УДК 517.9

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами

Рассматриваются эволюционные уравнения, которые содержат члены, быстро осциллирующие по пространственным переменным или по переменной времени. Доказано, что в пределе траекторные аттракторы этих уравнений стремятся к траекторным аттракторам уравнений, члены которых являются средними соответствующих быстро осциллирующих членов исходных уравнений. При этом не предполагается однозначная разрешимость соответствующих задач Коши. Если задачи Коши для рассматриваемых уравнений однозначно разрешимы, то они порождают полугруппы, имеющие глобальные аттракторы. Эти аттракторы также сходятся к глобальным аттракторам усредненных уравнений в соответствующих пространствах.

В качестве примеров рассмотрены следующие уравнения и системы математической физики: трехмерная и двумерная системы Навье–Стокса с быстро осциллирующими внешними силами, системы уравнений реакции-диффузии, комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, обобщенное уравнение Чэфи–Инфанте, диссипативные гиперболические уравнения с быстро осциллирующими членами и коэффициентами.

Библиография: 20 названий.

Введение

В настоящей статье исследуются аттракторы эволюционных уравнений, содержащих быстро осциллирующие члены по пространственным и временной переменным. Частота осцилляции характеризуется параметром $\varepsilon > 0$. Наряду с таким уравнением рассматривается соответствующее ему усредненное уравнение. Для основных диссипативных уравнений математической физики доказано, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ уравнения с осциллирующими членами сходится при $\varepsilon \to 0+$ к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ усредненного уравнения в соответствующем функциональном пространстве. При этом не предполагается, что задача Коши для этого уравнения обладает единственным решением. Так, например, для трехмерной системы уравнений Навье–Стокса с внешней силой $g(x, x/\varepsilon)$ доказано, что ее траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ стремится при $\varepsilon \to 0+$ к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ системы Навье–Стокса с внешней силой $\overline{g}(x)$, где $\overline{g}(x)$ – усреднение $g(x, x/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$, например, в пространстве H_w (H_w – пространство H, снабженное слабой топологией). Аналогичные теоремы доказаны для систем уравнений реакции-диффузии, содержащих, например, члены вида $b(x, x/\varepsilon)f(u)$ и $g(x, x/\varepsilon)$, а также для диссипативных гиперболических уравнений с осциллирующими членами и для других уравнений. В том случае, когда для рассматриваемого уравнения с

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00304).

быстро осциллирующими членами имеет место теорема единственности решения задачи Коши и выполнены некоторые естественные условия, доказано, что глобальный аттрактор $\mathscr{A}_\varepsilon$ такого уравнения (или системы) сходится в соответствующем функциональном пространстве при $\varepsilon \to 0+$ к глобальному аттрактору $\overline{\mathscr{A}}$ усредненного уравнения. При этом существенно используется тот факт, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ сходятся к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ усредненного уравнения.

Некоторые проблемы, связанные со сходимостью аттракторов $\mathscr{A}_\varepsilon$ к $\overline{\mathscr{A}}$ для уравнений с быстро осциллирующими по времени членами, исследовались в [1], [2] и [3].

В § 1 излагаются некоторые вопросы, связанные с усреднением быстро осциллирующих функций. В § 2 даются основные сведения о траекторных аттракторах эволюционных уравнений. Проблеме усреднения аттракторов диссипативных уравнений математической физики с быстро осциллирующими членами посвящен § 3.

§ 1. Усреднение быстро осциллирующих функций

В этом параграфе мы кратко рассмотрим некоторые вопросы, связанные с быстро осциллирующими функциями. Прежде всего мы изучим усреднение функций вида $b(x/\varepsilon)$ и $b(x, x/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$. Переменную $z = x/\varepsilon$ мы будем называть "быстрой", а переменную x – "медленной". Здесь z и x являются пространственными переменными, т.е. $z \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$. Позднее мы также будем исследовать усреднение по времени функций вида $b(x, t/\varepsilon)$ и $b(x, t, t/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$, где $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что аналогичными методами можно изучать усреднение более сложных функций вида $b(x, x/\varepsilon, t, t/\varepsilon)$.

1.1. Пространственное усреднение. Рассматривается семейство вещественных функций $\{f_\varepsilon(x), \varepsilon > 0\}$ в области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, зависящее от малого положительного параметра ε. Пусть $f_\varepsilon(x) \in L_p(\Omega)$, где $p > 1$. Будем говорить, что функции $f_\varepsilon(x)$ имеют *среднее* $\overline{f}(x) \in L_p(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве $L_{p,w}(\Omega)$, если

$$f_\varepsilon(x) \rightharpoonup \overline{f}(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \text{слабо в} \quad L_p(\Omega), \tag{1.1}$$

т.е. для любой функции $\varphi(x) \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$,

$$\int_\Omega f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega \overline{f}(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,. \tag{1.2}$$

Аналогичным образом определяется среднее для семейства функций $f_\varepsilon(x) \in L_\infty(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве $L_{\infty,*w}(\Omega)$. В этом случае *среднее* $\overline{f}(x) \in L_\infty(\Omega)$ и условие (1.2) должно быть выполнено для любой функции $\varphi(x) \in L_1(\Omega)$ $(L_\infty(\Omega) = L_1(\Omega)^*)$, т.е. $f_\varepsilon(x) \rightharpoonup \overline{f}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ $*$-слабо в $L_\infty(\Omega)$. Если функции $f_\varepsilon(x)$ имеют среднее $\overline{f}(x)$ в пространстве $L_{\infty,*w}(\Omega)$, то, очевидно, они имеют то же среднее в пространстве $L_{p,w}(\Omega)$ при любом $p > 1$.

Далее будут изучаться функции вида $b(x, x/\varepsilon)$. Для простоты предполагается, что $0 \in \Omega$ и область Ω является звездной, т.е. $\Omega \subseteq \lambda\Omega$ для любого числа $\lambda \geqslant 1$.

Пусть задана вещественная функция $b(x, z)$, $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$. Во многих случаях можно определить функцию $f_\varepsilon(x) = b(x, x/\varepsilon)$. Например, если $b(x, z) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$, то функция $b(x, x/\varepsilon)$ является корректно определенной при $x \in \Omega$. В дальнейшем будут приведены другие примеры таких функций. Изучается усреднение функций $b(x, x/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространствах $L_{p,w}(\Omega)$ и $L_{\infty,*w}(\Omega)$.

Сначала рассмотрим функции вида $b(x/\varepsilon)$, где $b(z) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ или $b(z) \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $p > 1$. Рассмотрим подробнее случай, когда $\overline{b}(x) \equiv \mathrm{const}$.

Обозначим через $P_{a_1\dots a_n}^{b_1\dots b_n} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = P$ параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ объема $|P| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Предположим, что функция $b(x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b} \in \mathbb{R}$ в $L_{p,w}(\Omega)$. Мы утверждаем, что для любого параллелепипеда $P_{a_1\dots a_n}^{b_1\dots b_n} = P$ выполнено:

$$\frac{1}{|\lambda P|} \int_{\lambda P} b(z)\, dz \to \overline{b} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{1.3}$$

Здесь $|\lambda P| = \lambda^n |P| = \lambda^n \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. В самом деле, положим в (1.2) $\varphi(x) = \chi_P(x)$, где $\chi_P(x)$ – характеристическая функция P, т.е. $\chi_P(x) = 1$, если $x \in P$, и $\chi_P(x) = 0$ в противном случае. Тогда из (1.2) для $\lambda = 1/\varepsilon$ вытекает, что

$$\int_P b(\lambda x)\, dx \to \int_P \overline{b}\, dx = |P|\overline{b} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty. \tag{1.4}$$

Сделав замену переменной $\lambda x = z$ в левой части (1.4), получаем

$$\frac{1}{\lambda^n} \int_{\lambda P} b(z)\, dz \to |P|\overline{b} \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty,$$

и (1.3) доказано. Обратное утверждение также верно. Имеет место следующий критерий.

Теорема 1.1. *Пусть $b(z) \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Функция $b(x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b} \in \mathbb{R}$ в $L_{p,w}(\Omega)$ тогда и только тогда, если*

(i) *семейство $\{b(x/\varepsilon), 1 > \varepsilon > 0\}$ ограничено в $L_p(\Omega)$;*

(ii) *предел (1.3) имеет место для каждого параллелепипеда $P_{a_1\dots a_n}^{b_1\dots b_n}$ такого, что $a_1 b_1 = \dots = a_n b_n = 0$. (Это условие означает, что одна из вершин параллелепипеда P находится в начале координат $\mathbb{R}^n$.)*

Доказательство. Необходимость (i) очевидна, а необходимость (ii) была доказана выше. Докажем обратное утверждение. В силу того, что семейство $\{b(x/\varepsilon), 1 > \varepsilon > 0\}$ ограничено в $L_p(\Omega)$, достаточно доказать, что

$$\int_\Omega b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x)\, dx \to \overline{b} \int_\Omega \varphi(x)\, dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{1.5}$$

для любой функции $\varphi(x)$, принадлежащей всюду плотному множеству из $L_q(\Omega)$. Мы докажем это утверждение для множества ступенчатых функций, которые являются линейными комбинациями характеристических функций параллелепипедов в $\mathbb{R}^n$, т.е. для функций φ вида $\varphi(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{P_j}(x)$, где $P_j = P_{a_1(j)\dots a_n(j)}^{b_1(j)\dots b_n(j)}$. (Множество этих функций всюду плотно в $L_q(\Omega)$.) Необходимо доказать (1.5) для характеристической функции $\chi_P(x)$ любого параллелепипеда $P_{a_1\dots a_n}^{b_1\dots b_n}$. Заметим, наконец, что любой параллелепипед $P_{a_1\dots a_n}^{b_1\dots b_n}$ может быть разбит на параллелепипеды, которые удовлетворяют условию (ii), и, следовательно, характеристическая функция $P_{a_1\dots a_n}^{b_1\dots b_n}$ является линейной комбинацией этих характеристических функций. Например, если $n = 2$ и $0 < a_1 < b_1$, $0 < a_2 < b_2$, то

$$\chi_{P_{a_1 a_2}^{b_1 b_2}} = \chi_{P_{00}^{b_1 b_2}} - \chi_{P_{00}^{a_1 b_2}} - \chi_{P_{00}^{a_2 b_1}} + \chi_{P_{00}^{a_1 a_2}}.$$

Для таких характеристических функций условие (1.5) эквивалентно условию (1.3), которое выполнено в силу предположения (ii). Теорема доказана.

Замечание 1.1. Свойство (i) выполнено, например, если функция $b(z)$ равномерно ограничена в $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в следующем смысле:

$$\sup_{z_0\in\mathbb{R}^n}\int_{P_{0\ldots0}^{1\ldots1}}|f(z+z_0)|^p\,dz<+\infty,$$

где $P_{0\ldots0}^{1\ldots1}$ – единичный куб $[0,1]^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 1.2. *Пусть $b(z)\in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Функция $b(x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b}\in\mathbb{R}$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$, если и только если*

(i) *$b(z)\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$;*

(ii) *предел (1.3) имеет место для любого параллелепипеда $P_{a_1\ldots a_n}^{b_1\ldots b_n}$ такого, что $a_1b_1=\cdots=a_nb_n=0$.*

Сформулируем еще одно достаточное условие усредняемости. Обозначим через $K_\lambda(x_0)$ куб в $\mathbb{R}^n$ с центром x_0 и ребром λ:

$$K_\lambda(x_0)=\left\{|x_j-x_{0j}|\leqslant\frac{\lambda}{2},\ j=1,\ldots,n\right\}. \tag{1.6}$$

Теорема 1.3. *Пусть $b(z)\in L_\infty(\Omega)$. Обозначим*

$$b_\lambda(x_0)=\frac{1}{\lambda^n}\int_{K_\lambda(x_0)}b(z)\,dz.$$

Предположим, что найдется число $\overline{b}$ такое, что для всех $\lambda>0$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$

$$|b_\lambda(x_0)-\overline{b}|\leqslant\beta\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{1.7}$$

где $\beta(s)\to0$ при $s\to0+$. Тогда для каждой области $\Omega\Subset\mathbb{R}^n$ функция $b(x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b}$ при $\varepsilon\to0+$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$.

Мы опускаем доказательство, которое заключается в проверке того, что соотношение (1.7) влечет выполнение условия (ii) теоремы 1.2.

Теперь рассмотрим усреднение функций, зависящих как от быстрых, так и от медленных переменных вида $b(x,x/\varepsilon)$, $x\in\Omega\Subset\mathbb{R}^n$.

Пример 1.1. Пусть $b(x,x/\varepsilon)=b_1(x)b_2(x/\varepsilon)$, где $b_1(x)\in L_p(\Omega)$ и $b_2(z)\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что функция $b_2(x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b}_2\in\mathbb{R}$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$. Тогда функция $b(x,x/\varepsilon)$, очевидно, имеет среднее $\overline{b}(x)=b_1(x)\overline{b}_2$ в $L_{p,w}(\Omega)$.

Аналогичным образом обладают усреднением функции вида

$$b^N\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)=\sum_{i=1}^N b_{1i}(x)b_{2i}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{1.8}$$

где $b_{1i}(x)\in L_p(\Omega)$, $b_{2i}(z)\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и функции $b_{2i}(x/\varepsilon)$ имеют средние $\overline{b}_{2i}\in\mathbb{R}$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$.

Пример 1.2. Пусть дана функция $b(x,z) \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n)$, которая является квазипериодической по каждому аргументу z_j, $j = 1,\dots,n$ $(z = (z_1,\dots,z_n))$. Точнее, имеется непрерывная функция

$$B(x,\omega_{11},\dots,\omega_{1k_1},\dots,\omega_{n1},\dots,\omega_{nk_n}) \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{T}^{k_1}\times\dots\times\mathbb{T}^{k_n}),$$

которая является 1-периодической по каждому аргументу ω_{ij} и такая, что

$$b(x,z_1,\dots,z_n) = B(x,\alpha_{11}z_1,\dots,\alpha_{1k_1}z_1,\dots,\alpha_{n1}z_n,\dots,\alpha_{nk_n}z_n) \qquad \forall\, z\in\mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Здесь $\{\alpha_{ij}\}_{j=1,\dots,k_i}^{i=1,\dots,n}$ – рационально независимые вещественные числа.

Множество $\overline{\Omega}\times\mathbb{T}^{k_1}\times\dots\times\mathbb{T}^{k_n}$ компактно. Поэтому функция $b(x,z)$ равномерно непрерывна по x:

$$|b(x_1,z)-b(x_2,z)| \leqslant \alpha(|x_1-x_2|) \qquad \forall\, x_1,x_2\in\overline{\Omega},\quad \forall\, z\in\mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

где $\alpha(s)\to 0$ $(s\to 0+)$ и $\alpha(s)$ не зависит от z.

Используя теорему Кронекера–Вейля и теорему об однопараметрическом семействе трансляций на торе (см. [4]), можно доказать, что для каждой точки $z^0 = (z_1^0,\dots,z_n^0)\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1\dots\lambda_n}\int_{z_1^0}^{z_1^0+\lambda_1}\cdots\int_{z_n^0}^{z_n^0+\lambda_n} b(x,z_1,\dots,z_n)\,dz_1\dots dz_n\\ \to \int_{\mathbb{T}^{k_1}}\cdots\int_{\mathbb{T}^{k_n}} B(x,\overline{\omega}_1,\dots,\overline{\omega}_n)\mu(d\overline{\omega}_1\dots d\overline{\omega}_n) \equiv \overline{b}(x) \qquad (\lambda_i\to+\infty).\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь $\overline{\omega}_i = (\omega_{i1},\dots,\omega_{ik_i})\in\mathbb{T}^{k_i}$, $i = 1,\dots,n$, $\mu(d\omega_1\dots d\omega_n)$ – мера Лебега на $\mathbb{T}^K = \mathbb{T}^{k_1}\times\dots\times\mathbb{T}^{k_n}$, $K = k_1+\dots+k_n$, и $\mu(\mathbb{T}^K) = 1$. Предельное соотношение (1.11) выполнено равномерно по $z^0\in\mathbb{R}^n$ и по $x\in\overline{\Omega}$. Используя (1.11) и (1.10), легко показать, что функция $\overline{b}(x)$ является средним для $b(x,x/\varepsilon)$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0+$. В частности, из (1.11) следует, что

$$\left|\frac{1}{\lambda^n}\int_{K_\lambda(x_0)} b(x_0,z)dz - \overline{b}(x_0)\right| \leqslant \beta\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{1.12}$$

где $\beta(s)\to 0$ $(s\to 0+)$ и $\beta(s)$ не зависит от x_0.

Наконец, отметим, что условие (1.12) влечет следующий результат об усреднении, обобщающий теорему 1.3.

Теорема 1.4. *Пусть $b(x,z)\in C_b(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n)$, $\overline{b}(x)\in L_\infty(\Omega)$. Предположим, что выполнены свойства* (1.10) *и* (1.12). *Тогда функция $b(x,x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b}(x)$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0+$.*

Пример 1.3. Рассмотрим функцию $b(x,z) \in C_b(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую условию (1.10). Пусть также функция $b(x,z)$ является почти периодической по z в смысле Бора, т.е. существуют квазипериодические функции $b_N(x,z) \in C_b(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n)$ (см. (1.9)), которые удовлетворяют (1.10) с одной и той же функцией $\alpha(s)$ и такие, что

$$\lim_{N\to\infty} \|b(x,z) - b_N(x,z)\|_{C_b(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{1.13}$$

(см. [5]). При выполнении перечисленных условий функция $b(x,x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b}(x)$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0+$, где $\overline{b}(x) = \lim_{N\to\infty} \overline{b}_N(x)$ и $\overline{b}_N(x)$ – средние функций $b_N(x,z)$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$ (см. (1.11)).

1.2. Усреднение по времени. Рассмотрим усреднение по времени функций вида $g(x,t/\varepsilon)$ и $g(x,t,t/\varepsilon)$, где $t \in \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$.

Пусть H обозначает сепарабельное гильбертово (или банахово) пространство. Рассмотрим пространства $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ и $L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Аналогично пространственному усреднению введем понятие *усреднения по времени* в локальной слабой или локальной $*$-слабой топологии этих пространств. Нам также потребуется понятие *равномерной усредняемости* относительно трансляций вдоль оси времени $\mathbb{R}$.

Рассмотрим некоторое семейство $\{f_\varepsilon(t), \varepsilon > 0\}$ функций из $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, и пусть $\widehat{f}(t) \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. По определению функция $\widehat{f}(t)$ является *равномерным средним* для $f_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0+$ в $L_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, если для любого $T > 0$ и каждой функции $\varphi \in L_q(0,T;H)$

$$\int_0^T \langle f_\varepsilon(t+h), \varphi(t)\rangle\,dt \to \int_0^T \langle \widehat{f}(t+h), \varphi(t)\rangle\,dt \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{1.14}$$

равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Аналогично определяется равномерное среднее в локальной $*$-слабой топологии пространства $L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. В этом случае предел (1.14) должен иметь место для любой функции $\varphi \in L_1(0,M;H)$.

Начнем рассмотрение с функций вида $g(t/\varepsilon)$, где $g(\tau) \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Будем предполагать, что функция $g(t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее $\overline{g} \in H$. Сформулируем достаточное условие равномерной усредняемости к постоянной функции.

Теорема 1.5. *Пусть $g(\tau) \in L_p^b(\mathbb{R};H)$, $p \in]1,\infty]$. Предположим, что*

$$\frac{1}{\lambda}\int_h^{h+\lambda} g(s)\,ds \to \overline{g} \qquad (\lambda \to \infty) \tag{1.15}$$

по норме пространства H равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Тогда функция $g(t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее $\overline{g}$ в $L_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ (соответственно в $L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, если $p=\infty$).

Доказательство. Аналогично пространственному случаю (см. теорему 1.1) достаточно проверить (1.14) только для ступенчатых функций вида

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^N g_j \chi_{[T_{1j},T_{2j}]}(t),$$

где $g_j \in H$. Осталось заметить, что случай $\varphi = g\chi_{[T_1,T_2]}(t)$ прямо следует из (1.15).

Пример 1.4. Пусть $g(t) \in C_b(\mathbb{R}; H)$ является почти периодической функцией по t со значениями в H. Тогда, как известно (см. [5]), условие (1.15) выполнено для некоторой функции $\overline{g} \in H$, т.е. функция $g(t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее $\overline{g}$ в $L^{\mathrm{loc}}_{\infty,*w}(\mathbb{R}; H)$.

Введем понятие *трансляционно-компактной* (*тр.-к.*) функции в пространствах $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ и $L^{\mathrm{loc}}_p(\mathbb{R}; H)$, которое расширяет понятие почти периодической функции.

Определение 1.1. Функция $g(t) \in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ называется *трансляционно-компактной* в пространстве $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, если множество ее сдвигов $\{g(t+h) : h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, т.е. оно предкомпактно в $C([-M, M]; H)$ для любого $M > 0$.

Аналогично, функция $g(t) \in L^{\mathrm{loc}}_p(\mathbb{R}; H)$ называется *трансляционно-компактной* в $L^{\mathrm{loc}}_p(\mathbb{R}; H)$, если множество ее сдвигов $\{g(t+h) : h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в пространстве $L_p(-M, M; H)$ для любого $M > 0$.

Множество $\mathscr{H}(g) = [\{g(t+h) : h \in \mathbb{R}\}]_\Xi$ называется *оболочкой* функции g пространстве Ξ. Здесь $[\,\cdot\,]_\Xi$ обозначает замыкание в пространстве Ξ, причем $\Xi = C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$, если g тр.-к. в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$; $\Xi = L^{\mathrm{loc}}_p(\mathbb{R}; H)$, если g тр.-к. в $L^{\mathrm{loc}}_p(\mathbb{R}; H)$. Отметим, что множество $\mathscr{H}(g)$ компактно в Ξ и является трансляционно инвариантным, т.е. для любой функции $g_1(t) \in \mathscr{H}(g)$ функция $g_1(t+h) \in \mathscr{H}(g)$ для всякого $h \in \mathbb{R}$. (Подробнее о свойствах тр.-к. функций см. [6].)

С помощью тр.-к. функций можно построить новые примеры равномерно усредняемых функций.

Сформулируем сначала основные свойства равномерной усредняемости.

Утверждение 1.1. *Предположим, что функция $g_0(\tau)$ является тр.-к. в пространстве $L^{\mathrm{loc}}_p(\mathbb{R}; H)$, $p \in]1, \infty[$, а функция $g_0(t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее $\overline{g}_0 \in H$ в $L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R}; H)$. Тогда*

(i) *для каждой $\varphi \in L_q(0, T; H)$, $q = p/(p-1)$,*

$$\int_0^T \left\langle g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \varphi(t) \right\rangle dt \to \int_0^T \langle \overline{g}_0, \varphi(t) \rangle\, dt \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{1.16}$$

равномерно по $g(\tau) \in \mathscr{H}(g_0(\tau))$, где $\mathscr{H}(g_0)$ является оболочкой функции $g_0(\tau)$;

(ii) *имеет место предел*

$$\mathscr{H}\left(g_0\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \to \{\overline{g}_0\} (\varepsilon \to 0+) \tag{1.17}$$

в топологии пространства $L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R}; H)$, т.е. для любой окрестности $\mathscr{O}(\overline{g}_0)$ точки $\overline{g}_0$ в пространстве $L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R}; H)$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\mathscr{H}(g_0(t/\varepsilon)) \subseteq \mathscr{O}(\overline{g}_0)$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что (ii) следует из (i), так как функции $\varphi \in L_q(0,T;H)$ порождают базу топологии в пространстве $L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R};H)$. Докажем теперь (i). Достаточно проверить, что для каждой $\varphi \in H$

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \langle g(\tau),\varphi\rangle\,d\tau \to \langle \overline{g}_0,\varphi\rangle \qquad (\lambda\to\infty) \tag{1.18}$$

равномерно по $g(\tau) \in \mathscr{H}(g_0(\tau))$. Поскольку $\overline{g}_0 \in H$ – равномерное среднее для $g(t/\varepsilon)$ в $L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R};H)$, то для каждой $\varphi \in H$

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \langle g_0(\tau+h),\varphi\rangle\,d\tau \to \langle \overline{g}_0,\varphi\rangle \qquad (\lambda\to\infty) \tag{1.19}$$

равномерно по $h\in\mathbb{R}$. Поскольку функция $g_0(\tau)$ является трансляционно-компактной в $L^{\mathrm{loc}}_{p}(\mathbb{R};H)$, любая функция $g(\tau)\in\mathscr{H}(g_0)$ может быть приближена функциями вида $g_0(\tau+h_i)$ в сильной топологии пространства $L^{\mathrm{loc}}_{p}(\mathbb{R};H)$. Следовательно, (1.19) влечет (1.18).

Теперь рассмотрим примеры, в которых функции вида $g(t,t/\varepsilon)$ имеют равномерные средние $\overline{g}(t)$, зависящие от времени t.

Пример 1.5. Пусть $g_2(\tau) \in L^b_p(\mathbb{R};H)$, $p \in]1,\infty]$. Предположим, что функция $g_2(t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее $\overline{g}_2 \in H$ в $L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R};H)$ и $g_2(\tau)$ – тр.-к. функция в $L^{\mathrm{loc}}_{p}(\mathbb{R};H)$. Пусть также $g_1(t)\in C_b(\mathbb{R})$ и пусть $g_1(t)$ – тр.-к. в $C_b(\mathbb{R})$. Тогда функция $g(t,t/\varepsilon) = g_1(t)g_2(t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее $g_1(t)\overline{g}_2$ в $L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R};H)$ при $\varepsilon\to 0+$.

Докажем это утверждение. Зафиксируем любой замкнутый интервал $[0,T]$ и произвольное число $\varepsilon>0$. Поскольку множество $\{g_1(t+h), h\in\mathbb{R}\}$ предкомпактно в $C([0,T];H)$, можно выбрать его ε-сеть $\{g_1(t+h_i), i=1,\dots,N\}$. Тогда для любого $h\in\mathbb{R}$ существует $i\in\{1,\dots,N\}$ такое, что

$$\max_{t\in[0,T]} |g_1(t+h)-g_1(t+h_i)| < \varepsilon. \tag{1.20}$$

Функция $g_2(t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее в $L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R};H)$. Следовательно, для любой функции $\varphi\in L_q(0,T;H)$ и любого $i=1,\dots,N$

$$\int_0^T \left\langle g_2\left(\frac{t+h}{\varepsilon}\right), g_1(t+h_i)\varphi(t)\right\rangle dt \to \int_0^T \langle \overline{g}_2, g_1(t+h_i)\varphi(t)\rangle\,dt \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+ \tag{1.21}$$

равномерно по $h\in\mathbb{R}$. Тем самым,

$$\int_0^T \left\langle g_1(t+h)\left(g_2\left(\frac{t+h}{\varepsilon}\right)-\overline{g}_2\right),\varphi(t)\right\rangle dt \tag{1.22}$$

$$= \int_0^T \left\langle \left(g_2\left(\frac{t+h}{\varepsilon}\right)-\overline{g}_2\right), g_1(t+h_i)\varphi(t)\right\rangle dt \tag{1.23}$$

$$+ \int_0^T \left\langle \left(g_2\left(\frac{t+h}{\varepsilon}\right)-\overline{g}_2\right), (g_1(t+h)-g_1(t+h_i))\varphi(t)\right\rangle dt. \tag{1.24}$$

Поскольку $g_2(\tau) \in L_p^b(\mathbb{R}; H)$, мы можем, используя (1.20), оценить интеграл (1.24) числом

$$C \max_{t\in[0,T]} |g_1(t+h) - g_1(t+h_i)| < C\varepsilon \quad (\text{где} \quad i \quad \text{зависит от} \quad h).$$

В силу (1.21) интеграл (1.23) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0+$ равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Поэтому интеграл (1.22) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0+$ равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Мы доказали, что

$$\int_0^T \left\langle g_1(t+h) g_2\left(\frac{t+h}{\varepsilon}\right), \varphi(t) \right\rangle dt \to \int_0^T \langle g_1(t+h)\overline{g}_2, \varphi(t)\rangle\, dt \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \tag{1.25}$$

равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Следовательно, $g_1(t)\overline{g}_2$ является равномерным средним для функции $g_1(t)g_2(t/\varepsilon)$.

Из соотношения (1.25) следует, что для функции $g(t, t/\varepsilon) = g_1(t)g_2(t/\varepsilon)$ выполнено свойство, аналогичное свойству (ii) из утверждения 1.1. Ясно, что функции $g_1(t)g_2(t/\varepsilon)$ и $g_1(t)\overline{g}_2$ являются тр.-к. в $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$. Рассмотрим их оболочки $\mathscr{H}(g_1(t)g_2(t/\varepsilon))$ и $\mathscr{H}(g_1(t)\overline{g}_2)$ в $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$.

Утверждение 1.2. *В топологии пространства $L_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$ выполнено предельное соотношение*

$$\mathscr{H}\left(g_1(t) g_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \to \mathscr{H}(g_1(t)\overline{g}_2) \qquad (\varepsilon \to 0+). \tag{1.26}$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.1.

Пример 1.6. Пусть $g_1 \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ и $g_2 \in C_b(\mathbb{R}; H)$. Кроме того, предположим, что функции g_1 и g_2 – почти периодические в этих пространствах. Тогда функция $g(t, t/\varepsilon) = g_1(t)g_2(t/\varepsilon)$ удовлетворяет всем условиям из примера 1.5 и, следовательно, имеет среднее в пространстве $L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$. В частности, если $\overline{g}_2 \in H$ – среднее для g_2, то $\mathscr{H}(g_1(t)g_2(t/\varepsilon)) \to \mathscr{H}(g_1(t)\overline{g}_2)$ $(\varepsilon \to 0+)$ $*$-слабо в $L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$.

Тем же способом доказывается, что функция вида

$$g_N\left(t, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \sum_{i=1}^N g_{1i}(t) g_{2i}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \sum_{i=1}^N g_{3i}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) g_{4i}(t) \tag{1.27}$$

имеет равномерное среднее

$$\overline{g}_N(t) = \sum_{i=1}^N g_{1i}(t)\overline{g}_{2i} + \sum_{i=1}^N \overline{g}_{3i} g_{4i}(t), \tag{1.28}$$

если известно, что функции $g_{1i}, g_{3i} \in C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $g_{2i}, g_{4i} \in C_b(\mathbb{R}; H)$ и они являются почти периодическими в этих пространствах. Аналогичные результаты имеют место для предела функций $g_N(t, t/\varepsilon)$ вида (1.27) при $N \to \infty$ в соответствующем функциональном пространстве.

§ 2. Траекторные аттракторы эволюционных уравнений

В этом параграфе излагается общая схема построения траекторных аттракторов эволюционных уравнений. В следующем параграфе эта схема применяется для изучения траекторных аттракторов конкретных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и соответствующих им усредненных уравнений.

Рассматривается абстрактное автономное эволюционное уравнение

$$\partial_t u = A(u), \qquad t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Предполагается заданным (нелинейный) оператор $A(\,\cdot\,)\colon E \to E_0$, где E, E_0 – банаховы пространства и $E \subseteq E_0$. Например, $A(u) = a\Delta u - f(u) + g$ (см. § 3).

Мы будем исследовать решения $u(s)$ уравнения (2.1) в целом, как функции переменной $s \in \mathbb{R}_+$. Здесь $s \equiv t$ обозначает переменную времени. Множество решений (2.1) будет называться *пространством траекторий* $\mathscr{K}^+$ уравнения (2.1). Опишем пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ более подробно.

Прежде всего рассмотрим решения $u(s)$ уравнения (2.1), определенные на фиксированном отрезке времени $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$. Изучаются решения уравнения (2.1), принадлежащие банахову пространству $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$. Пространство $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$ состоит из функций $f(s)$, $s \in [t_1, t_2]$, таких, что $f(s) \in E$ при почти всех $s \in [t_1, t_2]$. Например, $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$ может быть или пространством $C([t_1, t_2]; E)$, или $L_p(t_1, t_2; E)$, $p \in [1, \infty]$, или пересечением подобных пространств (см. § 3). Предполагается, что $\Pi_{t_1,t_2}\mathscr{F}_{t_3,t_4} = \mathscr{F}_{t_1,t_2}$ при $[t_1, t_2] \subset [t_3, t_4]$, где Π_{t_1,t_2} обозначает оператор сужения на отрезок $[t_1, t_2]$.

Предполагается, что если $f(s) \in \mathscr{F}_{t_1,t_2}$, то $A(f(s)) \in \mathscr{D}_{t_1,t_2}$, где $\mathscr{D}_{t_1,t_2}$ – некоторое более широкое чем $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$ банахово пространство, $\mathscr{F}_{t_1,t_2} \subseteq \mathscr{D}_{t_1,t_2}$. Производная $\partial_t f(t)$ – обобщенная функция со значениями в E_0, $\partial_t f(s) \in D'(]t_1, t_2[; E_0)$, $\mathscr{D}_{t_1,t_2} \subseteq D'(]t_1, t_2[; E_0)$. Функция $u(s) \in \mathscr{F}_{t_1,t_2}$ называется *решением* (2.1) в пространстве $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$ (на интервале $]t_1, t_2[$), если $\partial_t u(s) = A(u(s))$ в смысле обобщенных функций.

Определим также пространство

$$\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}} = \{f(s), s \in \mathbb{R}_+ : \Pi_{t_1,t_2} f(s) \in \mathscr{F}_{t_1,t_2} \quad \forall\, [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}_+\}. \tag{2.2}$$

Например, если $\mathscr{F}_{t_1,t_2} = C([t_1, t_2]; E)$, то $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}} = C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E)$, а если $\mathscr{F}_{t_1,t_2} = L_p(t_1, t_2; E)$, то $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}} = L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E)$.

Функция $u(s) \in \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ называется решением уравнения (2.1) в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$, если $\Pi_{t_1,t_2} u(s)$ является решением (2.1) в $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$ для любого $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$.

Через $\mathscr{K}^+$ обозначается некоторое множество решений (2.1), принадлежащих $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$. (Заметим, что $\mathscr{K}^+$ не обязательно является множеством *всех* решений (2.1), принадлежащих $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$.) Элементы множества $\mathscr{K}^+$ будут называться *траекториями*, а само множество $\mathscr{K}^+$ – *пространством траекторий* уравнения (2.1).

Предполагается, что пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ является *трансляционно-инвариантным* в следующем смысле: если $u(s) \in \mathscr{K}^+$, то $u(h+s) \in \mathscr{K}^+$ для любого $h \geqslant 0$. Это условие является естественным свойством решений автономного уравнения.

