2000 г. сентябрь — октябрь *т. 55, вып. 5(335)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 515.164+515.142+515.145+514.172.45

ДЕЙСТВИЯ ТОРОВ, КОМБИНАТОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов

СОДЕРЖАНИЕ

Обзор посвящен результатам и открытым проблемам в обширной области исследований, которая сформировалась за последние 20 лет на стыке комбинаторики многогранников, комбинаторной и алгебраической топологии, гомологической алгебры, теории действий групп на топологических пространствах, алгебраической геометрии торических многообразий и симплектической геометрии. Основная цель обзора – показать, что предлагаемая авторами теория момент-угол комплексов позволяет существенно развить взаимосвязи между всеми перечисленными выше областями математики и получить на основе этого решение ряда известных задач. Каждый параграф обзора относится, как правило, к отдельному направлению исследований и содержит соответствующее введение. В качестве путеводителя по обзору приведем схематическое изложение его содержания.

В главе 1 собраны все необходимые комбинаторные, геометрические и топологические сведения о многогранниках, симплициальных и кубических комплексах и разбиениях многообразий. Описаны как классические, так и оригинальные конструкции, позволяющие исследовать комбинаторные объекты методами коммутативной и гомологической алгебры.

В § 1 главы 2 дан обзор используемых в дальнейшем конструкций и результатов об алгебраических торических многообразиях и связанных с ними комбинаторных объектах. Параграф 2.2 посвящен топологическим аналогам торических многообразий – квазиторическим многообразиям, основы теории которых были заложены Дэвисом и Янушкевичем. Мы приводим важнейшие конструкции и результаты о квазиторических многообразиях. В § 2.3 изложено полученное Бухштабером и Рэем решение аналога для квазиторических многообразий проблемы Хирцебруха о связных представителях в классе кобордизмов каждого стабильно комплексного многообразия. В § 2.4 изложены полученные Пановым комбинаторные формулы для родов Хирцебруха квазиторических многообразий. В последнем параграфе главы 2 описаны результаты по классификации торических и квазиторических многообразий над заданным простым многогранником.

В главах 3 и 4 изложена развиваемая авторами теория момент-угол комплексов. Такой комплекс $\mathcal{Z}_K$ сопоставляется каждому симплициальному комплексу K с m вершинами (см. § 3.2). На $\mathcal{Z}_K$ имеется каноническое действие тора T^m, пространством орбит которого является конус над K, и соответствующее биградуированное клеточное разбиение (см. § 3.3). Ряд результатов, полученных при помощи этой теории, опирается на тот факт, что $\mathcal{Z}_K$ является многообразием в случае, когда K – симплициальная сфера. Важные следствия вытекают также из того, что в более общем случае симплициального многообразия K особые точки комплекса $\mathcal{Z}_K$ образуют орбиту действия тора T^m, дополнение к окрестности которой представляет собой многообразие с

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00090).

краем. В главе 4 при помощи биградуированной клеточной структуры введено и вычислено биградуированное кольцо когомологий момент-угол комплекса $\mathscr{Z}_K$. Ответ записан в терминах известных конструкций из гомологической алгебры, используемых в решениях комбинаторных задач.

Глава 5 посвящена приложениям теории момент-угол комплексов к известной задаче вычисления когомологий дополнений конфигураций подпространств. Основное внимание уделено конфигурациям координатных подпространств и конфигурациям диагональных подпространств (§§ 5.2 и 5.3 соответственно). Дан обзор результатов, полученных в этом направлении различными авторами. Приведено полученное нами решение задачи о кольце когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств, основанное на редукции к вычислению кольца когомологий комплекса $\mathscr{Z}_K$. Описана редукция задачи вычисления когомологий диагональных подпространств к задаче вычисления когомологий пространства петель $\Omega\mathscr{Z}_K$.

Все изложение сопровождается примерами важнейших из рассматриваемых объектов и вычислениями их инвариантов, демонстрирующими полученные общие результаты. Результаты, вошедшие в обзор, делятся на три части. Во-первых, это интерпретации классических результатов, которые иногда не сопровождаются ссылками. Во-вторых, результаты других авторов, которые мы сопровождаем соответствующей ссылкой. И в-третьих, результаты, которые либо получены нами недавно, либо являются развитием результатов, опубликованных в работах авторов [19]–[23], [69], [70] и в совместных работах [25], [26] с Н. Рэем.

Мы глубоко благодарны Л. А. Алания, В. А. Васильеву, Ф. Велкеру, Н. Э. Добринской, Н. П. Долбилину, И. Э. Изместьеву, О. Р. Мусину, С. П. Новикову, Э. Рису, Н. Рэю, Ю. Сивану, В. А. Смирнову, Н. Стрикланду, С. П. Тарасову, М. Фарберу, Г. Циглеру, М. А. Штанько, М. И. Штогрину и С. Юзвинскому за поддержку и вдохновение, полученные в ходе многочисленных обсуждений вопросов, которым посвящен данный обзор. Мы также благодарны участникам семинара “Топология и вычислительная геометрия”, который проводится на механико-математическом факультете МГУ под руководством авторов и О. Р. Мусина.

Глава 1. Необходимые алгебраические, геометрические и комбинаторные понятия

§ **1.1. Многогранники.** Комбинаторные и геометрические аспекты теории выпуклых многогранников изложены в большом количестве учебных пособий, монографий и статей. Мы упомянем лишь книгу Циглера [89], где также можно найти дальнейшие ссылки. В этом параграфе мы описываем основные понятия и конструкции, связанные с многогранниками, используемые в работе.

Имеется два различных подхода к определению выпуклого многогранника в n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.1. *Выпуклым многогранником* называется выпуклая оболочка произвольного конечного множества точек в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1.2. *Выпуклым полиэдром* P называется пересечение конечного числа полупространств некоторого пространства $\mathbb{R}^n$:

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \boldsymbol{l}_i, \boldsymbol{x} \rangle \geqslant -a_i,\ i = 1, \dots, m\}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{l}_i \in (\mathbb{R}^n)^*$, $i = 1, \ldots, m$, – некоторые линейные функции и $a_i \in \mathbb{R}$. *Выпуклым многогранником* называется ограниченный выпуклый полиэдр.

Тем не менее, эти два определения выпуклого многогранника задают один и тот же геометрический объект, т.е. подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ является выпуклой оболочкой конечного набора точек тогда и только тогда, когда оно является пересечением конечного числа полупространств и ограничено. Этот факт доказывается во многих учебниках по теории многогранников и выпуклой геометрии, см., например, [89; теорема 1.1].

Размерностью многогранника называется размерность его аффинной оболочки; в тех случаях, когда не оговаривается противное, мы рассматриваем только n-мерные многогранники P^n в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$. *Опорной гиперплоскостью* многогранника P^n называется произвольная аффинная гиперплоскость H, которая пересекает P^n и для которой многогранник содержится в одном из определяемых ею подпространств. Пересечения $P^n \cap H$ многогранника с опорными гиперплоскостями называются *гранями* многогранника. Сам многогранник P^n также считается гранью; все остальные грани называются *собственными*. *Границей* ∂P^n многогранника называется объединение всех его собственных граней. Каждая грань n-мерного многогранника P^n является многогранником размерности $\leqslant n$. 0-мерные грани называются *вершинами*, 1-мерные грани называются *ребрами*, а грани коразмерности один называются *гипергранями*. Грани многогранника P^n всех размерностей образуют частично упорядоченное множество по отношению к включению, называемое *решеткой граней* многогранника P^n.

Два многогранника $P_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $P_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ одной размерности называются *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное отображение $\mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$, переводящее один многогранник в другой. Говорят, что два многогранника *комбинаторно эквивалентны*, если существует биекция между их наборами граней, сохраняющая отношение включения. Другими словами, два многогранника комбинаторно эквивалентны, если их решетки граней изоморфны как частично упорядоченные множества.

Пример 1.1.3 (симплекс и куб). *Симплекс* Δ^n (n-симплекс) представляет собой выпуклую оболочку набора из $(n+1)$ точек в $\mathbb{R}^n$, не лежащих на одной аффинной гиперплоскости. Все грани n-симплекса являются симплексами размерности $\leqslant n$. Все n-симплексы аффинно эквивалентны. *Стандартным* n-симплексом называется выпуклая оболочка точек $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)$ и $(0,\ldots,0)$ в $\mathbb{R}^n$. Стандартный n-симплекс задается $(n+1)$ неравенствами

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,n, \quad \text{и} \quad -x_1 - \cdots - x_n \geqslant -1. \tag{2}$$

Правильный n-симплекс есть выпуклая оболочка $(n+1)$ точек $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Стандартный q-куб есть выпуклый многогранник $I^q \subset \mathbb{R}^q$, определяемый как

$$I^q = \bigl\{(y_1,\ldots,y_q) \in \mathbb{R}^q : 0 \leqslant y_i \leqslant 1,\ i = 1,\ldots,q\bigr\}. \tag{3}$$

В то же время стандартный q-куб представляет собой выпуклую оболочку 2^q точек в $\mathbb{R}^q$, имеющих лишь нулевые или единичные координаты.

Следующая конструкция позволяет задавать выпуклый n-мерный многогранник, имеющий m гиперграней, как пересечение положительного конуса

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^m : y_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,m\}\subset\mathbb{R}^m \tag{4}$$

с некоторой n-мерной плоскостью.

Конструкция 1.1.4. Пусть $P\in\mathbb{R}^n$ – выпуклый n-мерный многогранник, заданный формулой (1) для некоторых $\boldsymbol{l}_i\in(\mathbb{R}^n)^*$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$. Введем $(n\times m)$-матрицу L, столбцы которой суть векторы $\boldsymbol{l}_i$, записанные в стандартном базисе пространства $(\mathbb{R}^n)^*$, т.е. $(L)_{ji}=(\boldsymbol{l}_i)_j$. Заметим, что ранг L равен n. Введем также вектор-столбец $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_m)^t\in\mathbb{R}^m$. Тогда мы можем переписать (1) как

$$P=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : (L^t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,m\}, \tag{5}$$

где L^t – транспонированная матрица и $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$ – вектор-столбец. Рассмотрим аффинное отображение

$$A_P\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\qquad A_P(\boldsymbol{x})=L^t\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^m. \tag{6}$$

Его образом является некоторая n-мерная плоскость в $\mathbb{R}^m$, и (5) показывает, что $A_P(P)$ есть пересечение этой плоскости с положительным конусом $\mathbb{R}^m_+$. Пусть теперь W – матрица размера $m\times(m-n)$ и ранга $(m-n)$ такая, что $LW=0$. Тогда легко видеть, что

$$A_P(P)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m : W^t\boldsymbol{y}=W^t\boldsymbol{a},\ y_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,m\}.$$

Заметим, что многогранники P и $A_P(P)$ аффинно эквивалентны.

Пример 1.1.5. Рассмотрим стандартный n-симплекс $\Delta^n\subset\mathbb{R}^n$, определяемый неравенствами (2). Он имеет $m=n+1$ гиперграней и, в обозначениях (1), $\boldsymbol{l}_1=(1,0,\ldots,0)^t$, $\ldots$, $\boldsymbol{l}_n=(0,\ldots,0,1)^t$, $\boldsymbol{l}_{n+1}=(-1,\ldots,-1)^t$, $a_1=\cdots=a_n=0$, $a_{n+1}=1$. Мы можем положить $W=(1,\ldots,1)^t$ в конструкции 1.1.4. Таким образом, $W^t\boldsymbol{y}=y_1+\cdots+y_m$, $W^t\boldsymbol{a}=1$, и мы имеем

$$A_{\Delta^n}(\Delta^n)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{n+1} : y_1+\cdots+y_{n+1}=1,\ y_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,n\}.$$

Это есть правильный n-симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Замечание. Выпуклые многогранники, вводимые определениями 1.1.1 и 1.1.2, представляют собой *геометрические* объекты. В то же время можно рассматривать *комбинаторные* многогранники, которые представляют собой классы комбинаторно эквивалентных выпуклых многогранников. Фактически, комбинаторный многогранник есть решетка граней (геометрического) многогранника, рассматриваемая как частично упорядоченное множество. В данном обзоре мы имеем дело как с геометрическими, так и с комбинаторными многогранниками.

Два различных определения выпуклых многогранников приводят к двум различным понятиям многогранников *общего положения*.

