mathfrak{A}(0) \equiv \mathscr{K}(0)
$$

является глобальным аттрактором системы (3.1) *в пространстве* $H^{-\delta}$.

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 2.1. Напомним, что множество $\mathscr{A} := \mathfrak{A}(0)$ компактно в $H^{-\delta}$ и ограничено в H. Для любого множества $B \subset \mathscr{K}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, его сечения $B(t) = \{u(t) \mid u \in \mathscr{K}^+\} \subset H$ стремятся к $\mathscr{A}$ в норме $H^{-\delta}$:

$$
\mathrm{dist}_{H^{-\delta}}(B(t), \mathscr{A}) \to 0 \qquad (t \to \infty). \tag{3.17}
$$

Это соотношение получается из (3.16) при $M = 0$, если учесть, что $\Pi_0 T(t)B = B(t)$ и $\Pi_0 \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(0) = \mathscr{A}$. Наконец, $\mathscr{A}$ является минимальным множеством, ограниченным в H и компактным в $H^{-\delta}$, которое удовлетворяет (3.17).

Аналогично трехмерной системе Навье–Стокса рассматривается двумерная система, когда в (3.1) $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $u = (u^1, u^2)$. В этом случае, как известно, задача Коши (3.1), (3.2) имеет, и притом единственное, слабое решение $u \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, причем $\partial_t u \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V')$ (см. [8], [9], [2], [4]). Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно доказать, что 2D система Навье–Стокса имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$, который притягивает ограниченные множества траекторий B в топологии пространства $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{2-\delta})$. Для этого достаточно воспользоваться более сильными априорными оценками по сравнению с неравенством (3.13), которые имеют место для двумерной системы (см., например, [4], [11]). Наконец, двумерная задача

Коши (3.1), (3.2) порождает полугруппу $\{S(t)\}$, действующую в H, которая имеет глобальный $(H, H^{2-\delta})$-аттрактор $\mathscr{A}$.

Изучим теперь некоторые вопросы, связанные с аппроксимацией траекторного и глобального аттракторов 3D системы Навье–Стокса.

Рассмотрим систему галёркинских приближений для уравнения (3.1). Пусть $\{w_j(x), j = 1, 2, \dots\}$ – полная, линейно независимая система функций в пространстве V. Обозначим через P_m оператор ортогонального проектирования в H на конечномерное пространство, натянутое на функции $\{w_j(x),\ j = 1, 2, \dots, m\}$. *Галёркинским приближением системы Навье–Стокса* (3.1) *порядка* m называется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}u_m + \nu P_m L u_m + P_m B(u_m) = P_m g(x), \qquad u_m(0) = u_{0m}. \tag{3.18}$$

Здесь $u_m = u_m(x,t) = \sum_{j=1}^m a_{jm}(t) w_j(x)$, где $a_{jm}(t)$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из системы уравнений (3.18); $u_{0m} = P_m u_0$, где u_0 – начальные данные для системы (3.1). В работе [3] доказано, что задача (3.18) допускает, и притом единственное, решение $u_m(t) = u_m(x,t)$ при $t \geqslant 0$. Кроме того, галёркинская система (3.18) обладает траекторным аттрактором $\mathfrak{A}_m$ в пространстве Θ_+^{loc}. Доказана следующая

Теорема 3.2. *При $m \to +\infty$ траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_m$ сходятся в топологии Θ_+^{loc} к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}$ исходной системы Навье–Стокса* (3.1).

В частности, отсюда следует, что для любого $M > 0$ имеют место следующие свойства сходимости $\mathfrak{A}_m$ к $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\Pi_M \mathfrak{A}_m, \Pi_M \mathfrak{A}) \to 0, \\ &\mathrm{dist}_{C(0,M;H^{-\delta})}(\Pi_M \mathfrak{A}_m, \Pi_M \mathfrak{A}) \to 0 \ \ (m \to +\infty) \qquad \text{при} \ \ 0 < \delta \leqslant 1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Как указывалось выше, для аппроксимирующих систем галёркинских уравнений (3.18) имеет место теорема единственности решения задачи Коши. Рассмотрим полугруппу $\{S_m(t)\}$, отвечающую этой задаче. Эта полугруппа действует в конечномерном пространстве $P_m H$ и, очевидно, имеет глобальный аттрактор $\mathscr{A}_m = \mathfrak{A}_m(0)$. Рассмотрим также глобальный аттрактор $\mathscr{A} = \mathfrak{A}(0)$ исходной системы Навье–Стокса (3.1). Из (3.19) получаем