Рассмотрим теперь операторы сдвигов $T(h)$ в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$:

$$T(h) f(s) = f(s+h) \quad \text{для} \quad h \geqslant 0.$$

Ясно, что множество отображений $\{T(h), h \geqslant 0\}$ образует полугруппу в $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$: $T(h_1)T(h_2) = T(h_1 + h_2)$ при $h_1, h_2 \geqslant 0$ и $T(0) = I$. Заменим переменную h на переменную времени t. Полугруппа $\{T(t), t \geqslant 0\}$ называется *полугруппой сдвигов*. В силу сделанного предположения полугруппа сдвигов отображает пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ на себя:

$$T(t)\mathscr{K}^+ \subseteq \mathscr{K}^+ \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Ниже изучаются свойства притяжения полугруппы сдвигов $\{T(t)\}$, действующей на пространстве траекторий $\mathscr{K}^+ \subset \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$. Определим топологию в пространстве $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$.

Пусть задана некоторая топология сходимости в $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$. Обозначим через Θ_{t_1,t_2} топологическое пространство $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$, снабженное этой топологией. Предполагается, что Θ_{t_1,t_2} – хаусдорфово пространство. Например, Θ_{t_1,t_2} может быть само $\mathscr{F}_{t_1,t_2}$ с топологией сильной или слабой (или даже $*$-слабой) сходимости этого банахова пространства. Обозначим через Θ_+^{loc} пространство $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$, снабженное топологией локальной сходимости на Θ_{t_1,t_2} при любом $[t_1,t_2] \subseteq \mathbb{R}_+$. Точнее, по определению последовательность функций $\{f_n(s)\} \subset \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ сходится к функции $f(s) \in \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ при $n \to \infty$ в Θ_+^{loc}, если $\Pi_{t_1,t_2} f_n(s) \to \Pi_{t_1,t_2} f(s)$ $(n \to \infty)$ в Θ_{t_1,t_2} для любого $[t_1,t_2] \subseteq \mathbb{R}_+$. Нетрудно доказать, что пространство Θ_+^{loc} является пространством Хаусдорфа. Заметим, что полугруппа сдвигов $\{T(t)\}$ непрерывна в Θ_+^{loc}. Это утверждение непосредственно вытекает из определения топологического пространства Θ_+^{loc}.

Определим также следующее банахово пространство:

$$\mathscr{F}_+^b := \{f(s) \in \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}} : \|f\|_{\mathscr{F}_+^b} < +\infty\},$$

где норма

$$\|f\|_{\mathscr{F}_+^b} = \sup_{t \geqslant 0} \|\Pi_{0,1} f(t+s)\|_{\mathscr{F}_{0,1}}. \tag{2.4}$$

Отметим, что $\mathscr{F}_+^b \subseteq \Theta_+^{\mathrm{loc}}$. Пространство $\mathscr{F}_+^b$ необходимо для задания ограниченных множеств в $\mathscr{K}^+$.

Будем предполагать, что $\mathscr{K}^+ \subseteq \mathscr{F}_+^b$, т.е. любая траектория $u(s) \in \mathscr{K}^+$ уравнения (2.1) имеет конечную норму (2.4). Приведем определение траекторного аттрактора полугруппы сдвигов $\{T(t)\}$, действующей на $\mathscr{K}^+$.

Определение 2.1. Множество $P \subseteq \Theta_+^{\mathrm{loc}}$ называется *притягивающим* для пространства траекторий $\mathscr{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, если для любого ограниченного в $\mathscr{F}_+^b$ множества $B \subseteq \mathscr{K}^+$ множество P притягивает $T(t)B$ при $t \to +\infty$ в топологии Θ_+^{loc}, т.е. для любой окрестности $\mathscr{O}(P)$ в Θ_+^{loc} существует $t_1 \geqslant 0$ такое, что $T(t)B \subseteq \mathscr{O}(P)$ при любом $t \geqslant t_1$.

Определение 2.2. Множество $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{K}^+$ называется *траекторным аттрактором* полугруппы сдвигов $\{T(t)\}$ на $\mathscr{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}, если

- (i) $\mathfrak{A}$ компактно в Θ_+^{loc};
- (ii) множество $\mathfrak{A}$ строго инвариантно относительно полугруппы сдвигов: $T(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ при всех $t \geqslant 0$;
- (iii) $\mathfrak{A}$ – притягивающее множество для $\mathscr{K}^+$.

Замечание 2.1. Используя терминологию из [7], можно сказать, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}$ является глобальным $(\mathscr{F}_+^b, \Theta_+^{\mathrm{loc}})$-аттрактором полугруппы сдвигов $\{T(t)\}$, действующей на $\mathscr{K}^+$, т.е. $\mathfrak{A}$ притягивает $T(t)B$ при $t \to +\infty$ в топологии Θ_+^{loc}, где B – любое ограниченное в $\mathscr{F}_+^b$ множество.

Сформулируем основную теорему о существовании траекторного аттрактора уравнения (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть пространство траекторий $\mathscr{K}^+, \mathscr{K}^+ \subseteq \mathscr{F}_+^b$, соответствующее уравнению* (2.1), *замкнуто в Θ_+^{loc}. Предполагается, что существует притягивающее множество P для $\{T(t)\}$ на $\mathscr{K}^+$ в топологии пространства Θ_+^{loc} такое, что P компактно в Θ_+^{loc} и ограничено в $\mathscr{F}_+^b$. Тогда полугруппа сдвигов $\{T(t), t \geqslant 0\}$, действующая на $\mathscr{K}^+$, имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{K}^+ \cap P$. Множество $\mathfrak{A}$ компактно в Θ_+^{loc} и ограничено в $\mathscr{F}_+^b$.*

Доказательство. В самом деле, полугруппа $\{T(t)\}$ непрерывна на $\mathscr{K}^+$ в топологии Θ_+^{loc}. Множество P является $(\mathscr{F}_+^b, \Theta_+^{\mathrm{loc}})$-притягивающим, компактным в Θ_+^{loc} и ограниченным в $\mathscr{F}_+^b$. Тогда полугруппа $\{T(t)\}$ имеет глобальный $(\mathscr{F}_+^b, \Theta_+^{\mathrm{loc}})$-аттрактор $\mathfrak{A}$, который, очевидно, является также траекторным аттрактором (см. полное доказательство в [6]).

Опишем структуру траекторного аттрактора $\mathfrak{A}$ уравнения (2.1) в терминах полных траекторий этого уравнения.

Рассмотрим уравнение (2.1) на всей числовой оси времени:

$$\partial_t u = A(u), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Мы уже определили пространство траекторий $\mathscr{K}^+$ уравнения (2.5) на $\mathbb{R}_+$. Теперь распространим это определение на всю ось $\mathbb{R}$. Если функция $f(s)$, $s \in \mathbb{R}$, задана на всей оси времени, то сдвиги $T(h)f(s) = f(s+h)$ также определены при отрицательных h.

Функция $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, называется *полной траекторией* уравнения (2.5), если $\Pi_+ u(s+h) \in \mathscr{K}^+$ при любом $h \in \mathbb{R}$. Здесь $\Pi_+ = \Pi_{0,\infty}$ обозначает оператор ограничения на полуось $\mathbb{R}_+$.

Мы ввели пространства $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$, $\mathscr{F}_+^b$ и Θ_+^{loc}. Аналогичным образом определяются пространства $\mathscr{F}^{\mathrm{loc}}$, $\mathscr{F}^b$:

$$\mathscr{F}^{\mathrm{loc}} = \{f(s), s \in \mathbb{R} : \Pi_{t_1,t_2} f(s) \in \mathscr{F}_{t_1,t_2}\ \forall [t_1,t_2] \subseteq \mathbb{R}\};$$
$$\mathscr{F}^b = \{f(s) \in \mathscr{F}^{\mathrm{loc}} : \|f\|_{\mathscr{F}^b} < +\infty\},$$

где

$$\|f\|_{\mathscr{F}^b} = \sup_{h \in \mathbb{R}} \|\Pi_{0,1} f(h+s)\|_{\mathscr{F}_{0,1}}. \tag{2.6}$$

Топологическое пространство Θ^{loc} совпадает (как множество) с $\mathscr{F}^{\mathrm{loc}}$, и по определению $f_n(s) \to f(s)$ $(n \to \infty)$ в Θ^{loc}, если $\Pi_{t_1,t_2} f_n(s) \to \Pi_{t_1,t_2} f(s)$ $(n \to \infty)$ в Θ_{t_1,t_2} при любом $[t_1,t_2] \subseteq \mathbb{R}$.

Определение 2.3. *Ядро* $\mathscr{K}$ в пространстве $\mathscr{F}^b$ уравнения (2.5) есть объединение всех полных траекторий $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, уравнения (2.5), ограниченных в $\mathscr{F}^b$ по норме (2.6):

$$\|\Pi_{0,1}u(h+s)\|_{\mathscr{F}_{0,1}} \leqslant C_u \quad \forall\, h \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда*

$$\mathfrak{A} = \Pi_+ \mathscr{K}. \tag{2.8}$$

Множество $\mathscr{K}$ *компактно в* Θ^{loc} *и ограничено в* $\mathscr{F}^b$.

Доказательство приведено в [6].

Поясним подробнее характер притяжения любого ограниченного множества B из $\mathscr{K}^+$ к траекторному аттрактору $\mathfrak{A}$.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Пусть* B – *ограниченное в* $\mathscr{F}^b_+$ *множество из* $\mathscr{K}^+$. *Тогда при любом* $M > 0$ *множество* $\Pi_{0,M}T(t)B$ *стремится к* $\Pi_{0,M}\mathscr{K}$ *в топологическом пространстве* $\Theta_{0,M}$ *при* $t \to \infty$. *Например, если* $\Theta_{0,M}$ – *метризуемое пространство, то*

$$\mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M}T(t)B, \Pi_{0,M}\mathfrak{A}) = \mathrm{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M}T(t)B, \Pi_{0,M}\mathscr{K}) \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

Здесь расстояние от множества X до множества Y в метрическом пространстве $\mathscr{M}$ определяется по Хаусдорфу: $\mathrm{dist}_{\mathscr{M}}(X,Y) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\rho_{\mathscr{M}}(x,y)$, где $\rho_{\mathscr{M}}(x,y)$ обозначает метрику в $\mathscr{M}$.

Теоремы 2.1 и 2.2 показывают, что для построения траекторного аттрактора необходимо установить существование притягивающего множества P, компактного в Θ^{loc}_+ и ограниченного в $\mathscr{F}^b_+$. Обычно в приложениях таким притягивающим множеством служит шар большого радиуса $B_R = \{\|f\|_{\mathscr{F}^b_+} \leqslant R\}$ в $\mathscr{F}^b_+$ $(R \gg 1)$. Существование такого множества B_R обычно следует из неравенства вида

$$\|T(t)u\|_{\mathscr{F}^b_+} \leqslant C(\|u\|_{\mathscr{F}^b_+})e^{-\gamma t} + R_0, \qquad \gamma > 0, \tag{2.9}$$

при любом $u \in \mathscr{K}^+$ и всех $t \geqslant 0$, где $C(R)$ зависит от R, а R_0 не зависит от u. Как правило, неравенство (2.9) вытекает из априорных оценок для решений уравнения (2.1).

Теперь мы коротко опишем построение траекторных аттракторов для неавтономных эволюционных уравнений. Неавтономные уравнения содержат члены, явно зависящие от времени. Например, ими могут быть внешние силы, функции взаимодействия или иные коэффициенты, входящие в уравнение. Поэтому нам удобно ввести функцию $\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называемую *временны́м символом* рассматриваемого уравнения, которая состоит из всех членов изучаемого уравнения, зависящих от времени. Значения функции $\sigma(t)$ принадлежат соответствующему функциональному пространству.

Неавтономное уравнение можно записать в виде

$$\partial_t u = A_{\sigma(t)}(u), \qquad t \geqslant 0. \tag{2.10}$$

Здесь, подобно уравнению (2.1), введен оператор $A_{\sigma(s)}(\,\cdot\,)\colon E \to E_0$, $s \in \mathbb{R}$. Например, $A_{\sigma(t)}(u) = a\Delta u - f(u) + g(x,t)$, где $\sigma(t) = g(x,t)$.

Временной символ $\sigma(s)$ как функция времени принадлежит некоторому топологическому пространству Ξ. Для простоты мы будем предполагать, что Ξ – это пространство $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ или $\Xi = L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, снабженное соответствующей топологией локальной сходимости на любом конечном отрезке числовой оси (см. п. 1.2). При построении траекторного аттрактора уравнения (2.10) мы исходим из следующего требования: аттрактор не должен меняться при замене символа $\sigma(s)$ любым сдвинутым символом $\sigma(s+h)$, $h \in \mathbb{R}$. Поэтому мы будем рассматривать целое семейство уравнений (2.10) с различными символами $\sigma(s) \in \Sigma$, где Σ является трансляционно-инвариантным множеством:

$$T(h)\Sigma = \Sigma \quad \forall\, h \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Обычно в приложениях Σ совпадает с оболочкой $\mathscr{H}(\sigma_0)$ (в Ξ) некоторого начального символа $\sigma_0(s)$ изучаемого уравнения:

$$\Sigma = \mathscr{H}(\sigma_0) = [\{\sigma_0(t+h) : h \in \mathbb{R}\}]_\Xi.$$

Мы будем также предполагать, что функция $\sigma_0(s)$ является трансляционно-компактной в пространстве Ξ (см. п. 1.2). Следовательно, множество Σ компактно в Ξ. Например, функция $\sigma_0(t)$ может быть периодической, квазипериодической или почти периодической. Тогда ее оболочка $\mathscr{H}(\sigma_0)$ компактна в пространстве $C_b(\mathbb{R};H)$, и, тем самым, множество $\Sigma = \mathscr{H}(\sigma_0)$ компактно в $\Xi = C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$.

Как и в автономном случае, будем предполагать, что каждому символу $\sigma \in \Sigma$ соответствует пространство траекторий $\mathscr{K}_\sigma^+ \subset \mathscr{F}_+^b$, состоящее из решений $u(s)$, $s \geqslant 0$, уравнения (2.10). Функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению в смысле обобщенных функций пространства $D'(]t_1,t_2[;E_0)$ при любом $[t_1,t_2] \subset \mathbb{R}_+$. Пространства $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$, $\mathscr{F}_+^b$ и Θ_+^{loc} имеют тот же смысл, что и в автономном случае.

Рассмотрим действие полугруппы сдвигов $\{T(t)\}$ на $\mathscr{K}_\sigma^+$. Легко видеть, что в общем случае пространство траекторий $\mathscr{K}_\sigma^+$ не инвариантно относительно $\{T(t)\}$, т.е. $T(t)\mathscr{K}_\sigma^+ \not\subseteq \mathscr{K}_\sigma^+$. Однако выполнено включение:

$$T(t)\mathscr{K}_\sigma^+ \subseteq \mathscr{K}_{T(t)\sigma}^+ \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Рассмотрим объединенное пространство траекторий

$$\mathscr{K}_\Sigma^+ = \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathscr{K}_\sigma^+,$$

которое уже инвариантно относительно $\{T(t)\}$:

$$T(t)\mathscr{K}_\Sigma^+ \subseteq \mathscr{K}_\Sigma^+ \quad \forall t \geqslant 0.$$

Аналогично автономному случаю вводятся определения *равномерного* (*по* $\sigma \in \Sigma$) *аттрактора* полугруппы сдвигов на $\mathscr{K}_\Sigma^+$ в топологии Θ_+^{loc}. По определению глобальный $(\mathscr{F}_+^b, \Theta_+^{\mathrm{loc}})$-аттрактор полугруппы сдвигов $\{T(t)\}$, действующей на $\mathscr{K}_\Sigma^+$, называется *равномерным* (*по* $\sigma \in \Sigma$) *траекторным аттрактором* $\mathfrak{A}_\Sigma$ уравнения (2.10), т.е. множество $\mathfrak{A}_\Sigma$ компактно в Θ_+^{loc}, притягивает $T(t)B$ при $t \to +\infty$ в топологии Θ_+^{loc} для любого ограниченного (в $\mathscr{F}_+^b$) множества B из $\mathscr{K}_\Sigma^+$ и $T(t)\mathfrak{A}_\Sigma = \mathfrak{A}_\Sigma$ при $t \geqslant 0$.

По аналогии с автономным случаем вводится также понятие *ядра* $\mathscr{K}_\sigma$ уравнения (2.10), которое состоит из всех траекторий $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, уравнения (2.10), определенных на всей оси и ограниченных по норме $\mathscr{F}^b$ (см. (2.6)).

