ε-entropie pour des équations non autonomes de la physique mathématique*

Vladimir V. Chepyzhov

Institut des problèmes de transmission de l'information,

Académie des Sciences de Russie,

B.Karetnil 19, Moscou 101447,GSP-4, Russie

Résumé

On considère l'ε-entropie de Kolmogorov et la dimension fractale des attracteurs globaux pour des équations d'évolution non autonomes dans des espaces de dimension infinie. On présente les estimations pour l'ε-entropie et la dimension fractale des attracteurs globaux du système de Navier–Stokes avec des forces extérieures dépendant du temps.

Je vais parler de l'ε-entropie et de la dimension des attracteurs globaux pour des équations d'évolution de la physique mathématique. Je vais présenter les résultats de notre travail commun avec le professeur Vishik qui sont publiés dans notre nouveau livre "Attractors for equations of mathematical physics" (voir [1]).

D'abord, je vous rappelerai les définitions de l'ε-entropie et de la dimension fractale de l'ensemble X compact dans l'espace de Banach E. Soit $N_\varepsilon(X)$ le nombre minimal de boules $B(x_i,\varepsilon) = \{x \in E \mid \|x - x_i\|_E < \varepsilon\}$ de rayon ε qui suffisent pour recouvrir X :

$$N_\varepsilon(X) = \min N,\ X \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i,\varepsilon).$$

Définition 1 Le nombre

$$\mathbf{H}_\varepsilon(X) = \log_2 N_\varepsilon(X)$$

est appelé *l'ε-entropie* de X dans l'espace E. (Il est clair que $\mathbf{H}_\varepsilon(X) < +\infty$ parce que X est compact).

Cette définition a été donnée par Kolmogorov et Tichomirov il y a cinquante ans (voir [2]). Ils ont aussi considéré la notion de dimension d'entropie qui maintenant s'appelle souvent la dimension fractale.

*Cet exposé a été donné à l'Université de Poitiers en 2002.

Définition 2 Le nombre
$$\mathbf{d}_F(X) = \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mathbf{H}_\varepsilon(X)}{\log_2(1/\varepsilon)}$$
est appelé *dimension fractale* de X dans E.

Il est facile de montrer que si $\mathbf{d}_F(X) < +\infty$, alors $N_\varepsilon(X) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\mathbf{d}_F(X)}$ de points sont nécessaires pour approcher l'ensemble X avec la précision ε.

Par exemple, si $X = K$ est l'ensemble triadique de Cantor, alors $\mathbf{d}_F(K) = \log_3 2 < 1$. Un autre exemple intéressant est l'attracteur étrange $\mathcal{A}$ de Lorenz. Il est connu que
$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \le \mathbf{d}_L(\mathcal{A}) = 2,402$$
et, peut-être, il est plus grand que 2. Ici, $\mathbf{d}_L(\mathcal{A})$ désigne la dimension de Lyapunov de $\mathcal{A}$. Récemment le mathématicien Leonov de Petersburg a déduit la formule exacte pour la dimension de Lyapunov de l'attracteur de Lorenz (voir [3]).

Maintenant, nous considérons l'application de l'ε-entropie et la dimension fractale à l'étude des attracteurs des systèmes dynamiques dans un espace de dimension infinie.

D'abord, nous considérons l'équation autonome non linéaire du type
$$\partial_t u = A(u),\ u|_{t=0} = u_0(x),\ t \ge 0, \tag{1}$$
où $u = u(x,t)$ désigne une solution du problème de Cauchy (1) $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $t \ge 0$, et E est un espace de Banach. Ici, $A(u)$ est un opérateur non linéaire dépendant de la fonction u et ses dérivées partielles par rapport à x. Les données initiales $u_0(x)$ appartiennent à l'espace E. Nous supposons que le problème (1) possède une solution unique $u(t)$ et que, en plus, les valeurs $u(t)$ appartiennent à E pour tout $t \ge 0$. Dans chaque cas particulier, il faut exactement expliquer le sens de l'expression: "une fonction $u(x,t)$ est une solution de (1)".

Nous introduisons le semigroupe $\{S(t), t \ge 0\}$ correspondant au problème (1), c'est-à-dire, $S(t) : E \to E$, où $S(t)u_0 = u(t)$. Il est évident que
$$S(0) = I \text{ et } S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)\ \forall t_1, t_2 \ge 0.$$

Nous allons étudier le comportement de $u(t) = S(t)u_0$ lorsque $t \to +\infty$ uniformément par rapport à u_0 appartenant à des ensembles bornés.

Comme dans l'exemple du problème (1), nous considérons le système de Navier–Stokes en dimension deux qui décrit le mouvement (le courant) du liquide visqueux incompressible dans l'ouvert borné $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\nu L u - B(u,u) + g(x),\ \mathrm{div} u = 0, u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=0} &= u_0(x) \in H. \end{aligned} \tag{2}$$
Ici, $u = u(x,t) = (u^1(x,t), u^2(x,t)),\ x \in \Omega,\ \nu > 0$ est le coefficient de viscosité, $L = -\Pi\Delta$ est l'opérateur de Stokes, $B(u,u) = \Pi(u^1\partial_{x_1}u + u^2\partial_{x_2}u)$, Π est la projection orthogonale sur l'espace
$$H = \left[\left\{v(x) \in (C_0^\infty(\Omega))^2,\ \mathrm{div} v(x) = 0\right\}\right]_{(L_2(\Omega))^2}.$$

Ici, $[\,\cdot\,]_E$ note la fermeture dans l'espace E. Nous supposons aussi que la force extérieure $g(x)$ appartient à H, $g \in H$.

Il est bien connu depuis les travaux de Hopf, Ladyzhenskaya, Leray, Lions que le problème (2) a une solution unique dans l'espace $L_\infty(\mathbb{R}_+; H) \cap L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H_1)$, (voir [4], [5], [6]). Alors, on peut construire le semigroupe $\{S(t)\}$ dans H.

Définition 3 L'ensemble compact $\mathcal{A} \Subset H$ est appelé *l'attracteur global* de $\{S(t)\}$ si

(i) $\mathcal{A}$ est strictement invariant par rapport à $\{S(t)\}$: $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour tout $t \geq 0$;

(ii) pour chaque ensemble borné $B \subset H$, l'ensemble $S(t)B$ converge vers $\mathcal{A}$ lorsque $t \to +\infty$ dans H, c'est-à-dire, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre réel $T = T(B, \varepsilon)$ tel que le ε-voisinage $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ dans H contient l'ensemble $S(t)B$ pour tout $t \geq T$.

Le théorème suivant a été prouvé dans les travaux de Temam, Babin, Vishik, Ladyzhenskaya (voir [7], [8], [9]).

Théorème 1 *Le système 2D Navier–Stokes possède l'attracteur global* $\mathcal{A} \Subset H$.

Le problème important suivant est l'étude de la dimension de l'attracteur global. On pose

$$G = \frac{\|g\|_H}{\lambda_1 \nu^2}.$$

C'est le nombre de Grashof du système (2). Ici, λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur de Stokes. La dimension de l'attracteur global dépend du nombre de Grashof.

Proposition 1 *Il existe une constante absolue* $c_0 > 0$ *tel que, si* $G < c_0$*, alors le système (2) a une solution stationnaire unique* $z(x)$:

$$-\nu L z - B(z, z) + g(x) = 0, \; z \in H_1,$$

et pour toute solution arbitraire $u(t) = S(t)u_0$ *de (2), on a*

$$\|u(t) - z\|_H \leq C\|u_0 - z\|_H e^{-\gamma t}, \; \gamma > 0.$$

Ainsi, l'attracteur A est égal à $\{z\}$ et $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = 0$.

La preuve est donnée dans [1].

Quand le nombre G est grand, le théorème suivant a été démontré par Lieb, Constantin, Foias, Temam (voir [7]).

Théorème 2 *Les inégalités suivantes ont lieu :*

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \leq c_1 G,$$
$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq c_1 G \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{3}$$

où c_1 *est une constante absolue dépendant seulement de la forme de* Ω.

Ces estimations ont une histoire intéressante. La première estimation était exponentielle par rapport à G. Elle a été prouvée par Ladyzhenskaya pour l'ensemble invariant maximal du système 2D de Navier–Stokes (voir [10]). Plus tard, Iliashenko, Babin et Vishik ont prouvé des estimations qui sont polynômiales par rapport à G de degré 4 (voir [11], [12]). Finalement, le degré 2 a été obtenu par Lieb, Constanine, Foias, Temam en utilisant l'inégalité de Lieb–Thirring (voir [13]). La dernière correction de la constante c_1 a été faite par Alexey Ilin (voir [14]).

Maintenant, je vais considérer le système de Navier–Stokes avec une force extérieure qui dépend du temps :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\nu Lu - B(u,u) + g_0(x,t),\ \mathrm{div} u = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u|_{t=\tau} &= u_\tau(x) \in H,\ t \geq \tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Si $u(x,t)$ est une solution de (4), alors $u(x,t+h)$ est une solution du système analogue avec la force extérieure $g(x,t+h)$. C'est pourquoi nous allons étudier la famille entière des problèmes (4) avec les forces extérieures $g(x,t)$ appartenant à l'enveloppe $\mathcal{H}(g_0)$ de la force initiale $g_0(x,t)$.

Nous supposons que la fonction $g_0(x,t)$ est presque-périodique par rapport à t. D'après le théorème de Bochner–Amerio, la fonction $g_0(x,t)$ est presque-périodique si et seulement si l'enveloppe $\mathcal{H}(g_0)$ est compacte dans l'espace $C_b(\mathbb{R}_+; H)$.

Exemple 1 On suppose que la fonction $g_0(x,t)$ est quasipériodique par rapport à t, c'est-à-dire,

$$g_0(x,t) = \Phi(x, \alpha_1 t, \alpha_2 t, \ldots, \alpha_k t) := \Phi(x, \bar{\alpha} t),$$

où la fonction $\Phi(x, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$ est 2π-périodique par rapport à chaque ω_j :

$$\Phi(x, \omega_1, \ldots, \omega_j + 2\pi, \ldots, \omega_k) = \Phi(x, \omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_k)\ \forall j = 1, \ldots, k$$

et $\Phi \in C^1(\mathbb{T}^k; H)$, $\mathbb{T}^k = (\mathbb{R} \bmod 2\pi)^k$ est le tore de dimension k. Les nombres réels $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ sont rationellement indépendants. Dans ce cas, l'enveloppe de $g_0(x,t)$ est égale à

$$\mathcal{H}(g_0) = \left\{ \Phi(x, \bar{\alpha} t + \bar{\omega}') \mid \bar{\omega}' \in \mathbb{T}^k \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{H}(g_0)$ est difféomorphique au tore $\mathbb{T}^k$, donc $\mathbf{d}_F(\mathcal{H}(g_0)) = k$.

Nous considérons l'équation (4) avec les forces extérieures $g \in \mathcal{H}(g_0)$. On démontre, comme dans le cas autonome, que l'équation (4) a une solution unique $u(t), t \geq \tau$ pour tout $u_\tau \in H$. On définit alors la famille d'opérateurs $\{U_g(t,\tau)\}$ dans H : $U_g(t,\tau)u_\tau = u(t)$, où $u(t)$ est une solution de (4) avec les conditions initiales $u_\tau \in H$. La famille $\{U_g(t,\tau)\}$ est appelée le processus correspondant à (4). Il a les propriétés suivantes :

$$U_g(\tau,\tau) = I,\ U_g(t,\tau) = U_g(t,s) U_g(s,\tau)\ \forall t \geq s \geq \tau.$$

Dans le cas autonome, on a $U_g(t,\tau) = S(t-\tau)$.

Définition 4 Un ensemble compact $\mathcal{A} \Subset H$ est appelé *l'attracteur global* de la famille de processus $\{U_g(t,\tau)\}, g \in \mathcal{H}(g_0)$ si

(i) pour chaque $\tau \in \mathbb{R}$ et pour tout ensemble borné $B \subset H$, l'ensemble $U_g(t,\tau)B$ converge vers $\mathcal{A}$ lorsque $t \to +\infty$ dans H uniformément par rapport à $g \in \mathcal{H}(g_0)$.

(ii) l'ensemble $\mathcal{A}$ est *minimal* parmi les ensembles compacts ayant la propriété (i).

Le théorème suivant a été prouvé dans notre travail commun avec le professeur Vishik (voir [1]).

Théorème 3 *Si la fonction $g_0(x,t)$ est presque-périodique par rapport à t, le système de Navier–Stokes non autonome posséde l'attracteur global $\mathcal{A} \Subset H$.*

Afin d'étudier la structure de l'attracteur, nous considérons le nombre Grashof suivant:

$$G = \frac{\|g\|_{C_b(\mathbb{R};H)}}{\lambda_1 \nu^2}.$$

Proposition 2 *Si $G < c_1$ (la même constante que dans le cas autonome), alors, pour tout $g \in \mathcal{H}(g_0)$, il existe une solution unique bornée $z_g(t), t \in \mathbb{R}$, de l'équation (4) avec la force extérieure g, telle que*

$$\|u_g(t) - z_g(t)\|_H \leq C\|u_\tau - z_g(\tau)\|_H e^{-\gamma(t-\tau)}, \ \gamma > 0 \ \forall u_\tau \in H,$$

où $u_g(t) = U_g(t,\tau)u_\tau$. On a aussi que $z_g \in \mathcal{H}(z_{g_0})$ et

$$\mathcal{A} = \bigcup_{g \in \mathcal{H}(g_0)} z_g(0) = [\{z_{g_0}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}]_H .$$

Si $g_0(t)$ est quasipériodique, $z_{g_0}(t)$ est aussi quasipériodique avec la même collection de fréquences $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$.

