АЛГЕБРЫ КЛЕТОЧНЫХ КОЦЕПЕЙ И ДЕЙСТВИЯ ТОРОВ

И. В. БАСКАКОВ, В. М. БУХШТАБЕР, Т. Е. ПАНОВ

Дано доказательство изоморфизма алгебры *целочисленных* когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ [3] и Tor-алгебры кольца граней симплициального комплекса K. В основе его лежит построение клеточной аппроксимации диагонального отображения $\Delta\colon \mathcal{Z}_K \to \mathcal{Z}_K \times \mathcal{Z}_K$. В клеточных коцепях отсутствует функториальное ассоциативное умножение, так как в общем случае нельзя выбрать соответствующую клеточную аппроксимацию диагонали. Конструкция момент-угол комплекса является функтором из категории симплициальных комплексов в категорию пространств с действием тора. Мы показываем, что в данном специальном случае предлагаемая клеточная аппроксимация диагонали ассоциативна и функториальна относительно отображений момент-угол комплексов, индуцированных симплициальными отображениями. *Кольцом граней* комплекса K на множестве вершин $[m] = \{1, \ldots, m\}$ называется градуированное факторкольцо $\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/(v_\omega\colon \omega \notin K)$ с $\deg v_i = 2$ и $v_\omega = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, где $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [m]$. Пусть BT^m – классифицирующее пространство для m-мерного тора со стандартным клеточным разбиением. Вводится клеточный подкомплекс $DJ(K) := \bigcup_{\sigma\in K} BT^\sigma \subseteq BT^m$, где $BT^\sigma = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in BT^m\colon x_i = pt$ при $i \notin \sigma\}$. Используя данную клеточную структуру доказывается изоморфизм колец $H^*(DJ(K)) \cong \mathbb{Z}[K]$ (см. [2, Лемма 2.8]).

Пусть $D^2 \subset \mathbb{C}$ – единичный диск; положим $B_\omega := \{(z_1, \ldots, z_m) \in (D^2)^m\colon |z_j| = 1$ при $j \notin \omega\}$. *Момент-угол комплексом* называется T^m-инвариантное подпространство

$$\mathcal{Z}_K := \bigcup_{\sigma\in K} B_\sigma \subseteq (D^2)^m.$$

Как показано в [3, Ch. 6], пространства $DJ(K)$ и $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентны пространствам, введённым в [4], что объясняет наши обозначения. Момент-угол комплексы $\mathcal{Z}_K$ дают важный класс действий тора. Пространство $\mathcal{Z}_K$ является гомотопическим слоем вложения $DJ(K) \hookrightarrow BT^m$; оно возникает также как поверхность уровня отображения моментов при построении *торических многообразий* на основе симплектической редукции и как дополнение *конфигурации координатных подпространств*, определяемой комплексом K, см. [3, §8.2].

Теорема 1. *Имеет место функториальный по K изоморфизм алгебр*

$$H^*(\mathcal{Z}_K;\mathbb{Z}) \cong H\bigl[\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K], d\bigr] \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}\bigl(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}\bigr),$$

где в центре стоит алгебра когомологий дифференциальной градуированной алгебры с $\deg u_i = 1$, $\deg v_i = 2$, $du_i = v_i$, $dv_i = 0$.

В случае рациональных коэффициентов эта теорема была доказана в [1] применением техники спектральных последовательностей (см. также [3, Th. 7.6, Prob. 8.14]). Наш новый метод доказательства использует построение алгебры клеточных коцепей. Недавно мы узнали, что другое доказательство теоремы 1 было независимо получено М. Францем [5, Th. 1.2].

Доказательство теоремы 1. Мы докажем лишь первый изоморфизм, так как второй вытекает стандартным образом из рассмотрения резольвенты Кошуля (детали см. в [3]). Введём дополнительную градуировку, положив $\operatorname{bideg} u_i = (-1, 2)$, $\deg v_i = (0, 2)$, и рассмотрим факторалгебру $R^*(K) := \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]/(v_i^2 = u_i v_i = 0,\ i = 1, \ldots, m)$. Пусть $\varrho\colon \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K] \to R^*(K)$ — каноническая проекция. Используя аддитивный базис из мономов вида $u_\omega v_\sigma$, где $\omega \subseteq [m]$, $\sigma \in K$ и $\omega \cap \sigma = \varnothing$ в алгебре $R^*(K)$, зададим аддитивное вложение $\iota\colon R^*(K) \to$

Работа поддержана грантами РФФИ 02-01-00659 и НШ-2185.2003.1.