Набор из $m > n$ точек пространства $\mathbb{R}^n$ находится в *общем положении*, если никакие $(n+1)$ из них не лежат на одной аффинной гиперплоскости. С точки зрения определения 1.1.1 выпуклый многогранник является многогранником общего положения, если он представляет собой выпуклую оболочку набора точек в общем положении. Отсюда вытекает, что все собственные грани такого многогранника суть симплексы, т.е. каждая гипергрань имеет минимальное количество вершин (а именно n). Такие многогранники называются *симплициальными*.

Набор из $m > n$ гиперплоскостей $\langle \boldsymbol{l}_i, \boldsymbol{x}\rangle = -a_i$, $\boldsymbol{l}_i \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, находится *в общем положении*, если никакая точка не принадлежит более чем n гиперплоскостям. С точки зрения определения 1.1.2 выпуклый многогранник P^n является многогранником общего положения, если ограничивающие его гиперплоскости (см. (1)) находятся в общем положении, т.е. в каждой вершине сходится в точности n гиперграней. Такие многогранники называются *простыми*.

Для любого выпуклого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ определим его *полярное множество* $P^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ как

$$P^* = \bigl\{\boldsymbol{x}' \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}\rangle \geqslant -1 \text{ для всех } \boldsymbol{x} \in P\bigr\}.$$

Замечание. Наше определение полярного множества взято из алгебраической геометрии торических многообразий и отличается от классического определения, принятого в выпуклой геометрии. Классическое определение получается при замене неравенства “$\geqslant -1$” выше на “$\leqslant 1$”. Наше полярное множество переводится в классическое симметрией с центром в 0.

Как известно из выпуклой геометрии, при условии $0 \in P$ полярное множество P^* является выпуклым многогранником в сопряженном пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$ и при этом $(P^*)^* = P$. Многогранник P^* называется *полярным* (или *двойственным*) к P. Более того, имеется обращающее порядок взаимно однозначное соответствие между решетками граней многогранников P и P^*. В частности, если P является простым, то P^* – симплициален, и наоборот.

Пример 1.1.6. Любой многоугольник (2-многогранник) является одновременно простым и симплициальным. В размерностях $\geqslant 3$ единственным многогранником, который одновременно является простым и симплициальным, является симплекс. Куб является простым многогранником. Полярным многогранником симплекса является симплекс. Полярный многогранник куба называется *ортоэдром* (или *гипероктаэдром*). Трехмерный ортоэдр представляет собой октаэдр.

В дальнейшем мы будем обозначать простые многогранники латинскими буквами P, Q и т. д., в то время как симплициальные многогранники будут обозначаться такими же буквами со звездочкой: P^*, Q^* и т. д.

Каждая грань простого многогранника является простым многогранником. *Произведение* $P_1 \times P_2$ двух простых многогранников P_1 и P_2 также является простым многогранником. Пусть P_1^* и P_2^* – соответствующие полярные симплициальные многогранники. Тогда $P_1^* \circ P_2^* := (P_1 \times P_2)^*$ снова является симплициальным многогранником. Операция $\circ$ на симплициальных многогранниках может быть непосредственно описана следующим образом. Реализуем P_1^* в $\mathbb{R}^{n_1}$ и P_2^* в $\mathbb{R}^{n_2}$ таким образом, что $0 \in P_1^*$ и $0 \in P_2^*$. Тогда $P_1^* \circ P_2^* \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ есть выпуклая оболочка объединения $P_1^* \subset \mathbb{R}^{n_1} \times 0$ и $P_2^* \subset 0 \times \mathbb{R}^{n_2}$.

Конструкция 1.1.7 (связная сумма двух простых многогранников). Пусть нам даны два простых многогранника P^n и Q^n одинаковой размерности n с выделенными вершинами v и w соответственно. Неформально, *связная сумма* $P^n \#_{v,w} Q^n$ многогранника P^n в вершине v с многогранником Q^n в вершине w получается следующим образом. Мы "срезаем" вершину v с многогранника P^n и вершину w с Q^n; затем, применив соответствующее проективное преобразование, мы получаем возможность "правильно" приклеить оставшуюся часть многогранника P^n к оставшейся части Q^n вдоль вновь образовавшихся гиперграней. Результат обозначается $P^n \#_{v,w} Q^n$. Ниже мы приводим строгое определение, следуя [26; § 6], которое будет использоваться далее.

Вначале введем n-мерный полиэдр Γ^n, получаемый как произведение стандартного $(n-1)$-симплекса Δ^{n-1} в подпространстве $\{\boldsymbol{x} : x_1 = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ с первой координатной осью. Гиперграни G_r полиэдра Γ^n, таким образом, имеют вид $\mathbb{R} \times D_r$, где D_r – грани симплекса Δ^{n-1}, $1 \leqslant r \leqslant n$. Полиэдр Γ^n и все его гиперграни G_r разделены на две части, положительную и отрицательную, в зависимости от знака координаты x_1.

Занумеруем гиперграни многогранника P^n, сходящиеся в вершине v, как $E_1, \dots, E_n$, а гиперграни Q^n, сходящиеся в w, как $F_1, \dots, F_n$. Обозначим дополнительные множества гиперграней через $\mathscr{C}_v$ и $\mathscr{C}_w$ соответственно; таким образом, гиперграни из $\mathscr{C}_v$ не содержат v, а гиперграни из $\mathscr{C}_w$ не содержат w.

Выберем теперь два проективных преобразования ϕ_P и ϕ_Q пространства $\mathbb{R}^n$, которые переводят вершины v и w в $x_1 = \pm\infty$ соответственно. Мы также потребуем, чтобы преобразование ϕ_P отображало P^n внутрь полиэдра Γ^n и удовлетворяло двум условиям: во-первых, гиперплоскость, содержащая гипергрань E_r, переходит в гиперплоскость, содержащую G_r, для любого $r = 1, \dots, n$, и, во-вторых, образы гиперплоскостей, содержащих гиперграни из множества $\mathscr{C}_v$, пересекают полиэдр Γ^n в его отрицательной части. Аналогично, преобразование ϕ_Q переводит гиперплоскость, содержащую гипергрань F_r, в гиперплоскость, содержащую гипергрань G_r, для любого $1 \leqslant r \leqslant n$, но образы гиперплоскостей, содержащих гиперграни из $\mathscr{C}_w$, пересекают полиэдр Γ^n в его положительной части. Определим теперь *связную сумму* $P^n \#_{v,w} Q^n$ многогранника P^n в вершине v с многогранником Q^n в w как простой многогранник, ограничиваемый образами гиперплоскостей, соответствующих гиперграням из $\mathscr{C}_v$, $\mathscr{C}_w$, и гиперплоскостями, содержащими гиперграни G_r, $r = 1, \dots, n$. Связная сумма определена лишь с точностью до комбинаторной эквивалентности; более того, она, вообще говоря, зависит от выбора вершин v, w и от нумерации гиперграней E_r и F_r. Если этот выбор определяется контекстом или же если результат не зависит от этого выбора, то мы будем использовать сокращенное обозначение $P^n \# Q^n$.

Близкая конструкция связной суммы $P \# Q^*$ простого многогранника P и симплициального многогранника Q^* описана в [89; пример 8.41].

Симплициальный многогранник P^* называется *k-смежностным*, если любые k его вершин порождают некоторую грань. Аналогично, простой многогранник P называется k-смежностным, если любые k его гиперграней имеют непустое пересечение (которое в этом случае является гранью коразмерности k). Очевидно, любой симплициальный (и простой) многогранник является 1-смежностным. Можно показать (см. [18; следствие 14.5], а также пример 1.1.15 ниже), что если P^* является k-смежностным симплициальным n-многогранником и $k > \left[\frac{n}{2}\right]$, то P^* есть n-симплекс. В частности, любой 2-смежностный симплициальный 3-многогранник есть симплекс (тетраэдр). При этом, однако, существуют симплициальные $\left[\frac{n}{2}\right]$-смежностные n-многогранники с любым числом вершин. Такие многогранники называются *смежностными*. В частности, существует симплициальный 4-многогранник, отличный от симплекса, каждые две вершины которого соединены ребром.

Пример 1.1.8 (смежностный 4-многогранник). Пусть $P = \Delta^2 \times \Delta^2$ – произведение двух треугольников. Тогда P является простым многогранником и, как легко проверить, любые две гиперграни в P пересекаются по общей 2-грани. Таким образом, P является 2-смежностным. Полярный многогранник P^* является смежностным симплициальным 4-многогранником.

Предыдущий пример допускает следующее обобщение. Пусть P_1 и P_2 – соответственно k_1-смежностный и k_2-смежностный простые многогранники. Тогда произведение $P_1 \times P_2$ является $\min(k_1, k_2)$-смежностным простым многогранником. Отсюда следует, что многогранники $(\Delta^n \times \Delta^n)^*$ и $(\Delta^n \times \Delta^{n+1})^*$ дают примеры смежностных симплициальных многогранников размерностей $2n$ и $(2n+1)$ соответственно. Ниже приводится другой пример смежностного многогранника, который может иметь произвольное число вершин.

Пример 1.1.9 (циклические многогранники). Определим *моментную кривую* в $\mathbb{R}^n$ как

$$\boldsymbol{x}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto \boldsymbol{x}(t) = (t, t^2, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Для каждого $m > n$ определим *циклический многогранник* $C^n(t_1, \cdots, t_m)$ как выпуклую оболочку m различных точек $\boldsymbol{x}(t_i)$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, на моментной кривой. Как следует из формулы для определителя Вандермонда, никакие $(n+1)$ точек на моментной кривой не лежат на одной аффинной гиперплоскости. Таким образом, $C^n(t_1, \dots, t_m)$ является симплициальным n-многогранником. Можно показать (см. [89; теорема 0.7]), что $C^n(t_1, \dots, t_m)$ имеет в точности m вершин $\boldsymbol{x}(t_i)$, комбинаторный тип циклического многогранника не зависит от конкретного выбора параметров $t_1, \dots, t_m$ и $C^n(t_1, \dots, t_m)$ является смежностным симплициальным n-многогранником. Мы будем обозначать комбинаторный циклический n-многогранник с m вершинами через $C^n(m)$.

Пусть P – простой n-многогранник. Обозначим через f_i число его граней коразмерности $(i+1)$ (т.е. размерности $(n-i-1)$). В частности, f_0 есть число гиперграней многогранника P, которое мы будем обозначать через $m(P)$ или просто m.

Определение 1.1.10. Целочисленный вектор $\boldsymbol{f}(P) = (f_0, \dots, f_{n-1})$ называется *f-вектором* простого многогранника P. Целочисленный вектор $(h_0, h_1, \dots, h_n)$, компоненты которого определяются из уравнения

$$h_0 t^n + \cdots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}, \tag{7}$$

называется *h-вектором* многогранника P. Наконец, целочисленный вектор $(g_0, g_1, \dots, g_{\left[\frac{n}{2}\right]})$, где $g_0 = 1$, $g_i = h_i - h_{i-1}$, $i > 0$, называется *g-вектором* многогранника P.

Мы также полагаем $f_{-1}=1$, что означает, что сам многогранник считается гранью коразмерности 0. Для любого простого многогранника f-вектор и h-вектор выражаются друг через друга при помощи линейных соотношений, а именно,

$$h_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{n-i}{n-k}f_{i-1},\quad f_{n-1-k}=\sum_{q=k}^{n}\binom{q}{k}h_{n-q},\qquad k=0,\dots,n. \tag{8}$$

В частности, $h_0=1$ и $h_n=(-1)^n\bigl(1-f_0+f_1+\dots+(-1)^nf_{n-1}\bigr)$. По теореме Эйлера

$$f_0-f_1+\dots+(-1)^{n-1}f_{n-1}=1+(-1)^{n-1}, \tag{9}$$

что эквивалентно соотношению $h_n=1=h_0$. Для простых многогранников теорема Эйлера допускает следующее обобщение.

Теорема 1.1.11 (соотношения Дена–Соммервилля). *h-вектор любого простого многогранника симметричен, т.е.*

$$h_i=h_{n-i},\qquad i=0,1,\dots,n.$$

Имеется множество различных способов доказательства соотношений Дена–Соммервилля. Мы приводим доказательство, впервые появившееся в [18] и использующее соображения, напоминающие идеи из теории Морса.

Доказательство теоремы 1.1.11. Пусть $P^n\subset\mathbb{R}^n$ – простой многогранник. Выберем линейную функцию $\varphi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ общего положения в том смысле, что она принимает различные значения на всех вершинах P^n. Для этой функции φ найдется вектор $\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{x}\rangle$. Заметим, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ не параллелен ни одному ребру многогранника P^n. Теперь мы будем рассматривать φ как функцию высоты на P^n. При помощи φ мы превратим 1-остов многогранника P^n в ориентированный граф, направляя каждое ребро так, чтобы функция φ возрастала вдоль него (напомним, что мы выбрали функцию φ общего положения). Для каждой вершины v многогранника P^n определим ее индекс $\operatorname{ind}(v)$ как число ребер, входящих в v. Обозначим число вершин индекса i через $I_\nu(i)$. Мы утверждаем, что $I_\nu(i)=h_{n-i}$. Действительно, каждая грань P^n имеет единственную верхнюю вершину (максимум функции высоты φ, ограниченной на грань) и единственную нижнюю вершину (минимум φ). Пусть F^k – некоторая k-грань и v_F – ее верхняя вершина. Так как многогранник P^n простой, в вершине v_F сходятся в точности k ребер из грани F^k, т.е. $\operatorname{ind}(v_F)\geqslant k$. С другой стороны, каждая вершина индекса $q\geqslant k$ является верхней вершиной для $\binom{q}{k}$ граней размерности k. Отсюда следует, что f_{n-1-k} (число k-граней) может быть вычислено как

$$f_{n-1-k}=\sum_{q\geqslant k}\binom{q}{k}I_\nu(q).$$

Второе из тождеств (8) показывает, что $I_\nu(q)=h_{n-q}$, что и требовалось. В частности, число $I_\nu(q)$ не зависит от $\boldsymbol{\nu}$. С другой стороны, так как $\operatorname{ind}_\nu(v)=n-\operatorname{ind}_{-\nu}(v)$ для любой вершины v, мы имеем

$$h_{n-q}=I_\nu(q)=I_{-\nu}(n-q)=h_q.$$

Используя (8), соотношения Дена–Соммервилля можно переписать в терминах f-вектора в следующем виде:

$$f_{k-1} = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{j}{k} f_{j-1}, \qquad k = 0, 1, \dots, n. \tag{10}$$

Соотношения Дена–Соммервилля были получены Деном для $n \leqslant 5$ в 1905 г. и Соммервиллем в общем случае в 1927 г. (см. [78]) в виде, аналогичном (10).

Пример 1.1.12. Пусть $P_1^{n_1}$ и $P_2^{n_2}$ – два простых многогранника. Учитывая, что любая грань многогранника $P_1 \times P_2$ есть произведение некоторой грани P_1 на грань P_2, мы непосредственно из определения f-вектора получаем:

$$f_k(P_1 \times P_2) = \sum_{i=-1}^{n_1} f_i(P_1) f_{k-i-1}(P_2), \qquad k = -1, 0, \dots, n_1 + n_2 - 1.$$

Положим $h(P; t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_n t^n$. Тогда из последней формулы согласно (7) вытекает соотношение

$$h(P_1 \times P_2; t) = h(P_1; t) h(P_2; t). \tag{11}$$

Пример 1.1.13. Выразим f-вектор и h-вектор связной суммы $P^n \# Q^n$ в терминах f-векторов и h-векторов многогранников P^n и Q^n. Как следует из конструкции 1.1.7,

$$\begin{aligned} f_i(P^n \# Q^n) &= f_i(P^n) + f_i(Q^n) - \tbinom{n}{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2; \\ f_{n-1}(P^n \# Q^n) &= f_{n-1}(P^n) + f_{n-1}(Q^n) - 2 \end{aligned}$$

(заметим, что $\binom{n}{i+1} = f_i(\Delta^{n-1})$). Далее в силу (8)

$$\begin{aligned} &h_0(P^n \# Q^n) = h_n(P^n \# Q^n) = 1; \\ &h_i(P^n \# Q^n) = h_i(P^n) + h_i(Q^n), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Таким образом, h_i, $i = 1, \dots, n-1$, задают целочисленные функции на множестве простых многогранников, линейные относительно связной суммы.

Проблема 1.1.14. *Описать все целочисленные функции на множестве простых многогранников, линейные относительно связной суммы.*

Для *симплициального* многогранника P^* определим f-вектор как $\boldsymbol{f}(P^*) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$, где f_i есть число i-граней (i-симплексов) P^*. Тогда h-вектор $h(P^*) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ определяется соотношением (7). Заметим, что если P^* является симплициальным многогранником, полярным к простому многограннику P, то $f_i(P^*) = f_i(P)$. Отсюда вытекает, что соотношения Дена–Соммервилля имеют место и для симплициальных многогранников.

Пример 1.1.15. Пусть P^* – q-смежностный симплициальный n-многогранник. Тогда $f_{k-1}(P^*) = \binom{m}{k}$, $k \leqslant q$, где $m = f_0(P^*)$ – число вершин. Из (8) мы выводим

$$h_k(P^*) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{n-i}{k-i}\binom{m}{i} = \binom{m-n+k-1}{k}, \qquad k \leqslant q \tag{12}$$

(последнее равенство получается вычислением коэффициента при t^k в обеих частях тождества $\frac{1}{(1+t)^{n-k+1}}(1+t)^m = (1+t)^{m-n+k-1}$). Предположим, что P^* не является симплексом. Тогда $m > n+1$, и из (12) следует, что $h_0 < h_1 < \cdots < h_q$. Как показывают соотношения Дена–Соммервилля, в этом случае имеет место неравенство $q \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$.

Возникает естественный вопрос: какие целочисленные векторы могут быть f-векторами простых (или, эквивалентно, симплициальных) многогранников? Соотношения Дена–Соммервилля дают необходимое условие.

Предложение 1.1.16 [52]. *Соотношения Дена–Соммервилля являются наиболее общими линейными уравнениями, которым удовлетворяют f-векторы всех простых (или симплициальных) многогранников.*

Доказательство. В отличие от [52], мы будем использовать h-векторы. Достаточно показать, что аффинная оболочка h-векторов $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ простых n-многогранников представляет собой $\left[\frac{n}{2}\right]$-мерную плоскость. Положим $Q_k := \Delta^k \times \Delta^{n-k}$, $k = 0, 1 \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Так как $\boldsymbol{h}(\Delta^k) = 1 + t + \cdots + t^k$, из (11) мы получаем

$$\boldsymbol{h}(Q_k) = \frac{1-t^{k+1}}{1-t}\cdot\frac{1-t^{n-k+1}}{1-t}.$$

Отсюда вытекает, что $\boldsymbol{h}(Q_{k+1}) - \boldsymbol{h}(Q_k) = t^{k+1} + \cdots$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{h}(Q_k)$, $k = 0, 1 \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, аффинно независимы.

Мы отметим также, что соотношение (9) является единственным линейным соотношением, которому удовлетворяют векторы чисел граней *всех* выпуклых многогранников.

Условия, характеризующие f-векторы простых (или симплициальных) многогранников, в настоящее время известные как *g-теорема*, были высказаны в качестве гипотезы Макмюлленом [58] в 1970 г. и доказаны Стенли [80] (необходимость) и Биллерой, Ли [13] (достаточность) в 1980 г. Кроме соотношений Дена–Соммервилля, g-теорема содержит два набора неравенств, один из которых состоит из линейных неравенств, а другой – из нелинейных. Для того чтобы сформулировать g-теорему полностью, нам понадобится следующая конструкция. Для любых двух натуральных чисел a, i существует единственное *биномиальное i-разложение* числа a вида

$$a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{a_j}{j},$$

где $a_i > a_{i-1} > \cdots > a_j \geqslant i \geqslant 1$. Определим

$$a^{\langle i\rangle} = \binom{a_i+1}{i+1} + \binom{a_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{a_j+1}{j+1}, \qquad 0^{\langle i\rangle} = 0.$$

Теорема 1.1.17 (g-теорема). *Целочисленный вектор* $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ *является* f*-вектором некоторого простого* n*-многогранника тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность* $(h_0, \dots, h_n)$, *определяемая* (7), *удовлетворяет следующим трем условиям*:

(а) $h_i = h_{n-i}$, $i = 0, \dots, n$ (*соотношения Дена–Соммервилля*);

(б) $h_0 \leqslant h_1 \leqslant \dots \leqslant h_{[\frac{n}{2}]}$, *т.е.* $g_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$.

(в) $h_0 = 1$, $h_{i+1} - h_i \leqslant (h_i - h_{i-1})^{\langle i \rangle}$, *т.е.* $g_{i+1} \leqslant g_i^{\langle i \rangle}$, $i = 1, \dots, [\frac{n}{2}] - 1$.

Замечание. Очевидно, те же самые условия характеризуют f-векторы *симплициальных* многогранников.

Последовательность целых чисел $(k_0, k_1, \dots, k_r)$, удовлетворяющая условиям $k_0 = 1$ и $0 \leqslant k_{i+1} \leqslant k_i^{\langle i \rangle}$, $i = 1, \dots, r-1$, называется M*-вектором* (по имени М. Маколея). Условия (б) и (в) из g-теоремы означают, что g-вектор $(g_0, g_1, \dots, g_{[\frac{n}{2}]})$ простого n-многогранника является M-вектором. С другой стороны, понятие M-вектора возникает в следующем классификационном результате из коммутативной алгебры.

Теорема 1.1.18 (Маколей). *Последовательность* $(k_0, k_1, \dots, k_r)$ *является* M*-вектором тогда и только тогда, когда существует градуированная коммутативная алгебра* $A = A^0 \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^{2r}$ *над полем* $\mathbf{k} = A^0$, *порожденная (как алгебра) элементами степени* 2, *такая, что размерность* $2i$*-й градуированной компоненты* A *равна* k_i, *т.е.* $\dim_{\mathbf{k}} A^{2i} = k_i$, $i = 1, \dots, r$.

Доказательство можно найти в [79].

Для доказательства достаточности g-теоремы Биллерой и Ли была предложена замечательная комбинаторно-геометрическая конструкция, позволяющая построить симплициальный многогранник с любой наперед заданной M-последовательностью в качестве g-вектора. Доказательство Стенли условия необходимости в g-теореме (т.е. утверждения о том, что g-вектор простого многогранника является M-вектором) основывается на глубоких результатах алгебраической геометрии: сильной теореме Лефшеца для когомологий торических многообразий. Мы приводим идеи доказательства Стенли в §2.1. С 1995 г. появилось несколько более элементарных комбинаторных доказательств g-теоремы. Первое элементарное доказательство Макмюллена [59], использующее вместо алгебры когомологий торического многообразия понятие *алгебры многогранника*, было, тем не менее, достаточно сложным. Недавно В. А. Тимориным [86] было предложено более простое элементарное доказательство g-теоремы, которое основано на интерпретации алгебры многогранника Макмюллена как алгебры дифференциальных операторов (с постоянными коэффициентами), принимающих нулевое значение на *многочлене объема* многогранника.

Как вытекает из результатов [13], условие (б) из g-теоремы, т.е. неравенства

$$h_0 \leqslant h_1 \leqslant \dots \leqslant h_{[\frac{n}{2}]}, \tag{13}$$

дает наиболее общие линейные неравенства, которым удовлетворяют f-векторы всех простых (или симплициальных) многогранников. Эти неравенства в настоящее время известны как *Обобщенная Теорема о Нижней Границе* (ОТНГ) для простых (симплициальных) многогранников. В течение последних двух десятилетий было получено множество результатов в направлении обобщения соотношений Дена–Соммервилля, ОТНГ и g-теоремы на более широкий класс объектов, чем симплициальные многогранники. Тем не менее, здесь остается большое количество интригующих открытых проблем. Некоторые из них приведены в обзорной статье Стенли [83]. В настоящей работе мы также рассматриваем некоторые связанные с этим вопросы (см. комментарии в следующем параграфе).

Имеет место следующее важное следствие из g-теоремы.

Теорема 1.1.19 (Теорема о Верхней Границе (ТВГ) для симплициальных многогранников [89; теорема 8.23, следствие 8.38]). *Циклический многогранник $C^n(m)$ (пример 1.1.9) имеет максимальное число i-граней, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, среди всех симплициальных n-многогранников P^* с m вершинами. Таким образом, если $f_0(P^*)=m$, то*

$$f_i(P^*) \leqslant f_i\bigl(C^n(m)\bigr), \qquad 2 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Заметим, что $f_i(C^n(m)) = \binom{m}{i+1}$ при $0 \leqslant i < \left[\frac{n}{2}\right]$. Последняя теорема была высказана в качестве гипотезы Мотцкином в 1957 г. Она была доказана Макмюлленом в 1970 г., что дало ему основание высказать в качестве гипотезы g-теорему. Макмюлленом было также показано, что ТВГ эквивалентна следующим неравенствам для h-вектора $\boldsymbol{h}(P^*)=(h_0,h_1,\dots,h_n)$:

$$h_i(P^*) \leqslant \binom{m-n+i-1}{i}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant \left[\tfrac{n}{2}\right]$$

(сравните это с примером 1.1.15).

Завершая изложение необходимых сведений о многогранниках, мы введем алгебраический инвариант (комбинаторного) простого многогранника, который будет играть важную роль в нашем обзоре. Пусть P – простой n-многогранник с m гипергранями $F_1,\dots,F_m$. Зафиксируем некоторое коммутативное кольцо $\mathbf{k}$ с единицей. Пусть $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ – алгебра многочленов над $\mathbf{k}$ от m переменных. Мы превратим ее в градуированную алгебру, полагая $\deg(v_i)=2$.

Определение 1.1.20. *Кольцом граней* (или *кольцом Стенли–Райснера*) простого многогранника P называется фактор-кольцо

$$\mathbf{k}(P)=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{I}_P,$$

где $\mathscr{I}_P$ – идеал, порожденный всеми мономами $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_s}$, $i_1<\dots<i_s$, такими, что $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_s}=\varnothing$ в P.

Очевидно, $\mathbf{k}(P)$ является градуированной $\mathbf{k}$-алгеброй.

Заметим, что кольцо Стенли–Райснера, а также f- и h-векторы, являются инвариантами *комбинаторного* простого многогранника: они зависят только от решетки граней и не зависят от конкретной геометрической реализации.

§ 1.2. Симплициальные комплексы: топология и комбинаторика. Обозначим через $[m]$ множество индексов $\{1,\dots,m\}$. Для любого подмножества $I\subset[m]$ будем обозначать число его элементов через $\#I$.

Определение 1.2.1. (Абстрактным) *симплициальным комплексом* на множестве $[m]$ называется набор $K = \{I\}$ подмножеств множества $[m]$ такой, что для любого $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in K$ все подмножества I (включая $\varnothing$) также принадлежат K. Подмножества $I \in K$ называются (абстрактными) *симплексами* комплекса K.

Аналогичным образом определяются симплициальные комплексы на произвольном множестве $\mathscr{S}$. Одноэлементные подмножества из K называются *вершинами* комплекса K. Если K содержит все одноэлементные подмножества множества $[m]$, то говорят, что K есть симплициальный комплекс *на множестве вершин* $[m]$. *Размерность* абстрактного симплекса $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in K$ равна числу его элементов минус один, т.е. $\dim I = \#I - 1$. Размерность абстрактного симплициального комплекса полагается равной максимальной размерности его симплексов.

Определение 1.2.2. *Геометрическим симплициальным комплексом* (или *полиэдром*) называется подмножество $\mathscr{P} \subset \mathbb{R}^n$, представленное в виде объединения симплексов произвольной размерности таким образом, что пересечение любых двух симплексов является гранью каждого из них (под симплексами мы здесь подразумеваем выпуклые многогранники из примера 1.1.3).

Далее мы будем использовать обозначение Δ^{m-1} как для абстрактного симплекса (т.е. симплициального комплекса, состоящего из *всех* подмножеств множества $[m]$), так и для соответствующего полиэдра.

Замечание. Понятие полиэдра из определения 1.1.2 отличается от понятия из предыдущего определения. Первое значение термина "полиэдр" (т.е. "неограниченный многогранник") принято в выпуклой геометрии, в то время как второе значение (т.е. "геометрический симплициальный комплекс") используется в комбинаторной топологии. Так как оба значения стали классическими в соответствующих областях, мы стали менять их названия. В этом обзоре под "полиэдром" мы будем, как правило, понимать геометрический симплициальный комплекс. "Неограниченные многогранники" будут у нас называться "выпуклыми полиэдрами". В любом случае из контекста всегда будет ясно, какой "полиэдр" имеется ввиду.

В настоящем обзоре рассматриваются только конечные геометрические симплициальные комплексы (полиэдры). Размерность полиэдра равна максимальной размерности его симплексов. Хорошо известно [72], что любой n-мерный абстрактный симплициальный комплекс K допускает *геометрическую реализацию* $|K|$ в качестве n-мерного полиэдра в пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ (абстрактные симплексы комплекса K соответствуют (многогранным) симплексам полиэдра $|K|$). Геометрическая реализация $|K|$ абстрактного симплициального комплекса K единственна с точностью до кусочно-линейного гомеоморфизма.

Конструкция 1.2.3. Геометрическую реализацию в m-мерном пространстве симплициального комплекса K на множестве вершин $[m]$ можно построить следующим образом. Пусть $\boldsymbol{e}_i$ обозначает i-й единичный координатный вектор пространства $\mathbb{R}^m$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ обозначим через Δ_I выпуклую оболочку векторов $\boldsymbol{e}_i$ с $i \in I$. Очевидно, Δ_I является (геометрическим) симплексом. Тогда мы имеем

$$|K| = \bigcup_{I \in K} \Delta_I \subset \mathbb{R}^m.$$

Симплициальным отображением $f\colon |K_1| \to |K_2|$ двух полиэдров называется произвольное отображение множества вершин полиэдра $|K_1|$ в множество вершин $|K_2|$, продолженное линейно на симплексах из $|K_1|$ до отображения всего полиэдра $|K_1|$. Полиэдр $|K'|$ называется *подразделением* полиэдра $|K|$, если каждый симплекс из $|K|$ является объединением конечного числа симплексов из $|K'|$. *Кусочно-линейным отображением* (или *PL-отображением*) называется отображение $f\colon |K_1| \to |K_2|$, которое является симплициальным отображением некоторого подразделения полиэдра $|K_1|$ в некоторое подразделение $|K_2|$. Изложение основ кусочно-линейной топологии можно найти в [75].

Пример 1.2.4 (ассоциированный симплициальный комплекс). Пусть K – симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Предположим, что K отличен от $(m-1)$-симплекса. Определим

$$\widehat{K} := \bigl\{ I \subset [m] : [m] \setminus I \notin K \bigr\}.$$

Легко видеть, что $\widehat{K}$ является симплициальным комплексом на множестве $[m]$. Он называется *симплициальным комплексом, ассоциированным с* K.

Конструкция 1.2.5 (соединение (джойн) симплициальных комплексов). Пусть K_1, K_2 – симплициальные комплексы на множествах $[m_1]$ и $[m_2]$ соответственно. Отождествим $[m_1] \cup [m_2]$ с $[m_1+m_2]$. *Соединением* (*джойном*) комплексов K_1 и K_2 называется симплициальный комплекс

$$K_1 * K_2 := \bigl\{ I \subset [m_1+m_2] : I = I_1 \cup I_2,\ I_1 \in K_1, I_2 \in K_2 \bigr\}$$

на множестве $[m_1+m_2]$.

Пример 1.2.6. 1. Если $K_1 = \Delta^{m_1-1}$, $K_2 = \Delta^{m_2-1}$, то $K_1 * K_2 = \Delta^{m_1+m_2-1}$.

2. Симплициальный комплекс $\Delta^0 * K$ (соединение K с точкой) называется *конусом* над K и обозначается $\operatorname{cone}(K)$.

3. Пусть S^0 – симплициальный комплекс, представляющий собой несвязное объединение двух точек. Тогда $S^0 * K$ называется *надстройкой* над K и обозначается ΣK.

Геометрическая реализация комплекса $\operatorname{cone}(K)$ (комплекса ΣK) представляет собой топологический конус (надстройку) над $|K|$.

Барицентрическим подразделением абстрактного симплициального комплекса K называется симплициальный комплекс $\operatorname{bs}(K)$ на множестве симплексов комплекса K такой, что $\{I_1,\dots,I_r\} \in \operatorname{bs}(K)$, если и только если $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_r$ (после возможного переупорядочивания). *Барицентром* (выпуклого) симплекса $\Delta^n \in \mathbb{R}^n$ с вершинами $v_1,\dots,v_{n+1}$ называется точка $\operatorname{bc}(\Delta^n) = \frac{1}{n+1}(v_1+\dots+v_{n+1}) \in \Delta^n$. *Барицентрическим подразделением* полиэдра $\mathscr{P}$ называется полиэдр $\operatorname{bs}(\mathscr{P})$, определяемый следующим образом. Вершины полиэдра $\operatorname{bs}(\mathscr{P})$ суть барицентры симплексов всех размерностей полиэдра $\mathscr{P}$. Множество вершин $\{\operatorname{bc}(\Delta_1^{i_1}),\dots,\operatorname{bc}(\Delta_r^{i_r})\}$ порождает симплекс полиэдра $\operatorname{bs}(\mathscr{P})$ тогда и только тогда, когда $\Delta_1^{i_1} \subset \dots \subset \Delta_r^{i_r}$ в $\mathscr{P}$. Очевидно, мы имеем $|\operatorname{bs}(K)| = \operatorname{bs}(|K|)$ для любого абстрактного симплициального комплекса K.

Пример 1.2.7 (порядковый комплекс частично упорядоченного множества). Пусть $(\mathscr{S}, \prec)$ – произвольное частично упорядоченное множество. Определим $K(\mathscr{S})$ как множество всех цепей $x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_k$, $x_i \in \mathscr{S}$. Легко видеть, что $K(\mathscr{S})$ – симплициальный комплекс. Он называется *порядковым комплексом* частично упорядоченного множества $(\mathscr{S}, \prec)$. В частности, если $(\mathscr{S}, \subsetneq)$ – частично упорядоченное множество граней (решетка граней) некоторого симплициального комплекса K, то $K(\mathscr{S})$ – барицентрическое подразделение K.

Недостающей гранью симплициального комплекса K на множестве $[m]$ называется подмножество $I \subset [m]$ такое, что $I \notin K$, но любое собственное подмножество множества I является симплексом комплекса K. *Флаговым комплексом* называется симплициальный комплекс, для которого любая недостающая грань состоит из двух элементов. Порядковые комплексы частично упорядоченных множеств (в частности, барицентрические подразделения) являются флаговыми комплексами ввиду условия транзитивности.

Для любого подмножества $I \subset [m]$ обозначим через K_I подкомплекс комплекса K, состоящий из всех симплексов $J \in K$ таких, что $J \subset I$. *Линком* симплекса $I \in K$ называется подкомплекс $\operatorname{link}_K I \subset K$, состоящий из всех симплексов $J \in K$ таких, что $I \cup J \in K$ и $I \cap J = \varnothing$. Для любой вершины $\{i\} \in K$ конус над комплексом $\operatorname{link}_K\{i\}$ (с вершиной $\{i\}$) естественным образом является подкомплексом в K, который называется *звездой* вершины $\{i\}$ и обозначается $\operatorname{star}_K\{i\}$. Полиэдр $|\operatorname{star}_K\{i\}|$ состоит из всех (многогранных) симплексов полиэдра $|K|$, содержащих $\{i\}$. Если из контекста ясно, какой комплекс K имеется в виду, то мы будем использовать обозначения $\operatorname{link} I$ и $\operatorname{star}\{i\}$ вместо $\operatorname{link}_K I$ и $\operatorname{star}_K\{i\}$ соответственно. Определим $\operatorname{core}[m] = \{i \in [m] : \operatorname{star}\{i\} \neq K\}$. *Ядром* симплициального комплекса K называется подкомплекс $\operatorname{core} K = K_{\operatorname{core}[m]}$. Таким образом, ядро есть максимальный подкомплекс, содержащий все вершины, звезды которых не совпадают с K.

Пример 1.2.8. 1. $\operatorname{link}(\varnothing) = K$.

2. Пусть K – симплекс на четырех вершинах $1, 2, 3, 4$ и $I = \{1, 2\}$. Тогда $\operatorname{link}(I)$ – подкомплекс, состоящий из двух вершин 3 и 4.

3. Пусть K – конус над K' с вершиной p. Тогда $\operatorname{link}\{p\} = K'$, $\operatorname{star}\{p\} = K$ и $\operatorname{core} K \subset K'$.

Симплициальная n-мерная сфера – это симплициальный комплекс, гомеоморфный n-мерной сфере S^n (здесь и далее, говоря “симплициальный комплекс K гомеоморфен X”, мы подразумеваем, что геометрическая реализация $|K|$ гомеоморфна X). *Кусочно-линейной сферой* (или *PL-сферой*) называется симплициальная сфера, которая кусочно линейно гомеоморфна границе симплекса. Граница симплициального n-многогранника является $(n-1)$-мерной PL-сферой. PL-сферы, получаемые таким образом, называются *многогранными сферами*. Таким образом, мы имеем следующие вложенные классы комбинаторных объектов:

$$\text{многогранные сферы} \subset PL\text{-сферы} \subset \text{симплициальные сферы}.$$

В размерности 2 все симплициальные сферы являются многогранными (см., например, [89; теорема 5.8]). Тем не менее, в высших размерностях оба включения являются строгими. Первые примеры трехмерных PL-сфер, *не являющихся многогран-*

ными, были найдены Грюнбаумом, и наименьшая из таких сфер имеет 8 вершин. Изложение этих примеров можно найти в [9]. Симплициальная сфера, *не являющаяся PL-сферой*, приведена ниже в примере 1.2.10.

Понятия f-вектора и h-вектора $(n-1)$-мерного симплициального комплекса K^{n-1} вводятся так же, как и для симплициальных многогранников: $\boldsymbol{f}(K^{n-1}) = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$, где f_i – число i-мерных симплексов в K^{n-1}, и $\boldsymbol{h}(K^{n-1}) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$, где h_i определяются из (7). Здесь мы также полагаем $f_{-1} = 1$. Если $K^{n-1} = \partial P^*$ – граница симплициального n-многогранника P^*, то мы, очевидно, имеем $\boldsymbol{f}(K^{n-1}) = \boldsymbol{f}(P^*)$.

Так как f-вектор многогранной симплициальной сферы совпадает с f-вектором соответствующего (симплициального) многогранника, g-теорема (теорема 1.1.17) имеет место также и для многогранных сфер. Таким образом, естественно возникает вопрос, обобщается ли g-теорема на случай произвольной симплициальной сферы. Этот вопрос был поставлен Макмюлленом [58] как обобщение его гипотезы для симплициальных многогранников. После 1980 г., когда гипотеза Макмюллена была доказана Биллерой, Ли и Стенли, следующая проблема стала, возможно, главной открытой комбинаторно-геометрической проблемой, связанной с f-векторами симплициальных комплексов.

Проблема 1.2.9 (g-гипотеза для симплициальных сфер). *Верно ли, что g-теорема (теорема 1.1.17) имеет место для симплициальных сфер?*

Эта гипотеза является открытой даже для PL-сфер. Заметим, что для доказательства гипотезы для симплициальных сфер необходимо проверить лишь что g-вектор является M-вектором. Если g-гипотеза верна, то она дает полное описание f-векторов симплициальных сфер.

Первая часть теоремы 1.1.17 (соотношения Дена–Соммервилля) известна для симплициальных сфер (см. следствие 1.4.15 ниже). Первое неравенство $h_0 \leqslant h_1$ из второй части g-теоремы эквивалентно неравенству $1 \leqslant f_0 - n$, которое очевидно. Неравенство $h_1 \leqslant h_2, n \geqslant 4$, эквивалентно условию $f_1 \geqslant nf_0 - \binom{n+1}{2}$ для числа ребер, которое также известно для симплициальных сфер (см. [10]; фактически, доказательство условия нижней границы для числа ребер симплициального многогранника проходит и для симплициальных сфер). Все вместе эти факты показывают, что g-гипотеза верна для симплициальных сфер размерности $\leqslant 4$. Вопрос о неравенстве $h_2 \leqslant h_3$ $(n \geqslant 6)$ из ОТНГ (второй части теоремы 1.1.17) остается открытым. В течение последних двух десятилетий было предпринято большое количество попыток доказательства g-гипотезы. Несмотря на то, что все эти попытки были неудачными, они привели к некоторым весьма интересным переформулировкам g-гипотезы. Мы лишь упомянем результаты Пахнера [67], [68], которые сводят g-гипотезу (для PL-сфер) к доказательству некоторых свойств *бизвездных преобразований*[1], и результаты из [85], которые показывают, что эта гипотеза вытекает из *остовной r-жесткости*[2] симплициальной $(n-1)$-сферы для $r \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Как было показано независимо Калаи и Стенли [81; следствие 2.4], ОТНГ выполнена для границы n-мерного шара, являющегося подкомплексом граничного комплекса симплициального $(n+1)$-многогранника. При

[1] В оригинале *bistellar moves*.

[2] В оригинале *skeletal r-rigidity*.

этом, однако, неизвестно, какие симплициальные комплексы могут появляться таким образом. Безуспешность многочисленных попыток доказательства g-гипотезы послужила основанием для Бьорнера и Люца организовать компьютерный поиск контрпримеров [15]. Их компьютерная программа BISTELLAR позволила получить множество замечательных результатов о триангуляциях многообразий, однако контрпримеры к g-гипотезе обнаружены не были. Дополнительную информацию об истории g-теоремы и связанных с этим вопросах можно найти в [82], [83], [89; лекция 8].

Симплициальный комплекс K называется *симплициальным многообразием* (или *триангулированным многообразием*), если полиэдр $|K|$ является топологическим многообразием. Все многообразия, рассматриваемые в нашем обзоре, предполагаются компактными, связными и замкнутыми (если не оговорено противное). Если K^q является симплициальным многообразием, то для любого непустого симплекса $I \in K^q$ подкомплекс $\mathrm{link}(I)$ имеет гомологии, как у $(q-\#I)$-сферы (см. теорему 1.2.11 ниже). Симплициальный комплекс K^q называется q-мерным *PL-многообразием* (или *комбинаторным многообразием*), если $\mathrm{link}(I)$ является PL-сферой размерности $(q-\#I)$ для любого непустого симплекса $I \in K^q$.

Замечание. Если K^q является PL-многообразием, то для каждой вершины $\{i\} \in K^q$ соответствующая $(q-1)$-мерная PL-сфера $\mathrm{link}\{i\}$ ограничивает открытую окрестность U_i, которая PL-гомеоморфна q-мерному шару. Так как каждая точка полиэдра $|K^q|$ содержится в U_i для некоторого i, это определяет PL-атлас для $|K^q|$.

Пример 1.2.10 (симплициальная 5-мерная сфера, не являющаяся PL-сферой). Пусть S^3_H – произвольная триангуляция гомологической, но не топологической, 3-мерной сферы, т.е. неодносвязное симплициальное многообразие, имеющее гомологии, как у 3-мерной сферы S^3. Одним из примеров такого многообразия является *сфера Пуанкаре $SO(3)/A_5$*. В силу теоремы Кэннона [27] двойная надстройка $\Sigma^2 S^3_H$ гомеоморфна сфере S^5. Тем не менее, $\Sigma^2 S^3_H$ не может быть PL-сферой, так как S^3_H является линком некоторого 1-симплекса в $\Sigma^2 S^3_H$.

Следующая теорема дает комбинаторную характеризацию симплициальных комплексов, которые являются симплициальными многообразиями размерности $\geqslant 5$, и обобщает упомянутый выше результат Кэннона.

Теорема 1.2.11 (Эдвардс [38]). *При $q \geqslant 5$ полиэдр симплициального комплекса K^q является топологическим многообразием размерности q тогда и только тогда, когда для любого непустого симплекса $I \in K^q$ подкомплекс $\mathrm{link}\, I$ имеет гомологии, как у $(q-\#I)$-мерной сферы, и для любой вершины $\{i\} \in K$ подкомплекс $\mathrm{link}\{i\}$ является односвязным.*

Вопрос о том, какие топологические многообразия могут быть триангулированы, является фундаментальным в комбинаторной топологии. Любое гладкое многообразие может быть триангулировано по теореме Уитни. Все топологические 2- и 3-мерные многообразия также допускают триангуляцию (для 2-мерных многообразий это почти очевидно, а для 3-мерных см. [61]). Более того, так как линк произвольной вершины симплициального 3-мерного многообразия является 2-мерной сферой (а все 2-мерные сферы являются PL-сферами), все 2- и 3-мерные многообразия являются PL-многообразиями. Однако, уже в размерности 4 существуют топологические многообразия, которые не допускают PL-триангуляции (например, “фальшивое” пространство $\mathbb{C}P^2$ Фридмана). Более того, существуют топологические 4-мерные многообразия, которые *вообще не могут быть триангулированы* (например, топологическое 4-многообразие Фридмана с формой пересечения E_8). Оба примера описаны в [3]. В размерностях $\geqslant 5$ имеется следующая знаменитая комбинаторно-топологическая проблема.

Проблема 1.2.12 (гипотеза триангуляции). *Верно ли, что любое топологическое многообразие размерности $\geqslant 5$ может быть триангулировано?*

Другая хорошо известная проблема из PL-топологии связана с вопросом о единственности кусочно-линейной структуры на топологической сфере.

Проблема 1.2.13. *Верно ли, что PL-многообразие, гомеоморфное топологической 4-сфере, является PL-сферой?*

Четыре является единственной размерностью, в которой вопрос о единственности PL-структуры на топологической сфере остается открытым. В размерностях $\leqslant 3$ единственность была доказана в [61], а в размерностях $\geqslant 5$ она вытекает из результатов Кирби и Зибенманна [51]. В размерности 4 категория PL-многообразий эквивалентна гладкой категории, поэтому предыдущая проблема эквивалентна проблеме существования экзотических 4-сфер.

Дополнительную информацию о последних достижениях и открытых проблемах комбинаторной и PL-топологии можно найти в [62], [73].

§ 1.3. Симплициальные комплексы: коммутативная алгебра. Аппарат коммутативной алгебры находит широкие применения в комбинаторике симплициальных комплексов и связанных с ними объектов. Основным инструментом для перевода комбинаторных результатов и проблем на алгебраический язык служит кольцо Стенли–Райснера симплициального комплекса. Этот подход был предложен Стенли в начале 1970-х годов.

Напомним, что $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ обозначает градуированную алгебру многочленов над коммутативным кольцом $\mathbf{k}$ с единицей, $\deg(v_i)=2$.

Определение 1.3.1. *Кольцом граней* (или *кольцом Стенли–Райснера*) симплициального комплекса K с m вершинами называется фактор-кольцо

$$\mathbf{k}(K)=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{I}_K,$$

где $\mathscr{I}_K$ – однородный идеал, порожденный мономами $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_s}$, $i_1<\dots<i_s$, такими, что $I=\{i_1,\dots,i_s\}$ не является симплексом комплекса K.

Заметим, что идеал $\mathscr{I}_K$ имеет базис, состоящий из мономов $v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_s}$ без квадратов таких, что $I=\{i_1,\dots,i_s\}$ – недостающая грань комплекса K. Идеалы кольца многочленов, в которых можно выбрать базис из мономов, называются *мономиальными*.

Предложение 1.3.2. *Любой мономиальный идеал кольца многочленов, имеющий базис из мономов без квадратов, имеет вид $\mathscr{I}_K$ для некоторого симплициального комплекса K.*

Доказательство. Для любого подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ обозначим через v_I моном $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$. Пусть $\mathscr{I}$ – идеал кольца многочленов, имеющий базис из мономов без квадратов. Положим

$$K = \bigl\{I \subset [m] : v_{[m]\setminus I} \in \mathscr{I}\bigr\}.$$

Тогда легко проверить, что K – симплициальный комплекс и $\mathscr{I} = \mathscr{I}_K$.

Пусть P – простой n-многогранник и P^* – его полярный симплициальный многогранник. Обозначим через K_P границу P^*. Тогда K_P является многогранной симплициальной $(n-1)$-сферой. Очевидно, кольцо граней многогранника P из определения 1.1.20 совпадает с кольцом граней комплекса K_P из определения 1.3.1: $\mathbf{k}(P) = \mathbf{k}(K_P)$.

Пусть $M = M^0 \oplus M^1 \oplus \cdots$ – градуированный $\mathbf{k}$-модуль. Ряд

$$F(M;t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_{\mathbf{k}} M^i) t^i$$

называется *рядом Пуанкаре* модуля M.

Замечание. В алгебраической литературе ряд $F(M;t)$ называется также *рядом Гильберта* или *рядом Гильберта–Пуанкаре*.

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между двумя комбинаторными инвариантами симплициального комплекса: кольцом граней и f-вектором (или h-вектором).

Лемма 1.3.3 (Стенли [82; теорема II.1.4]). *Ряд Пуанкаре кольца $\mathbf{k}(K^{n-1})$ может быть вычислен как*

$$F\bigl(\mathbf{k}(K^{n-1});t\bigr) = \sum_{i=-1}^{n-1} \frac{f_i t^{2(i+1)}}{(1-t^2)^{i+1}} = \frac{h_0 + h_1 t^2 + \cdots + h_n t^{2n}}{(1-t^2)^n},$$

где $(f_0, \dots, f_{n-1})$ – f-вектор и $(h_0, \dots, h_n)$ – h-вектор комплекса K^{n-1}.

Заметим, что второе тождество из леммы 1.3.3 является очевидным следствием формул (8).

Пример 1.3.4. 1. Пусть $K = \Delta^n$ (n-симплекс). Тогда $f_i = \binom{n+1}{i+1}$ при $-1 \leqslant i \leqslant n$, $h_0 = 1$ и $h_i = 0$ при $i > 0$. Так как любое подмножество множества $[n+1]$ является симплексом в Δ^n, мы имеем $\mathbf{k}(\Delta^n) = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_{n+1}]$. Таким образом, $F(\mathbf{k}(\Delta^n);t) = \frac{1}{(1-t^2)^{n+1}}$, что согласуется с леммой 1.3.3.

2. Пусть K – граница n-симплекса. Тогда $h_i = 1$, $i = 0, 1, \dots, n$, и $\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_{n+1}]/(v_1 v_2 \cdots v_{n+1})$. Отсюда

$$F\bigl(\mathbf{k}(K);t\bigr) = \frac{1 + t^2 + \cdots + t^{2n}}{(1-t^2)^n}.$$

Теперь предположим, что $\mathbf{k}$ – поле. Пусть A – градуированная алгебра над $\mathbf{k}$. *Размерностью Крулля* алгебры A (обозначается $\operatorname{Kd} A$) называется максимальное число алгебраически независимых элементов из A. Последовательность $\theta_1, \ldots, \theta_n$ из $n = \operatorname{Kd} A$ однородных элементов алгебры A называется *однородной системой параметров*, если размерность Крулля фактор-алгебры $A/(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ равна нулю. Эквивалентно, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ является однородной системой параметров, если $n = \operatorname{Kd} A$ и A является конечнопорожденным $\mathbf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_n]$-модулем. Элементы однородной системы параметров автоматически алгебраически независимы.

Лемма 1.3.5 (лемма Нетера о нормализации). *Для любой градуированной конечнопорожденной алгебры A существует однородная система параметров. Если поле $\mathbf{k}$ имеет нулевую характеристику, а алгебра A порождена элементами степени два, то можно выбрать однородную систему параметров степени два.*

Далее в этом параграфе мы предполагаем, что поле $\mathbf{k}$ имеет характеристику нуль. Последовательность $\theta_1, \ldots, \theta_k$ однородных элементов алгебры A называется *регулярной последовательностью*, если θ_{i+1} не является делителем нуля в кольце $A/(\theta_1, \ldots, \theta_i)$ при $0 \leqslant i < k$ (т.е. умножение на θ_{i+1} задает мономорфизм алгебры $A/(\theta_1, \ldots, \theta_i)$ в себя). Эквивалентно, $\theta_1, \ldots, \theta_k$ является регулярной последовательностью, если и только если элементы $\theta_1, \ldots, \theta_k$ алгебраически независимы и A является *свободным* $\mathbf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_k]$-модулем.

Замечание. Регулярные последовательности можно определять также в градуированных алгебрах, не являющихся конечнопорожденными, а также в алгебрах над кольцами без делителей нуля. Регулярные последовательности в градуированном кольце многочленов от бесконечного числа образующих $R[a_1, a_2, \ldots]$, $\deg a_i = -2i$, где R – некоторое подкольцо поля рациональный чисел $\mathbb{Q}$, играют важную роль в алгебраической топологии при построении теории комплексных кобордизмов с коэффициентами, см. [54].

Любые две максимальные регулярные последовательности имеют одинаковую длину, которая называется *глубиной* алгебры A и обозначается $\operatorname{depth} A$. Очевидно, $\operatorname{depth} A \leqslant \operatorname{Kd} A$.

Определение 1.3.6. Алгебра A называется *алгеброй Коэна–Маколея*, если в ней имеется регулярная последовательность $\theta_1, \ldots, \theta_n$ длины $n = \operatorname{Kd} A$.

Любая регулярная последовательность $\theta_1, \ldots, \theta_n$ длины $n = \operatorname{Kd} A$ является однородной системой параметров. Таким образом, A является алгеброй Коэна–Маколея тогда и только тогда, когда существует однородная система параметров $\theta_1, \ldots, \theta_n$ такая, что A является конечнопорожденным свободным $\mathbf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_n]$-модулем. Если, кроме того, алгебра A порождена элементами степени два, то можно выбрать регулярную последовательность $\theta_1, \ldots, \theta_n$ степени два. В этом случае для ряда Пуанкаре алгебры A имеет место тождество

$$F(A;t) = \frac{F\big(A/(\theta_1, \ldots, \theta_n);t\big)}{(1-t^2)^n},$$

где $F(A/(\theta_1, \ldots, \theta_n);t) = h_0 + h_1 t^2 + \cdots$ – некоторый многочлен. Конечный вектор $(h_0, h_1, \ldots)$ называется *h-вектором* алгебры A.

Симплициальный комплекс K^{n-1} называется *комплексом Коэна–Маколея* (над $\mathbf{k}$), если его кольцо граней $\mathbf{k}(K)$ является алгеброй Коэна–Маколея. Очевидно, $\mathrm{Kd}\,\mathbf{k}(K)=n$. Лемма 1.3.3 показывает, что h-вектор алгебры $\mathbf{k}(K)$ совпадает с h-вектором комплекса K.

Теорема 1.3.7 (Стенли). *Если K^{n-1} является комплексом Коэна–Маколея, то $\boldsymbol{h}(K^{n-1})=(h_0,\dots,h_n)$ является M-вектором (см. § 1.2).*

Доказательство. Пусть $\theta_1,\dots,\theta_n$ – регулярная последовательность элементов степени два в $\mathbf{k}(K)$. Тогда $A=\mathbf{k}(K)/(\theta_1,\dots,\theta_n)$ является градуированной алгеброй, порожденной элементами степени два, и $\dim_{\mathbf{k}} A^{2i}=h_i$. Тогда утверждение вытекает из теоремы 1.1.18.

Следующая фундаментальная теорема характеризует комплексы Коэна–Маколея.

Теорема 1.3.8 (Райснер [74]). *Симплициальный комплекс K является комплексом Коэна–Маколея над $\mathbf{k}$ тогда и только тогда, когда для любого симплекса $I\in K$ (включая $I=\varnothing$) и любого $i<\dim(\operatorname{link} I)$ имеет место $\widetilde{H}_i(\operatorname{link} I;\mathbf{k})=0$ (здесь $\widetilde{H}_i(\,\cdot\,;\mathbf{k})$ обозначает i-ю приведенную группу гомологий с коэффициентами в $\mathbf{k}$).*

В частности, симплициальные сферы являются комплексами Коэна–Маколея. Из теоремы 1.3.7 вытекает, что h-вектор симплициальной сферы является M-вектором. Этот факт позволил Стенли обобщить ТВГ (теорему 1.1.19) на случай симплициальных сфер.

Следствие 1.3.9 (Стенли). *Теорема о Верхней Границе имеет место для симплициальных сфер, т.е. если $(h_0,h_1,\dots,h_n)$ – h-вектор симплициальной $(n-1)$-сферы K^{n-1} с m вершинами, то*

$$h_i(K^{n-1})\leqslant\tbinom{m-n+i-1}{i},\qquad 0\leqslant i\leqslant\left[\tfrac{n}{2}\right].$$

Доказательство. Так как $\boldsymbol{h}(K^{n-1})$ является M-вектором, существует градуированная алгебра $A=A^0\oplus A^2\oplus\dots\oplus A^{2n}$, порожденная элементами степени два, такая, что $\dim_{\mathbf{k}} A^{2i}=h_i$ (теорема 1.1.18). В частности, $\dim_{\mathbf{k}} A^2=h_1=m-n$. Так как алгебра A порождена элементами из A^2, число h_i не может превышать числа мономов степени i от $(m-n)$ переменных. Последнее число есть в точности $\binom{m-n+i-1}{i}$.

§ 1.4. Гомологические свойства колец граней (колец Стенли–Райснера). Начнем с обзора некоторых понятий гомологической алгебры. В этом параграфе, если не оговорено противное, модулем мы называем конечнопорожденный градуированный $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуль, $\deg v_i=2$.

Конечной свободной резольвентой модуля M называется точная последовательность

$$0\longrightarrow R^{-h}\xrightarrow{d}R^{-h+1}\xrightarrow{d}\cdots\longrightarrow R^{-1}\xrightarrow{d}R^0\xrightarrow{d}M\longrightarrow 0,\tag{14}$$

где R^{-i} – конечнопорожденные свободные модули и отображения d сохраняют градуировку. Минимальное число h, для которого существует свободная резольвента (14), называется *гомологической* размерностью модуля M и обозначается $\operatorname{hd} M$. В силу теоремы Гильберта о сизигиях мы имеем $\operatorname{hd} M \leqslant m$. Резольвента (14) определяет свободный *биградуированный дифференциальный модуль* $[R,d]$, где $R = \bigoplus R^{-i,j}$, $R^{-i,j} := (R^{-i})^j$ (j-я градуированная компонента свободного модуля R^{-i}). Когомологии модуля $[R,d]$ равны нулю в ненулевых размерностях, а $H^0[R,d] = M$. Обратно, свободный биградуированный дифференциальный модуль $[R = \bigoplus_{i,j\geqslant 0} R^{-i,j}, d : R^{-i,j} \to R^{-i+1,j}]$ с $H^0[R,d] = M$ и $H^{-i}[R,d] = 0$ при $i > 0$ определяет свободную резольвенту (14) с $R^{-i} := R^{-i,*} = \bigoplus_j R^{-i,j}$.

Замечание. По причинам, указанным ниже, мы нумеруем члены свободной резольвенты *неположительными* числами, превращая ее в *коцепной* комплекс.

Ряд Пуанкаре модуля M можно вычислить при помощи любой свободной резольвенты (14).

Теорема 1.4.1. *Пусть свободный* $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$*-модуль* R^{-i} *в* (14) *порожден элементами степеней* $d_{1i},\dots,d_{q_i i}$*, где* $q_i = \operatorname{rank} R^{-i}$, $i = 1,\dots,h$. *Тогда*

$$F(M;t) = (1-t^2)^{-m} \sum_{i=0}^{h} (-1)^i (t^{d_{1i}} + \dots + t^{d_{q_i i}}). \tag{15}$$

Пример 1.4.2 (минимальная резольвента). По разным причинам часто бывает удобным иметь резольвенту (14), в которой каждый член R^{-i} имеет наименьший возможный ранг. Следующее определение взято из работы Адамса [2]. Пусть M, M' – два модуля. Положим $\mathscr{J}(M) = v_1 M + v_2 M + \dots + v_m M \subset M$. Отображение $f\colon M \to M'$ называется *минимальным*, если $\operatorname{Ker} f \subset \mathscr{J}(M)$. Резольвента (14) называется *минимальной*, если все отображения d минимальны. Тогда легко видеть, что все модули R^{-i} имеют наименьший возможный ранг.

Минимальная резольвента строится следующим образом. Выберем вначале *минимальный набор образующих* $a_1,\dots,a_{k_0}$ модуля M и возьмем в качестве R^0 свободный $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуль с k_0 образующими. Затем выберем минимальный набор образующих $a_1,\dots,a_{k_1}$ в ядре естественного эпиморфизма $R^0 \to M$ и возьмем в качестве R^{-1} свободный $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуль с k_1 образующими, и так далее. На i-м шаге мы выбираем минимальный набор образующих в ядре уже построенного отображения $d\colon R^{-i+1} \to R^{-i+2}$ и берем в качестве R^{-i} свободный модуль с соответствующими образующими. Заметим, что минимальная резольвента единственна с точностью до изоморфизма.

Пример 1.4.3 (резольвента Кошуля). Пусть $M = \mathbf{k}$. Структура $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуля в $\mathbf{k}$ определяется при помощи отображения $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m] \to \mathbf{k}$, которое переводит все образующие v_i в 0. Пусть $\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ – внешняя алгебра от m переменных. Превратим тензорное произведение $R = \Lambda[u_1,\dots,u_m] \otimes \mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ (здесь и далее $\otimes$ обозначает $\otimes_{\mathbf{k}}$) в *дифференциальную биградуированную алгебру*, полагая

$$\begin{gathered} \operatorname{bideg} u_i = (-1,2), \quad \operatorname{bideg} v_i = (0,2), \\ du_i = v_i, \quad dv_i = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

и требуя, чтобы d являлось дифференцированием алгебр. Можно показать (см. [56; §7.2]), что $H^{-i}[R,d] = 0$ при $i > 0$ и $H^0[R,d] = \mathbf{k}$. Так как алгебра

$\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ является свободным $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модулем, она определяет свободную резольвенту модуля $\mathbf{k}$. Эта резольвента называется *резольвентой Кошуля.* Она имеет следующий вид:

$$0\longrightarrow\Lambda^m[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]\longrightarrow\cdots$$
$$\cdots\longrightarrow\Lambda^1[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]\longrightarrow\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]\longrightarrow\mathbf{k}\longrightarrow 0,$$

где $\Lambda^i[u_1,\dots,u_m]$ – подмодуль в $\Lambda[u_1,\dots,u_m]$, порожденный мономами длины i. Таким образом, в обозначениях (14) мы имеем $R^{-i}=\Lambda^i[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$.

Пусть N – другой модуль; тогда, применяя функтор $\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N$ к (14), мы получаем коцепной комплекс градуированных модулей

$$0\longrightarrow R^{-h}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N\longrightarrow\cdots\longrightarrow R^0\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N\longrightarrow 0$$

и биградуированный дифференциальный модуль $[R\otimes N,d]$. Модуль $(-i)$-х когомологий последнего коцепного комплекса обозначается $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)$, т.е.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)&:=H^{-i}[R\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N,d]\\&=\frac{\mathrm{Ker}[d:R^{-i}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N\to R^{-i+1}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N]}{d(R^{-i-1}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N)}.\end{aligned}$$

Так как R^{-i} и N являются градуированными модулями, мы имеем

$$\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)=\bigoplus_j\mathrm{Tor}^{-i,j}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N),$$

где

$$\mathrm{Tor}^{-i,j}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)=\frac{\mathrm{Ker}\big[d:(R^{-i}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N)^j\to(R^{-i+1}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N)^j\big]}{d(R^{-i-1}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N)^j}.$$

Таким образом, мы имеем *биградуированный* $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуль

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)=\bigoplus_{i,j}\mathrm{Tor}^{-i,j}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N).$$

Хорошо известны следующие основные свойства модулей $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)$ (см., например, [56]).

Предложение 1.4.4. (а) *Модуль* $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)$ *не зависит, с точностью до изоморфизма, от выбора резольвенты* (14).

(б) $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\,\cdot\,,N)$ *и* $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\,\cdot\,)$ *являются ковариантными функторами.*

(в) $\mathrm{Tor}^{0}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)\cong M\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}N$.

(г) $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)\cong\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(N,M)$.

Можно также определить A-модули $\mathrm{Tor}_A(M,N)$ для любой конечно-порожденной градуированной коммутативной алгебры A и (конечнопорожденных градуированных)

A-модулей M, N. Хотя A-свободная резольвента (14) модуля M существует не всегда, тем не менее, имеется *проективная* резольвента модуля M, которая позволяет определить $\operatorname{Tor}_A(M,N)$ таким же образом, как это делалось выше. Заметим, что проективные модули над алгеброй многочленов являются свободными. Это утверждение было известно как *проблема Серра* и доказано Квилленом и Суслиным. Для градуированных модулей, однако, этот факт доказывается достаточно просто. В настоящем обзоре модули $\operatorname{Tor}_A(M,N)$ для алгебры A, отличной от кольца многочленов, встречаются лишь в §§ 4.1 и 5.3.

Пусть теперь K^{n-1} – симплициальный комплекс с m вершинами, $M=\mathbf{k}(K)$ и $N=\mathbf{k}$. Так как $\deg v_i=2$, мы имеем

$$\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big)=\bigoplus_{i,j=0}^{m}\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big)$$

(т.е. ненулевые элементы модуля $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k})$ всегда имеют четную вторую градуировку). Определим *биградуированные числа Бетти* кольца $\mathbf{k}(K)$ как

$$\beta^{-i,2j}\big(\mathbf{k}(K)\big):=\dim_{\mathbf{k}}\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big),\qquad 0\leqslant i,j\leqslant m. \tag{17}$$

Предположим, что (14) является *минимальной* свободной резольвентой для $M=\mathbf{k}(K)$. Тогда $R^0\cong\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ является свободным $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модулем с одной образующей степени 0. Базис модуля R^{-1} (минимальный набор образующих для $\operatorname{Ker}[\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]\to\mathbf{k}(K)]$) состоит из элементов $v_{i_1,\dots,i_k}$, $\deg v_{i_1,\dots,i_k}=2k$, таких, что $\{i_1,\dots,i_k\}$ – недостающая грань комплекса K. Отображение $d\colon R^{-1}\to R^0$ переводит $v_{i_1,\dots,i_k}$ в $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$. Так, все отображения d в (14) являются минимальными, все дифференциалы коцепного комплекса

$$0\longrightarrow R^{-h}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\mathbf{k}\longrightarrow\cdots\longrightarrow R^0\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\mathbf{k}\longrightarrow 0$$

являются тривиальными. Таким образом, для минимальной резольвенты кольца $\mathbf{k}(K)$ имеет место

$$\begin{gathered}\operatorname{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\big)\cong R^{-i}\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\mathbf{k},\\ \beta^{-i,2j}\big(\mathbf{k}(K)\big)=\operatorname{rank}R^{-i,2j}\quad(=\dim_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}R^{-i,2j}).\end{gathered} \tag{18}$$

Числа Бетти $\beta^{-i,2j}(\mathbf{k}(K))$ являются важными комбинаторными инвариантами симплициального комплекса K. Ряд результатов об этих числах получен в [82]. Следующий важный результат, полученный комбинаторными методами, сводит вычисление чисел $\beta^{-i,2j}(\mathbf{k}(K))$ к вычислению гомологий подкомплексов комплекса K.

Теорема 1.4.5 (Хохстер [46]). *Ряд Пуанкаре модуля* $\operatorname{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k})$ *может быть вычислен при помощи следующей формулы*:

$$\sum_j\beta^{-i,2j}\big(\mathbf{k}(K)\big)t^{2j}=\sum_{I\subset[m]}\big(\dim_{\mathbf{k}}\widetilde{H}_{\#I-i-1}(K_I)\big)t^{2(\#I)},$$

где K_I – подкомплекс в K, состоящий из симплексов с вершинами в I.

Заметим, что вычисления с использованием этой теоремы становятся очень громоздкими даже для малых K. В главе 4 мы показываем, что числа $\beta^{-i,2j}(\mathbf{k}(K))$ равны биградуированным числам Бетти момент-угол комплекса $\mathscr{Z}_K$, ассоциированного с симплициальным комплексом K. Это дает альтернативный, топологический, способ вычисления чисел $\beta^{-i,2j}(\mathbf{k}(K))$.

Теперь рассмотрим резольвенту Кошуля (пример 1.4.3).

Лемма 1.4.6. *Для любого модуля M имеем*

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k}) \cong H\big[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes M,d\big],$$

где $H[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes M,d]$ – когомологии биградуированного дифференциального модуля $\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes M$, а d определяется, как в (16).

Доказательство. Используя в определении модуля $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k},M)$ резольвенту Кошуля $[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m],d]$, мы находим

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k}) &\cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k},M)\\ &= H\big[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]\otimes_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]} M\big]\\ &\cong H\big[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes M\big].\end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуль M является $\mathbf{k}$-алгеброй. Тогда когомологии алгебры $[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes M,d]$ также являются алгеброй. Лемма 1.4.6 позволяет снабдить модуль $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k})$ канонической структурой конечномерной биградуированной $\mathbf{k}$-*алгебры*. Мы будем называть эту алгебру Tor-*алгеброй* алгебры M. Tor-*алгеброй симплициального комплекса* K называется Tor-алгебра его кольца граней $\mathbf{k}(K)$.

Замечание. В общем случае, когда $N\neq\mathbf{k}$, модули $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)$ не имеют канонической структуры алгебры, даже если и M и N являются алгебрами.

Конструкция 1.4.7 (мультиградуированная структура в Tor-алгебре). Введем в кольце многочленов $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ мультиградуировку (точнее, $\mathbb{N}^m$-градуировку), полагая $\operatorname{mdeg} v_i=(0,\dots,0,2,0,\dots,0)$, где 2 стоит на i-м месте. При этом моном $v_1^{i_1}\cdots v_m^{i_m}$ приобретает мультистепень $(2i_1,\dots,2i_m)$. Пусть алгебра M представляет собой фактор-кольцо кольца многочленов по мономиальному идеалу. Тогда введенная выше мультиградуировка индуцирует мультиградуировку в алгебре M, а также во всех членах резольвенты (14). Мы можем предполагать, что дифференциалы в резольвенте сохраняют мультистепени. Следовательно, модули $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,N)$ для таких алгебр имеют каноническую $\mathbb{N}\oplus\mathbb{N}^m$-градуировку, т.е.

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k})=\bigoplus_{i\geqslant 0,\,\boldsymbol{j}\in\mathbb{N}^m}\mathrm{Tor}^{-i,\boldsymbol{j}}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k}).$$

Таким образом, Tor-алгебра комплекса K приобретает $\mathbb{N}\oplus\mathbb{N}^m$-градуировку.

Замечание. В соответствии с нашим соглашением первая градуировка в Tor-алгебре всегда *неположительна* (напомним, что мы занумеровали члены резольвенты Кошуля неположительными числами). В этих обозначениях комплекс Кошуля $[M\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m],d]$ становится *коцепным* комплексом, и $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k})$ есть его *когомологии*, а не гомологии, как обычно принято. Это стандартный прием, используемый для применения спектральной последовательности Эйленберга–Мура, см. § 4.1. Это также объясняет, почему мы пишем $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k})$ вместо обычного $\mathrm{Tor}_{*,*}^{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k})$.

Верхняя граница $\operatorname{hd} M\leqslant m$ из теоремы Гильберта о сизигиях может быть заменена следующим более точным результатом.

Теорема 1.4.8 (Ауслендер, Буксбаум). $\mathrm{hd}\, M = m - \mathrm{depth}\, M$.

Далее мы предполагаем, что алгебра M порождена элементами степени два и структура $\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$-модуля на M задается при помощи некоторого эпиморфизма $p\colon \mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m] \to M$ (это всегда выполнено, если $M = \mathbf{k}(K)$ для некоторого симплициального комплекса K). Пусть $\theta_1,\ldots,\theta_k$ – регулярная последовательность элементов степени два в M. Положим $\mathscr{J} := (\theta_1,\ldots,\theta_k) \subset M$ (идеал, порожденный элементами $\theta_1,\ldots,\theta_k$). Выберем элементы $t_i \in \mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$ степени два такие, что $p(t_i) = \theta_i$, $i = 1,\ldots,k$. Идеал в $\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$, порожденный элементами $t_1,\ldots,t_k$, также будет обозначаться $\mathscr{J}$. Тогда $\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]/\mathscr{J} \cong \mathbf{k}[w_1,\ldots,w_{m-k}]$. При этих предположениях имеет место следующая лемма о редукции.

Лемма 1.4.9. *Имеет место следующий изоморфизм алгебр*:

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(M,\mathbf{k}) = \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]/\mathscr{J}}(M/\mathscr{J},\mathbf{k}).$$

Для доказательства леммы нам понадобится следующий факт из гомологической алгебры.