La preuve se trouve dans [1].

On en déduit que l'attracteur $\mathcal{A}$ est difféomorphique au tore $\mathbb{T}^k$ de dimension k, c'est-à-dire, $\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) = k$.

Enfin, nous considérons le cas général, lorsque le nombre de Grashof est arbitraire.

Théorème 4 *Si $g_0(x,t)$ est une fonction quasipériodique, alors*

$$\mathbf{d}_F(\mathcal{A}) \leq c_1 G + k,$$
$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq c_1 G \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + k \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{5}$$

Nous observons que

$$k \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \approx \mathbf{H}_\varepsilon(\mathbb{T}^k) \approx \mathbf{H}_\varepsilon\left(\mathcal{H}(g_0)\right).$$

Cette observation donne le résultat principal (voir [1]).

Théorème 5 *On suppose que la fonction $g_0(x,t)$ est presque-périodique par rapport à t. Alors, pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $\alpha \in (0,1)$ tel que*

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq (c_1 G + \delta) \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + \mathbf{H}_{\alpha\varepsilon} \left(\mathcal{H}(g_0) \right). \tag{6}$$

Nous remarquons que dans le cas général

$$\mathbf{d}_F \left(\mathcal{H}(g_0) \right) = +\infty \text{ et } \mathbf{d}_F \left(\mathcal{A} \right) = +\infty$$

mais l'inégalité (6) a lieu.

Remarque 1 Des résultats analogues sont établis pour des systèmes de réaction-diffusion et pour des équations hyperboliques non linéaires dissipatives (voir [1]).

Références bibliographiques

[1] V.V.Chepyzhov and M.I.Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics,* AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

[2] A.Kolmogorov and V.Tikhomirov, ε-entropy and ε-capacity of sets in functional spaces, *Uspekhi Math. Nauk*, **14**, 2 (86) (1959), pp.3–86. English transl.: *Selected workes of A.N.Kolmogorov*, **III**, Dordrecht: Kluwer, 1993.

[3] G.A.Leonov, Lyapunov dimension formulas for Henon and Lorenz attractors, *Algebra and Analysis,* **13**, 3 (2001), pp. 1–12. English transl.: *St.Petersburg Math.J.*, **13,** 2 (2002).

[4] O.A.Ladyzhenskaya, *The Mathematical theory of viscous incompressible flow*, Moscow, Nauka, 1970. English transl.: Gordon and Breach, New York, 1969.

[5] J.-L.Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires,* Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[6] R.Temam, *Navier–Stokes equations and nonlinear functional analysis.* Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1983, 2nd ed. 1995.

[7] R.Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics,* Applied Mathematics Series, **68**, New York, Springer-Verlag, 1988, 2nd ed. 1997.

[8] A.V.Babin and M.I.Vishik, *Attractors of evolution equations,* Nauka, Moscow, 1989. English transl.: North Holland, 1992.

[9] O.A.Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations,* Leizioni Lincei, Cambridge University Press, Cambridge, New-York, 1991.

[10] O.A.Ladyzhenskaya, On finite dimension of bounded invariant sets for the Navier–Stokes system and other dynamical systems, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI,* **111** (1982), pp.57–73. English transl.: *J. Soviet Math.*, **28**, 5 (1982), pp.714–725.

[11] Yu.S.Ilyashenko, Weakly contracting systems and attractors of Galerkin approximation for the Navier–Stokes equations on a two-dimensional torus, *Uspekhi Mekhaniki*, **5**, 1 (1982), pp.31–63. English transl.: *Sel. Math. Sov.* **11**, 3 (1992), pp.203–239.

[12] A.V.Babin and M.I.Vishik, Attractors of evolutionary partial differential equations and estimates of their dimensions, *Uspekhi Mat. Nauk*, **38**, 4 (1983), pp.133–187. English transl.: *Russian Math. Surveys*, **38**, 4 (1983), pp.151–213.

[13] P.Constantin, C.Foias, and R.Temam, Attractors representing turbulent flows, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **53**, 1985.

[14] V.V.Chepyzhov and A.A.Ilyin, On the fractal dimension of invariant sets; applications to Navier–Stokes equations, to appear.