$\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[K]$, удовлетворяющее соотношению $\varrho\cdot\iota=\mathrm{id}$. Покажем, что ϱ индуцирует изоморфизм когомологий. Для этого построим оператор коцепной гомотопии s, такой что $ds+sd=\mathrm{id}-\iota\cdot\varrho$. В случае $K=\Delta^{m-1}$ (полный симплекс) алгебра $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[K]$ принимает вид $E=E_m=\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]$, а алгебра $R^*(\Delta^{m-1})$ изоморфна алгебре $R(\Delta^0)^{\otimes m}$, где $R(\Delta^0)=\Lambda[u]\otimes\mathbb{Z}[v]/(v^2=uv=0)$. Непосредственно проверяется, что для $m=1$ отображение $s_1\colon E^{0,*}=\mathbf{k}[v]\to E^{-1,*}$, определённое по формуле $s_1(a_0+a_1v+\ldots+a_jv^j)=(a_2v+a_3v^2+\ldots+a_jv^{j-1})u$, является необходимой коцепной гомотопией. Далее по индукции мы можем предположить, что для $m=k-1$ оператор коцепной гомотопии $s_{k-1}\colon E_{k-1}\to E_{k-1}$ уже построен. Так как $E_k=E_{k-1}\otimes E_1$, $\varrho_k=\varrho_{k-1}\otimes\varrho_1$ и $\iota_k=\iota_{k-1}\otimes\iota_1$, отображение $s_k=s_{k-1}\otimes\mathrm{id}+\iota_{k-1}\varrho_{k-1}\otimes s_1$ является коцепной гомотопией между id и $\iota_k\varrho_k$. В случае произвольного комплекса K алгебры $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[K]$ и $R^*(K)$ получаются дополнительной факторизацией алгебр E_m и $R^*(\Delta^{m-1})$ по мономиальному идеалу. Оператор s выдерживает эту факторизацию и определяет искомую коцепную гомотопию.

Рассмотрим клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$, при котором каждый диск D^2 имеет клетки 1, T и D размерностей 0, 1 и 2. Таким образом, клетки из $(D^2)^m$ параметризуются словами $\mathcal{T}\in\{D,T,1\}^m$. Сопоставим каждой паре $\sigma,\omega\subseteq[m]$, $\sigma\cap\omega=\varnothing$ слово $\mathcal{T}(\sigma,\omega)$, имеющее букву D на позициях с номерами из σ и букву T на позициях с номерами из ω. По построению, $\mathcal{T}(\sigma,\omega)$ задаёт клетку из $\mathcal{Z}_K\subset(D^2)^m$ тогда и только тогда, когда $\sigma\in K$. Комплекс клеточных коцепей $C^*(\mathcal{Z}_K)$ имеет аддитивный базис из коцепей вида $\mathcal{T}(\sigma,\omega)^*$. Отсюда видно, что размерности градуированных компонент в $C^*(\mathcal{Z}_K)$ и $R^*(K)$ совпадают. Более того, отображение $g\colon R^*(K)\to C^*(\mathcal{Z}_K)$, $u_\omega v_\sigma\mapsto\mathcal{T}(\sigma,\omega)^*$ является изоморфизмом дифференциальных градуированных модулей и индуцирует аддитивный изоморфизм $H[R^*(K)]\cong H^*(\mathcal{Z}_K)$. Для завершения доказательства построим клеточную аппроксимацию $\widetilde{\Delta}_K$ диагонального отображения $\Delta\colon\mathcal{Z}_K\to\mathcal{Z}_K\times\mathcal{Z}_K$ такую, что индуцированное умножение на клеточных коцепях совпадает с умножением в алгебре $R^*(K)$ в силу изоморфизма g. В случае $K=\Delta^0$ имеем $\mathcal{Z}_K=D^2$. Положим $z=\rho e^{i\varphi}\in D^2$ и определим $\widetilde{\Delta}\colon D^2\to D^2\times D^2$ по формуле

$$\widetilde{\Delta}(z)=\begin{cases}\bigl(1+\rho(e^{2i\varphi}-1),1\bigr) & \text{при } \varphi\in[0,\pi],\\ \bigl(1,1+\rho(e^{2i\varphi}-1)\bigr) & \text{при } \varphi\in[\pi,2\pi).\end{cases}$$

Легко видеть, что $\widetilde{\Delta}$ есть клеточное отображение, переводящее ∂D^2 в $\partial D^2\times\partial D^2$ и гомотопное Δ в классе таких отображений. Для соответствующего умножения в клеточных коцепях имеет место мультипликативный изоморфизм $R^*(\Delta^0)\to C^*(D^2)$. Следовательно, для $K=\Delta^{m-1}$ наше отображение $\widetilde{\Delta}\colon(D^2)^m\to(D^2)^m\times(D^2)^m$ задаёт мультипликативный изоморфизм:

$$f\colon R^*(\Delta^{m-1})=\Lambda[u_1,\ldots,u_m]\otimes\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]\big/(v_i^2=u_iv_i=0)\longrightarrow C^*\bigl((D^2)^m\bigr).$$

Из конструкции комплекса $\mathcal{Z}_K$ непосредственно вытекает, что ограничение отображения $\widetilde{\Delta}$ на $\mathcal{Z}_K$ даёт клеточное отображение $\widetilde{\Delta}_K\colon\mathcal{Z}_K\to\mathcal{Z}_K\times\mathcal{Z}_K$. Следовательно, имеет место мультипликативное отображение $q\colon C^*((D^2)^m)\to C^*(\mathcal{Z}_K)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R^*(\Delta^{m-1}) & \xrightarrow{f} & C^*\bigl((D^2)^m\bigr)\\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q}\\ R^*(K) & \xrightarrow{g} & C^*(\mathcal{Z}_K).\end{array}$$

Используя, что p, f и q – кольцевые гомоморфизмы, а p – эпиморфизм, мы получаем, что g является кольцевым гомоморфизмом. Следовательно, g – мультипликативный изоморфизм. $\square$

Список литературы

[1] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Труды МИРАН. 1999. Т. 225. С. 96–131.
[2] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. Т. 266. С. 29–50.
[3] Buchstaber V. M., Panov T. E. Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Univ. Lecture Ser. 24.)
[4] Davis M, Januszkiewicz T. // Duke Math. J. 1991. V. 62. P. 417–451.
[5] Franz M. // Preprint arXiv:math.AT/0308253.

Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова