УДК 517.95

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Колмогоровская ε-энтропия аттракторов систем реакции-диффузии

Изучается колмогоровская ε-энтропия равномерного аттрактора $\mathscr{A}$ семейства неавтономных уравнений реакции-диффузии с внешней силой $g(x,t)$. Предполагается, что $g(x,t)$ принадлежат трансляционно-инвариантному относительно группы сдвигов по t множеству Σ, $\Sigma \subset C(\mathbb{R};H)$, $H=(L_2(\Omega))^N$. Кроме того, Σ компактно в $C(\mathbb{R};H)$.

В работе дается оценка ε-энтропии равномерного аттрактора $\mathscr{A}$ через $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon)$-энтропию компактного в $C([0,l];H)$ множества Σ_l внешних сил $g(x,t)\in\Sigma$, суженных на интервал $[0,l]$, $l=l(\varepsilon)$ ($\varepsilon_1(\varepsilon)\sim\mu\varepsilon, l(\varepsilon)\sim\tau\log_2(1/\varepsilon)$). Эта общая оценка иллюстрируется рядом примеров, взятых из различных областей математической физики и теории информации.

Библиография: 23 названия.

В статье исследуется система реакции-диффузии с зависящей от времени внешней силой $g(x,t)$. При изучении таких неавтономных систем естественно рассматривать семейство систем с внешними силами, принадлежащими некоторому трансляционно-инвариантному множеству Σ, которое содержит начальную внешнюю силу $g_0(x,t)$. Таким образом, рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t u=\nu\Delta u-f(u)+g(x,t),\qquad t\in\mathbb{R}, \tag{0.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0,\qquad x\in\Omega,\qquad \Omega\Subset\mathbb{R}^n, \tag{0.2}$$

где $u=u(x,t)=(u^1,\dots,u^N)$ является неизвестной вектор-функцией, $f=(f^1,\dots,f^N)$, $g=(g^1,\dots,g^N)$, а ν – положительный параметр. Функция f удовлетворяет некоторым условиям, описанным в § 1, которые обеспечивают однозначную разрешимость соответствующей задачи Коши. Внешние силы $g(x,s)=g(s)$, $s\in\mathbb{R}$, принадлежат множеству Σ, $\Sigma\subset C(\mathbb{R};H)$, $H=(L_2(\Omega))^N$. Пространство $C(\mathbb{R};H)$ снабжено топологией равномерной сходимости на любом отрезке числовой оси $\mathbb{R}$, т.е., по определению, $g_n(s)$ сходится к $g(s)$ в $C(\mathbb{R};H)$ при $n\to\infty$, если

$$\max_{s\in[t_1,t_2]}\|g_n(s)-g(s)\|_H\to 0,\qquad n\to\infty,$$

для любого $[t_1,t_2]\Subset\mathbb{R}$. Предполагается, что

(I) множество Σ компактно в $C(\mathbb{R};H)$;

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00354), а также the U.S. Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF) (грант № RM1-186).

(II) множество Σ трансляционно-инвариантно, т.е.

$$T(h)\Sigma = \Sigma \quad \forall\, h \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

где $T(h)g(s) = g(h+s)$, $\{T(h) : h \in \mathbb{R}\}$ ($\{T(h)\}$ называется *трансляционной группой*).

Пусть

$$u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u_\tau \in H, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{0.4}$$

является начальным условием для (0.1). Любое решение $u(t)$, $t \geqslant \tau$, задачи (0.1), (0.2) и (0.4) может быть представлено в виде:

$$u(t) = U_g(t,\tau)u_\tau, \quad t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{0.5}$$

При заданном $g \in \Sigma$ двупараметрическое семейство операторов $\{U_g(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$, $U_g(t,\tau)\colon H \to H$, называется *процессом*, отвечающим задаче (0.1), (0.2), (0.4) с внешней силой $g(s) \in \Sigma$. Очевидно, $U_g(t,\tau) = U_g(t,\theta)U_g(\theta,\tau)\ \ \forall\, t \geqslant \theta \geqslant \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, и $U_g(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ есть тождественный оператор.

Компактное множество $\mathscr{A}_\Sigma \Subset H$ называется *равномерным аттрактором* семейства процессов $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$, если для каждого ограниченного множества $B \subset H$ и для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$\sup_{g\in\Sigma} \operatorname{dist}_H(U_g(t,\tau)B, \mathscr{A}_\Sigma) \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{0.6}$$

и при этом $\mathscr{A}_\Sigma$ является минимальным компактным множеством, удовлетворяющим (0.6).

В работах [1] и [2] равномерный аттрактор $\mathscr{A}_\Sigma$ был построен в случае, когда $\Sigma = \mathscr{H}(g_0)$, а функция $g_0(s)$ является почти периодической со значениями в H. Здесь $\mathscr{H}(g_0)$ обозначает оболочку функции g_0. Класс почти периодических функций был существенно расширен в работах [3] и [4]. Теорема существования равномерного аттрактора была доказана для $\Sigma = \mathscr{H}(g_0)$, где $g_0(s)$ является трансляционно-компактной функцией в подходящем пространстве. Например, если g_0 трансляционно-компактна в $C(\mathbb{R}; H)$ (см. § 1), то условия (I) и (II) выполнены для $\Sigma = \mathscr{H}(g_0)$.

В статье [2] были получены верхние и нижние оценки для размерности равномерного аттрактора $\mathscr{A}_\Sigma$ в случае, когда $\Sigma = \mathscr{H}(g_0)$ является оболочкой квазипериодической функции $g_0(s) = \varphi(\alpha_1 s, \dots, \alpha_k s)$, где $\varphi(\omega_1, \dots, \omega_k)$ – гладкая 2π-периодическая функция по каждому аргументу ω_j со значениями в H, а числа $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \boldsymbol{\alpha}$ являются рационально независимыми (см. § 1). Таким образом, в случае общего положения пространство Σ диффеоморфно k-мерному тору $\mathbb{T}^k$, и следовательно, $\dim \Sigma = k$. В [2] было доказано, что

$$\dim \mathscr{A}_\Sigma \leqslant k + A_1 k^{n/(n+2)} + A_2, \quad A_1, A_2 = \mathrm{const}\,.$$

Значит, $\dim \mathscr{A}_\Sigma$ может быть оценено через $k = \dim \Sigma$. Кроме этого, были построены примеры показывающие, что

$$\dim \mathscr{A}_\Sigma \geqslant k = \dim \Sigma.$$

Следовательно, $\dim \mathscr{A}_\Sigma$ может стремиться к бесконечности при $k = \dim \Sigma \nearrow \infty$. Это явление побудило Фояша поставить задачу изучения колмогоровской ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A})$ (см. [5] и § 1) равномерных аттракторов неавтономных эволюционных уравнений для общих трансляционно-компактных множеств Σ. Некоторые результаты в этом направлении были получены в работе [6] для двумерной системы Навье–Стокса с зависящей от времени внешней силой.

В § 3 изучается колмогоровская ε-энтропия $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma) = \mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma, H)$ равномерного аттрактора $\mathscr{A}_\Sigma$ в пространстве H для системы уравнений реакции-диффузии (0.1), когда Σ удовлетворяет условиям (I) и (II). Установлена оценка сверху для $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma)$, которая зависит от $\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\big(\Sigma, C([0,l];H)\big)$ и от других параметров задачи. Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$, $l = l(\varepsilon)$ (см. теорему 3.1).

Если фрактальная размерность $\mathbf{d}_F(\Sigma) < +\infty$, то нами доказана оценка для $\mathbf{d}_F(\mathscr{A}_\Sigma)$ через $\mathbf{d}_F(\Sigma)$. Если $\mathbf{d}_F(\Sigma) = +\infty$, приводится оценка $\mathbf{adf}_F(\mathscr{A}_\Sigma)$ через $\mathbf{adf}_F(\Sigma)$. Здесь $\mathbf{adf}_F(B)$ обозначает функциональную размерность множества B (см. [5]). Исследуется также зависимость метрического порядка $\mathbf{q}(\mathscr{A}_\Sigma)$ от метрического порядка $\mathbf{q}(\Sigma)$.

В § 2 устанавливается свойство сжатия [7] для траекторий $u(t), v(t)$ системы (0.1), (0.2), когда $u(t), v(t) \in \mathscr{A}_\Sigma$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Изучается зависимость от t функций $\xi(t) = |u(t) - v(t)|$ и $\rho(t) = \|u(t) - v(t)\|^2/|u(t) - v(t)|^2$ (см. [7]), где $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ обозначают нормы в $H = (L_2(\Omega))^N$ и в $H_1 = (H_0^1(\Omega))^N$, соответственно. Грубо говоря, доказано, что или $|Q_m(u(t) - v(t))| \leqslant |P_m(u(t) - v(t))|$, или $|u(t) - v(t)|$ мало, или $|u(t) - v(t)|$ экспоненциально убывает. Здесь P_m обозначает оператор ортогонального проектирования на линейное подпространство, натянутое на первые m собственные функции оператора Лапласа Δ с нулевыми граничными условиями, а $Q_m = I - P_m$. Свойство сжатия является основным инструментом при исследовании ε-энтропии в § 3.

В § 4 получены оценки ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\Sigma)$ некоторых специальных множеств Σ. Рассмотрены три типа таких множеств, взятых из различных областей математики. Из этих оценок, а также из теоремы 3.1 вытекают оценки для ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma)$ равномерных аттракторов $\mathscr{A}_\Sigma$. Получены также оценки метрического порядка равномерных аттракторов $\mathscr{A}_\Sigma$ для всех рассмотренных типов множеств Σ.

§ 1. Некоторые предварительные сведения

Рассматривается семейство систем уравнений реакции-диффузии (0.1), (0.2) с внешними силами $g(s)$, принадлежащими множеству $\Sigma \subset C(\mathbb{R}; H)$, которое удовлетворяет условиям (I) и (II).

Вектор-функция $f(v) \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\gamma_1 |v|^p - C_1 \leqslant f(v)\cdot v \leqslant \gamma_2 |v|^p + C_2, \qquad \gamma_i > 0, \quad p \geqslant 2, \tag{1.1}$$

$$|f_v(v)| \leqslant C_3\left(|v|^{p-2} + 1\right), \quad -C_4|w|^2 \leqslant f_v(v) w \cdot w \qquad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

Предполагается, что $p \leqslant 2(n-1)/(n-2)$ при $n \geqslant 3$ и p – любое при $n \leqslant 2$. В этих предположениях задача (0.1), (0.2), (0.4) имеет единственное решение $u \in C(\mathbb{R}_\tau; H) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_\tau; H_1)$ такое, что $\partial_t u \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_\tau; H_{-1})$ (см. [2], [8], [9]). Здесь $\mathbb{R}_\tau = [\tau, +\infty)$ и $H_{-1} = H^*$ является пространством, сопряженным к H_1. Кроме того, $u \in C(\mathbb{R}_{\tau+\delta}; H_1) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{\tau+\delta}; H_2)$, $H_2 = (H^2(\Omega))^N$, и $\partial_t u \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{\tau+\delta}; H)$, где $\delta > 0$ (см. [2], [8], [9]). (Условия (1.1), (1.2) могут быть обобщены.)

Таким образом, при заданном множестве Σ задача (0.1), (0.2), (0.4) порождает семейство процессов $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$, действующих в H: $U_g(t,\tau)u_\tau = u(t)$, где $u(t)$ есть решение (0.1), (0.2), (0.4) с внешней силой $g \in \Sigma$.

Напомним некоторые определения, относящиеся к равномерным аттракторам семейств процессов, и сформулируем теорему о существовании и структуре аттракторов (см. также [1], [2], [10]–[15]).

Пусть задано семейство процессов $\{U_g(t,\tau)\}$, действующих в банаховом пространстве E и зависящих от параметра $g \in \Sigma$. Через $\mathscr{B}(E)$ обозначается семейство всех ограниченных множеств в E.

Определение 1.1. Множество P называется *равномерно* (*относительно* $g \in \Sigma$) *притягивающим* для семейства процессов $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$, если при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ и при любом $B \in \mathscr{B}(E)$

$$\sup_{g\in\Sigma} \operatorname{dist}_E\bigl(U_g(t,\tau)B, P\bigr) \to 0, \qquad t \to +\infty.$$

Здесь, как обычно, $\operatorname{dist}_E(X,Y) = \sup_{x\in X} \operatorname{dist}_E(x,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \|x-y\|_E$.

Определение 1.2. Компактное множество $\mathscr{A}_\Sigma \Subset E$ называется *равномерным* (*относительно* $g \in \Sigma$) *аттрактором* семейства процессов $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$, если $\mathscr{A}_\Sigma$ является равномерно притягивающим множеством этого семейства и $\mathscr{A}_\Sigma$ принадлежит любому замкнутому равномерно притягивающему множеству (см. [2], [15]).

Легко показать, что если семейство процессов $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$, имеет компактное равномерно притягивающее множество $P \Subset E$, то существует и минимальное притягивающее множество, т.е. равномерный аттрактор $\mathscr{A}_\Sigma \subseteq P$.

Изучая семейство процессов, порожденное системой реакции-диффузии (0.1), (0.2), легко установить, что существует равномерно притягивающее множество B_1, ограниченное в $H_1 = (H_0^1(\Omega))^N$ [2], [9], [16]. Следовательно, по теореме о компактности B_1 компактно в H и, значит, существует равномерный аттрактор $\mathscr{A}_\Sigma$, ограниченный в H_1.

Для описания структуры множества $\mathscr{A}_\Sigma$ нам понадобятся некоторые дополнительные понятия.

Определение 1.3. Кривая $\{\gamma(s),\ s \in \mathbb{R}\} \subset E$ называется *полной траекторией* процесса $\{U(t,\tau)\}$, если

$$U(t,\tau)\gamma(\tau) = \gamma(t) \qquad \forall\, t \geqslant \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Определение 1.4. *Ядро* $\mathscr{K}$ процесса $\{U(t,\tau)\}$ в E состоит из объединения всех ограниченных в E полных траекторий этого процесса:

$$\mathscr{K} = \bigl\{\gamma(\,\cdot\,) : \gamma \text{ удовлетворяет (1.3) и } \|\gamma(s)\| \leqslant C_\gamma\ \forall\, s \in \mathbb{R}\bigr\}.$$

Множество $\mathscr{K}(\tau) = \{\gamma(\tau) : \gamma \in \mathscr{K}\} \subset E$ называется *сечением ядра* в момент $\tau \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.1 [2]–[4]. *Равномерный аттрактор* $\mathscr{A}_\Sigma$ *семейства процессов* $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\Sigma$, *может быть представлен в виде*:

$$\mathscr{A}_\Sigma = \bigcup_{g\in\Sigma} \mathscr{K}_g(0). \tag{1.4}$$

Здесь $\mathscr{K}_g$ *обозначает ядро процесса* $\{U_g(t,\tau)\}$. *При этом,* $\mathscr{K}_g$ *не пусто для каждого* $g\in\Sigma$.

Рассмотрим пространство Σ, удовлетворяющее условиям (I) и (II). Из теоремы Арцела–Асколи вытекает

Утверждение 1.1 [17]. *Трансляционно-инвариантное множество* Σ (см. (II)) *компактно в* $C(\mathbb{R};H)$, *если и только если*

(i) *множество* $\{g(0) : g\in\Sigma\}$ *компактно в* H;

(ii) Σ *равностепенно-непрерывно на* $\mathbb{R}$, *т.е. существует положительная вещественная функция* $\alpha(s)\to 0$, $s\to 0+$, *такая, что*

$$|g(s_1)-g(s_2)| \leqslant \alpha(|s_1-s_2|) \qquad \forall\, s_1,s_2\in\mathbb{R}, \quad \forall\, g\in\Sigma.$$

В частности, найдется константа C_5 такая, что

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |g(s)| \leqslant C_5 \qquad \forall\, g\in\Sigma. \tag{1.5}$$

Пример 1.1. Пусть $g(x,s)=g(s)$ является почти периодической функцией со значениями в H. Напомним, что в соответствии с определением Бохнера–Америо [18], [19] это означает, что множество $\{g(s+h) : h\in\mathbb{R}\}$ предкомпактно в $C_b(\mathbb{R};H)$ относительно топологии равномерной сходимости на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Замыкание

$$\overline{\{g(s+h) : h\in\mathbb{R}\}}^{C_b(\mathbb{R};H)} = \mathscr{H}(g)$$

называется *оболочкой* g в $C_b(\mathbb{R};H)$. Пусть теперь $\Sigma=\mathscr{H}(g_0)$, где g_0 – некоторая почти периодическая функция. Очевидно, множество Σ также компактно в $C(\mathbb{R};H)$ и свойство (I) выполнено. Условие (II) также имеет место.

Пример 1.2. Функция $g_0(x,s)=g_0(s)$ со значениями в H называется *квазипериодической* по времени, если

$$g_0(s)=\varphi(\alpha_1 s,\alpha_2 s,\dots,\alpha_k s)=\varphi(\boldsymbol{\alpha} s),$$

где $\varphi(\boldsymbol{\omega})=\varphi(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k)$ является 2π-периодической функцией по каждому аргументу ω_j, $j=1,\dots,k$, $\varphi(\boldsymbol{\omega})\in C^1(\mathbb{T}^k;H)$, $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{T}^k$, $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)=\boldsymbol{\alpha}$ – рационально независимые числа. Легко убедиться в том, что квазипериодическая функция является также почти периодической. Оболочкой квазипериодической функции является (см. [2]) множество

$$\mathscr{H}(g_0)=\{\varphi(\boldsymbol{\alpha} s+\boldsymbol{\omega}_0) : \boldsymbol{\omega}_0\in\mathbb{T}^k\}.$$

Таким образом, оболочкой квазипериодической функции является гладкий образ k-мерного тора $\mathbb{T}^k$.

Рассмотрим более общий класс функций g.

Определение 1.5. Функция $g(s) \in C(\mathbb{R}; H)$ называется *трансляционно-компактной* в $C(\mathbb{R}; H)$, если множество $\{g(s+h) : h \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в $C(\mathbb{R}; H)$ относительно локальной топологии равномерной сходимости. Множество

$$\overline{\{g(s+h) : h \in \mathbb{R}\}}^{C(\mathbb{R};H)} = \mathscr{H}(g)$$

называется *оболочкой* g в $C(\mathbb{R}; H)$.

Например, пусть $g \in C(\mathbb{R}, H)$ и $g(s) \to g_{\pm}$, $s \to \pm\infty$, где $g_+, g_- \in H$ и $g_+ \neq g_-$. Тогда, очевидно, g – трансляционно-компактна в $C(\mathbb{R}; H)$ и $\mathscr{H}(g) = \{g(s+h) : h \in \mathbb{R}\} \cup \{g_+, g_-\}$. Ясно, что $g(s)$ не является почти периодической функцией. Из предложения 1.1 вытекает

Следствие 1.1. *Функция $g(s) \in C(\mathbb{R}; H)$ является трансляционно-компактной в $C(\mathbb{R}; H)$ тогда и только тогда, когда*

(i) *множество $\{g(s) : s \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в H;*
(ii) *функция $g(t)$ равномерно-непрерывна на $\mathbb{R}$, т.е. существует функция $\alpha(s) \to 0$, $s \to 0+$, такая, что*

$$|g(s_1) - g(s_2)| \leqslant \alpha(|s_1 - s_2|) \qquad \forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\Sigma = \mathscr{H}(g_0)$, где g_0 – трансляционно-компактна в $C(\mathbb{R}; H)$. Очевидно, что Σ удовлетворяет (I) и (II).

Другие примеры множеств Σ, которые удовлетворяют (I) и (II), будут приведены в §4.

Дадим определение ε-энтропии и фрактальной размерности компактного множества Y в банаховом пространстве E: $Y \Subset E$. Пусть $N_\varepsilon(Y)$ обозначает минимальное число открытых шаров в E радиуса ε, которые покрывают Y. Очевидно, $N_\varepsilon(Y) < \infty$ при любом $\varepsilon > 0$, поскольку Y – компактно в E.

Определение 1.6 [5]. Число

$$\mathbf{H}_\varepsilon(Y) = \log_2\bigl(N_\varepsilon(Y)\bigr)$$

называется *колмогоровской ε-энтропией*, или короче, *ε-энтропией* множества Y в E.

Определение 1.7. (*Верхней*) *фрактальной размерностью* множества Y называется величина

$$\mathbf{d}_F(Y) = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mathbf{H}_\varepsilon(Y)}{\log_2(1/\varepsilon)} = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\log_2(N_\varepsilon(Y))}{\log_2(1/\varepsilon)}\,.$$

Если $Y = M$ есть m-мерное компактное подмногообразие в E, то $\mathbf{d}_F(M) = m$. В частности, $\mathbf{d}_F(\mathbb{T}^k) = k$. В негладком случае фрактальная размерность не обязательно является целым числом.

Рассмотрим теперь систему реакции-диффузии с квазипериодической внешней силой g_0. Пусть $\Sigma = \mathscr{H}(g_0)$. Так как множество $\mathscr{H}(g_0)$ является гладким образом

k-мерного тора, то $\mathbf{d}_F(\Sigma) \leqslant k$ $(Y = C_b(\mathbb{R};H))$. Как было показано в [2], равномерный аттрактор $\mathscr{A}_{\mathscr{H}(g_0)}$ имеет конечную фрактальную размерность в H и

$$\mathbf{d}_F(\mathscr{A}_\Sigma) \leqslant k + A_1 k^{n/(n+2)} + A_2. \tag{1.6}$$

Константы A_1 и A_2 зависят от Ω, а также от констант C_1–C_5. В работах [1] и [2] приведены примеры систем реакции-диффузии с квазипериодическими внешними силами, для которых

$$k \leqslant \mathbf{d}_F(\mathscr{A}_\Sigma). \tag{1.7}$$

Следовательно, размерность равномерных аттракторов может неограниченно расти, когда размерность множества Σ увеличивается.

В общем случае, когда g_0 является почти периодической функцией, фрактальная размерность равномерного аттрактора $\mathscr{A}_\Sigma$ может быть бесконечной. Таким образом, становится естественной попытка оценить колмогоровскую ε-энтропию $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma)$ равномерного аттрактора $\mathscr{A}_\Sigma$, используя информацию о поведении колмогоровской δ-энтропии множества Σ.

Далее мы будем изучать колмогоровскую ε-энтропию равномерного аттрактора $\mathscr{A}_\Sigma$ системы реакции-диффузии с внешними силами, принадлежащими множеству Σ, которое удовлетворяет условиям (I), (II).

§ 2. Свойство сжатия

В этом параграфе будет доказано свойство сжатия для траекторий $u(t) \in \mathscr{A}_\Sigma$, где $\mathscr{A}_\Sigma$ – равномерный аттрактор системы реакции-диффузии (0.1), (0.2). Мы будем использовать метод, разработанный в [7] (см. также [20]). Предполагается, что множество Σ удовлетворяет (I) и (II).

Можно доказать, что множество $\mathscr{A}_\Sigma$ ограничено в H и в H_1:

$$|\mathscr{A}_\Sigma| \leqslant R_0, \qquad \|\mathscr{A}_\Sigma\| \leqslant R_1, \tag{2.1}$$

(см., например, [2], [8], [9]), причем,

$$R_0 \leqslant \frac{C_6}{\nu}, \quad R_1 \leqslant \frac{C_7}{\nu^{3/2}}, \qquad 0 < \nu \leqslant 1,$$

где константы C_6 и C_7 зависят от Ω, C_1–C_5.

Пусть $g_1, g_2 \in \Sigma$ и $u_1 \in \mathscr{K}_{g_1}$, $u_2 \in \mathscr{K}_{g_2}$. Очевидно, $u_1(t), u_2(t) \in \mathscr{A}_\Sigma$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Функции u_1 и u_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\partial_t u_1 = \nu\Delta u_1 - f(u_1) + g_1(t),$$
$$\partial_t u_2 = \nu\Delta u_2 - f(u_2) + g_2(t).$$

Замечание 2.1. Теперь мы совершим некоторые преобразования с этими уравнениями. Отметим, что все формальные выкладки корректны в силу того, что $u_1(t), u_2(t) \in \mathscr{A}_\Sigma$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и следовательно, $u_1, u_2 \in C_b(\mathbb{R}; H_1) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H_2)$, $\partial_t u_1, \partial_t u_2 \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H)$. Подробное обоснование этой техники преобразований изложено в [9], [16].