Следствие 3.2. *При $m \to +\infty$ глобальные аттракторы $\mathscr{A}_m$ галёркинских систем сходятся по норме $H^{-\delta}$ к глобальному аттрактору $\mathscr{A}$ 3D системы Навье–Стокса* (3.1):

$$\mathrm{dist}_{H^{-\delta}}(\mathscr{A}_m, \mathscr{A}) \to 0 \qquad (m \to +\infty).$$

В конце этого пункта рассмотрим траекторный и глобальный аттракторы системы Навье–Стокса с быстро осциллирующей внешней силой

$$\partial_t u + \nu L u + B(u) = g\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big), \qquad (\nabla, u) = 0, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.20}$$

Примером внешней силы $g(x, x/\varepsilon)$ может служить функция вида $g(x, x/\varepsilon) = P g_1(x) \times g_2(x/\varepsilon)$, где $g_1(x) \in H$, $g_2(z) \in C_b(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, $z \in \mathbb{R}^3$.

Предполагается, что внешняя сила $g_\varepsilon(x) = g(x, x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{g}(x) \in H$ при $\varepsilon \to 0+$ в следующем смысле:

$$g_\varepsilon(x) \rightharpoonup \overline{g}(x) \quad (\varepsilon \to 0+) \qquad \text{слабо в } H. \tag{3.21}$$

Это означает, что

$$\int_\Omega g\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \cdot \varphi(x)\, dx \to \int_\Omega \overline{g}(x) \cdot \varphi(x)\, dx \quad (\varepsilon \to 0+) \qquad \forall \varphi(x) \in H. \tag{3.22}$$

Заметим, что условие (3.21) выполнено, если функция $g(x, z)$ является периодической, квазипериодической или почти периодической функцией по переменным $z = (z_1, z_2, z_3)$. Другие примеры функций $g_\varepsilon(x)$, удовлетворяющих (3.21), приведены в [7].

Наряду с уравнениями (3.20) рассматривается усредненная система

$$\partial_t \overline{u} + \nu L \overline{u} + B(\overline{u}) = \overline{g}(x), \qquad (\nabla, \overline{u}) = 0, \qquad \overline{u}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.23}$$

Как было установлено в этом пункте, системы (3.20) и (3.23) обладают траекторными аттракторами $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ соответственно. Эти множества ограничены в $L_\infty(\mathbb{R}; H)$ и компактны в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{-\delta})$. Имеет место следующая

Теорема 3.3. *Траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ стремится к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \to 0+$ в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{-\delta})$ в следующем смысле*:

$$\mathrm{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(\Pi_M \mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_M \overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+) \qquad \forall M \geqslant 0. \tag{3.24}$$

Доказательство приведено в [7]. Там же доказано, что $\mathfrak{A}_\varepsilon$ стремится к $\overline{\mathfrak{A}}$ в топологии Θ_+^{loc}, описанной выше в замечании 3.2. В частности,

$$\mathrm{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\Pi_M \mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_M \overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+) \qquad \forall M \geqslant 0.$$

Рассмотрим теперь глобальные аттракторы $\mathscr{A}_\varepsilon = \mathfrak{A}_\varepsilon(0)$ и $\overline{\mathscr{A}} = \overline{\mathfrak{A}}(0)$ уравнений (3.20) и (3.23). Из (3.24) при $M = 0$ получаем

Следствие 3.3. *Для любого $\delta > 0$*

$$\mathrm{dist}_{H^{-\delta}}(\mathscr{A}_\varepsilon, \overline{\mathscr{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+).$$

Замечание 3.3. Для 2D системы Навье–Стокса доказано, что

$$\mathrm{dist}_{H^{2-\delta}}(\mathscr{A}_\varepsilon, \overline{\mathscr{A}}) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+), \qquad 0 < \delta \leqslant 1.$$

4. Траекторные и глобальные аттракторы неавтономных уравнений. Изложенный в п. 1 метод траекторных аттракторов обобщается на случай неавтономных эволюционных уравнений, которые содержат члены, явно зависящие от времени. Такими членами могут быть внешние силы, функции взаимодействия, а также другие коэффициенты, входящие в уравнение. Для описания этих членов удобно ввести временно́й символ неавтономного уравнения $\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, компонентами которого являются все зависящие от времени коэффициенты или функции. Неавтономное уравнение запишем в виде

$$\partial_t u = A_{\sigma(t)}(u). \tag{4.1}$$

Временно́й символ $\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, являясь функцией времени, принимает значения в некотором банаховом пространстве H. Функция $\sigma(\,\cdot\,)$ принадлежит некоторому топологическому пространству Ξ. Для простоты предположим, что Ξ – это пространство $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ или $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, снабженное соответствующей топологией локальной сходимости на любом конечном отрезке $[-M, M] \subset \mathbb{R}$. Например, в скалярном параболическом уравнении

$$\partial_t u = \Delta u - f(u) + g(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

символом служит функция $\sigma(t) = g(x,t)$, $t \in \mathbb{R}$, принимающая значения в $L_2(\Omega)$: $g(x,t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$.

Наряду с уравнением (4.1), зависящим от символа $\sigma(t)$, рассматриваются уравнения со сдвинутыми символами $\sigma^h(t) = \sigma(h+t)$ при всех $h \in \mathbb{R}$. Мы определим траекторный аттрактор уравнения (4.1) таким образом, чтобы он одновременно являлся аттрактором всех уравнений с символами $\sigma^h(t)$, $h \in \mathbb{R}$. Ниже вводится понятие равномерного траекторного аттрактора, описывающего предельное поведение решений целого семейства уравнений (4.1), символы $\sigma(t)$ которых принадлежат некоторому множеству $\Sigma \subset \Xi$. Мы будем предполагать, что множество символов Σ является *трансляционно инвариантным*, т.е. вместе с каждым символом $\sigma(t) \in \Sigma$ оно содержит и все его сдвиги: $\sigma^h(t) = \sigma(h+t) \in \Sigma$ при $h \in \mathbb{R}$. Множество Σ называется *пространством символов* уравнения (4.1). Обычно в приложениях множество Σ совпадает с оболочкой $\mathscr{H}(\sigma_0)$ (в пространстве Ξ) некоторого исходного символа $\sigma_0(t)$ изучаемого неавтономного уравнения. Напомним, что по определению

$$\mathscr{H}(\sigma_0) = \bigl[\{\sigma_0(h+t) \mid h \in \mathbb{R}\}\bigr]_{\Xi}.$$

Здесь $[\,\cdot\,]_{\Xi}$ обозначает замыкание в пространстве Ξ. Мы будем предполагать, что множество Σ компактно в Ξ.

Определение 4.1. Функция $\sigma_0(\,\cdot\,) \in \Xi$ называется *трансляционно компактной* в Ξ, если ее оболочка $\mathscr{H}(\sigma_0)$ компактна в Ξ.

Например, если функция $\sigma_0(t)$ является периодической, квазипериодической или почти периодической по времени со значениями в H, то она является трансляционно компактной функцией в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ (а также в пространстве $C_b(\mathbb{R}; H)$). Следовательно, ее оболочка $\mathscr{H}(\sigma_0) = \Sigma$ компактна в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, и она может служить пространством символов уравнения (4.1). Другие примеры пространств символов приведены в [3] и [10].

Предположим, что каждому символу $\sigma \in \Sigma$ поставлено в соответствие некоторое непустое пространство траекторий $\mathscr{K}_\sigma^+$ уравнения (4.1), принадлежащее пространству

$C(\mathbb{R}_+;E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$, которое мы рассматривали в п. 1. Траектории уравнения (4.1) мы будем обозначать, как и прежде, $u(s)$, $s\geqslant 0$, где s – переменная времени. Рассмотрим полугруппу трансляций $\{T(t),\ t\geqslant 0\}$ на $\mathscr{K}_\sigma^+$. Предположим, что операторы $T(t)$ отображают пространство траекторий $\mathscr{K}_\sigma^+$ на пространство траекторий соответствующего сдвинутого уравнения:

$$T(h)\mathscr{K}_\sigma^+\subseteq \mathscr{K}_{T(h)\sigma}^+\quad \text{при } h\geqslant 0,\qquad T(h)\sigma(\,\cdot\,)=\sigma^h(\,\cdot\,). \tag{4.2}$$

Рассмотрим объединенное пространство траекторий

$$\mathscr{K}_\Sigma^+=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathscr{K}_\sigma^+. \tag{4.3}$$

Из свойства (4.2) вытекает, что пространство $\mathscr{K}_\Sigma^+$ отображается полугруппой трансляций $\{T(t)\}$ в себя:

$$T(t)\mathscr{K}_\Sigma^+\subseteq \mathscr{K}_\Sigma^+\qquad \text{при } t\geqslant 0. \tag{4.4}$$

Мы будем исследовать аттрактор полугруппы $\{T(t)\}$ на пространстве траекторий $\mathscr{K}_\Sigma^+$ семейства уравнений (4.1) с символами $\sigma\in\Sigma$.

Аналогично автономному случаю мы вводим следующее определение. Множество $\mathfrak{A}_\Sigma\subset\mathscr{K}_\Sigma^+$ называется *равномерным (по $\sigma\in\Sigma$) траекторным аттрактором* семейства уравнений (4.1) с символами $\sigma\in\Sigma$, если оно ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ и компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$, строго инвариантно относительно $\{T(t)\}$, т.е.

$$T(t)\mathfrak{A}_\Sigma=\mathfrak{A}_\Sigma\qquad \forall t\geqslant 0,$$

и, наконец, $\mathfrak{A}_\Sigma$ является притягивающим множеством в топологии $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$. Это означает, что для любого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ множества траекторий $B\subset\mathscr{K}_\Sigma^+$ выполнено следующее соотношение:

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];E_0)}(\Pi_M T(t)B,\Pi_M\mathfrak{A}_\Sigma)\to 0\qquad (t\to+\infty). \tag{4.5}$$

Мы определяем также *ядро* $\mathscr{K}_\sigma$ уравнения (4.1) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R};E)$, которое состоит из функций $u(s)$, $s\in\mathbb{R}$, таких, что $u(\,\cdot\,)\in C(\mathbb{R};E_0)\cap L_\infty(\mathbb{R};E)$ и $\Pi_+u(s+h)\in\mathscr{K}_{T(h)\sigma}^+$ при всех $h\in\mathbb{R}$. Иными словами, функция $u(t)$, $t\in\mathbb{R}$, является решением уравнения (4.1) на всей оси времени $-\infty<t<+\infty$, ограниченным в $L_\infty(\mathbb{R};E)$.

Сформулируем обобщение теорем 1.1 и 1.2 для неавтономных уравнений.

Теорема 4.1. *Предположим, что пространство символов Σ уравнения (4.1) является трансляционно инвариантным, компактным в Ξ множеством. Предположим также, что для пространства траекторий $\mathscr{K}_\Sigma^+$ существует притягивающее множество P такое, что $P\subseteq\mathscr{K}_\Sigma^+$, причем P компактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$. Тогда полугруппа трансляций $\{T(t)\}$ на $\mathscr{K}_\Sigma^+$ имеет равномерный (по $\sigma\in\Sigma$) траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\Sigma\subseteq P$. При этом имеет место тождество*

$$\mathfrak{A}_\Sigma=\Pi_+\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\mathscr{K}_\sigma.$$

Кроме того, ядро $\mathscr{K}_\sigma$ непусто при любом $\sigma\in\Sigma$.

Доказательство этой теоремы приведено в [3] (см. также [10]).

Замечание 4.1. В приложениях рассматриваются пространства символов вида $\Sigma = \mathscr{H}(\sigma_0)$, где $\sigma_0(\,\cdot\,)$ – трансляционно компактная функция в пространстве Ξ, например, в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ или в $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$.

Теперь мы кратко рассмотрим равномерные (по $\sigma \in \Sigma$) глобальные аттракторы неавтономных уравнений (4.1). Пусть $B \subset \mathscr{K}_\Sigma^+$. Как и в п. 2, рассмотрим сечения множества B в моменты времени t:

$$B(t) = \{u(t) \mid u(\,\cdot\,) \in B\} \subset E.$$

Аналогично определяются сечения $\mathfrak{A}_\Sigma(t)$ и $\mathscr{K}_\sigma(t)$ множеств $\mathfrak{A}_\Sigma$ и $\mathscr{K}_\sigma$.

Определение 4.2. Множество $\mathscr{A}_\Sigma \subset E$ называется *равномерным (по $\sigma \in \Sigma$) глобальным аттрактором* (в E_0) семейства уравнений (4.1), если

i) $\mathscr{A}_\Sigma$ компактно в E_0 и ограничено в E;

ii) для любого ограниченного (в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$) множества $B \subset \mathscr{K}_\Sigma^+$ сечения $B(t)$ притягиваются к $\mathscr{A}_\Sigma$ при $t \to +\infty$ по норме в E_0:

$$\operatorname{dist}_{E_0}(B(t), \mathscr{A}_\Sigma) \to 0 \qquad (t \to +\infty);$$

iii) $\mathscr{A}_\Sigma$ есть минимальное множество, удовлетворяющее i) и ii).

Аналогично теореме 2.1 доказывается

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда семейство уравнений* (4.1) *с символами $\sigma \in \Sigma$ имеет глобальный аттрактор* (*в* E_0)

$$\mathscr{A}_\Sigma = \mathfrak{A}_\Sigma(0) \equiv \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathscr{K}_\sigma(0).$$

Замечание 4.2. Равномерные глобальные аттракторы неавтономных эволюционных уравнений, для которых соответствующая задача Коши однозначно разрешима, рассматривались в [12] (см. также [13]). При этом аналогом полугруппы $\{S(t)\}$, отвечающей задаче Коши (см. (2.6)), служит процесс $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, порожденный уравнением (4.1) с символом $\sigma \in \Sigma$. Теорема 4.2 позволяет обобщить доказанные в [12] результаты и построить глобальные аттракторы неавтономных уравнений, для которых теорема единственности задачи Коши не имеет места или пока не доказана.

В заключение мы применим изложенные выше общие результаты к исследованию трехмерной неавтономной системы Навье–Стокса с внешней силой, быстро осциллирующей по времени. Система имеет вид

$$\partial_t u + \nu L u + B(u) = g\Big(x, t, \frac{t}{\varepsilon}\Big), \qquad (\nabla, u) = 0, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.6}$$

При этом обозначения такие же, как в случае автономной задачи (3.1) в п. 3. Предполагается, что $g(x,t,t/\varepsilon) = P(g_1(x,t/\varepsilon)g_2(x,t))$, где $g_1(x,s)$ – трансляционно компактная функция в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, а $g_2(x,s)$ – трансляционно компактная функция в $C_b(\mathbb{R}; (C(\overline{\Omega}))^3)$. Напомним, что, например, $g_1(x,s)$ обладает этим свойством, если семейство сдвигов $\{g_1(x,s+h),\ h \in \mathbb{R}\}$ этой функции предкомпактно в $L_2([-M,M]; H)$ при любом фиксированном $M \geqslant 0$. При выполнении этих условий функция $P(g_1(x,t/\varepsilon)g_2(x,t))$ является трансляционно компактной в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$. Кроме того, предположим, что функция $g_1(x, t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее по времени $\overline{g}_1(x)$ в $L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ при $\varepsilon \to 0+$. Это означает, что для любого $T > 0$ и любой функции $\varphi \in L_2(0, T; H)$

$$\int_0^T \Big\langle g_1\Big(\,\cdot\,, \frac{s+h}{\varepsilon}\Big), \varphi(\,\cdot\,, s)\Big\rangle\, ds \to \int_0^T \langle \overline{g}_1(\,\cdot\,), \varphi(\,\cdot\,, s)\rangle\, ds \qquad \text{при } \varepsilon \to 0+ \tag{4.7}$$

равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Как показано в [7], для этого достаточно, чтобы предел

$$\frac{1}{\mu}\int_h^{h+\mu} g_1(x, s)\, ds \to \overline{g_1}(x) \quad \text{в } H \qquad \text{при } \mu \to +\infty$$

имел место равномерно по $h \in \mathbb{R}$. (Это условие выполнено, например, когда $g_1(x, s)$ является почти периодической функцией по переменной s.) Легко устанавливается (см. [7]), что определенная выше функция $g_\varepsilon(x, t) \equiv g(x, t, t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее $\overline{g}(x, t) = P(\overline{g_1}(x) g_2(x, t))$ в $L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Рассмотрим оболочки $\mathscr{H}(g_\varepsilon(x, t))$ и $\mathscr{H}(\overline{g}(x, t))$ функций $g_\varepsilon(x, t)$ и $\overline{g}(x, t)$ в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$. Эти множества удовлетворяют соотношению

$$\mathscr{H}(g_\varepsilon(x, t)) \to \mathscr{H}(\overline{g}(x, t)) \quad \text{в } L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H) \qquad (\varepsilon \to 0+)$$

(см. [7]).