Теорема 2.3. *Пусть пространство символов* $\Sigma = \mathscr{H}(\sigma_0)$, *где* $\sigma_0(s)$ – *трансляционно-компактная функция в* Ξ. *Предположим, что объединенное пространство траекторий* $\mathscr{K}_\Sigma^+$, *соответствующее уравнению* (2.1), *замкнуто в* Θ_+^{loc} *и* $\mathscr{K}_\Sigma^+ \subseteq \mathscr{F}_+^b$. *Предположим также, что существует равномерно* (*по* $\sigma \in \Sigma$) *притягивающее множество* P *для* $\{T(t)\}$ *на* $\mathscr{K}_\Sigma^+$ *в топологии пространства* Θ_+^{loc} *такое, что* P *компактно в* Θ_+^{loc} *и ограничено в* $\mathscr{F}_+^b$. *Тогда полугруппа сдвигов* $\{T(t), t \geqslant 0\}$, *действующая на* $\mathscr{K}_\Sigma^+$, *имеет равномерный* (*по* $\sigma \in \Sigma$) *траекторный аттрактор* $\mathfrak{A}_\Sigma \subseteq \mathscr{K}^+ \cap P$. *При этом имеет место равенство*:

$$\mathfrak{A}_\Sigma = \Pi_+ \bigcup_{\sigma \in \mathscr{H}(\sigma_0)} \mathscr{K}_\sigma. \tag{2.13}$$

Множество $\mathscr{K}_\sigma$ *не пусто при любом* $\sigma \in \Sigma$, *компактно в* Θ_+^{loc} *и ограничено в* $\mathscr{F}_+^b$.

Доказательство теоремы 2.3 для более общих пространств символов Σ изложено в [6].

В заключение мы установим связь между траекторными и глобальными аттракторами. Рассмотрим автономное уравнение (2.1) и соответствующее пространство траекторий $\mathscr{K}^+$. Предположим, что при любом $u_0 \in E$ существует и притом единственная траектория $u(s) \in \mathscr{K}^+$ такая, что

$$u(0) = u_0. \tag{2.14}$$

Тогда задача Коши (2.1), (2.14) порождает полугруппу $\{S(t), t \geqslant 0\}$, действующую в банаховом пространстве E по формуле:

$$S(t)u_0 = u(t). \tag{2.15}$$

Множество $\mathscr{A} \Subset E$ называется *глобальным аттрактором* полугруппы $\{S(t)\}$, если $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ при всех $t \geqslant 0$ и для любого ограниченного в E множества B

$$\operatorname{dist}_E(S(t)B, \mathscr{A}) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{2.16}$$

Изучению глобальных аттракторов эволюционных уравнений при условии единственности решений задачи Коши посвящена обширная литература (см., например, [7]–[9]). Приведем один результат, позволяющий сводить изучение глобального аттрактора к исследованию траекторного аттрактора. Рассмотрим пространство $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E)$, снабженное топологией локальной равномерной сходимости на любом интервале $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Предположим, что задача Коши* (2.1), (2.14) *имеет единственное решение. Предположим также, что справедливо следующее вложение*:

$$\Theta_+^{\mathrm{loc}} \subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; E). \tag{2.17}$$

Тогда полугруппа $\{S(t)\}$, *отвечающая задаче* (2.1), (2.14), *имеет глобальный аттрактор* $\mathscr{A}$, *причем*

$$\mathscr{A} = \mathfrak{A}(0) = \mathscr{K}(0) = \{u(0) : u \in \mathscr{K}\}, \tag{2.18}$$

где $\mathfrak{A}$ *и* $\mathscr{K}$ – *траекторный аттрактор и ядро уравнения* (2.1).

Доказательство очевидно вытекает из теорем 2.1, 2.2 с применением вложения (2.17).

Для доказательства вложений типа (2.17) нами будет применяться следующая лемма. Пусть E_0 и E_1 – банаховы пространства такие, что $E_1 \subset E_0$. Рассмотрим пространство

$$\begin{aligned} &W_{\infty,p_0}(0,T;E_1,E_0) \\ &\quad = \{\psi(s), s\in[0,T] : \psi(s)\in L_\infty(0,T;E_1),\ \psi'(s)\in L_{p_0}(0,T;E_0)\} \end{aligned}$$

($p_0 > 1$) с нормой

$$\|\psi\|_{W_{\infty,p_0}} = \operatorname{ess\,sup}\{\|\psi(s)\|_{E_1} : s\in[0,T]\} + \left(\int_0^T \|\psi'(s)\|_{E_0}^{p_0}\,ds\right)^{1/p_0}.$$

Лемма 2.1. *Предположим, что*

$$E_1 \Subset E \subset E_0. \tag{2.19}$$

Тогда следующее вложение компактно:

$$W_{\infty,p_0}(0,T;E_1,E_0) \Subset C([0,T];E). \tag{2.20}$$

Эта лемма доказана в приложении.

Замечание 2.2. Предельное поведение решений неавтономных уравнений вида (2.10), для которых задача Коши (2.14) однозначно разрешима, можно описывать с помощью соответствующих глобальных равномерных аттракторов. При этом аналогом полугруппы $\{S(t)\}$ (см. (2.15)) служит понятие процесса $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, который порождает неавтономное уравнение. Теория процессов и их аттракторов изложена в [10] (см. также [11], [12]). Отметим, что глобальные аттракторы процессов можно строить с помощью равномерных траекторных аттракторов изучаемых неавтономных уравнений, используя теорему 2.3 и очевидное обобщение теоремы 2.4.

В следующем параграфе будут изучаться эволюционные уравнения и их траекторные и глобальные аттракторы, зависящие от малого параметра $\varepsilon > 0$.

Определение 2.4. Будем говорить, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ *сходятся* к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon\to 0+$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}, если для любой окрестности $\mathscr{O}(\overline{\mathfrak{A}})$ в Θ_+^{loc} найдется $\varepsilon_1 \geqslant 0$ такое, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \subseteq \mathscr{O}(\overline{\mathfrak{A}})$ при любом $\varepsilon < \varepsilon_1$. В частности, если Θ_{t_1,t_2} – метрические пространства, то

$$\operatorname{dist}_{\Theta_{t_1,t_2}}(\Pi_{t_1,t_2}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{t_1,t_2}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon\to 0+).$$

Аналогично, глобальные аттракторы $\mathscr{A}_\varepsilon$ *сходятся* к глобальному аттрактору $\overline{\mathscr{A}}$ в банаховом пространстве E, если

$$\operatorname{dist}_E(\mathscr{A}_\varepsilon, \overline{\mathscr{A}}) \to 0 \ \text{ при } \ \varepsilon\to 0+.$$

§ 3. Усреднение уравнений и систем

3.1. Трехмерная система Навье–Стокса. Рассмотрим систему Навье–Стокса в области $\Omega \Subset \mathbb{R}^3$:

$$\partial_t u + \nu L u + B(u) = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad (\nabla, u) = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $u = u(x,t) = (u^1, u^2, u^3)$ и $g = (g^1, g^2, g^3)$. Здесь L – оператор Стокса в $\mathbb{R}^3$: $Lu = -P\Delta u$; $B(u) = B(u,u)$, $B(u,v) = P(u,\nabla)v = P\sum_{i=1}^3 u_i \partial_{x_i} v$. Через H и V обозначены замыкания в $(L_2(\Omega))^3$ и $(H^1(\Omega))^3$ множества $\mathscr{V}_0 = \{v : v \in (C_0^\infty(\Omega))^3,\ (\nabla, v) = 0\}$. Символ P обозначает ортогональный проектор пространства $(L_2(\Omega))^3$ на гильбертово пространство H. Для скалярных произведений в H и V используются обозначения: $(u,v) = \int_\Omega (u(x), v(x))\, dx$ и $((u,v)) = \langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x))\, dx$, а нормы в этих пространствах обозначаются $|u| = (u,u)^{1/2}$ и $\|u\| = \langle Lu, u\rangle^{1/2}$ соответственно.

Будем предполагать, что $g(x, x/\varepsilon) \in H$ при любом $\varepsilon > 0$ и она имеет среднее $\overline{g}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве H_w, т.е.

$$\left(g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \varphi(x)\right) \to (\overline{g}(x), \varphi(x)) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ \quad \forall\, \varphi \in H. \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. Используя § 1, можно построить множество примеров функций $g(x, x/\varepsilon)$, удовлетворяющих (3.2). Например, $g(x, x/\varepsilon) = g_1(x) g_2(x/\varepsilon)$, где $g_1 \in H$, а $g_2(z)$ – периодическая, квазипериодическая (по z) функция или просто функция, имеющая среднее $\overline{g}_2 \in \mathbb{R}$ в $L_{\infty,*w}(\Omega) \cap H$.

Для описания пространства траекторий $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ уравнения (3.1) рассмотрим слабые решения этого уравнения в пространстве $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$. Если $u(s) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, то уравнение (3.1) можно понимать в смысле обобщенных функций пространства $D'(\mathbb{R}_+; V')$, где V' – пространство, сопряженное к V (см. [13]).

Определение 3.1. Пространство траекторий $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ уравнения (3.1) есть объединение слабых решений $u(s) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ этого уравнения, которые удовлетворяют следующему неравенству:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 \leqslant (g, u(t)), \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.3}$$

Здесь $g = g(x, x/\varepsilon)$. Неравенство (3.3) следует понимать так: для любой функции $\psi(s) \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, $\psi \geqslant 0$, справедливо неравенство

$$-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} |u(s)|^2 \psi'(s)\, ds + \nu \int_0^{+\infty} \|u(s)\|^2 \psi(s)\, ds \leqslant \int_0^{+\infty} (g, u(s))\psi(s)\, ds. \tag{3.4}$$

Если $u_0 \in H$, то существует слабое решение $u(s)$ уравнения (3.1), принадлежащее пространству $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$, такое, что $u(0) = u_0$ и $u(s)$ удовлетворяет неравенству (3.4). Для доказательства см. [13], [6].

Замечание 3.2. Для трехмерной системы Навье–Стокса проблема единственности слабого решения остается открытой. Неизвестно также, будет ли любое слабое решение (3.1) удовлетворять неравенству (3.3). Однако любые слабые решения $u(t), t \geqslant 0$, которые получены методом галёркинских приближений, удовлетворяют (3.3).

Известно, что для любого слабого решения $u(s) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ уравнения (3.1) производная $\partial_t u \in L_{4/3}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V')$. Рассмотрим пространство

$$\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}} = L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H) \cap \{v : \partial_t v \in L_{4/3}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V')\},$$

снабженное следующей топологией сходимости. Последовательность $\{v_n\} \subset \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ сходится к $v \in \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ при $t \to \infty$, если $v_n(s) \rightharpoonup v(s)$ $(n \to \infty)$ слабо в $L_2(t_1, t_2; V)$, $*$-слабо в $L_\infty(t_1, t_2; H)$ и $\partial_t v_n(s) \rightharpoonup \partial_t v(s)$ $(n \to \infty)$ слабо в $L_{4/3}(t_1, t_2; V')$ для каждого интервала $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$. Пространство $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$, снабженное такой слабой топологией, обозначается через Θ_+^{loc}. Будем также использовать пространство

$$\mathscr{F}_+^b = L_2^b(\mathbb{R}_+; V) \cap L_\infty^b(\mathbb{R}_+; H) \cap \{v : \partial_t v \in L_{4/3}^b(\mathbb{R}_+; V')\},$$

которое является подпространством пространства $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$. Напомним, что

$$\|v\|_{L_p^b(\mathbb{R}_+; E)} = \sup_{h \in \mathbb{R}_+} \|v\|_{L_p(h, h+1; E)}.$$

Утверждение 3.1. *Для любого* $u(s) \in \mathscr{K}_\varepsilon^+$ *справедливо неравенство*:

$$\|T(t)u(\,\cdot\,)\|_{\mathscr{F}_+^b} \leqslant C\|u(0)\|_H^2 \exp(-\lambda t) + R_0 \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{3.5}$$

где λ *– первое собственное значение оператора* νL; C *зависит от* λ, *а* R_0 *зависит от* λ *и* $\|g\|_H^2$ *(см.* [6]*).*

На пространстве траекторий $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ действует полугруппа сдвигов $\{T(t), t \geqslant 0\}$:

$$T(t)u(s) = u(t+s), \qquad s \geqslant 0.$$

Очевидно,

$$T(t)u(s) \in \mathscr{K}_\varepsilon^+ \qquad \forall\, u \in \mathscr{K}_\varepsilon^+, \quad t \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$T(t)\mathscr{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathscr{K}_\varepsilon^+ \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

Из неравенства (3.5) следует, что шар $B_0 = \|v\|_{\mathscr{F}_+^b} \leqslant 2R_0$ является поглощающим множеством полугруппы $\{T(t)\}$ на $\mathscr{K}_\varepsilon^+$. Множество B_0 ограничено в $\mathscr{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}.

Утверждение 3.2. *Пространство траекторий* $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ *замкнуто в* Θ_+^{loc} (*см.* [6]).

Ядро $\mathscr{K}_\varepsilon$ уравнения (3.1) состоит из всех его слабых решений $u(s)$, $s\in\mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству (3.4) при любой $\psi(s)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi\geqslant 0$, и ограниченных в пространстве

$$\mathscr{F}^b=L_2^b(\mathbb{R};V)\cap L_\infty(\mathbb{R};H)\cap\{v:\partial_t v\in L_{4/3}^b(\mathbb{R};V')\}.$$

В силу утверждений 3.1 и 3.2 применимы теоремы 2.1 и 2.2. Уравнение (3.1) имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$. Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ ограничено в $\mathscr{F}_+^b$ и компактно в Θ_+^{loc}. Кроме того,

$$\mathscr{A}_\varepsilon=\Pi_+\mathscr{K}_\varepsilon, \tag{3.6}$$

ядро $\mathscr{K}_\varepsilon$ не пусто, ограничено в $\mathscr{F}^b$ и компактно в Θ^{loc}.

Заметим, что имеют место следующие (непрерывные) вложения:

$$\Theta_+^{\mathrm{loc}}\subset L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H^{1-\delta}), \tag{3.7}$$
$$\Theta_+^{\mathrm{loc}}\subset C(\mathbb{R}_+;H^{-\delta}),\qquad 0<\delta\leqslant 1. \tag{3.8}$$

Вложение (3.8) получается из леммы 2.1 и вложений $H\Subset H^{-\delta}\subset V'$, если положить: $E_0=V'$, $E=H^{-\delta}$, $E_1=H$ и $p_0=4/3$. Вложение (3.7) вытекает из аналогичной леммы о компактном вложении в $L_p(0,M;E)$ (см. [13; гл. 1, теорема 5.1]).

Следовательно, для любого ограниченного (в $\mathscr{F}_+^b$) множества $B\subset\mathscr{K}_\varepsilon^+$

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\Pi_{0,M}T(t)B,\Pi_{0,M}\mathscr{K}_\varepsilon)\to 0\qquad(t\to\infty),$$
$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(\Pi_{0,M}T(t)B,\Pi_{0,M}\mathscr{K}_\varepsilon)\to 0\qquad(t\to\infty),$$

где M – произвольное положительное число.

Одновременно с уравнением (3.1) рассмотрим усредненное уравнение

$$\partial_t\overline{u}+\nu L\overline{u}+B(\overline{u})=\overline{g}(x),\qquad(\nabla,\overline{u})=0,\quad \overline{u}\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{3.9}$$

Ясно, что уравнение (3.9) также имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в соответствующем пространстве траекторий $\overline{\mathscr{K}}^+$, отвечающем уравнению (3.9) (см. определение 3.1), и

$$\overline{\mathfrak{A}}=\Pi_+\overline{\mathscr{K}}, \tag{3.10}$$

где $\overline{\mathscr{K}}$ – ядро уравнения (3.9) в $\mathscr{F}^b$. Сформулируем основную теорему.

Теорема 3.1. *Имеет место следующее предельное соотношение в пространстве* Θ_+^{loc}:

$$\mathfrak{A}_\varepsilon\to\overline{\mathfrak{A}}\quad \textit{при}\quad \varepsilon\to 0+. \tag{3.11}$$

Кроме того,

$$\mathscr{K}_\varepsilon\to\overline{\mathscr{K}}\quad \textit{при}\quad \varepsilon\to 0+\quad \textit{в}\quad \Theta^{\mathrm{loc}}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Заметим сразу, что из (3.12) следует (3.11). Поэтому достаточно доказать (3.12), т.е. для любой окрестности $\mathscr{O}(\overline{\mathscr{K}})$ в Θ^{loc} найдется $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mathscr{O}) > 0$ такое, что

$$\mathscr{K}_\varepsilon \subset \mathscr{O}\Big(\overline{\mathscr{K}}\Big) \quad \text{для} \quad \varepsilon < \varepsilon_1. \tag{3.13}$$

Предположим, что (3.13) не верно. Тогда существуют окрестность $\mathscr{O}'(\overline{\mathscr{K}})$ в Θ^{loc}, последовательность $\varepsilon_n \to 0+$ $(n \to \infty)$ и последовательность $u_{\varepsilon_n}(s) \in \mathscr{K}^+_{\varepsilon_n}$ такие, что

$$u_{\varepsilon_n} \notin \mathscr{O}'(\overline{\mathscr{K}}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Из условия (3.2) вытекает, что последовательность $\{g(x, x/\varepsilon_n)\}$ ограничена в H. Следовательно, из предложения 3.1 заключаем, что последовательность $\{u_{\varepsilon_n}\}$ ограничена в $\mathscr{F}^b$. Переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что

$$u_{\varepsilon_n} \to \overline{u}(n \to \infty) \quad \text{в} \quad \Theta^{\mathrm{loc}}.$$

Утверждается, что $\overline{u} \in \overline{\mathscr{K}}$. Функции $u_{\varepsilon_n}(x, s)$ удовлетворяют уравнению

$$\partial_t u_{\varepsilon_n} + \nu L u_{\varepsilon_n} + B(u_{\varepsilon_n}) = g\bigg(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\bigg), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3.15}$$

и неравенству

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_{-M}^{M} |u_{\varepsilon_n}(s)|^2 \psi'(s)\, ds + \nu \int_{-M}^{M} \|u_{\varepsilon_n}(s)\|^2 \psi(s)\, ds \\ \leqslant \int_{-M}^{M} \bigg(g\bigg(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\bigg), u_{\varepsilon_n}(s)\bigg)\psi(s)\, ds \end{aligned} \tag{3.16}$$

при любом $M > 0$ и для любой функции $\psi \in C_0^\infty(]-M, M[)$, $\psi \geqslant 0$. Кроме того, $u_{\varepsilon_n}(s) \rightharpoondown \overline{u}(s)$ $(n \to \infty)$ слабо в $L_2(-M, M; V)$, $*$-слабо в $L_\infty(-M, M; H)$ и $\partial_t u_{\varepsilon_n}(s) \rightharpoondown \partial_t \overline{u}(s)$ $(n \to \infty)$ слабо в $L_{4/3}(-M, M; V')$. В силу известной теоремы о компактности из [13] мы можем также считать, что $u_{\varepsilon_n}(s) \rightharpoondown \overline{u}(s)$ $(n \to \infty)$ сильно в $L_2(-M, M; H)$ и $u_{\varepsilon_n}(x, s) \to \overline{u}(x, s)$ $(n \to \infty)$ при почти всех $(x, s) \in \Omega \times]-M, M[$. В силу (3.2) имеем, что $g(x, x/\varepsilon_n) \rightharpoondown \overline{g}(x)$ $(n \to \infty)$ слабо в H_w и, следовательно, слабо в $L_2(-M, M; H)$. Теперь мы можем совершить предельный переход в (3.15) и (3.16), используя стандартное рассуждение из [13] (см. подробное доказательство в [6]). Следовательно, $\overline{u} \in \mathscr{K}_{\overline{g}} \equiv \overline{\mathscr{K}}$, т.е. $\overline{u}$ – решение (3.9), удовлетворяющее соответствующему неравенству (3.16) с внешней силой $\overline{g}(x)$. В то же время мы установили, что $u_{\varepsilon_n}(s) \to \overline{u}(s)$ $(n \to \infty)$ в Θ^{loc}_+ и, следовательно, $u_{\varepsilon_n}(s) \in \mathscr{O}'(\overline{u}(s)) \subset \mathscr{O}'(\overline{\mathscr{K}})$ при $\varepsilon_n \ll 1$. Это противоречит (3.14). Теорема доказана.

Применяя вложения (3.7) и (3.8), получаем

Следствие 3.1. *Для любого* $0 < \delta \leqslant 1$ *и любого* $M > 0$

$$\begin{aligned} &\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+), \\ &\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Теперь мы кратко рассмотрим трехмерную неавтономную систему Навье–Стокса, содержащую внешнюю силу, которая быстро осциллирует по времени. Система имеет вид

$$\partial_t u+\nu Lu+B(u)=g\biggl(x,t,\frac{t}{\varepsilon}\biggr),\qquad (\nabla,u)=0,\quad u\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{3.18}$$

Для простоты предполагается, что $g(x,t,t/\varepsilon)=Pg_1(x,t/\varepsilon)g_2(x,t)$, где $g_1(x,s)$ – тр.-к. функция в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\Omega)^3)$, а $g_2(x,s)$ тр.-к. в $C_b(\mathbb{R};C(\overline{\Omega})^3)$. Легко доказывается, что функция $Pg_1(x,t/\varepsilon)g_2(x,t)$ трансляционно-компактна в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ при любом фиксированном $\varepsilon>0$. Пусть также функция $g_1(x,t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее по времени в $L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Например, в силу теоремы 1.5 достаточно предположить, что

$$\frac{1}{\mu}\int_h^{h+\mu}g_1(x,s)\,ds\to\overline{g}_1(x)\qquad(\mu\to\infty)\ \text{ сильно в }\ H \tag{3.19}$$

равномерно по $h\in\mathbb{R}$. Аналогично примеру 1.6 легко доказывается, что функция $g_\varepsilon(x,t)\equiv g(x,t,t/\varepsilon)$ имеет равномерное среднее $\overline{g}(x,t)\equiv P\overline{g}_1(x)g_2(x,t)$ в $L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$ при $\varepsilon\to 0+$. Пусть $\mathscr{H}_+(g_\varepsilon(x,t))$ и $\mathscr{H}_+(\overline{g}(x,t))$ – оболочки функций $g(x,t,t/\varepsilon)$ и $\overline{g}(x,t)$ в $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$. Подобно примеру 1.6 доказывается, что в $L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$

$$\mathscr{H}(g_\varepsilon(x,t))\to\mathscr{H}(\overline{g}(x,t))\qquad(\varepsilon\to 0+). \tag{3.20}$$

Усредненной внешней силе соответствует усредненное уравнение

$$\partial_t\overline{u}+\nu L\overline{u}+B(\overline{u})=\overline{g}(x,t),\qquad(\nabla,\overline{u})=0,\quad \overline{u}\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{3.21}$$

Следуя схеме, изложенной в § 2 применительно к абстрактному неавтономному уравнению (2.10), определяются пространства $\mathscr{K}^+_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}$ и $\mathscr{K}^+_{\mathscr{H}(\overline{g})}$ для уравнений (3.18) и (3.21) соответственно. Эти уравнения по теореме 2.3 имеют равномерные траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}$ и $\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}$. Имеет место следующий результат.

Теорема 3.2. *Равномерный траекторный аттрактор* $\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)}$ *уравнения* (3.18) *стремится к равномерному траекторному аттрактору* $\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})}$ *усредненного уравнения* (3.21) *при* $\varepsilon\to 0+$ *в пространстве* Θ_+^{loc}.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Используется обобщение утверждения 3.1 и применяется предел (3.20).

Следствие 3.2. *В силу вложений*:

$$\Theta_+^{\mathrm{loc}}\subset L_2(0,M;H^{1-\delta}),\quad \Theta_+^{\mathrm{loc}}\subset C([0,M];H^{-\delta})\qquad(\delta\in]0,1])$$

мы заключаем, что при любом $M>0$

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)},\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})})\to 0\qquad(\varepsilon\to 0+),\\ \operatorname{dist}_{C([0,M];H^{-\delta})}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(g_\varepsilon)},\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_{\mathscr{H}(\overline{g})})\to 0\qquad(\varepsilon\to 0+).\end{aligned}$$

3.2. Двумерная система Навье–Стокса. Все изложенные выше результаты применимы также к двумерной системе Навье–Стокса. В этом пункте доказывается теорема об усреднении двумерной системы для случая, когда внешняя сила осциллирует более сингулярно и имеет среднее только в пространстве V' (а не в H, как это было в предыдущем пункте).

Аналогично трехмерному случаю доказывается существование траекторного аттрактора $\mathfrak{A}_\varepsilon$ для следующей системы Навье–Стокса в $\mathbb{R}^2$:

$$\partial_t u+\nu Lu+B(u) = g_0\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)+P\partial_{x_1}g_1\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)+P\partial_{x_2}g_2\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.22}$$

где $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^2$ и $g_i(x,x/\varepsilon) \in H$ при $i=0,1,2$. Ясно, что правая часть (3.22) принадлежит V'. Напомним, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ притягивает ограниченные множества из $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ в топологии

$$\Theta_+^{\mathrm{loc}} = L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V)\cap L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)\cap\{v:\partial_t v\in L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V')\},$$

причем ограниченные множества из $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ берутся по норме пространства

$$\mathscr{F}_+^b = L_2^b(\mathbb{R}_+;V)\cap L_\infty^b(\mathbb{R}_+;H)\cap\{v:\partial_t v\in L_2^b(\mathbb{R}_+;V')\}.$$

Предполагается, что функции $g_i(x,x/\varepsilon)$ имеют средние $\overline{g}_i(x)$, $i=0,1,2$, в H_w при $\varepsilon\to 0+$. Следовательно, функция $g(x,x/\varepsilon) = g_0(x,x/\varepsilon)+P\partial_{x_1}g_1(x,x/\varepsilon)+P\partial_{x_2}g_2(x,x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{g}(x)=\overline{g}_0(x)+P\partial_{x_1}\overline{g}_1(x)+P\partial_{x_2}\overline{g}_2(x)$ в V_w, т.е.

$$\left\langle g\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right),\varphi(x)\right\rangle \to \langle\overline{g}(x),\varphi(x)\rangle \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+ \quad \forall\,\varphi\in V.$$

Заметим, что функции $\partial_{x_i}g_i(x,x/\varepsilon) = g_{ix_i}(x,x/\varepsilon)+(1/\varepsilon)g_{iz_i}(x,x/\varepsilon)$ могут иметь неограниченно растущие нормы в H при $\varepsilon\to 0+$.

Усредненное уравнение

$$\partial_t\overline{u}+\nu L\overline{u}+B(\overline{u}) = \overline{g}_0(x)+P\partial_{x_1}\overline{g}_1(x)+P\partial_{x_2}\overline{g}_2(x), \qquad \overline{u}\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.23}$$

также имеет траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\overline{\mathscr{K}}^+$.

Аналогично теореме 3.1 доказывается

Теорема 3.3. *В топологии Θ_+^{loc} имеем:*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0+\,. \tag{3.24}$$

Мы не приводим здесь этого доказательства. Отметим лишь, что в уравнении (3.22) можно сделать предельный переход, если известно, что

$$g\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \overline{g}(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+ \quad \text{в} \quad V'.$$

Рассмотрим также случай, когда в уравнениях (3.22) и (3.23) $g_1\equiv g_2\equiv 0$, т.е. функция $g(x,x/\varepsilon)=g_0(x,x/\varepsilon)\in H$ имеет в H_w среднее $\overline{g}(x)=\overline{g}_0(x)\in H$. В работе [14] доказано, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ этих уравнений существуют в более сильном топологическом пространстве $\Theta_+^{\mathrm{loc}} = H_w^{\mathbf{r},\mathrm{loc}}$, $\mathbf{r}=(2,2,1)$, где

$$H_w^{\mathbf{r},\mathrm{loc}} = L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H^2)\cap\{v:\partial_t v\in L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)\}.$$

С помощью более сильных априорных оценок для уравнения (3.22) при $g_1\equiv g_2\equiv 0$ установлен следующий результат.

Теорема 3.4. *Предел* (3.24) *имеет место в топологии* $\Theta_+^{\mathrm{loc}} = H_w^{\mathbf{r},\mathrm{loc}}$.

Заметим, что топология пространства $H_w^{\mathbf{r},\mathrm{loc}}$ сильнее топологии локальной равномерной сходимости пространства $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1-\delta}) : H_w^{\mathbf{r}}(Q_M) \subset C([0,M]; H^{1-\delta})$ при $\delta \in]0,1]$. Отсюда вытекает

Следствие 3.3. *Выполнено предельное соотношение*:

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{1-\delta})}(\Pi_M \mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_M \overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+) \quad \forall\, M \geqslant 0. \tag{3.25}$$

В заключение докажем один результат об усреднении глобального аттрактора двумерной системы Навье–Стокса. Хорошо известно, что система (3.22) с внешней силой $g(x, x/\varepsilon) = g_0(x, x/\varepsilon) \in H$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ порождает полугруппу $\{S_\varepsilon(t)\}$, действующую в фазовом пространстве H, которая имеет глобальный аттрактор $\mathscr{A}_\varepsilon \Subset V$, $S(t)\mathscr{A}_\varepsilon = \mathscr{A}_\varepsilon$ при $t \geqslant 0$ (см., например, [7], [8]). Усредненное уравнение с усредненной внешней силой $\overline{g}(x) = \overline{g}_0(x) \in H$ также имеет глобальный аттрактор $\overline{\mathscr{A}} \Subset V$. Применима теорема 2.4. Имеем:

$$\mathscr{A}_\varepsilon = \{u(0) : u \in \mathfrak{A}_\varepsilon\} \quad \text{и} \quad \overline{\mathscr{A}} = \{u(0) : u \in \overline{\mathfrak{A}}\}.$$

Из (3.25) вытекает

Следствие 3.4. *Если функция* $g(x, x/\varepsilon)$ *имеет среднее* $\overline{g}(x)$ *в* H_w *при* $\varepsilon \to 0+$, *то*

$$\operatorname{dist}_{H^{1-\delta}}(\mathscr{A}_\varepsilon, \overline{\mathscr{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+), \quad \delta \in]0,1].$$

Аналогичные результаты справедливы для неавтономных двумерных систем Навье–Стокса с внешними силами, быстро осциллирующими по времени.

3.3. Системы уравнений реакции-диффузии. Рассматривается система реакции-диффузии с быстро осциллирующими членами вида

$$\partial_t u = a\Delta u - b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u) + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.26}$$

где $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $u = (u^1, \dots, u^N)$, $f = (f^1, \dots, f^N)$ и $g = (g^1, \dots, g^N)$. Здесь a обозначает $(N \times N)$-матрицу с положительной симметричной частью и $b(x,z) \in C(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ – вещественная положительная функция.

Сразу отметим, что предлагаемыми методами можно исследовать системы, у которых нелинейные члены имеют вид $\sum_{j=1}^m b_j(x, x/\varepsilon) f_j(u)$, где b_j – матрицы, а $f_j(u)$ – векторы-многочлены по u. Для краткости мы рассмотрим случай $m = 1$ и $b_1(x, x/\varepsilon) = b(x, x/\varepsilon)I$, где I – единичная матрица.

Для простоты предположим, что вектор-функция $f(v) \in C(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$f(v) \cdot v \geqslant \gamma |v|^p - C, \quad |f(v)| \leqslant C_1(|v|^{p-1} + 1), \qquad p \geqslant 2. \tag{3.27}$$

Допускаются также другие условия, например неравенства с различными степенями $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_2)$ вида

$$f(v) \cdot v \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{N} |v^i|^{p_i} - C,$$

$$\sum_{i=1}^{N} |f^i(v)|^{p_i/(p_i-1)} \leqslant C_1 \biggl(\sum_{i=1}^{N} |v^i|^{p_i} + 1 \biggr), \qquad p_k \geqslant 2, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^N.$$

Заметим, что выполнение условия Липшица для функции $f(v)$ относительно v *не предполагается.*

Мы будем также считать, что $b(x,z) \in C_b(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ и

$$\beta_1 \geqslant b(x,z) \geqslant \beta_0 > 0 \qquad \forall\, x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3.28}$$

а функция $b(x, x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$, т.е.

$$\int_\Omega b\Bigl(x, \frac{x}{\varepsilon}\Bigr) \varphi(x)\, dx \to \int_\Omega \overline{b}(x) \varphi(x)\, dx \qquad (\varepsilon \to 0+) \tag{3.29}$$

для любой функции $\varphi \in L_1(\Omega)$. Относительно вектор-функции $g(x, x/\varepsilon)$ предполагается, что она имеет среднее $\overline{g}(x)$ в пространстве $V' = (H^{-1}(\Omega))^N$:

$$g\Bigl(x, \frac{x}{\varepsilon}\Bigr) \rightharpoonup \overline{g}(x) \qquad (\varepsilon \to 0+) \quad \text{слабо в} \quad V',$$

т.е.

$$\Bigl\langle g\Bigl(x, \frac{x}{\varepsilon}\Bigr), \varphi(x) \Bigr\rangle \to \langle \overline{g}(x), \varphi(x) \rangle \qquad (\varepsilon \to 0+) \tag{3.30}$$

для любой $\varphi \in V = (H_0^1(\Omega))^N$. В частности, допускаются следующие функции:

$$g\Bigl(x, \frac{x}{\varepsilon}\Bigr) = g_0\Bigl(x, \frac{x}{\varepsilon}\Bigr) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} g_i\Bigl(x, \frac{x}{\varepsilon}\Bigr),$$

где функции $g_i(x, x/\varepsilon)$ имеют средние $\overline{g}_i(x) \in (L_2(\Omega))^N$ в $H = (L_2(\Omega))^N$:

$$\Bigl\langle g_i\Bigl(x, \frac{x}{\varepsilon}\Bigr), \varphi(x) \Bigr\rangle \to \langle \overline{g}_i(x), \varphi(x) \rangle \quad (\varepsilon \to 0+) \qquad \forall\, \varphi \in H, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, возможен неограниченный рост H-норм функций $\partial_{x_i} g_i(x, x/\varepsilon) = g_{ix_i}(x, x/\varepsilon) + (1/\varepsilon) g_{iz_i}(x, x/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$. Эти функции ограничены лишь в пространстве V'.

Как и в работе [15], будем исследовать слабые решения системы (3.26), т.е. функции $u(x,s) \in \mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}} = L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; (L_p(\Omega))^N)$, которые удовлетворяют системе (3.26) в смысле обобщенных функций пространства $D'(\mathbb{R}_+; (H^{-r}(\Omega))^N)$, где $r = \max\{1; n(1/2 - 1/p)\}$. Для любой $u_0 \in H$ существует по крайней мере одно слабое решение $u(x,s)$ системы (3.26) такое, что $u(0) = u_0$ (см. [7], [15]). Это решение может быть не единственным, поскольку не предполагается выполнение условия Липшица для функции $f(v)$ относительно v. Обозначим через $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ множество *всех* слабых решений системы (3.26).

Изучается траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ системы (3.26), который по определению совпадает с глобальным $(\mathscr{F}_+^b, \Theta_+^{\mathrm{loc}})$-аттрактором полугруппы сдвигов $\{T(t)\}$, действующей на $\mathscr{K}_\varepsilon^+$. Здесь

$$\begin{aligned}\Theta_+^{\mathrm{loc}} &= L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H)\cap L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;V)\cap L_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;(L_p(\Omega))^N)\\ &\qquad\cap\{v:\partial_t v\in L_{q,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;(H^{-r}(\Omega))^N)\},\\ \mathscr{F}_+^b &= L_\infty^b(\mathbb{R}_+;H)\cap L_2^b(\mathbb{R}_+;V)\cap L_p^b(\mathbb{R}_+;(L_p(\Omega))^N)\\ &\qquad\cap\{v:\partial_t v\in L_q^b(\mathbb{R}_+;(H^{-r}(\Omega))^N)\}.\end{aligned}$$

Вместе с уравнением (3.26) рассматривается усредненное уравнение

$$\partial_t\overline{u} = a\Delta\overline{u} - \overline{b}(x)f(\overline{u}) + \overline{g}(x), \qquad \overline{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.31}$$

для которого траекторный аттрактор $\overline{\mathfrak{A}}$ строится в соответствующем пространстве траекторий $\overline{\mathscr{K}}_+$.

Утверждение 3.3. *При выполнении условий* (3.27), (3.29) *и* (3.30) *уравнения* (3.26) *и* (3.31) *имеют траекторные аттракторы* $\mathfrak{A}_\varepsilon$ *и* $\overline{\mathfrak{A}}$ *соответственно. Кроме того,*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+\mathscr{K}_\varepsilon \quad \text{и} \quad \overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+\overline{\mathscr{K}},$$

где $\mathscr{K}_\varepsilon$ *и* $\overline{\mathscr{K}}$ *обозначают ядра этих уравнений в пространстве*

$$\mathscr{F}^b = L_\infty^b(\mathbb{R};H)\cap L_2^b(\mathbb{R};V)\cap L_p^b(\mathbb{R};(L_p(\Omega))^N)\cap\{v:\partial_t v\in L_q^b(\mathbb{R};(H^{-r}(\Omega))^N)\}.$$

Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ *равномерно (по* $\varepsilon\in]0,1]$*) ограничено в* $\mathscr{F}^b$.

Доказательство этого утверждения практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [15] для более частного случая.

Отметим, что $\Theta_+^{\mathrm{loc}}\subset L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;(H^{1-\delta}(\Omega))^N)$, $0<\delta\leqslant 1$, и, следовательно, траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ притягивают ограниченные множества траекторий в сильной топологии пространства $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;(H^{1-\delta}(\Omega))^N)$.

Теорема 3.5. *При выполнении перечисленных выше условий*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}} \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+ \quad \text{в} \quad \Theta_+^{\mathrm{loc}} \tag{3.32}$$

и

$$\mathscr{K}_\varepsilon \to \overline{\mathscr{K}} \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0+ \quad \text{в} \quad \Theta^{\mathrm{loc}}. \tag{3.33}$$

Доказательство. Достаточно проверить (3.33). Как и при доказательстве теоремы 3.1, предположим обратное. Тогда найдутся последовательности $\varepsilon_n\to 0+$ $(n\to\infty)$, $u_{\varepsilon_n}(s)\in\mathscr{K}_{\varepsilon_n}$ и найдется окрестность $\mathscr{O}(\overline{\mathscr{K}})$ в Θ^{loc} такие, что

$$u_{\varepsilon_n}(s)\notin\mathscr{O}(\overline{\mathscr{K}}) \quad \text{для} \quad n=1,2,\dots. \tag{3.34}$$

Функция $u_{\varepsilon_n}(s)$, $s\in\mathbb{R}$, является решением уравнения

$$\partial_t u_{\varepsilon_n} = a\Delta u_{\varepsilon_n} - b\left(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\right)f(u_{\varepsilon_n}) + g\left(x,\frac{x}{\varepsilon_n}\right), \qquad u_{\varepsilon_n}\big|_{\partial\Omega}=0, \tag{3.35}$$

на всей оси времени $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, последовательность $\{u_{\varepsilon_n}(s)\}$ ограничена в $\mathscr{F}^b$, т.е.

$$\|u_{\varepsilon_n}\|_{\mathscr{F}^b} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u_{\varepsilon_n}(t)\|_H + \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \|u_{\varepsilon_n}(s)\|_V^2 \, ds \right)^{1/2}$$
$$+ \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \|u_{\varepsilon_n}(s)\|_{L_p}^p \, ds \right)^{1/p} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \|\partial_t u_{\varepsilon_n}(s)\|_{H^{-r}}^q \, ds \right)^{1/q} \leqslant C$$
$$\forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

Следовательно, найдется подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_n'}(s)\} \subset \{u_{\varepsilon_n}(s)\}$, которую мы вновь обозначим $\{u_{\varepsilon_n}(s)\}$, такая, что

$$u_{\varepsilon_n}(s) \to \overline{u}(s) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{в} \quad \Theta^{\mathrm{loc}}, \tag{3.37}$$

где $\overline{u}(s) \in \mathscr{F}^b$ и $\overline{u}(s)$ удовлетворяет (3.36) с той же константой C. Подробнее, имеем, что $u_{\varepsilon_n}(s) \rightharpoonup \overline{u}(s)$ $(n \to \infty)$ слабо в $L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; V)$, слабо в $L_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; (L_p(\Omega))^N)$, $*$-слабо в $L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ и $\partial_t u_{\varepsilon_n}(s) \rightharpoonup \partial_t \overline{u}(s)$ $(n \to \infty)$ слабо в $L_{q,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; (H^{-r}(\Omega))^N)$. Утверждается, что $\overline{u}(s) \in \overline{\mathscr{K}}$. Уже доказано, что $\|\overline{u}\|_{\mathscr{F}^b} \leqslant C$. Осталось проверить, что $\overline{u}(s)$ является слабым решением (3.31). Используя (3.36) и (3.30), получаем

$$\partial_t u_{\varepsilon_n} - a\Delta u_{\varepsilon_n} - g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \to \partial_t \overline{u} - a\Delta\overline{u} - \overline{g}(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{3.38}$$

в пространстве $D'(\mathbb{R}; (H^{-r}(\Omega))^N)$, потому что оператор производной непрерывен в пространстве обобщенных функций. Докажем, что

$$b\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) f(u_{\varepsilon_n}) \rightharpoonup \overline{b}(x) f(\overline{u}) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{3.39}$$

слабо в $L_{q,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; (L_q(\Omega))^N)$. Зафиксируем любое число $M > 0$. Последовательность $\{u_{\varepsilon_n}(s)\}$ ограничена в $L_p(-M, M; (L_p(\Omega))^N)$ (см. (3.36)). Тогда в силу (3.27) последовательность $\{f(u_{\varepsilon_n}(s))\}$ ограничена в $L_q(-M, M; (L_q(\Omega))^N)$. Поскольку последовательность $\{u_{\varepsilon_n}(s)\}$ ограничена в $L_2(-M, M; (H_0^1(\Omega))^N)$ и $\{\partial_t u_{\varepsilon_n}(s)\}$ ограничена в $L_q(-M, M; (H^{-r}(\Omega))^N)$, можно предполагать, что $u_{\varepsilon_n}(s) \to \overline{u}(s)$ при $n \to \infty$ сильно в $L_2(-M, M; (L_2(\Omega))^N) = L_2(\Omega \times]{-M}, M[)^N$ и, следовательно,

$$u_{\varepsilon_n}(x, s) \to \overline{u}(x, s) \text{ при } n \to \infty \text{ для почти всех } (x, s) \in \Omega \times]{-M}, M[\,.$$

Так как функция $f(v)$ непрерывна по $v \in \mathbb{R}^N$, заключаем

$$f(u_{\varepsilon_n}(x, s)) \to f(\overline{u}(x, s)) \text{ при } n \to \infty \text{ для почти всех } (x, s) \in \Omega \times]{-M}, M[\,. \tag{3.40}$$

Имеем

$$b\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) f(u_{\varepsilon_n}) - \overline{b}(x) f(\overline{u}) = b\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right)(f(u_{\varepsilon_n}) - f(\overline{u})) + \left(b\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) - \overline{b}(x)\right) f(\overline{u}). \tag{3.41}$$

Покажем, что оба слагаемых в правой части (3.41) сходятся к нулю при $n \to \infty$ слабо в $L_q(-M,M;(L_q(\Omega))^N) = (L_q(\Omega \times]-M,M[))^N$. Последовательность $b(x,x/\varepsilon_n)(f(u_{\varepsilon_n}) - f(\overline{u}))$ стремится к нулю при $n \to \infty$ для почти всех $(x,s) \in \Omega \times]-M,M[$ (см. (3.40)), и она ограничена в $(L_q(\Omega \times]-M,M[))^N$ (см. (3.28)). Применяя лемму 1.3 из [13; гл. 1, § 1], заключаем, что

$$b\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right)(f(u_{\varepsilon_n}) - f(\overline{u})) \rightharpoondown 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

слабо в $(L_q(\Omega \times]-M,M[))^N$. Последовательность $(b(x,x/\varepsilon_n) - \overline{b}(x))f(\overline{u})$ также сходится к нулю при $n \to \infty$ слабо в $(L_q(\Omega \times]-M,M[))^N$, потому что по условию $b(x,x/\varepsilon_n) \rightharpoondown \overline{b}(x)$ при $n \to \infty$ $*$-слабо в $L_{\infty,*w}(-M,M;L_2(\Omega))$ и $f(\overline{u}) \in (L_q(\Omega \times]-M,M[))^N$. Тем самым, (3.39) доказано. Применяя (3.38) и (3.39), делаем предельный переход в уравнении (3.35) при $n \to \infty$ в пространстве $D'(\mathbb{R}_+;(H^{-r}(\Omega))^N)$ и получаем, что функция $\overline{u}(x,s)$ является слабым решением уравнения

$$\partial_t \overline{u} = a\Delta\overline{u} - \overline{b}(x)f(\overline{u}) + \overline{g}(x), \qquad \overline{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\overline{u} \in \overline{\mathscr{K}}$. Выше было доказано, что $u_{\varepsilon_n}(s) \to \overline{u}(s)$ при $n \to \infty$ в Θ^{loc}, и из условия $u_{\varepsilon_n}(s) \notin \mathscr{O}(\overline{\mathscr{K}})$ следует, что $\overline{u} \notin \mathscr{O}(\overline{\mathscr{K}})$ и, тем более, $\overline{u} \notin \overline{\mathscr{K}}$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 3.5. *При любом* $0 < \delta \leqslant 1$ *имеем*:

$$\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{1-\delta})}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+) \quad \forall M > 0.$$

Замечание 3.3. Аналогичная теорема справедлива для неавтономных систем реакции-диффузии вида (3.26), которые содержат члены $b(x,t/\varepsilon,t)$ и $g(x,t/\varepsilon,t)$, имеющие равномерные средние при $\varepsilon \to 0+$.

Применим теорему 3.5 для усреднения комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау вида

$$\partial_t u = (1+\alpha i)\Delta u + R\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u + \left(1 + \beta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)i\right)|u|^2 u + g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{3.42}$$

с периодическими граничными условиями. Здесь $x \in [0,2\pi]^n$, $u = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$, $g(z) \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{C})$ и $R(z), \beta(z) \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Предполагается, что

$$0 < R_1 \leqslant R(z) \leqslant R_2, \quad 0 < \beta_1 \leqslant \beta(z) \leqslant \beta_2 \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{R}^N,$$

а функции $R(x/\varepsilon)$ и $\beta(x/\varepsilon)$ имеют постоянные средние $\overline{R}$ и $\overline{\beta}$ в $L_{\infty,*w}([0,2\pi]^n)$ соответственно. Пусть также функция $g(x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{g}$ в $L_{2,w}^{\mathrm{loc}}([0,2\pi]^n;\mathbb{C})$. Легко проверить, что функция $f(v) = (1+\beta(z)i)|v|^2 v$ удовлетворяет (3.27) со степенью $p = 4$.

Усредненное уравнение для (3.42) имеет вид

$$\partial_t \overline{u} = (1+\alpha i)\Delta\overline{u} + \overline{R}\overline{u} + (1+\overline{\beta}i)|\overline{u}|^2\overline{u} + \overline{g}. \tag{3.43}$$

Уравнения (3.42) и (3.43) имеют траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ соответственно в пространстве Θ_+^{loc}, отвечающем этим уравнениям. Из теоремы 3.5 следует, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ уравнения (3.42) стремится при $\varepsilon \to 0+$ в Θ_+^{loc} в указанном выше смысле к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ усредненного уравнения (3.43).

В заключение рассмотрим системы реакции-диффузии, для которых имеет место теорема единственности соответствующей задачи Коши. Для этого достаточно, чтобы нелинейная вектор-функция $f(u)$ в уравнении (3.26) удовлетворяла условию:

$$(f(v_1) - f(v_2), v_1 - v_2) \geqslant -C|v_1 - v_2|^2 \quad \text{при} \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N \tag{3.44}$$

(см. [15]). Например, можно доказать, что уравнение Гинзбурга–Ландау (3.42) удовлетворяет (3.44), если $|\beta| \leqslant \sqrt{3}$.

Легко устанавливается, что при выполнении условия (3.44) предел (3.32) имеет место в более сильном пространстве

$$\begin{aligned}\Theta_+^{\mathrm{loc},1} = {} & L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; (H_0^1(\Omega))^N) \cap L_{2,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; (H^2(\Omega))^N) \cap L_{p,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; (L_p(\Omega))^N) \\ & \cap \{v : \partial_t v \in L_{q,w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; (L_q(\Omega))^N)\}.\end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}_{L_2(0,M;H^{2-\delta})}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+), \\ &\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{1-\delta})}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+) \quad \forall\, M > 0, \ \ 0 < \delta \leqslant 1.\end{aligned} \tag{3.45}$$

В работе [15] доказано, что при выполнении условия (3.44) уравнения (3.26) и (3.31) порождают полугруппы $\{S_\varepsilon(t)\}$ и $\{\overline{S}(t)\}$ в $H = (L_2(\Omega))^N$, которые имеют глобальные аттракторы $\mathscr{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathscr{A}}$, ограниченные в пространстве $(H_0^1(\Omega))^N$ (см. также [7], [8]). В силу теоремы 2.4 получаем:

$$\mathscr{A}_\varepsilon = \{u(0) : u \in \mathfrak{A}_\varepsilon\}, \qquad \overline{\mathscr{A}} = \{u(0) : u \in \overline{\mathfrak{A}}\}.$$

Из соотношения (3.45) вытекает

Следствие 3.6. *Имеет место предел*:

$$\operatorname{dist}_{H^{1-\delta}}(\mathscr{A}_\varepsilon, \overline{\mathscr{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+) \quad \forall\, \delta \in]0,1]. \tag{3.46}$$

В конкретных примерах можно доказать более сильные результаты о сходимости траекторных аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и глобальных аттракторов $\mathscr{A}_\varepsilon$ к аттракторам усредненных уравнений. В следующем параграфе изучаются такие примеры.

3.4. Обобщенное уравнение Чэфи–Инфанте. Изучается следующее обобщение уравнения Чэфи–Инфанте (см. [16], [17]) на n-мерный случай:

$$\partial_t u = \Delta u - \sum_{j=0}^N b_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^j \equiv \Delta u - f\left(u, \frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.47}$$

где $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $N = 2l+1$. Предполагается, что $b_j(z) \in C_b(\mathbb{R}^n)$ $(z = (z_1, \dots, z_n))$ и

$$b_N(z) \geqslant \beta_N > 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^n. \tag{3.48}$$

Как обычно, предположим, что

$$b_j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \overline{b}_j \quad \text{в} \quad L_{\infty,*w}(\Omega) \qquad (j = 0, \dots, N). \tag{3.49}$$

Усредненное уравнение примет вид:

$$\partial_t \overline{u} = \Delta \overline{u} - \sum_{j=0}^N \overline{b}_j \overline{u}^j \equiv \Delta \overline{u} - \overline{f}(\overline{u}), \qquad \overline{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.50}$$

Замечание 3.4. Аналогичные результаты можно распространить на случай более общих уравнений и систем. Например, в (3.47) можно считать, что $f(v,z)\in C(\mathbb{R}\times R^n;\mathbb{R})$ и выполнены неравенства:

$$f(v,z)\cdot v \geqslant -C+\gamma|v|^p, \qquad p>0, \tag{3.51}$$

$$|f(v,z)|\leqslant C_1(|v|^{p-1}+1) \qquad \forall\, v\in\mathbb{R}, \quad z\in\mathbb{R}^n. \tag{3.52}$$

Ясно, что функция $f(v,z)=\sum_{j=0}^N b_j(z)v^j$ удовлетворяет (3.51) и (3.52) при $p=2(l+1)$.

Как и раньше, обозначим через $\mathscr{K}_\varepsilon^+$, $\varepsilon>0$, множество слабых решений уравнения (3.47) из пространства $\mathscr{F}_+^b=L_\infty^b(\mathbb{R}_+;L_2(\Omega))\cap L_2^b(\mathbb{R}_+;H_0^1(\Omega))\cap L_p^b(\mathbb{R}_+;L_p(\Omega))$. Аналогично обозначаем через $\overline{\mathscr{K}}^+$ пространство траекторий для (3.50). Уравнения (3.47) и (3.50) имеют траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$, которые ограничены в $\mathscr{F}_+^b$ и компактны в пространстве Θ_+^{loc}, определенном в предыдущем параграфе. Там же доказано, что $\mathfrak{A}_\varepsilon\to\overline{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon\to 0+$ в Θ_+^{loc}. Теперь мы докажем, что траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ уравнения (3.47) сходится к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ уравнения (3.50) при $\varepsilon\to 0+$ в пространстве $C_{\mathrm{loc}}^{2-2\delta,1-\delta}(\Omega\times\mathbb{R}_+)$, $1>\delta>0$.

Утверждение 3.4. *Траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ ограничены в пространстве $L_\infty(\mathbb{R};L_\infty(\Omega))=L_\infty(\Omega\times\mathbb{R})$ равномерно по $\varepsilon>0$.*

Доказательство см. [8; гл. IV, утверждение 6.2].

Нам понадобятся некоторые дополнительные определения и обозначения. Обозначим через $Q_T=\Omega\times]T,T+1[$, $T\in\mathbb{R}$, цилиндр с высотой 1. Будем рассматривать слабые решения $u(x,t)$ уравнений (3.47) и (3.50) такие, что

$$u(x,s)\in W_p^{\mathbf{r}}(Q_T)\cap\bigl\{u\big|_{\partial\Omega}=0\bigr\}\equiv W_{p,0}^{\mathbf{r}}(Q_T) \qquad \forall\, T\in\mathbb{R},$$

где $\mathbf{r}=(2,\dots,2,1)$ и $W_p^{\mathbf{r}}(Q_T)$ обозначает пространство Никольского. Напомним, что норма в $W_p^{\mathbf{r}}(Q_T)$ задается выражением

$$\|u,Q_T\|_{\mathbf{r},p}^p=\int_{Q_T}\Biggl(\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|\partial_x^\alpha u(x,s)|^p+|\partial_t u(x,s)|^p\Biggr)\,dx\,ds.$$

Теорема вложения Никольского утверждает (см. [18]), что если $p>(n+2)/2$, то

$$W_{p,0}^{\mathbf{r}}(Q_T)\Subset C^{\varkappa\mathbf{r}}(\overline{Q}_T)\cap\bigl\{u\big|_{\partial\Omega}=0\bigr\}\equiv C_0^{\varkappa\mathbf{r}}(\overline{Q}_T), \tag{3.53}$$

где

$$0<\varkappa<1-\frac{1}{p}\biggl(1+\frac{n}{2}\biggr).$$

Следовательно, для фиксированного δ, $0<\delta<1$, из (3.53) следует, что при $\varkappa=1-\delta$ имеет место компактное вложение:

$$W_{p,0}^{\mathbf{r}}(Q_T)\Subset C_0^{2-2\delta,1-\delta}(\overline{Q}_T) \quad \text{для} \quad p>\frac{n+2}{2\delta}\,. \tag{3.54}$$

Нам потребуется следующая теорема Солонникова (см. [19]). Обозначим через V_0 пространство следов функций из $W_{p,0}^{\mathbf{r}}(Q_0), Q_0=\Omega\times]0,1[$, на сечениях

$\{t = 0\}$. Пусть функция $w(x,t) \in L_\infty(0,1;L_\infty(\Omega)) \cap L_2(0,1;H_0^1(\Omega))$ является решением уравнения теплопроводности

$$\partial_t w - \Delta w = h(x,t), \qquad (x,t) \in Q_0,$$

и удовлетворяет начальному условию

$$w\big|_{t=0} = w_0(x).$$

Предположим, что $h(x,t) \in L_p(0,1;L_p(\Omega)) \equiv L_p(Q_0)$ и $w_0 \in V_0$. Тогда $w(x,t) \in W^{\mathbf{r}}_{p,0}(Q_0)$ и

$$\|w, Q_0\|_{\mathbf{r},p} \leqslant C_p\big(\|h\|_{L_p(Q_0)} + \|w_0\|_{V_0}\big). \tag{3.55}$$

Обозначим через $\mathscr{W}_p^{\mathrm{loc}}$ пространство функций $v(x,s)$ таких, что

$$\Pi_{T,T+1} v(x,s) \in W^{\mathbf{r}}_{p,0}(Q_T) \quad \forall T \in \mathbb{R}. \tag{3.56}$$

Как обычно, определяется пространство $\mathscr{W}_p^b \subset \mathscr{W}_p^{\mathrm{loc}}$ с нормой

$$\|v\|_{\mathscr{W}_p^b} = \sup_{T\in\mathbb{R}} \|\Pi_{T,T+1} v, Q_T\|_{\mathbf{r},p}. \tag{3.57}$$

Наконец, $\mathscr{W}_{p,w}^{\mathrm{loc}}$ обозначает пространство $\mathscr{W}_p^{\mathrm{loc}}$ с топологией локальной слабой сходимости $W^{\mathbf{r}}_{p,0}(Q_T)$ при любом $T \in \mathbb{R}$. Из (3.54) заключаем, что

$$\Theta^{\mathrm{loc}} \Subset C^{2-2\delta,1-\delta}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) \quad \text{для} \quad p > \frac{n+2}{2\delta}\,. \tag{3.58}$$

Имеет место следующая

Теорема 3.6. *Траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ уравнения* (3.47) *равномерно* (*по* $\varepsilon > 0$) *ограничен в $\mathscr{W}_p^b$ и $\mathfrak{A}_\varepsilon$ стремится к траекторному аттрактору $\overline{\mathfrak{A}}$ уравнения* (3.50) *при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве $\mathscr{W}_{p,w}^{\mathrm{loc}}$. В частности, из вложения* (3.58) *следует, что*

$$\operatorname{dist}_{C^{2-2\delta,1-\delta}(\overline{\Omega}\times[0,M])}(\Pi_M \mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_M \overline{\mathfrak{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+) \quad \forall\, M > 0. \tag{3.59}$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathscr{K}_\varepsilon$ и $\overline{u} \in \overline{\mathscr{K}}$. Из утверждения 3.4 и из неравенства (3.52) вытекает, что правые части уравнений

$$\partial_t u - \Delta u = -f\left(u, \frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{3.60}$$

$$\partial_t \overline{u} - \Delta \overline{u} = -\overline{f}(\overline{u}), \qquad \overline{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.61}$$

ограничены в $L_\infty(\Omega\times\mathbb{R})$ равномерно по $\varepsilon > 0$. Поэтому ядра $\mathscr{K}_\varepsilon$ и $\overline{\mathscr{K}}$ принадлежат множеству

$$B_0 = \{u : \|u\|_{\mathscr{W}_p^b} \leqslant R_0\}, \tag{3.62}$$

где R_0 не зависит от ε. В самом деле, умножим уравнение (3.60) на срезающую монотонную функцию $\Phi_T(t) = \Phi(t-T)$, где $\Phi(s) \in C_b^1(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$, $\Phi(s) = 0$ при $s \leqslant -1$ и $\Phi(s) = 1$ при $s \geqslant 0$. Пусть $T \geqslant 1$. Получаем:

$$\partial_t(\Phi_T u) - \Delta(\Phi_T u) = -\Phi_T f\left(u, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \Phi_T' u. \tag{3.63}$$

Поскольку $\Phi_T(t)u(x,t) \equiv 0$ при $t = T-1$, можно применить оценку Солонникова (3.55) в области $Q_{T-1,T+1} = \Omega\times]T-1,T+1[$ и получить неравенство

$$\begin{aligned}\|u, Q_T\|_{\mathbf{r},p} &\leqslant \|\Phi_T u, Q_{T-1,T+1}\|_{\mathbf{r},p}\\ &\leqslant C_p \left\| -\Phi_T f\left(u, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \Phi_T' u \right\|_{L_p(Q_{T-1,T+1})} \leqslant R_0 \qquad \forall\, T \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3.64}$$

Мы доказали, что множество B_0 (см. (3.62)) содержит $\mathscr{K}_\varepsilon$ и $\overline{\mathscr{K}}$.

В силу того, что множество B_0 компактно в $\mathscr{W}_{p,w}^{\mathrm{loc}}$, получаем, используя стандартные рассуждения, что $\mathscr{K}_\varepsilon \to \overline{\mathscr{K}}$ при $\varepsilon \to 0+$ в $W_{p,w}^{\mathbf{r}}(\Omega\times]-M,M[)$ и, следовательно, $\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \to 0+$ в $W_{p,w}^{\mathbf{r}}(\Omega\times]0,M[)$ для любого $M > 0$. В частности, имеет место (3.59).

Теорема 3.6 влечет за собою

Следствие 3.7. *Глобальные аттракторы $\mathscr{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathscr{A}}$ уравнений* (3.47) *и* (3.50) *принадлежат $C^{2-\delta}(\overline{\Omega})$ и*

$$\operatorname{dist}_{C^{2-\delta}(\overline{\Omega})}(\mathscr{A}_\varepsilon, \overline{\mathscr{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+) \quad \forall\, \delta \in]0,1].$$

Замечание 3.5. Аналогичными методами исследуются равномерные траекторные и глобальные аттракторы неавтономных уравнений вида (3.26) с нелинейными функциями взаимодействия $f(v,x,x/\varepsilon,t,t/\varepsilon) = \sum_{j=0}^N b_j(x,x/\varepsilon,t,t/\varepsilon)v^j$, где коэффициенты $b_j(x,z_1,t,z_2)$ имеют средние в соответствующих пространствах.

3.5. Диссипативное волновое уравнение. Рассматривается гиперболическое уравнение с диссипацией:

$$\partial_t^2 u + \gamma\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_t u = \Delta u - b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u) + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.65}$$

Здесь $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$. Аналогичное гиперболическое уравнение с постоянными коэффициентами γ и b изучалось в [6]. Изложенный там метод построения траекторного аттрактора вполне применим к уравнению (3.65) без существенных изменений.

Предполагается, что $\gamma(x,z), b(x,z) \in C_b(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ и

$$0 < \overline{\gamma}_1 \leqslant \gamma(x,z) \leqslant \overline{\gamma}_2, \tag{3.66}$$

$$0 < \overline{\beta}_1 \leqslant b(x,z) \leqslant \overline{\beta}_2 \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n. \tag{3.67}$$

Функция $f(v) \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(v)| \leqslant \gamma_0(|v|^{p-1}+1), \qquad p > 2, \tag{3.68}$$

$$F(v) \geqslant \gamma_3|v|^p - C_1, \qquad f(v)v \geqslant \gamma_4 F(v) - C_2 \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}, \tag{3.69}$$

где $F(v) = \int_0^v f(w)\,dw$ и функция $\Phi(v) = (f(v) + C_1)^{1/p}$ удовлетворяет условию Липшица (см. [6]).

Пусть функции $\gamma(x, x/\varepsilon)$ и $b(x, x/\varepsilon)$ имеют средние $\overline{\gamma}(x)$ и $\overline{b}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в пространстве $L_{\infty,*w}(\Omega)$, т.е.

$$\left\langle \gamma\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \varphi(x) \right\rangle \to \langle \overline{\gamma}(x), \varphi(x)\rangle,$$
$$\left\langle b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \varphi(x) \right\rangle \to \langle \overline{b}(x), \varphi(x)\rangle \qquad (\varepsilon \to 0+) \tag{3.70}$$

для любой функции $\varphi \in L_1(\Omega)$. Наконец, предположим, что функция $g(x, x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{g}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в $L_{2,w}(\Omega)$:

$$\left\langle g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \varphi(x) \right\rangle \to \langle \overline{g}(x), \varphi(x)\rangle \qquad (\varepsilon \to 0+) \quad \forall\, \varphi \in L_2(\Omega). \tag{3.71}$$

Замечание 3.6. *Излагаемые далее результаты легко обобщаются на случай, когда $g = g(x, x/\varepsilon, t, t/\varepsilon)$, $\gamma = \gamma(x, x/\varepsilon, t, t/\varepsilon)$. Можно также рассматривать нелинейные члены вида $\sum_{j=1}^N \beta_j\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}, t, \dfrac{t}{\varepsilon}\right) f_j(v)$ и их пределы.*

Рассмотрим также усредненное уравнение

$$\partial_t^2 \overline{u} + \bar{\gamma}(x)\partial_t \overline{u} = \Delta \overline{u} - \overline{b}(x) f(\overline{u}) + \overline{g}(x), \qquad \overline{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.72}$$

При выполнении условий (3.66)–(3.71) уравнение (3.65) при $\varepsilon > 0$ и уравнение (3.72) имеют траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ соответственно. Конструкция и свойства этих аттракторов описаны в [6].

Напомним, что функция $u(x, s)$ называется *слабым решением* уравнения (3.65) (или (3.72)), если $u(x, s) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; L_p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\partial_t u \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega))$ и u удовлетворяет уравнению в смысле обобщенных функций пространства $D'(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega))$, где $r = \max\{1; n(1/2 - 1/p)\}$. Тогда очевидно, что $\partial_t^2 u \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-r}(\Omega))$.

Аналогично [6] вводим функционал

$$J_{\varepsilon,\alpha}(v, v_1) = \int_\Omega \left(|\nabla v(x)|^2 + |v_1(x) + \alpha v(x)|^2 + 2b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) F(v(x)) \right) dx.$$

Пусть $u(x, s)$ – слабое решение (3.65). Обозначим

$$z(s) = J_{\varepsilon,\alpha}(u(s), \partial_t u(s)).$$

Зафиксируем число $N > 0$. Пространство траекторий $\mathscr{K}_\varepsilon^+(N)$ уравнения (3.65) состоит из слабых решений этого уравнения, которые удовлетворяют неравенству

$$z(t) \leqslant R_\alpha + N \exp(-\delta_\alpha t) \qquad \forall\, t \geqslant 0 \tag{3.73}$$

для любого α такого, что

$$0 < \alpha(\overline{\gamma}_1 - \alpha) < \lambda_1, \qquad 0 < \alpha < \overline{\gamma}_1.$$

Константы R_α и δ_α определены в [6]. Они не зависят от ε. Аналогично определяется траекторное пространство $\overline{\mathscr{K}}^{+}(N)$ для уравнения (3.72). Полугруппа сдвигов $\{T(t)\}$, действующая на $\mathscr{K}_\varepsilon^{+}(N)$ и $\overline{\mathscr{K}}^{+}(N)$ соответственно, имеет траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$. Пространства Θ_+^{loc} и $\mathscr{F}_+^b$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Theta_+^{\mathrm{loc}} &= L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;L_p(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap\{v:\partial_t v\in L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;L_2(\Omega))\}\\ &\qquad\cap\{v:\partial_t^2 v\in L_{\infty,*w}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;H^{-r}(\Omega))\},\\ \mathscr{F}_+^b &= L_\infty^b(\mathbb{R}_+;L_p(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap\{v:\partial_t v\in L_\infty^b(\mathbb{R}_+;L_2(\Omega))\}\\ &\qquad\cap\{v:\partial_t^2 v\in L_\infty^b(\mathbb{R}_+;H^{-r}(\Omega))\}.\end{aligned}$$

Множества $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ равномерно ограничены в $\mathscr{F}_+^b$. Доказательство этих утверждений изложено в [6]. Там же установлено, что

$$\mathfrak{A}_\varepsilon=\Pi_+\mathscr{K}_\varepsilon \quad \text{и} \quad \overline{\mathfrak{A}}=\Pi_+\overline{\mathscr{K}}, \tag{3.74}$$

где $\mathscr{K}_\varepsilon$ и $\overline{\mathscr{K}}$ – ядра уравнений (3.65) и (3.72) соответственно. Легко видеть из (3.73), что $\mathscr{K}_\varepsilon$ состоит из всех слабых решений $u(x,s)$, $s\in\mathbb{R}$, уравнения (3.65) таких, что

$$z(t)=J_{\varepsilon,\alpha}(u(t),\partial_t u(t))\leqslant R_\alpha \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}. \tag{3.75}$$

Аналогично, ядро $\overline{\mathscr{K}}$ уравнения (3.72) состоит из его слабых решений $\overline{u}(x,s)$, удовлетворяющих неравенству

$$\overline{z}(t)=\overline{J}_\alpha(\overline{u}(t),\partial_t\overline{u}(t))\leqslant R_\alpha \qquad \forall\, t\in\mathbb{R}, \tag{3.76}$$

где при определении $\overline{J}_\alpha(v,v_1)$ необходимо заменить $b(x,x/\varepsilon)$ в (3.73) на $\overline{b}(x)$. Отметим, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ не зависят от константы N из определения пространств $\mathscr{K}_\varepsilon^{+}(N)$ и $\overline{\mathscr{K}}^{+}(N)$.

Теорема 3.7. *Траекторный аттрактор* $\mathfrak{A}_\varepsilon=\Pi_+\mathscr{K}_\varepsilon$ *уравнения* (3.65) *стремится к траекторному аттрактору* $\overline{\mathfrak{A}}=\Pi_+\overline{\mathscr{K}}$ *уравнения* (3.72) *при* $\varepsilon\to0+$ *в пространстве* Θ_+^{loc},

$$\mathfrak{A}_\varepsilon\to\overline{\mathfrak{A}} \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to0+ \tag{3.77}$$

и

$$\mathscr{K}_\varepsilon\to\overline{\mathscr{K}} \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to0+ \quad \textit{в} \quad \Theta^{\mathrm{loc}}. \tag{3.78}$$

Следствие 3.8. *В силу вложения* $\Theta_+^{\mathrm{loc}}\subset C(\mathbb{R}_+;H^{1-\delta})\cap C^1(\mathbb{R}_+;H^{-\delta})$ *при* $\delta\in]0,1]$ *имеем*

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];H^{1-\delta})\cap C^1([0,M];H^{-\delta})}(\Pi_{0,M}\mathfrak{A}_\varepsilon,\Pi_{0,M}\overline{\mathfrak{A}})\to0 \quad (\varepsilon\to0+) \ \ \forall\, M>0. \tag{3.79}$$

Мы не приводим доказательства теоремы 3.7. Оно во многом аналогично доказательству теорем 3.1 и 3.5.

3.6. Гиперболическое уравнение с единственностью решения задачи Коши. В этом пункте мы изучим усреднение диссипативных гиперболических уравнений с умеренным ростом нелинейной функции. Это условие позволяет доказать однозначную разрешимость соответствующей задачи Коши (см. [13], [7], [8]).

Рассматривается уравнение

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - b\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) f(u) + g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.80}$$

Здесь, как обычно, $x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$, а функция $f(v) \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет (3.68) и (3.69). Кроме того, предполагается, что

$$|f'(v)| \leqslant C(1 + |v|^{p-2}), \quad \text{где} \quad \begin{cases} 2 \leqslant p < +\infty & \text{при } n = 1, 2; \\ 2 \leqslant p < 4 & \text{при } n = 3; \\ p = 2 & \text{при } n \geqslant 4. \end{cases} \tag{3.81}$$

Пусть также $b(x,z) \in C_b(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, $0 < \beta_1 \leqslant b(x,z) \leqslant \beta_2$, и $b(x, x/\varepsilon)$ имеет среднее $\overline{b}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в $L_{\infty,*w}(\Omega)$. Функция $g(x, x/\varepsilon) \in L_2(\Omega)$ при любом $\varepsilon > 0$, и она имеет среднее $\overline{g}(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в $L_{2,w}(\Omega)$.

Рассмотрим усредненное уравнение

$$\partial_t^2 \overline{u} + \gamma \partial_t \overline{u} = \Delta \overline{u} - \overline{b}(x) f(\overline{u}) + \overline{g}(x), \qquad \overline{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.82}$$

Начальные условия задаются при $t = 0$:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in H^1, \qquad \partial_t u\big|_{t=0} = u_1(x) \in H, \tag{3.83}$$

где обозначены пространства $H = L_2(\Omega)$ и $H^1 = H_0^1(\Omega)$.

Известно, что задачи (3.80), (3.83) и (3.82), (3.83) (с заменой u на $\overline{u}$) имеют единственные решения $u(t)$, $t \geqslant 0$, и $\overline{u}(t)$, $t \geqslant 0$, такие, что $u, \overline{u} \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1)$, $\partial_t u, \partial_t \overline{u} \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$. Тогда из уравнений получаем, что $\partial_t^2 u, \partial_t^2 \overline{u} \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1})$, где $H^{-1} = H^{-1}(\Omega)$ (см. [13], [8], [7]). Присутствие членов $b(x, x/\varepsilon)$ и $\overline{b}(x)$, зависящих от x, не влияет на эти факты.

Теперь определим пространства $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ и $\mathscr{F}_+^b$ следующим образом:

$$\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}} = \{v(s), s \geqslant 0 : v \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1), \partial_t v \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H), \partial_t^2 v \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1})\},$$
$$\mathscr{F}_+^b = \{v(s), s \geqslant 0 : v \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1),\ \partial_t v \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H),\ \partial_t^2 v \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1})\}.$$

Норма в пространстве $\mathscr{F}_+^b$

$$\|v\|_{\mathscr{F}_+^b} = \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1)} + \|\partial_t v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H)} + \|\partial_t^2 v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1})}.$$

Обозначим через Θ_+^{loc} пространство $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$ с локальной $*$-слабой сходимостью в $L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1)$, $L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H)$ и $L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{-1})$ функций v, $\partial_t v$ и $\partial_t^2 v$ соответственно.

Траекторное пространство $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ состоит из всех решений $u(x,s)$ уравнения (3.80) из пространства $\mathscr{F}_+^b$. Аналогично определяется пространство траекторий $\overline{\mathscr{K}}^+$ для уравнения (3.82). Поскольку $u \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H^1)$, из (3.81) вытекает, что функция

$b(x,x/\varepsilon)f(u(x,s)) \in L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ при $u \in \mathscr{K}_\varepsilon^+$ (и $\overline{b}(x)f(\overline{u}(x,s)) \in L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ при $u \in \overline{\mathscr{K}}^+$ соответственно). Следовательно, в уравнениях

$$\partial_t^2 u + \gamma\partial_t u - \Delta u = -b\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)f(u(x,t)) + g\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right) \equiv F_\varepsilon(x,t),$$
$$\partial_t^2 \overline{u} + \gamma\partial_t \overline{u} - \Delta \overline{u} = -\overline{b}(x)f(\overline{u}(x,t)) + \overline{g}(x) \equiv \overline{F}(x,t)$$

правые части $F_\varepsilon(x,t)$ и $\overline{F}(x,t)$ принадлежат $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$. Из теоремы Лионса–Мадженеса (см. [20]) следует, что $u,\overline{u} \in C_b(\mathbb{R}_+;H^1)$, $\partial_t u, \partial_t \overline{u} \in C_b(\mathbb{R}_+;H)$. В частности,

$$\mathscr{K}_\varepsilon^+, \overline{\mathscr{K}}^+ \subset C_b(\mathbb{R}_+;H^1) \cap \{v : \partial_t v \in C_b(\mathbb{R}_+;H)\}.$$

Легко проверить, что пространства $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ при $\varepsilon > 0$ и $\overline{\mathscr{K}}^+$ замкнуты в Θ_+^{loc}. Рассматривается полугруппа трансляций $\{T(t)\}$, действующая на $\mathscr{F}_+^{\mathrm{loc}}$: $T(t)v(x,s) = v(x,s+t)$, $t \geqslant 0$. Доказывается, что для $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ и $\overline{\mathscr{K}}^+$ существует поглощающее множество B_0 вида

$$B_0 = \{v \in \mathscr{F}_+^b : \|v\|_{\mathscr{F}_+^b} \leqslant R_0\}, \tag{3.84}$$

где R_0 не зависит от ε. Уравнения (3.80) и (3.82) имеют траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathfrak{A}}$, которые принадлежат B_0, компактны в Θ_+^{loc} и удовлетворяют равенствам

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+\mathscr{K}_\varepsilon, \qquad \overline{\mathfrak{A}} = \Pi_+\overline{\mathscr{K}},$$

где $\mathscr{K}_\varepsilon$ и $\overline{\mathscr{K}}$ – ядра уравнений (3.80) и (3.82) в пространстве $\mathscr{F}^b$ с нормой

$$\|v\|_{\mathscr{F}^b} = \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R};H^1)} + \|\partial_t v\|_{L_\infty(\mathbb{R};H)} + \|\partial_t^2 v\|_{L_\infty(\mathbb{R};H^{-1})}.$$

Из результатов предыдущего пункта следует, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \to \overline{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \to 0+$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc}. Мы докажем, что этот предел имеет место в более сильной топологии, если нелинейная функция $f(u)$ удовлетворяет условию (3.81).

Обозначим через $H^\sigma = (-\Delta)^{-\sigma/2}H$, $\sigma \geqslant 0$, где оператор Лапласа Δ задан на функциях, удовлетворяющих нулевым граничным условиям $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. В частности, $H^0 = H = L_2(\Omega)$, $H^1 = H_0^1(\Omega)$, $H^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Лемма 3.1. *Полугруппа $\{T(t)\}$, действующая на $\mathscr{K}_\varepsilon^+$ и $\overline{\mathscr{K}}^+$, имеет притягивающее множество*

$$B_\delta = \{v \in \mathscr{F}_+^b : \|v\|_{C_b(\mathbb{R}_+;H^{1+\delta})} + \|\partial_t v\|_{C_b(\mathbb{R}_+;H^\delta)} \leqslant R_\delta\} \tag{3.85}$$

при $0 \leqslant \delta < 1$. Число R_δ не зависит от ε.

В доказательстве используется лемма 3.4 из [8; гл. VI].

Следствие 3.9. *Траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и $\overline{\mathfrak{A}}$ принадлежат множеству B_δ, $0 \leqslant \delta < 1$. Для любой функции $u \in \mathscr{K}_\varepsilon$ и любой $\overline{u} \in \overline{\mathscr{K}}$*

$$\begin{aligned} &\|u(t)\|_{H^{1+\delta}} + \|\partial_t u(t)\|_{H^\delta} \leqslant R_\delta, \\ &\|\overline{u}(t)\|_{H^{1+\delta}} + \|\partial_t \overline{u}(t)\|_{H^\delta} \leqslant R_\delta \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.8. *Траекторный аттрактор* $\mathfrak{A}_\varepsilon$ *уравнения* (3.80) *сходится к траекторному аттрактору* $\overline{\mathfrak{A}}$ *усредненного уравнения* (3.82) *при* $\varepsilon \to 0+$ *в пространствах* $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{1+\delta})$ *и* $C^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{\delta})$, *где* $0 \leqslant \delta < 1$. *Кроме того,* $\mathscr{K}_\varepsilon^+ \to \overline{\mathscr{K}}$ *при* $\varepsilon \to 0+$ *в* $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{1+\delta})$ *и* $C^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{\delta})$.

При доказательстве используются неравенства (3.86) и лемма 2.1.

В заключение отметим, что задачи (3.80), (3.83) и (3.82), (3.83) порождают полугруппы $\{S_\varepsilon(t)\}$ и $\{\overline{S}(t)\}$, действующие в пространстве $E = H^1 \times H$ по формулам:

$$S_\varepsilon(t)(u_0, u_1) = (u(t), \partial_t u(t)),$$
$$\overline{S}(t)(u_0, u_1) = (\overline{u}(t), \partial_t \overline{u}(t)),$$

которые имеют глобальные (E, E)-аттракторы $\mathscr{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathscr{A}}$ (см. [8], [7]). Из теоремы 3.8 вытекает

Следствие 3.10. *Глобальные аттракторы* $\mathscr{A}_\varepsilon$ *и* $\overline{\mathscr{A}}$ *компактны в* $E^\delta = H^{1+\delta} \times H^\delta$, $0 \leqslant \delta < 1$, *и*

$$\operatorname{dist}_{E^\delta}(\mathscr{A}_\varepsilon, \overline{\mathscr{A}}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0+).$$

A. Доказательство леммы 2.1

Нам потребуются следующие известные результаты.

Лемма A.1. *Пусть* E_1, E, E_0 – *три банаховых пространства такие, что*

$$E_1 \Subset E \subset E_0. \tag{A.1}$$

Тогда для любого $\eta > 0$ *найдется число* C_η *такое, что*

$$\|v\|_E \leqslant \eta \|v\|_{E_1} + C_\eta \|v\|_{E_0} \qquad \forall\, v \in E_1. \tag{A.2}$$

Лемма A.1 доказана в [20; гл. 1, теорема 16.4].

Лемма A.2. *Пусть* E_0 *и* E – *банаховы пространства,* $E \subset E_0$. *Предположим, что функция* $u \in L_\infty(\tau, T; E)$, *причем* $u(t) \in E_0$ *для любого* $t \in [\tau, T]$. *Пусть также функция* $\langle u(t), \varphi\rangle$ *непрерывна по* $t \in [\tau, T]$, *для любого* $\varphi \in E_0^*$ (*т.е.* $u(t)$ *слабо непрерывна из* $[\tau, T]$ *в* E_0). *Тогда* $u(t) \in E$ *при* $t \in [\tau, T]$,

$$\|u(t)\|_E \leqslant \|u\|_{L_\infty(\tau, T; E)} \qquad \forall\, t \in [\tau, T] \tag{A.3}$$

и $u(t)$ *слабо непрерывна из* $[\tau, T]$ *в* E.

Доказательство содержится в [20; гл. 3, лемма 8.1].

Докажем лемму 2.1. Пусть $\{u_m\}$ – ограниченная последовательность функций в $W_{\infty, p_0}(0, T; E_1, E_0)$. Необходимо проверить, что эта последовательность принадлежит пространству $C([0, T]; E)$ и предкомпактна в нем. Сначала докажем, что

$$\{u_m\} \Subset C([0, T]; E_0).$$

По условию последовательность $\{u_m\}$ ограничена в $L_\infty(0,T;E_1)$. Тогда в силу леммы А.2 и (А.3) имеем, что $u_m(t) \in E_1$ при всех $t \in [0,T]$ и для некоторого числа $C_1 > 0$ выполнено неравенство

$$\|u_m(t)\|_{E_1} \leqslant C_1 \quad \forall\, t \in [0,T], \quad \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{A.4}$$

Следовательно, множество

$$\bigcup_m \{u_m(t) : t \in [0,T]\} \Subset E \tag{A.5}$$

(см. (А.1)), и оно также предкомпактно в E_0. Так как $\{\partial_t u_m\}$ ограничена в $L_{p_0}(0,T;E_0)$, имеем неравенство

$$\biggl(\int_0^T \|\partial_t u_m(s)\|_{E_0}^{p_0}\,ds\biggr)^{1/p_0} \leqslant C_0. \tag{A.6}$$

Следовательно, по формуле Ньютона–Лейбница в банаховом пространстве E_0 получаем:

$$\begin{aligned}
\|u_m(t_2) - u_m(t_1)\|_{E_0} &= \biggl\|\int_{t_1}^{t_2} \partial_t u_m(s)\,ds\biggr\|_{E_0} \\
&\leqslant \biggl(\int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t u_m(s)\|_{E_0}^{p_0}\,ds\biggr)^{1/p_0} |t_2 - t_1|^{(p_0-1)/p_0} \\
&\leqslant \biggl(\int_0^T \|\partial_t u_m(s)\|_{E_0}^{p_0}\,ds\biggr)^{1/p_0} |t_2 - t_1|^{(p_0-1)/p_0} \leqslant C_0|t_2 - t_1|^{(p_0-1)/p_0}, \quad p_0 > 1.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Мы воспользовались здесь неравенством Гёльдера и оценкой (А.6). Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ принадлежит $C([0,T];E_0)$ и является равностепенно непрерывной. Применяя теорему Арцела–Асколи, заключаем, что $\{u_m\}$ предкомпактна в $C([0,T];E_0)$.

Чтобы доказать предкомпактность $\{u_m\}$ в $C([0,T];E)$ с помощью теоремы Арцела–Асколи, достаточно проверить равностепенную непрерывность последовательности $\{u_m\}$ в пространстве $C([0,T];E)$. (Уже доказано, что значения функций $u_m(t)$ принадлежат компактному множеству из E, см. (А.4) и (А.5).)

Применим лемму А.1. Зафиксируем любое число $\varepsilon > 0$ и возьмем $\eta = \varepsilon/(4C_1)$ (см. (А.4)). Тогда для некоторого $C_\eta > 0$ в силу (А.2) получаем:

$$\begin{aligned}
\|u_m(t_2) - u_m(t_1)\|_E &\leqslant \frac{\varepsilon}{4C_1}\|u_m(t_2) - u_m(t_1)\|_{E_1} + C_\eta\|u_m(t_2) - u_m(t_1)\|_{E_0} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4C_1}2C_1 + C_\eta\|u_m(t_2) - u_m(t_1)\|_{E_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + C_\eta C_0|t_2 - t_1|^{(p_0-1)/p_0}.
\end{aligned}$$

Выбрав δ так, что

$$C_\eta C_0 \delta^{(p_0-1)/p_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

заключаем, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ и для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$, $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, выполнено неравенство:

$$\|u_m(t_2) - u_m(t_1)\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равностепенно непрерывна в $C([0,T];E)$, а значит, предкомпактна в $C([0,T];E)$.

Список литературы

1. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Averaging in infinite dimensions // J. Integral Equations Appl. 1990. V. 2. №4. P. 463–494.
2. *Ильин А. А.* Усреднение диссипативных динамических систем с быстро осциллирующими правыми частями // Матем. сб. 1996. Т. 187. №5. С. 15–58.
3. *Ilyin A. A.* Global averaging of dissipative dymanical systems // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Applicazioni 116. 1998. V. 22. №1. P. 165–191.
4. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
5. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
6. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. (9). 1997. V. 76. №10. P. 913–964.
7. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
8. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics // Applied Math. Sci. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1988.
9. *Hale J. K.* Asymptotic behaviour of dissipative systems // Math. Surveys Monographs. 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1988.
10. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. (9). 1994. V. 73. №3. P. 279–333.
11. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous evolution equations with translation-compact symbols // Oper. Theory Adv. Appl. 1995. V. 78. P. 49–60.
12. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Non-autonomous evolutionary equations with translation-compact symbols and their attractors // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1995. V. 321. P. 153–158.
13. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.
14. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Trajectory attractors for 2D Navier-Stokes systems and some generalizations // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1996. V. 8. P. 217–243.
15. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Trajectory attractors for reaction-diffusion systems // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1996. V. 7. №1. P. 49–76.
16. *Chafee N., Infante E.* A bifurcation problem for a nonlinear parabolic equation // J. Appl. Anal. 1974. V. 4. P. 17–37.
17. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
18. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
19. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды МИАН. 1965. Т. 83.
20. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: vishik@iitp.ru; chep@iitp.ru

Поступила в редакцию
27.04.2000