Обозначим теперь $w = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$. Тогда

$$\partial_t w - \nu \Delta w + f(u_1) - f(u_2) = g. \tag{2.2}$$

Предположим, что

$$|g_1(\tau) - g_2(\tau)| \leqslant \delta, \qquad t_0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{2.3}$$

где $t_0 = t - T_0$ (величина T_0 будет точно определена в дальнейшем). Умножая (2.2) на w и интегрируя по Ω, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\|w\|^2 + \big(f(u_1) - f(u_2), w\big) = (g, w), \tag{2.4}$$

$(\,\cdot\,,\cdot\,)$ обозначает скалярное произведение в $(L_2(\Omega))^N$. Из (1.2) следует, что $(f(v_1) - f(v_2), v_1 - v_2) \geqslant -C_4|v_1 - v_2|^2$ для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N$. Следовательно, из (2.4) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\|w\|^2 \leqslant C_4|w|^2 + (g, w).$$

Мы будем изучать величины $\rho(t) = \|w(t)\|^2/|w(t)|^2$ $(\geqslant \lambda_1)$ и $\xi(t) = |w(t)|$. (Аналогичное исследование проведено в [6].) В силу последнего неравенства имеем

$$\frac{d}{dt}\xi(t) + \nu\rho(t)\xi(t) \leqslant C_4\xi(t) + \delta. \tag{2.5}$$

Для функции ρ получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{(\nabla w, \nabla w)}{|w|^2} = \frac{2(\nabla w', \nabla w)}{|w|^2} - \frac{2\|w\|^2(w', w)}{|w|^4}\\ &= \frac{2}{|w|^2}\,\big(w', -\Delta w - \rho w\big) = \frac{2}{|w|^2}\big(\nu\Delta w - f(u_1) + f(u_2) + g, -\Delta w - \rho w\big).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Легко проверить, что

$$(\Delta w, -\Delta w - \rho w) = -|\Delta w + \rho w|^2.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}(\Delta w + \rho w, \Delta w + \rho w) &= (\Delta w, \Delta w + \rho w) + \rho(\Delta w, w) + \rho^2(w, w)\\ &= (\Delta w, \Delta w + \rho w) - \rho\|w\|^2 + \rho\|w\|^2 = (\Delta w, \Delta w + \rho w).\end{aligned}$$

Следовательно, в силу (2.6)

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \frac{2\nu}{|w|^2}|\Delta w + \rho w|^2 &= \frac{2}{|w|^2}\big(-f(u_1) + f(u_2) + g, -\Delta w - \rho w\big)\\ &\leqslant \frac{2}{|w|^2}|g|\,|\Delta w + \rho w| + \frac{2}{|w|^2}|f(u_1) - f(u_2)|\,|\Delta w + \rho w|.\end{aligned}$$

Поскольку

$$f(v_1) - f(v_2) = \left(\int_0^1 f_v\bigl(v_2 + \theta(v_1 - v_2)\bigr)\, d\theta\right)(v_1 - v_2)$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N$, используя (1.2) и неравенство Гёльдера, мы получаем

$$\begin{aligned}
|f(u_1) - f(u_2)|^2 &= \int_\Omega \left| \left(\int_0^1 f_v\bigl(u_1(x) + \theta(u_2(x) - u_1(x))\bigr)\, d\theta\right) w(x) \right|^2 dx \\
&\leqslant C_8 \int_\Omega \bigl(1 + |u_1(x)|^{p-2} + |u_2(x)|^{p-2}\bigr)^2 |w(x)|^2\, dx \\
&\leqslant C_8 \left(\int_\Omega \bigl(1 + |u_1(x)|^{p-2} + |u_2(x)|^{p-2}\bigr)^n\, dx\right)^{2/n} \\
&\qquad \times \left(\int_\Omega |w(x)|^{2n/(n-2)}\, dx\right)^{(n-2)/n}.
\end{aligned}$$

Для краткости рассмотрим случай $n \geqslant 3$ (для $n = 1, 2$ рассуждения аналогичны). Из условия $p \leqslant 2(n-1)/(n-2)$ следует, что $q = (p-2)n \leqslant 2n/(n-2)$ при $n \geqslant 3$. Следовательно, из вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned}
|f(u_1) - f(u_2)|^2 &\leqslant C_9 \bigl(1 + \|u_1\|^{(p-2)} + \|u_2\|^{(p-2)}\bigr)^2 \|w\|^2 \\
&\leqslant C_{10} \bigl(1 + R_1^{(p-2)}\bigr)^2 \|w\|^2.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} + \frac{2\nu}{|w|^2} |\Delta w + \rho w|^2 \\
&\qquad \leqslant \frac{2}{|w|^2} |g| |\Delta w + \rho w| + \frac{2}{|w|^2} C_{10}^{1/2} \bigl(1 + R_1^{(p-2)}\bigr) \|w\|\, |\Delta w + \rho w| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\nu |w|^2} |g|^2 + \frac{2\nu}{|w|^2} |\Delta w + \rho w|^2 + \frac{1}{\nu |w|^2} C_{10} \bigl(1 + R_1^{(p-2)}\bigr)^2 \|w\|^2
\end{aligned}$$

и

$$\frac{d\rho}{dt} \leqslant \frac{1}{\nu |w|^2} |g|^2 + \frac{1}{\nu} C_{10} \bigl(1 + R_1^{(p-2)}\bigr)^2 \rho. \tag{2.7}$$

Мы доказали два неравенства:

$$\frac{d}{dt}\xi + \nu \rho(t) \xi \leqslant C_4 \xi + \delta, \tag{2.8}$$

$$\frac{d\rho}{dt} \leqslant \frac{1}{\nu \xi^2} \delta^2 + \frac{1}{\nu} C_{10} \bigl(1 + R_1^{(p-2)}\bigr)^2 \rho. \tag{2.9}$$

Если $\nu\rho(\tau) \geqslant 2C_4$ ($\Leftrightarrow$ $\rho(\tau) \geqslant \rho_0 = 2C_4/\nu$) при всех $\tau \in [t_0, t]$, то в силу (2.8)

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{\nu\rho}{2} \xi \leqslant \delta, \qquad \rho(\tau) \geqslant \rho_0 \ \ \forall\, \tau \in [t_0, t]. \tag{2.10}$$

Если $\xi(\tau) \geqslant \xi_0 = \delta/(\nu\lambda_1)$ при всех $\tau \in [t_0, t]$, то в силу (2.9)

$$\frac{d\rho}{dt} \leqslant \nu\lambda_1^2 + \alpha\rho, \qquad \xi(\tau) \geqslant \xi_0 \ \ \forall\, \tau \in [t_0, t], \tag{2.11}$$

где $\alpha = \nu^{-1} C_{10}\bigl(1 + R_1^{(p-2)}\bigr)^2$.

Теперь, используя (2.11), получаем

$$\begin{aligned} \rho(t) &\leqslant \rho(t_0)\exp\bigl(\alpha(t - t_0)\bigr) + \nu\lambda_1^2 \int_{t_0}^{t} \exp\bigl(\alpha(t-\tau)\bigr)\, d\tau \\ &\leqslant \rho(t_0)\exp\bigl(\alpha(t - t_0)\bigr) + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha}\exp\bigl(\alpha(t - t_0)\bigr). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho(t) &\leqslant \left(\rho(t_0) + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha}\right)\exp\bigl(\alpha(t - t_0)\bigr) \\ &= \left(\rho(t_0) + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha}\right)\exp(\alpha T_0), \qquad T_0 = t - t_0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Из (2.10) вытекает, что

$$\xi(t) \leqslant \xi(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\nu\rho(\tau)}{2}\, d\tau\right) + \delta\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{\tau}^{t}\frac{\nu\rho(s)}{2}\, ds\right) d\tau. \tag{2.13}$$

Подчеркнем, что (2.12) и (2.13) имеют место при условии, что

$$\xi(\tau) \geqslant \xi_0, \quad \rho(\tau) \geqslant \rho_0 \qquad \forall\, \tau \in [t_0, t].$$

С другой стороны, очевидно, $\rho(\tau) = \|w\|^2/|w|^2 \geqslant \lambda_1$. Поэтому из (2.13) следует

$$\begin{aligned} \xi(t) &\leqslant \xi(t_0)\exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right) + \delta\int_{t_0}^{t}\exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t-\tau)\right) d\tau \\ &= \xi(t_0)\exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right) + \frac{2\delta}{\nu\lambda_1}\left(1 - \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right)\right) \\ &= 2\xi_0 + \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right)\bigl(\xi(t_0) - 2\xi_0\bigr), \end{aligned}$$

где $2\xi_0 = 2\delta/(\nu\lambda_1)$. А значит,

$$\xi(t) - 2\xi_0 \leqslant \exp\left(-\frac{\nu\lambda_1}{2}(t - t_0)\right)\bigl(\xi(t_0) - 2\xi_0\bigr).$$

В последнем неравенстве, очевидно, t_0 может быть заменено на любое $\tau \in [t_0, t]$. Таким образом, если $\xi(t) \geqslant 2\xi_0$, то $\xi(\tau) \geqslant 2\xi_0$ для любого $\tau \in [t_0, t]$. И мы имеем (2.12) и (2.13) при $\tau \in [t_0, t]$, если известно, что $\rho(\tau) \geqslant \rho_0$ при всех $\tau \in [t_0, t]$.

В неравенстве (2.12), очевидно, можно заменить t_0 любым $\tau \in [t_0, t]$, т.е.

$$\rho(\tau) + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \geqslant \rho(t)\exp\bigl(-\alpha(t-\tau)\bigr) \geqslant \rho(t)\exp(-\alpha T_0).$$

Начиная с этого места, будем предполагать, что

$$T_0 = \alpha^{-1} = \nu C_{10}^{-1}\bigl(1 + R_1^{(p-2)}\bigr)^{-2},$$

т.е. $\rho(\tau) + \nu\lambda_1^2/\alpha \geqslant \rho(t)e^{-1}$, $\tau \in [t - T_0, t]$. Наконец, если $e^{-1}\rho(t) \geqslant \rho_0 + \nu\lambda_1^2/\alpha$, то, очевидно,

$$\rho(\tau) \geqslant \rho_0 \qquad \forall\, \tau \in [t - T_0, t]. \tag{2.14}$$

Следовательно, если $\xi(t) \geqslant 2\xi_0$ и $\rho(t) \geqslant e(\rho_0 + \nu\lambda_1^2/\alpha)$, то (2.12) и (2.13) выполнены при всех $\tau \in [t - T_0, t]$. Более того,

$$\rho(\tau) \geqslant \frac{\rho(t)}{e} - \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} = \frac{1}{2e}\rho(t) + \left(\frac{1}{2e}\rho(t) - \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha}\right). \tag{2.15}$$

Предположим теперь, что

$$\rho(t) \geqslant \rho_1 \equiv 2e\left(\rho_0 + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha}\right),$$

т.е.

$$\frac{1}{2e}\rho(t) - \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \geqslant \rho_0. \tag{2.16}$$

Тогда последний член в (2.15) положителен. Из (2.15) и (2.16) вытекает, что

$$\rho(\tau) \geqslant \frac{1}{2e}\rho(t) \geqslant \rho_0 + \frac{\nu\lambda_1^2}{\alpha} \geqslant \rho_0 \qquad \forall\, \tau \in [t - T_0, t]. \tag{2.17}$$

Используя (2.13) и (2.17), получаем, что

$$\begin{aligned}
\xi(t) \leqslant \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t-t_0)\right)\xi(t_0) + \frac{4e\delta}{\nu\rho(t)}\left(1 - \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t-t_0)\right)\right),& \\
\xi(t) - \frac{4e\delta}{\nu\rho(t)} \leqslant \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t-t_0)\right)\left(\xi(t_0) - \frac{4e\delta}{\nu\rho(t)}\right)& \\
\leqslant \exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t-t_0)\right)\xi(t_0).&
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Значит, если $\xi(t) \geqslant 8e\delta/(\nu\rho_1)$ (и конечно, $\rho(t) \geqslant \rho_1$, $\xi(t) \geqslant 2\xi_0$), то

$$\frac{1}{2}\xi(t) \leqslant \xi(t) - \frac{4e\delta}{\nu\rho(t)}\,,$$

и в силу (2.18) получаем

$$\xi(t) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)(t-t_0)\right)\xi(t_0).$$

Мы доказали следующее

Утверждение 2.1. *Если*

$$\xi(t) \geqslant \delta \max\left\{\frac{2}{\nu\lambda_1}; \frac{8e}{\nu\rho_1}\right\} = \frac{\delta}{\nu\lambda_1}\Gamma_1$$

и $\rho(t) \geqslant \rho_1$, *то*

$$\xi(t) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\nu}{4e}\rho(t)T_0\right)\xi(t-T_0),$$

где $\rho_1 = 2e(2C_4/\nu + \nu\lambda_1^2/\alpha)$, $T_0 = \alpha^{-1}$, $\alpha = C_{10}(1 + R_1^{(p-2)})^2\nu^{-1}$, $R_1 = C_7/\nu^{3/2}$, $\Gamma_1 \equiv \max\{2; 8e\lambda_1/\rho_1\}$.