Системе (4.6) соответствует усредненная неавтономная система Навье–Стокса вида

$$\partial_t \overline{u} + \nu L \overline{u} + B(\overline{u}) = \overline{g}(x, t), \qquad (\nabla, \overline{u}) = 0, \qquad \overline{u}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.8}$$

Мы рассматриваем семейство уравнений (4.6) с внешними силами (временны́ми символами) $g \in \mathscr{H}(g_\varepsilon)$ и семейство уравнений (4.8) с внешними силами $g \in \mathscr{H}(\overline{g})$. Аналогично автономному случаю вводятся пространства траекторий $\mathscr{K}^+_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}$ и $\mathscr{K}^+_{\mathscr{H}(\overline{g})}$ для этих уравнений. Напомним, что $\mathscr{H}(g_\varepsilon) = \Sigma_\varepsilon$ – пространство символов для уравнения (4.6), а $\mathscr{H}(\overline{g}) = \Sigma_0$ – пространство символов для уравнения (4.8). Применяя теорему 4.1, устанавливаем существование равномерных траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}$ и $\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}$ для уравнений (4.6) и (4.8) в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-\delta})$, $0 < \delta \leqslant 1$. В силу теоремы 4.2 эти уравнения имеют также равномерные глобальные аттракторы

$$\mathscr{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)} = \mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}(0), \qquad \mathscr{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})} = \mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}(0).$$

Имеет место следующая

Теорема 4.3. *Равномерные траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}$ уравнения* (4.6) *сходятся при $\varepsilon \to 0+$ к равномерному траекторному аттрактору $\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}$ усредненного уравнения* (4.8), *точнее, при любом $M > 0$ выполнены следующие соотношения*:

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\Pi_M \mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}, \Pi_M \mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+), \tag{4.9}$$

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(\Pi_M \mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}, \Pi_M \mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+). \tag{4.10}$$

Кроме того, для равномерных глобальных аттракторов $\mathscr{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)} = \mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}(0)$ и $\mathscr{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})} = \mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}(0)$ имеет место соотношение

$$\operatorname{dist}_{H^{-\delta}}(\mathscr{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}, \mathscr{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+). \tag{4.11}$$

Соотношения (4.9) и (4.10) доказаны в [7], а предел (4.11) следует из (4.10).

Замечание 4.3. В работе [14] доказаны некоторые теоремы о сходимости равномерных глобальных аттракторов неавтономных уравнений с почти периодическими членами.

5. Траекторные и глобальные аттракторы других уравнений. Аналогичные теоремы о траекторных и глобальных аттракторах доказаны для автономных и неавтономных систем уравнений реакции-диффузии, для диссипативных гиперболических уравнений с функцией взаимодействия $f(u)$, имеющей любой степенной порядок роста, для комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау. При этом не предполагается, что задача Коши для этих уравнений имеет единственное решение. Этим проблемам будет посвящена отдельная статья авторов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
[2] Temam R. Navier–Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1983; 2nd ed. 1995.
[3] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. P. 913–964.
[4] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
[5] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag 1988. V. 68.
[6] Hale J. K. Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1988. V. 25.
[7] Вишик М. И., Чепыжов В. В. Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами // Матем. сб. 2001. Т. 192. №1. С. 16–53.
[8] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
[9] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
[10] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors for Equations of Mathematical Physics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
[11] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Trajectory attractors for 2D Navier–Stokes systems and some generalizations // Topol. Meth. Nonlin. Anal. J. Juliusz Schauder Center. 1996. V. 8. P. 217–243.
[12] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. №3. P. 279–333.
[13] Haraux A. Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Paris–Milan–Barcelona–Rome: Masson, 1991.
[14] Ильин А. А. Усреднение диссипативных динамических систем с быстро осциллирующми правыми частями // Матем. сб. 1996. Т. 187. №5. С. 15–58.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: vishik@iitp.ru, chep@iitp.ru

Поступило
23.03.2001