Рассмотрим теперь проекторы P_m и Q_m, $P_mH \oplus Q_mH = H$, $P_mh = \sum_{i=1}^m (h, w_i)w_i$, где $\{w_i\}$ – собственные функции оператора $-\Delta$ с нулевыми граничными условиями: $-\Delta w_i = \lambda_i w_i, w_i\big|_{\partial\Omega} = 0, 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$.

Если

$$|Q_m w|^2 \geqslant |P_m w|^2,$$

то, очевидно,

$$\rho = \frac{\|w\|^2}{|w|^2} = \frac{\|Q_m w\|^2 + \|P_m w\|^2}{|Q_m w|^2 + |P_m w|^2} \geqslant \frac{\|Q_m w\|^2}{2|Q_m w|^2} \geqslant \frac{\lambda_{m+1}}{2}\,. \tag{2.19}$$

Из утверждения 2.1 вытекает

Теорема 2.1 (свойство сжатия). *Пусть* $\lambda_{m+1} \geqslant 2\rho_1$ *и* $|g_1(\tau) - g_2(\tau)| < \delta$ *при* $\tau \in [t - T_0, t]$. *Пусть также* $u_1 \in \mathscr{K}_{g_1}$, $u_2 \in \mathscr{K}_{g_2}$. *Если*

$$\big|Q_m\big(u_1(t) - u_2(t)\big)\big|^2 \geqslant \big|P_m\big(u_1(t) - u_2(t)\big)\big|^2,$$

то

$$\xi(t) = |u_1(t) - u_2(t)| < \max\left\{\frac{\delta}{\nu\lambda_1}\Gamma_1; \theta|u_1(t-T_0) - u_2(t-T_0)|\right\}, \tag{2.20}$$

где

$$\theta = 2\exp\left(-\frac{\nu\lambda_{m+1}}{8e}T_0\right).$$

Замечание 2.2. Отметим асимптотическое поведение параметров ρ_1, T_0, Γ_1, где ν мало. Очевидно,

$$\rho_1 = O(\nu^{-1}), \qquad T_0 = O(\nu^{(3p-5)}), \quad (3p-5) \leqslant \frac{n+4}{n-2}\,, \qquad \Gamma_1 = 2. \tag{2.21}$$

§ 3. Колмогоровская ε-энтропия равномерного аттрактора $\mathscr{A}_\Sigma$

Отметим, что в силу (II)

$$\Sigma_{lT_0,(l+1)T_0} = \Sigma_{mT_0,(m+1)T_0} \qquad \forall\, l, m \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

где $\Sigma_{a,b}$ обозначает множество функций $g \in \Sigma$, ограниченных на интервал $[a,b]$. Пусть $\mathscr{A}_\Sigma = \mathscr{A}$ – равномерный аттрактор семейства процессов, отвечающих задаче (0.1), (0.2). Пусть

$$S_k(g) = \mathscr{K}_{g;0,kT_0}$$

обозначает множество решений $u \in \mathscr{K}_g$, ограниченных на интервал $[0, kT_0]$ для каждого $g \in \Sigma$. Целое число k будет определено далее. Пусть также

$$S_k(\Sigma) = \bigcup_{g\in\Sigma} S_k(g).$$

Поскольку множество Σ_{0,kT_0} компактно в $C([0,kT_0];H)$ (условие (I)), оно может быть покрыто конечным числом шаров $B(\varphi_j,\delta)$, $j = 1,\dots,N$, $N = N(\delta,k)$ при любом $\delta > 0$:

$$\Sigma_{0,kT_0} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B(\varphi_j,\delta), \qquad B(\varphi_j,\delta) \subset C([0,kT_0];H).$$

Здесь $B(\varphi,\delta)$ – шар в $C([0,kT_0];H)$, имеющий центр φ и радиус δ. Тогда

$$S_k(\Sigma) = \bigcup_{j=1}^{N}\biggl(\bigcup_{g\in B(\varphi_j,\delta)\cap\Sigma} S_k(g)\biggr) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \bigcup_{j=1}^{N} S_k^j. \tag{3.2}$$

Мы будем исследовать множества

$$\mathscr{A}^j(t_i) = \{u(t_i) : u \in S_k^j\}, \qquad t_i = iT_0, \quad i = 0,\dots,k. \tag{3.3}$$

Пусть $u_1(t), u_2(t) \in S_k^j$ и они являются решениями (0.1), (0.2) с внешними силами g_1, $g_2 \in \Sigma$, принадлежащими $B(\varphi_j,\delta)$. Пусть $B_r(u_0)$ обозначает шар в H с центром в u_0 и радиусом r такой, что $u_1(t_i), u_2(t_i) \in B_r(u_0)$ для некоторого фиксированного $i = 0,\dots,k-1$. По теореме 2.1, если $\lambda_{m+1} \geqslant 2\rho_1$, то поскольку $|g_1(\tau) - g_2(\tau)| \leqslant 2\delta$, $\tau \in [t_i, t_{i+1}]$, или

$$\bigl|Q_m\bigl(u(t_{i+1}) - v(t_{i+1})\bigr)\bigr|^2 < \bigl|P_m\bigl(u(t_{i+1}) - v(t_{i+1})\bigr)\bigr|^2, \tag{3.4}$$

или

$$|u(t_{i+1}) - v(t_{i+1})| \leqslant \max\biggl\{\Gamma_1\frac{2\delta}{\lambda_1\nu}; \theta|u(t_i) - v(t_i)|\biggr\} \leqslant \max\biggl\{\Gamma_1\frac{2\delta}{\lambda_1\nu}; 2\theta r\biggr\}, \tag{3.5}$$

где

$$\theta = 2\exp\biggl(-\frac{\nu\lambda_{m+1}}{8e}T_0\biggr), \qquad t_{i+1} - t_i = T_0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_i^j = \{u(t_{i+1}) : u \in S_k^j,\ u(t_i) \in B_r(u_0)\}, \qquad i = 0, \dots, k-1.$$

Выберем максимальное подмножество $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, которое удовлетворяет (3.4). В силу леммы Цорна такое множество, очевидно, существует. Тогда

$$\operatorname{dist}(u, \mathfrak{M}) \leqslant \max\left\{\Gamma_1 \frac{2\delta}{\lambda_1 \nu}; 2\theta r\right\} \qquad \forall\, u \in \mathfrak{N} \setminus \mathfrak{M}. \tag{3.7}$$

Если $u_1, u_2 \in S_k^j$, $u_1(t_i), u_2(t_i) \in B_r(u_0)$, то для $w = u_1 - u_2$ имеем

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\rho|w|^2 \leqslant 2\delta|w| + C_4|w|^2, \\ \frac{d}{dt}|w| \leqslant 2\delta + C_4|w|. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} |u_1(t_{i+1}) - u_2(t_{i+1})| &\leqslant \exp(C_4 T_0)|u_1(t_i) - u_2(t_i)| + \exp(C_4 T_0) C_4^{-1} 2\delta \\ &\leqslant 2r\Gamma_2 + 2\delta C_4^{-1}\Gamma_2, \qquad \Gamma_2 = \exp(C_4 T_0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{diam} \mathfrak{N} \leqslant 2r\Gamma_2 + 2\delta C_4^{-1}\Gamma_2. \tag{3.9}$$

Выберем теперь m достаточно большим (см. (3.19)) и зафиксируем его. В частности, пусть

$$\theta \leqslant \frac{1}{8}\,. \tag{3.10}$$

Предположим, что δ и r удовлетворяют неравенству

$$2\theta r \geqslant \frac{\Gamma_1 2\delta}{\lambda_1 \nu} \tag{3.11}$$

(см. (3.7)). В силу (3.9) и (3.11)

$$\operatorname{diam} P_m \mathfrak{M} \leqslant 2r\Gamma_2 + 2\delta C_4^{-1}\Gamma_2 \leqslant 2r(\Gamma_2 + \lambda_1 \nu\theta C_4^{-1}\Gamma_1^{-1}\Gamma_2) \equiv r\Gamma_3,$$

где $\Gamma_3 = 2\Gamma_2(1 + \lambda_1\nu\theta C_4^{-1}\Gamma_1^{-1})$.

Лемма 3.1. *Шар B_R в $\mathbb{R}^n$ радиуса R можно покрыть с помощью не более $\varkappa_n(R+2)^n$ шаров B_1, где $\varkappa_n \leqslant 2^n$* (см. [21]).

На самом деле, оценка для $\varkappa_n$ может быть существенно улучшена. Известно, например, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \varkappa_n}{n} = 0$$

(подробнее см. в [21]). Величина $\varkappa_n$ называется *наименьшей плотностью покрытия* $\mathbb{R}^n$.

Следствие 3.1. *Любое множество* $M \subset \mathbb{R}^n$ *диаметра* D *можно покрыть не более* $(4D+4)^n$ *шарами* B_1 *радиуса* 1, *центры которых принадлежат* M.

Доказательство. В самом деле, множество M принадлежит шару $B_D(m)$ при любом $m \in M$. Поэтому по лемме 3.1 оно может быть покрыто $\varkappa_n(2D+2)^n \leqslant (4D+4)^n$ шарами $B_{1/2}$. Рассмотрим те из них, которые покрывают M. Для каждого такого шара $B_{1/2}(a_i)$ найдется некоторая точка $m_i \in M \cap B_{1/2}(a_i)$. Следовательно, $B_{1/2}(a_i) \subseteq B_1(m_i)$ и $\{B_1(m_i)\}$ также покрывают M, $m_i \in M$ и $\#\{B_1(m_i)\} \leqslant (4D+4)^n$.

Используя следствие 3.1, заключаем, что множество $P_m\mathfrak{M}$ может быть покрыто

$$q \leqslant \left(\frac{4r\Gamma_3 + 4\theta r}{\theta r}\right)^m = \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4\right)^m \tag{3.12}$$

шарами радиуса θr с центрами в $P_m\mathfrak{M}$, например, $B_{\theta r}(P_m u_1), \dots, B_{\theta r}(P_m u_q)$, где $P_m u_i \in P_m\mathfrak{M}$.

Рассмотрим шары $B_{4\theta r}(P_m u_1), \dots, B_{4\theta r}(P_m u_q)$ в H. Для любой $v \in \mathfrak{N}$ существует $u \in \mathfrak{M}$ (см. (3.7), (3.11)) такая, что $|u-v| \leqslant 2\theta r$.

Для $P_m u$ найдется некоторая u_l, $l \in \{1, \dots, q\}$, такая, что $P_m u \in B_{\theta r}(P_m u_l)$. Но $u, u_l \in \mathfrak{M}$, поэтому

$$|u-u_l| \leqslant |P_m u - P_m u_l| + |Q_m u - Q_m u_l| \leqslant 2|P_m u - P_m u_l| \leqslant 2\theta r.$$

Следовательно, $v \in B_{4\theta r}(u_l)$. И значит,

$$\mathfrak{N} \subset \bigcup_{j=1}^{q} B_{4\theta r}(u_j) \subset \bigcup_{j=1}^{q} B_{r/2}(u_j), \tag{3.13}$$

где q определено в (3.12). При переходе к последнему включению мы воспользовались неравенством (3.10).

В заключение получаем следующую лемму.

Лемма 3.2. *Пусть* m – *фиксированное число, которое удовлетворяет* (3.10). *Тогда множество* $\mathfrak{N}$ *может быть покрыто с помощью* $q \leqslant (4\Gamma_3/\theta + 4)^m$ *шаров радиуса* $r/2$ *в* H, *где* r *удовлетворяет* (3.11).

Заметим, что

$$\mathscr{A} = \bigcup_{j=1}^{N} \mathscr{A}^j(t_i) \tag{3.14}$$

для любого $i = 1, \dots, k$ (см. (1.4), (3.1) и (3.3)). В то же время в силу (2.1), очевидно, $\mathscr{A} \subset B_{R_0}(0)$. Применим лемму 3.2 к

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0^j(1) = \bigl\{u(t_1) : u \in S^j,\ u(t_0) \in B_{R_0}(0)\bigr\}, \qquad t_0 = 0, \quad r = R_0,$$

получим покрытие $B_{R_0/2}(u_{1,j}), \dots, B_{R_0/2}(u_{q,j})$. Значит, множество $\mathfrak{N}_0^j(1) = \mathscr{A}^j(t_1)$ может быть покрыто q шарами радиуса $R_0/2$, если $r = R_0$ удовлетворяет (3.11). Рассмотрим q множеств $\mathfrak{N}_1^j(1), \mathfrak{N}_1^j(2), \dots, \mathfrak{N}_1^j(q)$, где

$$\mathfrak{N}_1^j(l) = \bigl\{u(t_2) : u \in S_k^j,\ u(t_1) \in B_{R_0/2}(u_{l,j})\bigr\}, \qquad l = 1, \dots, q.$$

Теперь применим лемму 3.2 к каждому из множеств $\mathfrak{N}_1^j(l)$ и получим q^2 шаров радиуса $R_0/4$, которые покрывают $\mathscr{A}^j(t_2)$. После k таких шагов мы получим семейство q^k шаров радиуса $R_0/2^k$, которое покрывает множество $\mathscr{A}^j(t_k)$ при условии, что

$$2\theta\frac{R_0}{2^{k-1}} \geqslant \frac{\Gamma_1 2\delta}{\lambda_1\nu}\,. \tag{3.15}$$

Но

$$\mathscr{A}=\bigcup_{j=1}^{N}\mathscr{A}^j(t_k), \qquad N=N_\delta(\Sigma_{0,kT_0}).$$

Поэтому доказана

Лемма 3.3. *Множество $\mathscr{A}_\Sigma$ может быть покрыто с помощью*

$$N_{R_0/2^k}(\mathscr{A}_\Sigma)\leqslant N_\delta(\Sigma_{0,kT_0})q^k \tag{3.16}$$

шаров радиуса $R_0/2^k$, где q и k удовлетворяют (3.12) *и* (3.15), *соответственно.*

Пусть k удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$2\theta\frac{R_0}{2^{k}} \geqslant \frac{\Gamma_1 2\delta}{\lambda_1\nu} > 2\theta\frac{R_0}{2^{k+1}}\,. \tag{3.17}$$

Тогда

$$\delta > \frac{\theta\lambda_1\nu}{\Gamma_1}\frac{R_0}{2^{k+1}}\,. \tag{3.18}$$

Существуют положительные константы $\overline{c}_0,\overline{c}_1$, зависящие от формы множества Ω, такие, что

$$\overline{c}_0k^{2/n}\lambda_1\leqslant\lambda_k\leqslant\overline{c}_1k^{2/n}\lambda_1, \qquad k=1,2,\dots\,.$$

Следовательно, из (3.6) вытекает, что

$$2\exp\bigl(-\nu T_0\lambda_1c_1(m+1)^{2/n}\bigr)\leqslant\theta\leqslant 2\exp\bigl(-\nu T_0\lambda_1c_0(m+1)^{2/n}\bigr), \tag{3.19}$$

где $c_0=\overline{c}_0/(8e)$, $c_1=\overline{c}_1/(8e)$.

Выберем минимальное целое число m, которое удовлетворяет неравенствам

$$2\exp\bigl(-\nu T_0\lambda_1c_0(m+1)^{2/n}\bigr)\leqslant\frac{1}{8}\,, \quad \lambda_{m+1}\geqslant\overline{c}_0(m+1)^{2/n}\lambda_1\geqslant2\rho_1, \tag{3.20}$$

т.е.

$$(m+1)^{2/n}\geqslant\max\Bigl\{\frac{4\ln2}{\nu T_0\lambda_1c_0};\frac{2\rho_1}{\overline{c}_0\lambda_1}\Bigr\}\overset{\mathrm{def}}{\equiv}D>m^{2/n}. \tag{3.21}$$

Пусть

$$\frac{R_0}{2^k}\geqslant\varepsilon>\frac{R_0}{2^{k+1}}\implies k\leqslant\log_2\frac{R_0}{\varepsilon}\,. \tag{3.22}$$

Применяя лемму 3.3 с $k+1$ вместо k и используя (3.18), (3.22), (3.16) и (3.17), получаем

$$
\begin{aligned}
N_\varepsilon(\mathscr{A}) &\leqslant N_{\frac{R_0}{2^{k+1}}}(\mathscr{A}) \leqslant N_\delta(\Sigma_{0,(k+1)T_0})q^{k+1} \\
&\leqslant N_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{\Gamma_1}\frac{R_0}{2^{k+1}}}(\Sigma_{0,(k+1)T_0})q^{k+1} \\
&\leqslant N_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0})\biggl(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\biggr)^{m(k+1)} \\
&\leqslant N_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0})\biggl(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\biggr)^{m\log_2(2R_0/\varepsilon)}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, для колмогоровской ε-энтропии справедливо следующее:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}) &= \log_2 N_\varepsilon(\mathscr{A}) \\
&\leqslant \log_2\Bigl(N_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}(\Sigma_{0,(k+1)T_0})\Bigr) + m\log_2\frac{2R_0}{\varepsilon}\log_2\biggl(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\biggr) \\
&\leqslant \mathbf{H}_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}\Bigl(\Sigma_{0,T_0\log_2(2R_0/\varepsilon)}\Bigr) + D^{n/2}\log_2\frac{2R_0}{\varepsilon}\log_2\biggl(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\biggr).
\end{aligned}
$$

В результате доказана

Теорема 3.1. *При* $0<\varepsilon\leqslant R_0$

$$
\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}) \leqslant \mathbf{H}_{\frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}\Bigl(\Sigma_{0,T_0\log_2(2R_0/\varepsilon)}\Bigr) + D^{n/2}\log_2\frac{2R_0}{\varepsilon}\log_2\biggl(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\biggr), \qquad (3.23)
$$

где

$$
D=\max\biggl\{\frac{4\ln 2}{\nu T_0\lambda_1 c_0};\frac{2\rho_1}{\overline{c}_0\lambda_1}\biggr\}, \qquad \theta = 2\exp\biggl(-\frac{\nu\lambda_{m+1}T_0}{8e}\biggr),
$$

а m *определено в* (3.21).

Замечание 3.1. Выясним асимптотическое поведение правой части неравенства (3.23), когда ν мало.

Пусть $\nu=\nu_0$ является решением алгебраического уравнения

$$
\frac{4\ln 2}{\nu T_0\lambda_1 c_0} = \frac{2\rho_1}{\overline{c}_0\lambda_1},
$$

где $T_0=T_0(\nu)$, $\rho_1=\rho_1(\nu)$ (см. утверждение 2.1).

Тогда, очевидно, $D = 4\ln\bigl(2/(\nu T_0\lambda_1 c_0)\bigr)$ при $\nu\leqslant\nu_0$. Поэтому в силу (3.19) и (3.21)

$$
c_2 \overset{\text{def}}{\equiv} 2\biggl(\frac{1}{16}\biggr)^{(\frac{c_1}{c_0})2^{2/n}} \leqslant 2\biggl(\frac{1}{16}\biggr)^{(\frac{c_1}{c_0})(\frac{m+1}{m})^{2/n}} \leqslant \theta,
$$

т.е.

$$
c_2\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{8}. \qquad (3.24)
$$

Значит, в силу (3.24) из (3.23) получаем

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}) \leqslant \mathbf{H}_{\frac{c_2\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon}\big(\Sigma_{0,T_0\log_2(2R_0/\varepsilon)}\big) + D^{n/2}\log_2\frac{2R_0}{\varepsilon}\log_2\left(\frac{4\Gamma_3}{c_2}+4\right)$$

при $0<\nu\leqslant\nu_0$.

В соответствии с (2.21) $T_0 = O(\nu^{(3p-5)})$ и $D = 4\ln 2/(\nu T_0\lambda_1 c_0) = O(\nu^{-(3p-4)})$ при $0<\nu\leqslant\nu_0$. (Мы изучаем случай $2\leqslant p\leqslant 2(n-1)/(n-2)$.) Для других величин имеем

$$R_0 = O(\nu^{-1}),\qquad \Gamma_1 = 2,\qquad \Gamma_3 = 2+o(1).$$

Следовательно,

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}) \leqslant \mathbf{H}_{O(\nu)\varepsilon}\left(\Sigma_{0,O(\nu^{(3p-5)})\log_2(O(\nu^{-1})/\varepsilon)}\right) + O\left(\frac{1}{\nu^{(3p-4)}}\right)^{n/2}\log_2\left(\frac{O\left(\nu^{-1}\right)}{\varepsilon}\right). \tag{3.25}$$

Изучим фрактальную размерность $\mathbf{d}_F(\mathscr{A}_\Sigma)$ равномерного аттрактора. Покажем сначала, что величина

$$\limsup_{\varepsilon_1\to 0+}\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\left(\Sigma_{0,\tau\log_2(K/\varepsilon_1)}\right)}{\log_2(1/\varepsilon_1)}$$

не зависит от $K>0$. В самом деле, при $K\geqslant 1$ имеем

$$\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\left(\Sigma_{0,\tau\log_2(1/\varepsilon_1)}\right)}{\log_2(1/\varepsilon_1)} \leqslant \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\left(\Sigma_{0,\tau\log_2(K/\varepsilon_1)}\right)}{\log_2(1/\varepsilon_1)}\,. \tag{3.26}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\big(\Sigma_{0,\tau\log_2(K/\varepsilon_1)}\big)}{\log_2(1/\varepsilon_1)} &\leqslant \frac{\mathbf{H}_{\frac{\varepsilon_1}{K}}\big(\Sigma_{0,\tau\log_2(K/\varepsilon_1)}\big)}{\log_2(1/\varepsilon_1)}\\ &= \frac{\mathbf{H}_{\frac{\varepsilon_1}{K}}\big(\Sigma_{0,\tau\log_2(K/\varepsilon_1)}\big)}{\log_2(K/\varepsilon_1)}\cdot\frac{\log_2(1/\varepsilon_1)+\log_2 K}{\log_2(1/\varepsilon_1)}\,.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Возьмем $\limsup_{\varepsilon_1\to 0+}$ от обеих частей (3.26) и (3.27). Получим

$$\limsup_{\varepsilon_1\to 0+}\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\big(\Sigma_{0,\tau\log_2(K/\varepsilon_1)}\big)}{\log_2(1/\varepsilon_1)} = \limsup_{\varepsilon_1\to 0+}\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\big(\Sigma_{0,\tau\log_2(1/\varepsilon_1)}\big)}{\log_2(1/\varepsilon_1)}\,. \tag{3.28}$$

Аналогично доказывается случай $K<1$.

Определим следующие величины:

$$\mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \limsup_{\varepsilon_1\to 0+}\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\big(\Sigma_{0,\tau\log_2(1/\varepsilon_1)}\big)}{\log_2(1/\varepsilon_1)}\,, \tag{3.29}$$

зависящие от Σ и положительного параметра τ.

Если, например, $\Sigma = \mathscr{H}(g_0)$, где g_0 – гладкая квазипериодическая функция с k независимыми частотами (см. §1), то $\mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau) = k$ для любого τ, так как $\mathscr{H}(g_0)$ является липшиц-непрерывным образом k-мерного тора $\mathbb{T}^k$ и $N_\varepsilon(\mathbb{T}^k) \approx C(1/\varepsilon)^k$. Другие примеры будут рассмотрены в дальнейшем.

Если $\mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau) < +\infty$ для некоторого множества Σ, то будем говорить, что Σ имеет локальную фрактальную размерность $\mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau)$ в пространстве $C(\mathbb{R};H)$. Положим $\tau = T_0$.

Следствие 3.2. *Предположим, что* $\mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(\Sigma,T_0) < +\infty$. *Тогда*

$$\mathbf{d}_F(\mathscr{A}_\Sigma) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma)}{\log_2(1/\varepsilon)} \leqslant \mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(\Sigma,T_0) + D^{n/2}\log_2\biggl(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\biggr). \tag{3.30}$$

Доказательство. Разделив (3.23) на $\log_2(1/\varepsilon)$ и положив $\varepsilon_1 = \dfrac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_F(\mathscr{A}_\Sigma) &\leqslant \limsup_{\varepsilon_1\to 0+} \frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\Bigl(\Sigma_{0,T_0\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{R_0\theta\lambda_1\nu}{\Gamma_1}\right)}\Bigr)}{\log_2\frac{1}{\varepsilon_1} + \log_2\frac{2\Gamma_1}{\theta\lambda_1\nu}} + D^{n/2}\log_2\biggl(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\biggr)\\ &= \mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(\Sigma,T_0) + D^{n/2}\log_2\biggl(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\biggr).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались (3.28) с $K = R_0\theta\lambda_1\nu/\Gamma_1$.

Пусть $\gamma(\varepsilon)$ – некоторая положительная монотонная функция такая, что $\gamma(\varepsilon)\to+\infty$, $\varepsilon\to 0+$.

Следствие 3.3. *Пусть*

$$\frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon)} \to 0, \qquad \varepsilon\to 0+,$$

и предположим, что для каждого $K>0$

$$\begin{aligned}&\limsup_{\varepsilon_1\to 0+}\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\bigl(\Sigma_{0,T_0\log_2(K/\varepsilon_1)}\bigr)}{\gamma(\varepsilon_1)}\\ &\qquad = \limsup_{\varepsilon_1\to 0+}\frac{\mathbf{H}_{\varepsilon_1}\bigl(\Sigma_{0,T_0\log_2(1/\varepsilon_1)}\bigr)}{\gamma(\varepsilon_1)} \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \mathbf{d}_\gamma^{\mathrm{loc}}(\Sigma,T_0) < +\infty.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Тогда

$$\mathbf{d}_\gamma(\mathscr{A}_\Sigma) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \limsup_{\varepsilon\to 0+}\frac{\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma)}{\gamma(\varepsilon)} \leqslant \mathbf{d}_\gamma^{\mathrm{loc}}(\Sigma,T_0). \tag{3.32}$$

Для доказательства разделим (3.23) на $\gamma(\varepsilon)$. Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0+$ и используя (3.31), получим (3.32), поскольку второй член

$$\frac{D^{n/2}\log_2(2R_0/\varepsilon)\log_2(4\Gamma_3/\theta+4)}{\gamma(\varepsilon)}$$

стремится к нулю при $\varepsilon\to 0+$.

Замечание 3.2. Из неравенства (3.32) следует

$$N_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma) \leqslant 2^{(\mathbf{d}_\gamma^{\mathrm{loc}}(\Sigma,T_0)+\rho)\gamma(\varepsilon)} \qquad \forall\, \rho > 0$$

для достаточно малых $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(\rho)$.

Рассмотрим теперь другие важные характеристики компактного множества B в метрическом пространстве, *функциональную размерность* $\mathbf{adf}(B)$ и *метрический порядок* $\mathbf{q}(B)$. По определению (см. [5])

$$\mathbf{adf}(B) = \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon(B)}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)}\,, \qquad \mathbf{q}(B) = \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon(B)}{\log_2(1/\varepsilon)}\,.$$

Очевидно, если $0 < \mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(B) < \infty$, то $\mathbf{adf}(B) = 1$ и $\mathbf{q}(B) = 0$. Таким образом, величины $\mathbf{adf}(B)$ и $\mathbf{q}(B)$ описывают, в некотором смысле, множества, имеющие бесконечную фрактальную размерность.

По аналогии с (3.29) и (3.31) определим *локальную функциональную размерность* $\mathbf{adf}^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau)$ и *локальный метрический порядок* $\mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau)$ множества Σ в пространстве $C(\mathbb{R};H)$:

$$\mathbf{adf}^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon\bigl(\Sigma_{0,\tau\log_2(1/\varepsilon)}\bigr)}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)}\,, \tag{3.33}$$

$$\mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log_2 \mathbf{H}_\varepsilon\bigl(\Sigma_{0,\tau\log_2(1/\varepsilon)}\bigr)}{\log_2(1/\varepsilon)}\,. \tag{3.34}$$

Заметим, что правые части равенств (3.33) и (3.34) не меняются, если в них заменить $\Sigma_{0,\tau\log_2(1/\varepsilon)}$ на $\Sigma_{0,\tau\log_2(K/\varepsilon)}$ при любом $K > 0$. Доказательство аналогично приведенному выше для величины $\mathbf{d}_F^{\mathrm{loc}}(\Sigma,\tau)$.

Предположим, что при $\tau = T_0$ правая часть (3.33) больше 1, а правая часть (3.34) больше 0. Тогда справедливо

Следствие 3.4. *Для равномерного аттрактора $\mathscr{A}_\Sigma$ имеют место следующие неравенства*:

$$\mathbf{adf}(\mathscr{A}_\Sigma) \leqslant \mathbf{adf}^{\mathrm{loc}}(\Sigma,T_0), \qquad \mathbf{q}(\mathscr{A}_\Sigma) \leqslant \mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(\Sigma,T_0).$$

§ 4. Оценки для ε-энтропии и метрического порядка некоторых множеств Σ

В этом параграфе будут рассмотрены три класса множеств Σ, которые удовлетворяют условиям (I) и (II). Будут получены оценки для ε-энтропии и для метрического порядка множеств из этих классов.

4.1. Некоторые почти периодические функции. Как известно, решения некоторых линейных краевых задач имеют вид:

$$v_0(x,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(C_k^0 e^{i\mu_k s} + \overline{C}_k^0 e^{-i\mu_k s}\bigr) e_k(x), \qquad \operatorname{Im}\mu_k = 0. \tag{4.1}$$

Пусть, например, $e_k(x)$ – собственные функции эллиптического оператора

$$\Delta e_k(x) - V(x)e_k(x) = -\lambda_k e_k(x), \quad x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \quad e_k\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.2}$$

где $\lambda_k > 0, |e_k| = 1, k = 1, 2, \dots$. Тогда (4.1) является решением гиперболического уравнения

$$\partial_t^2 u = \Delta u - V(x)u, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$\mu_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

(Мы не приводим здесь условий на функцию $V(x)$.) Предполагается, что числа $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ рационально независимы. Теперь если

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k^0|^2 < +\infty, \tag{4.3}$$

то (4.1) является почти периодической функцией со значениями в $H = L_2(\Omega)$. Предположим, что для некоторого числа $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |k|^{2\alpha} |C_k^0|^2 = M^2. \tag{4.4}$$

Отметим, что

$$\mu_k = a_k |k|^{1/n}, \quad 0 < a \leqslant a_k \leqslant a', \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим шкалу пространств H_β, соответствующую оператору $\bigl\{\Delta e - V(x)e,\ e|_{\partial\Omega} = 0\bigr\}$, $H = H^0$. Положим $\beta = n\alpha$. Пусть $v = \Sigma_{k=1}^{\infty} A_k e_k$ – любая функция из H_β. Очевидно, что следующая норма

$$\|v\|_\beta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha} |A_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k^{1/n})^{2n\alpha} |A_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k^{1/n})^{2\beta} |A_k|^2 \tag{4.5}$$

эквивалентна норме

$$\|v\|_{H^\beta}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2\beta} |A_k|^2,$$

поскольку $k^\alpha = (k^{1/n})^{n\alpha} = O(\mu_k^\beta)$. Ниже мы будем использовать норму (4.5) в H_β.

Условие (4.4) означает, что

$$v_0(\,\cdot\,, t) \in H^\beta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко доказать, что оболочка $\mathscr{H}(v_0) = \mathscr{H}_\alpha(v_0)$ функции $v_0(x, s) = v_0(t)$ в $C_b(\mathbb{R}; H^\beta)$ состоит из функций

$$v(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{i\mu_k s} + \overline{C}_k e^{-i\mu_k s}) e_k, \quad |C_k| = |C_k^0|,$$

и
$$\|v(s)\|_\beta^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}|k|^{2\alpha}|C_k|^2 = 4M^2. \tag{4.6}$$
Это утверждение непосредственно вытекает из условия рациональной независимости чисел $\{\mu_k\}$.

Оболочка $\mathscr{H}_\alpha(v_0)$ компактна в $C_b(\mathbb{R};H)$. Очевидно, для каждой функции $v(s)\in\mathscr{H}(v_0)$ множество соответствующих коэффициентов $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ принадлежит эллипсоиду $E_\alpha(M)$:
$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{2\alpha}|C_k|^2 = M^2 \tag{4.7}$$
в пространстве $l_2 = \bigl\{\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \|\{C_k\}\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2 < \infty\bigr\}$. Вычислим расстояние между любыми двумя функциями $v_1(s), v_2(s)\in\mathscr{H}_\alpha(v_0)$ в $C_b(\mathbb{R};H)$:
$$\|v_1 - v_2\|_{C_b(\mathbb{R};H)}^2 = \sup_{s\in\mathbb{R}}\|v_1(s)-v_2(s)\|_H^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty}|C_k^1 - C_k^2|^2.$$
Таким образом,
$$\mathbf{H}_\varepsilon\bigl(\mathscr{H}_\alpha(v_0)\bigr) \leqslant \mathbf{H}_{\varepsilon/2}\bigl(E_\alpha(M)\bigr). \tag{4.8}$$

Оценим сверху ε-энтропию $\mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M),l_2) = \mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M))$ множества $E_\alpha(M)$, измеренную в пространстве l_2. В работе [5] доказано, что ε-энтропия $\mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M))$ удовлетворяет неравенству
$$\mathbf{H}_\varepsilon\bigl(E_\alpha(M)\bigr) \leqslant c\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}, \tag{4.9}$$
где c зависит от α и γ и не зависит от ε. Поскольку множество $\mathscr{H}_\alpha(v_0)\Subset C_b(\mathbb{R};H)$ удовлетворяет (4.8), то из (4.9) следует

Теорема 4.1. *Для ε-энтропии $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{H}_\alpha(v_0)) = \mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{H}_\alpha(v_0), C_b(\mathbb{R};H))$ множества $\mathscr{H}_\alpha(v_0)$, измеренной в $C_b(\mathbb{R};H)$, справедлива следующая оценка сверху*:
$$\mathbf{H}_\varepsilon\bigl(\mathscr{H}_\alpha(v_0)\bigr) \leqslant \mathbf{H}_{\varepsilon/2}\bigl(E_\alpha(M)\bigr) \leqslant c\left(\frac{2M}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}.$$

Следствие 4.1. *Для метрического порядка множества $\mathscr{H}_\alpha(v_0)$ в $C_b(\mathbb{R};H)$ получаем*
$$\mathbf{q}\bigl(\mathscr{H}_\alpha(v_0)\bigr) = \limsup_{\varepsilon\to0+}\frac{\log_2\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{H}(v_0))}{\log_2(1/\varepsilon)} \leqslant \frac{1}{\alpha}. \tag{4.10}$$

Замечание 4.1. На самом деле, в (4.10) имеет место равенство, так как $\mathbf{H}_\varepsilon(E_\alpha(M))$ удовлетворяет аналогичным (4.9) нижним оценкам (подробнее см. в [5]).

Теперь, для некоторого заданного вектора $a\in\mathbb{R}^N$ рассмотрим множество $\Sigma = a\cdot\mathscr{H}_\alpha(v_0)\subset C_b(\mathbb{R};H)$. Множество Σ удовлетворяет (I) и (II). Пусть $\mathscr{A}_\Sigma$ – равномерный аттрактор системы реакции-диффузии с таким множеством Σ. Воспользовавшись теоремой 3.1, получим оценку для $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma)$.

Следствие 4.2. *Справедливо следующее*:

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma) \leqslant \mathbf{H}_{\mu\varepsilon}(\Sigma) + \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 q \leqslant c\left(\frac{2M}{\mu\varepsilon}\right)^{1/\alpha} + \log_2 \frac{2R_0}{\varepsilon} \log_2 q,$$

где

$$\mu = \frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}, \qquad q = \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4\right)^{D^{n/2}}.$$

Мы воспользовались очевидным неравенством

$$\mathbf{H}_{\mu\varepsilon}(\Sigma_{0,\tau}) \leqslant \mathbf{H}_{\mu\varepsilon}(\Sigma).$$

Используя следствие 4.1, в силу (4.10) и следствия 3.4 получаем

Следствие 4.3. *Справедлива оценка*

$$\mathbf{q}(\mathscr{A}_\Sigma) \leqslant \mathbf{q}(\Sigma) \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Замечание 4.2. Аналогичные результаты, очевидно, имеют место для множества Σ, состоящего из функций

$$g(x,s) = \sum_{j=1}^{M} g_j(s) a_j, \tag{4.11}$$

где $g_j \in \mathscr{H}_\alpha(v_j)$, $a_j \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, M$. Аналогичным образом рассматриваются бесконечные суммы в (4.11).

4.2. Класс функций из теории информации. В теории информации (см. [5]) встречаются классы функций $g(s)$, $-\infty < s < +\infty$ (сигналов), имеющих ограниченный спектр. Последнее означает, что преобразование Фурье $\widehat{g}(\lambda) = F_{s\to\lambda} g(s)$ этих функций имеет компактный носитель, например, $\operatorname{supp} \widehat{g}(\lambda) \subset [-\sigma, \sigma]$. Отметим, что функции вида

$$g(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\lambda_k s}, \qquad C_{-k} = \overline{C}_k, \quad \lambda_k = -\lambda_{-k}, \tag{4.12}$$

где

$$|\lambda_k| \leqslant \sigma,$$

удовлетворяют этому условию. Предполагается также, что

$$\sum_k |C_k| = C < +\infty. \tag{4.13}$$

Сразу отметим, что подобная функция $g(s)$ является почти периодической и ее можно продолжить на комплексную плоскость $\mathbb{C} = \{z\} = \{s + i\tau\}$. Соответствующая функция $g(z)$ является целой функцией и

$$|g(s+i\tau)| = |g(z)| \leqslant C e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \qquad z = s + i\tau, \tag{4.14}$$

где $\sigma = \sup_k\{|\lambda_k|\}$.

Следуя Тихомирову (см. [5]), рассмотрим класс $B_\sigma(C) \equiv B$ всех целых функций $g(z)$, которые удовлетворяют (4.14). Здесь $C > 0$ и $\sigma > 0$ – фиксированные числа. Из теоремы Пэли–Винера следует, что преобразование Фурье $\widehat{g}(\lambda) = F_{s\to\lambda} g(s)$ функции $g(s) \in B_\sigma(C)$ имеет компактный носитель, т.е. $g(s)$ имеет ограниченный спектр. Отметим, что множество B является трансляционно-инвариантным и компактным в $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, т.е. оно удовлетворяет (I) и (II).

Обозначим через $B_{[0,T]} = B_\sigma(C)_{[0,T]}$ ограничение функций из $B_\sigma(C)$ на интервал $[0,T]$, $T > 0$. Оценка для ε-энтропии $B_{[0,T]}$ в $C([0,T])$ получена Тихомировым в работе [5]. Он доказал, что минимальное число $N_\varepsilon(B_{[0,T]})$ шаров в $C([0,T])$, необходимое для покрытия $B_{[0,T]}$, удовлетворяет неравенству

$$N_\varepsilon(B_{[0,T]}) = N_\varepsilon(T) \leqslant \left(2\left[\frac{C'C}{\varepsilon}\right] + 1\right)^{4[T(\sigma+\alpha)/\pi]+4[C''C/\varepsilon]+6}, \tag{4.15}$$

где α – некоторая фиксированная постоянная, константы C' и C'' зависят от α и не зависят от T и от ε (здесь $[b]$ обозначает целую часть b). Из оценки (4.15) следует, что

$$\mathbf{H}_\varepsilon(B_{[0,T]}) = \log_2 N_\varepsilon(T) \leqslant \left(\log_2 \frac{1}{\varepsilon} + \log_2(2C'C+1)\right) \cdot \left(4\frac{T(\sigma+\alpha)}{\pi} + \frac{4C''C}{\varepsilon} + 6\right),$$

где $\varepsilon < 1$. Отсюда для $T = \tau \log_2(1/\varepsilon)$ получаем

Утверждение 4.1. *Справедливы следующие оценки*:

$$\mathbf{H}_\varepsilon\bigl(B_{[0,\tau\log_2(1/\varepsilon)]}\bigr) \leqslant C_1 \frac{1}{\varepsilon}\log_2\frac{1}{\varepsilon}, \tag{4.16}$$
$$\mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(B,\tau) = \limsup_{\varepsilon\to 0+} \frac{\log_2 H_\varepsilon\bigl(B_{0,\tau\log_2(1/\varepsilon)}\bigr)}{\log_2(1/\varepsilon)} \leqslant 1.$$

Теперь для заданной вектор-функции $a(x) \in H = (L_2(\Omega))^N$ рассмотрим множество $\Sigma = a(x)\cdot B \subset C_b(\mathbb{R}; H)$. Множество Σ удовлетворяет (I) и (II). Пусть $\mathscr{A}_\Sigma$ обозначает равномерный аттрактор системы реакции-диффузии с таким множеством Σ. Используя теорему 3.1 и следствие 3.4, в силу (4.16) получаем

Следствие 4.4. *Справедливо следующее*:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma) &\leqslant \mathbf{H}_{\mu\varepsilon}\bigl(\Sigma_{0,T_0\log_2(2R_0/\varepsilon)}\bigr) + \log_2\frac{2R_0}{\varepsilon}\log_2 q\\ &\leqslant C_1'\frac{1}{\varepsilon}\log_2\frac{1}{\varepsilon} + \log_2\frac{2R_0}{\varepsilon}\log_2 q,\end{aligned}$$

где

$$\mu = \frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}, \qquad q = \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4\right)^{D^{n/2}}.$$

Следствие 4.5. *Справедлива оценка*

$$\mathbf{q}(\mathscr{A}_\Sigma) \leqslant \mathbf{q}(\Sigma) \leqslant 1.$$

Замечание 4.3. Очевидно, аналогичные результаты получаются для множества Σ функций

$$g(x,s)=\sum_{j=1}^{M} g_j(s)a_i(x), \tag{4.17}$$

где $g_j \in B_{\sigma_j}(C_j)$, $a_j \in H$, $j=1,\dots,M$. Аналогично рассматриваются бесконечные суммы в (4.17).

4.3. Трансляционно-ограниченные функции в пространстве Соболева. Обозначим через W^1 пространство функций $g \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H_1)$, $\partial_t g \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H)$, имеющих конечную норму

$$\|g\|_{W^1}^2=\sup_{h\in\mathbb{R}}\int_0^1 \big(\|g(s+h)\|^2+|\partial_t g(s+h)|^2\big)ds<+\infty. \tag{4.18}$$

Рассмотрим

$$\Sigma=\Sigma^M=\big\{g\in W^1:\|g\|_{W^1}\leqslant M\big\}. \tag{4.19}$$

Если $g\in\Sigma_M$, то, очевидно, $\|T(h)g\|_{W^1}=\|g\|_{W^1}$ и $T(h)g(s)=g(s+h)\in\Sigma_M$ для всех $h\in\mathbb{R}$, т.е. (II) выполнено. Проверим условие (I). Положим

$$W^1_{t_1,t_2}=\big\{g:g\in L_2(t_1,t_2;H_1),\ \partial_t g\in L_2(t_1,t_2;H)\big\}.$$

Из теоремы вложения Соболева вытекает, что $W^1_{t_1,t_2}\Subset C([t_1,t_2];H)$. Пусть дана последовательность $\{g_n\}\subset\Sigma_M$, тогда она предкомпактна в $C([t_1,t_2];H)$ для каждого $[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}$. С помощью метода диагонализации легко выделить подпоследовательность $\{g_{n_k}\}$ такую, что $\{g_{n_k}(t)\}$ сходится к $g(t)$ в $C([t_1,t_2];H)$ при $n_k\to\infty$ для любого $[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}$ и, значит, $g_{n_k}(t)\to g(t)$, $n_k\to\infty$, в $C(\mathbb{R};H)$. С другой стороны, при любом фиксированном $h\in\mathbb{R}$ можно предполагать, что $g_{n_k}(t)\rightharpoonup g(t)$, $n_k\to\infty$, слабо в $W^1_{h,h+1}=H^1(\Omega\times[h,h+1])$. Но $\|g_{n_k}\|_{W^1_{h,h+1}}\leqslant M$. Следовательно, переходя к пределу, $\|g\|_{W^1_{h,h+1}}\leqslant M$ для любого $h\in\mathbb{R}$, т.е. $\|g\|_{W^1}\leqslant M$ и $g\in\Sigma_M$. Мы доказали, что Σ_M компактно в $C(\mathbb{R};H)$.

Замечание 4.4. Аналогичным образом можно определить пространство W^α, $\frac12<\alpha<1$, функций φ таких, что $\varphi(s+h)\in L_2(0,1;H)\cap H^\alpha(\Omega\times[0,1])$ при любом $h\in\mathbb{R}$ с конечно нормой

$$\|\varphi\|_{W^\alpha}=\sup_{h\in\mathbb{R}}\|\varphi(\,\cdot\,+h)\|_{H^\alpha(\Omega\times[0,1])}. \tag{4.20}$$

Для множества $\Sigma=\Sigma_M^\alpha=\{\varphi\in W^\alpha:\|\varphi\|_{W^\alpha}\leqslant M\}$ выполнены условия (I) и (II). При доказательстве этого утверждения используется компактность вложения $H^\alpha(\Omega\times[0,1])\Subset C([0,1];H)$.

Для простоты изложения мы рассмотрим случай $\Omega=(0,1)^n$. Очевидно, множество $\Sigma=\Sigma^M$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 (см. §3). Следовательно,

$$N_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma,H)\leqslant N_{\mu\varepsilon}\big(\Sigma_{0,(k+1)T_0},C([0,(k+1)T_0];H)\big)q^{k+1}, \tag{4.21}$$

где $\mathscr{A}_\Sigma$ – равномерный аттрактор семейства процессов $\{U_g(t,\tau) : g \in \Sigma\}$, отвечающего системе реакции-диффузии,

$$\mu = \frac{\theta\lambda_1\nu}{2\Gamma_1}\,, \qquad k = \log_2 \frac{R_0}{\varepsilon}\,, \qquad q = \left(\frac{4\Gamma_3}{\theta} + 4\right)^{D^{n/2}}.$$

Здесь $N_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma, H)$ обозначает наименьшее число ε-шаров в метрике H, покрывающих $\mathscr{A}_\Sigma$, и $N_{\mu\varepsilon}\big(\Sigma_{0,(k+1)T_0}, C([0,(k+1)T_0]; H)\big)$ – минимальное число $\mu\varepsilon$-шаров в метрике $C([0,(k+1)T_0]; H)$, покрывающих $\Sigma_{0,(k+1)T_0}$.

Из (4.19) вытекает, что

$$\|g\|_{W_2^1(Q_{0,(k+1)T_0})} \leqslant M\big((k+1)T_0 + 1\big) \qquad \forall\, g \in \Sigma_{0,(k+1)T_0}, \tag{4.22}$$

где $Q_{0,(k+1)T_0} = [0,(k+1)T_0] \times \Omega$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &N_{\mu\varepsilon}\big(\Sigma_{0,(k+1)T_0}, C([0,(k+1)T_0]; H)\big) \\ &\quad \leqslant N_{\mu\varepsilon}\Big(\big\{\|g\|_{W_2^1(Q_{0,(k+1)T_0})} \leqslant M\big((k+1)T_0+1\big)\big\}, C\big([0,(k+1)T_0]; H\big)\Big). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Пусть число $\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет неравенствам

$$\mu\varepsilon > \varepsilon_1, \qquad (k+1) \leqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon_1}\,. \tag{4.24}$$

Тогда

$$Q_{0,(k+1)T_0} \subset Q_{0,\log_2(1/\varepsilon_1)T_0}. \tag{4.25}$$

Следовательно, правая часть (4.23) не превосходит

$$N_{\varepsilon_1}\left(\left\{\|g\|_{W_2^1(Q_{0,T_0\log_2(1/\varepsilon_1)})} \leqslant M\left(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\right\}, C\left(\left[0, T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\right]; H\right)\right). \tag{4.26}$$

Обозначим

$$\left\{g : \|g\|_{W_2^1(Q_{0,T_0\log_2(1/\varepsilon_1)})} \leqslant M\left(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1} + 1\right)\right\} = G_{M,T_0\log_2(1/\varepsilon_1)}. \tag{4.27}$$

Сделаем замену переменной

$$t \mapsto \tau = \frac{t}{T_0\log_2(\frac{1}{\varepsilon_1})}: \quad g(t) = \widetilde{g}(\tau) = g\left(\tau T_0 \log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Новое множество функций $\{\widetilde{g}(\tau)\}$ обозначим $\widetilde{G}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\biggl(\int_0^{T_0\log_2(1/\varepsilon_1)}\bigl(\|g(t)\|^2+|\partial_t g(t)|^2\bigr)\,dt\biggr)^{1/2}\\
&\quad=\biggl(\int_0^1\biggl(\|\widetilde{g}(\tau)\|^2+\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{-2}|\partial_\tau\widetilde{g}(\tau)|^2\biggr)T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\,d\tau\biggr)^{1/2}\\
&\quad\leqslant\biggl(\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{-1}+T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{1/2}\\
&\qquad\times\biggl(\int_0^1\bigl(\|\widetilde{g}(\tau)\|^2+|\partial_\tau\widetilde{g}(\tau)|^2\bigr)\,d\tau\biggr)^{1/2}\\
&\quad\leqslant\biggl(\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{-1/2}+\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{1/2}\biggr)\\
&\qquad\times\biggl(\int_0^1\bigl(\|\widetilde{g}(\tau)\|^2+|\partial_\tau\widetilde{g}(\tau)|^2\bigr)\,d\tau\biggr)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{4.28}$$

Очевидно,

$$N_{\varepsilon_1}\biggl(G_{M,T_0\log_2(1/\varepsilon_1)},C\biggl(\biggl[0,T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr];H\biggr)\biggr)=N_{\varepsilon_1}\bigl(\widetilde{G},C([0,1];H)\bigr).\tag{4.29}$$

Положим

$$\biggl\{\widetilde{g}:\|\widetilde{g}(\tau)\|_{W_2^1(Q_{0,1})}\leqslant M\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{1/2}\biggr\}\equiv\widetilde{G}_\rho,\tag{4.30}$$

где $\rho=M(T_0\log_2(1/\varepsilon_1))^{1/2}$. Из (4.27), (4.28) и (4.30) следует

$$\widetilde{G}\subset\widetilde{G}_\rho.\tag{4.31}$$

В самом деле, если $\widetilde{g}\in\widetilde{G}_\rho$, то $\|\widetilde{g}(\tau)\|_{W_2^1(Q_{0,1})}\leqslant M(T_0\log_2(1/\varepsilon_1))^{1/2}$, и в силу (4.28)

$$\begin{aligned}
&\biggl(\int_0^{T_0\log_2(1/\varepsilon_1)}\bigl(\|g(t)\|^2+|\partial_t g(t)|^2\bigr)\,dt\biggr)^{1/2}\\
&\quad\leqslant\biggl(\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{-1/2}+\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{1/2}\biggr)M\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\biggr)^{1/2}\\
&\quad=M\biggl(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}+1\biggr).
\end{aligned}$$

Поэтому $g\in G_{M,T_0\log_2(1/\varepsilon_1)}$.

Ко всем функциям $\widetilde{g}(\tau)\in\widetilde{G}_\rho$ применим оператор сжатия

$$\frac{\widetilde{g}(\tau)}{\rho}=\widehat{g}(\tau),\qquad\widetilde{g}(\tau)\in\widetilde{G}_\rho,\quad\widehat{g}(\tau)\in\widehat{G}^1,\tag{4.32}$$

где

$$\widehat{G}^1=\bigl\{\widehat{g}(\tau):\|\widehat{g}(\tau)\|_{W_2^1(Q_{0,1})}\leqslant 1\bigr\}.\tag{4.33}$$

В соответствии с теоремой Бирмана–Соломяка (см. [22]),

$$N_{\varepsilon_1/\rho}\bigl(\widehat{G}^1, C([0,1];H)\bigr) \leqslant 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega}, \qquad \omega = \frac{n+1}{1-\varrho}\,, \quad 1 > \varrho > \frac{1}{2}\,. \tag{4.34}$$

Действительно, из [22] получаем

$$N_\eta\bigl(\widehat{G}^1, W_2^\varrho(Q_{0,1})\bigr) \leqslant 2^{C_\omega(1/\eta)^\omega}. \tag{4.35}$$

По теореме вложения Соболева [23]

$$W_2^\varrho(Q_{0,1}) \subset C([0,1];H), \tag{4.36}$$

$$\|g\|_{C([0,1];H)} \leqslant C_{1\varrho}\|g\|_{W_2^\varrho(Q_{0,1})}, \qquad \varrho > \frac{1}{2}\,. \tag{4.37}$$

Теперь (4.34) следует непосредственно из (4.35)–(4.37).

Наконец, делая растяжение $\rho\widehat{g} = g$, получаем из (4.34), (4.31) оценку

$$\begin{aligned} N_{\varepsilon_1}\bigl(\widetilde{G}, C([0,1];H)\bigr) &\leqslant N_{\varepsilon_1}\bigl(\widetilde{G}_\rho, C([0,1];H)\bigr) \\ &= N_{\varepsilon_1/\rho}\bigl(\widehat{G}^1, C([0,1];H)\bigr) \leqslant 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega}. \end{aligned}$$

Тогда, в силу (4.29)

$$N_{\varepsilon_1}\left(G_{T_0\log_2(1/\varepsilon_1)}, C\left(\left[0, T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\right];H\right)\right) \leqslant 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega}. \tag{4.38}$$

Из (4.23), (4.25) и (4.38) заключаем

$$\begin{aligned} &N_{\mu\varepsilon}\bigl(\Sigma_{0,(k+1)T_0}, C\bigl([0,(k+1)T_0];H\bigr)\bigr) \\ &\quad\leqslant N_{\varepsilon_1}\left(G_{T_0\log_2(1/\varepsilon_1)}, C\left(\left[0, T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon_1}\right];H\right)\right) \leqslant 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

где ε_1 удовлетворяет (4.24). Имея в виду (4.21), получаем

$$N_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma, H) \leqslant 2^{C_\omega(\rho/\varepsilon_1)^\omega} q^{k+1},$$

где $\omega = (n+1)/(1-\rho)$, $1 > \rho > \frac{1}{2}$, ε_1 удовлетворяет неравенствам $\mu\varepsilon > \varepsilon_1$, $k+1 \leqslant \log_2(1/\varepsilon_1)$.

Взяв $\log_2$ от обеих частей, получим

$$\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma, H) \leqslant C_\omega\left(\frac{\rho}{\varepsilon_1}\right)^\omega + (k+1)\log_2 q.$$

Очевидно, (4.24) имеем место, если $\varepsilon_1 = \varepsilon\mu_1$, где

$$\mu_1 = \min\left\{\mu; \frac{1}{2R_0}\right\} = \lambda_1\nu\min\left\{\frac{\theta}{2\Gamma_1}; \frac{1}{2|\Sigma|}\right\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma, H) &\leqslant C_\omega\left(\frac{M\bigl(T_0\log_2(1/(\varepsilon\mu_1))\bigr)^{1/2}}{\varepsilon\mu_1}\right)^{(n+1)/(1-\varrho)} \\ &\quad + D^{n/2}\log_2\frac{2R_0}{\varepsilon}\log_2\left(\frac{4\Gamma_3}{\theta}+4\right), \end{aligned} \tag{4.40}$$

где мы воспользовались обозначениями

$$\rho = M\left(T_0\log_2\frac{1}{\varepsilon\mu_1}\right)^{1/2}, \qquad \omega = \frac{n+1}{1-\varrho}\,, \quad \varrho > \frac{1}{2}\,.$$

Доказана

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, *множество* $\Sigma \subset W^1$ *и* $\|g\|_{W^1} \leqslant M$ *при любом* $g \in \Sigma$. *Тогда* ε-*энтропия* $\mathbf{H}_\varepsilon(\mathscr{A}_\Sigma, H)$ *равномерного аттрактора* $\mathscr{A}_\Sigma$ *удовлетворяет неравенству* (4.40).

Рассмотрим метрический порядок $\mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(\Sigma, T_0)$ множества Σ. Из (4.39) следует, что

$$\mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(\Sigma, T_0) \leqslant \frac{n+1}{1-\varrho} \qquad \forall\, \varrho > \frac{1}{2},$$

т.е. $\mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(\Sigma, T_0) \leqslant 2(n+1)$. Используя следствие 3.4, получаем

Следствие 4.7. *Справедлива оценка*

$$\mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(\mathscr{A}_\Sigma) \leqslant \mathbf{q}^{\mathrm{loc}}(\Sigma, T_0) \leqslant 2(n+1).$$

Список литературы

1. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for non-autonomous evolution equations with almost periodic symbols // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 1993. V. 316. P. 357–361.
2. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. №3. P. 279–333.
3. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors of non-autonomous evolution equations with translation-compact symbols // Oper. Theory Adv. Appl. 1995. V. 78. P. 49–60.
4. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Non-autonomous evolutionary equations with translation-compact symbols and their attractors // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 1995. V. 321. P. 153–158.
5. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. 1959. Т. 14 (86). №2. С. 3–86.
6. *Chepyzhov V. V., Foias C., Vishik M. I.* Uniform attractors for non-autonomous 2D Navier–Stokes equations and estimations of their ε-entropy (to appear).
7. *Constantin P., Foias C., Temam R.* Attractors representing turbulent flows // Mem. Amer. Math. Soc. 1985. V. 53. №314.
8. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Trajectory attractors for reaction-diffusion systems // Topol. Methods Nonlinear Anal. 1996. V. 7. №1. P. 49–76.
9. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
10. *Sell G. R.* Non-autonomous differential equations and topological dynamics I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. P. 241–283.
11. *Sell G. R.* Lectures on topological dynamics and differential equations. Princeton, NJ: Van-Nostrand-Rinhold, 1971.
12. *Dafermos C. M.* Semi-flows associated with compact and almost uniform processes // Math. Systems Theory. 1974. V. 8. P. 142–149.
13. *Dafermos C. M.* Almost periodic processes and almost periodic solutions of evolution equations // Proceedings of a University of Florida, International Symposium. New York: Academic Press, 1977. P. 43–57.
14. *Hale J. K.* Asymptotic behaviour of dissipative systems // Math. Surveys Monographs. V. 25. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987.
15. *Haraux A.* Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Paris: Masson, 1991.
16. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1988.
17. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. №10. P. 913–964.
18. *Amerio L., Prouse G.* Abstract Almost Periodic Functions and Functional Equations. New York: Van Nostrand, 1971.

19. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
20. *Eden A., Foias C., Nicolaenco B., Temam R.* Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations. Research in Appl. Math. V. 37. New York: John Wiley, 1994.
21. *Conway J.H., Sloan N.J.A.* Sphere Packing, Latices and Groups. New York: Springer-Verlag, 1988.
22. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^a // Матем. сб. 1967. Т. 73 (115). №3. С. 331–355.
23. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: `vishik@ippi.ac.msk.su`; `chep@ippi.ac.msk.su`

Поступила в редакцию
18.09.1997