Теорема 1.4.10 [28; с. 349]. *Пусть Λ – алгебра, Γ – ее подалгебра и $\Omega = \Lambda/\Gamma$ – фактор-алгебра. Предположим, что Λ является свободным Γ-модулем и даны некоторые Ω-модуль A и Λ-модуль C. Тогда существует спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$ такая, что*

$$E_r \Rightarrow \mathrm{Tor}_\Lambda(A,C), \qquad E_2 = \mathrm{Tor}_\Omega\bigl(A, \mathrm{Tor}_\Gamma(C,\mathbf{k})\bigr).$$

Доказательство леммы 1.4.9. Положим $\Lambda = \mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]$, $\Gamma = \mathbf{k}[t_1,\ldots,t_k]$, $A = \mathbf{k}$, $C = M$. Тогда Λ есть свободный Γ-модуль и $\Omega = \Lambda/\Gamma = \mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]/\mathscr{J}$. Таким образом, согласно теореме 1.4.10 мы имеем спектральную последовательность

$$E_r \Rightarrow \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(M,\mathbf{k}), \qquad E_2 = \mathrm{Tor}_\Omega\bigl(\mathrm{Tor}_\Gamma(M,\mathbf{k}),\mathbf{k}\bigr).$$

Так как $\theta_1,\ldots,\theta_k$ – регулярная последовательность, M является свободным Γ-модулем. Следовательно,

$$\mathrm{Tor}_\Gamma(M,\mathbf{k}) = M \otimes_\Gamma \mathbf{k} = M/\mathscr{J} \quad \text{и} \quad \mathrm{Tor}^q_\Gamma(M,\mathbf{k}) = 0 \quad \text{при} \quad q \neq 0.$$

Отсюда вытекает, что $E_2^{p,q} = 0$ при $q \neq 0$. Таким образом, спектральная последовательность вырождается в члене E_2, и

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(M,\mathbf{k}) = \mathrm{Tor}_\Omega\bigl(\mathrm{Tor}_\Gamma(M,\mathbf{k}),\mathbf{k}\bigr) = \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]/\mathscr{J}}(M/\mathscr{J},\mathbf{k}),$$

что завершает доказательство.

Из леммы 1.4.9 вытекает, что если M является алгеброй Коэна–Маколея размерности Крулля n, то $\mathrm{depth}\, M = n$, $\mathrm{hd}\, M = m - n$ и $\mathrm{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}(M,\mathbf{k}) = 0$ при $i > m - n$.

Определение 1.4.11. Пусть $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуль M является алгеброй Коэна–Маколея размерности Крулля n. Тогда M называется *горенштейновой алгеброй*, если $\operatorname{Tor}^{-(m-n)}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(M,\mathbf{k})\cong\mathbf{k}$.

Следуя Стенли [82], мы называем симплициальный комплекс K *горенштейновым*, если $\mathbf{k}(K)$ является горенштейновой алгеброй. Далее, K называется *горенштейновым**, если $\mathbf{k}(K)$ является горенштейновой алгеброй и $K=\operatorname{core}K$ (см. § 1.2). Следующая теорема дает комбинаторное описание горенштейновых* симплициальных комплексов.

Теорема 1.4.12 [82; § II.5]. *Симплициальный комплекс K является горенштейновым* над $\mathbf{k}$ тогда и только тогда, когда для любого симплекса $I\in K$ (включая $I=\varnothing$) подкомплекс $\operatorname{link}I$ имеет гомологии как у сферы размерности $\dim(\operatorname{link}I)$.*

В частности, симплициальные сферы и симплициальные гомологические сферы (симплициальные многообразия, имеющие гомологии как у сферы) являются горенштейновыми* комплексами. Заметим, однако, что горенштейнов* комплекс не обязательно является симплициальным многообразием (линки вершин не обязательно односвязны, сравните с теоремой 1.2.11).

Теорема 1.4.13 [82; § II.5]. *Пусть K^{n-1} – горенштейнов* комплекс. Тогда для рядов Пуанкаре модулей $\operatorname{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k})$, $0\leqslant i\leqslant m-n$, имеют место тождества*

$$F\bigl(\operatorname{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k});\,t\bigr)=t^{2m}F\bigl(\operatorname{Tor}^{-(m-n)+i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k});\,\tfrac{1}{t}\bigr).$$

Следствие 1.4.14. *Если K^{n-1} – горенштейнов* комплекс, то*

$$F\bigl(\mathbf{k}(K),t\bigr)=(-1)^nF\bigl(\mathbf{k}(K),\tfrac{1}{t}\bigr).$$

Доказательство. Применим теорему 1.4.1 к минимальной резольвенте алгебры $\mathbf{k}(K)$. Как вытекает из (18), слагаемые в правой части формулы (15) суть в точности $F\bigl(\operatorname{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k});t\bigr)$, $i=0,\dots,m-n$. Таким образом,

$$F\bigl(\mathbf{k}(K);t\bigr)=(1-t^2)^{-m}\sum_{i=0}^{m-n}(-1)^iF\bigl(\operatorname{Tor}^{-i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k});t\bigr).$$

Используя теорему 1.4.13, мы получаем

$$\begin{aligned}F\bigl(\mathbf{k}(K);t\bigr)&=(1-t^2)^{-m}\sum_{i=0}^{m-n}(-1)^it^{2m}F\bigl(\operatorname{Tor}^{-(m-n)+i}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k});\tfrac{1}{t}\bigr)\\&=\bigl(1-(\tfrac{1}{t})^2\bigr)^{-m}(-1)^m\sum_{j=0}^{m-n}(-1)^{m-n-j}F\bigl(\operatorname{Tor}^{-j}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k});\tfrac{1}{t}\bigr)\\&=(-1)^nF\bigl(\mathbf{k}(K);\tfrac{1}{t}\bigr).\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4.15. *Соотношения Дена–Соммервилля* $h_i = h_{n-i}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, *имеют место для любого горенштейнова* комплекса* K^{n-1} *(в частности, для любой симплициальной сферы).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из леммы 1.3.3 и следствия 1.4.14.

Как было отмечено Стенли в [81], горенштейновы* комплексы являются наиболее общими объектами, пригодными для обобщения g-теоремы (как мы отмечали, многогранные сферы, PL-сферы, симплициальные сферы и симплициальные гомологические сферы являются частными случаями горенштейновых* комплексов).

Соотношения Дена–Соммервилля допускают обобщение даже на более широкий класс объектов, чем горенштейновы* комплексы. В работе [52] Кли получил соотношения Дена–Соммервилля в виде (10) в более общем контексте *эйлеровых многообразий.* В частности, отсюда вытекает, что уравнения (10) (за исключением $k = 0$) имеют место для произвольного симплициального многообразия K размерности $n-1$ (в случае $k = 0$ уравнение (10) выражает тот факт, что $\chi(K^{n-1}) = \chi(S^{n-1})$). Аналоги соотношений (10) были получены Байером и Биллерой в [12] (для *эйлеровых частично упорядоченных множеств*) и Ченом и Яном [30] (для произвольных полиэдров).

В §4.5 мы получаем (топологическими методами) соотношения Дена–Соммервилля для симплициальных многообразий в виде:

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i\bigl(\chi(K^{n-1}) - \chi(S^{n-1})\bigr)\tbinom{n}{i}, \qquad i = 0, 1, \dots, n,$$

где $\chi(K^{n-1}) = f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{n-1}f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}h_n$ – эйлерова характеристика комплекса K^{n-1}, а $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$ – эйлерова характеристика сферы. Заметим, что если K является симплициальной сферой или имеет нечетную размерность, то полученные соотношения принимают классический вид $h_{n-i} = h_i$.

§1.5. Кубические комплексы и кубические отображения. Определим q-мерный *комбинаторно-геометрический куб* как многогранник, комбинаторно эквивалентный единичному q-кубу (3). В этом параграфе под кубами мы подразумеваем комбинаторно-геометрические кубы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.1. *Кубический комплекс* – это подмножество $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$, представленное в виде объединения кубов любых размерностей таким образом, что пересечение любых двух кубов является гранью каждого из них.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предыдущее определение кубического комплекса аналогично определению 1.2.2 геометрического симплициального комплекса. Можно также определить *абстрактный кубический комплекс*, однако это определение более тонко (и нам оно не потребуется).

Гранью кубического комплекса $\mathscr{C}$ называется любая грань куба из $\mathscr{C}$. *Размерность* комплекса $\mathscr{C}$ есть максимальная размерность его граней. Для кубического комплекса $\mathscr{C}$ естественным образом вводится понятие *f-вектора* (f_i есть число i-граней). Некоторые проблемы, связанные с f-векторами кубических комплексов, приведены в [83].

Очевидно, стандартный куб I^q (вместе со всеми своими гранями) является q-мерным кубическим комплексом, который мы также будем обозначать I^q. Любая грань I^q имеет вид

$$C_{I\subset J} = \{(y_1,\dots,y_q)\in I^q : y_i = 0 \text{ при } i\in I,\ y_i = 1 \text{ при } i\notin J\}, \tag{19}$$

где $I\subset J$ – два (возможно пустых) подмножества в $[q]$. Мы также введем обозначение $C_J := C_{\varnothing\subset J}$.

В отличие от симплициальных комплексов (которые всегда являются подкомплексами симплекса), не любой кубический комплекс может быть реализован как подкомплекс в некотором I^q. Один из примеров кубического комплекса, не вложимого в качестве подкомплекса ни в какой куб I^q, показан на рис. 1. Более того, этот комплекс не вложим в стандартную кубическую решетку в $\mathbb{R}^q$ (ни для какого q). Авторы благодарны М.И. Штогрину за этот пример.

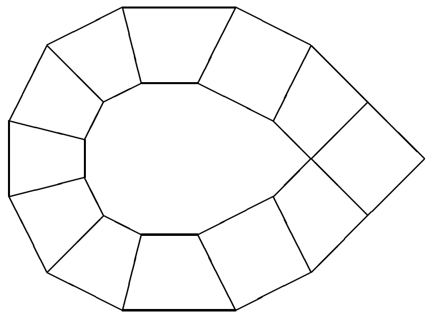


Рис. 1. Кубический комплекс, не вложимый в кубическую решетку

Выделим следующую проблему.

Проблема 1.5.2 (С.П. Новиков). *Охарактеризовать k-мерные кубические комплексы $\mathscr{C}$ (в особенности те из них, которые являются многообразиями), допускающие*

(а) *(кубическое) вложение в стандартную кубическую решетку в $\mathbb{R}^q$;*
(б) *отображение в стандартную кубическую решетку в $\mathbb{R}^q$, ограничение которого на каждый k-мерный куб отождествляет его с некоторой k-гранью решетки.*

В случае, когда $\mathscr{C}$ гомеоморфно S^2, эта проблема решена в работе [37]. Проблема 1.5.2 явилась развитием следующей проблемы, приведенной в [37].

Проблема 1.5.3 (С.П. Новиков). *Пусть задан некоторый двумерный кубический цикл α по модулю 2 в стандартной кубической решетке пространства $\mathbb{R}^3$. Описать отображения кубических разбиений двумерных поверхностей на цикл α, при которых никакие два различных квадрата не отображаются на один квадрат цикла.*

Как сообщил авторам С.П. Новиков, проблема 1.5.3 возникла в ходе его совместных обсуждений с известным физиком А.М. Поляковым трехмерной модели Изинга.

Далее мы вводим специальные кубические комплексы, которые будут играть ключевую роль в нашей теории момент-угол комплексов. Каждый из этих кубических комплексов допускает каноническое кубическое вложение в стандартный куб. Обратим внимание, что задачи о вложениях в стандартную кубическую решетку и стандартный куб тесно связаны. Например, как показано в [37], если кубическое разбиение двумерной поверхности вкладывается в стандартную кубическую решетку в $\mathbb{R}^q$, то оно также допускает кубическое вложение в I^q.

Конструкция 1.5.4 (каноническое симплициальное разбиение куба I^m). Пусть Δ^{m-1} – симплекс на множестве $[m]$, т.е. Δ^{m-1} есть набор всех подмножеств $[m]$. Поставим в соответствие каждому подмножеству $I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset[m]$ вершину $v_I:=C_{I\subset I}$ куба I^m. Таким образом, $v_I=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$, где $\varepsilon_i=0$, если $i\in I$, и $\varepsilon_i=1$ иначе. Рассматривая подмножество I как некоторую вершину барицентрического подразделения симплекса Δ^{m-1}, мы можем продолжить наше соответствие $I\mapsto v_I$ до кусочно-линейного вложения i_c полиэдра $|\operatorname{bs}(\Delta^{m-1})|$ в (граничный комплекс куба) I^m. При этом вложении вершины полиэдра $|\Delta^{m-1}|$ переходят в вершины $(1,\dots,1,0,1,\dots,1)\in I^m$, в то время как барицентр симплекса $|\Delta^{m-1}|$ отображается в вершину $(0,\dots,0)\in I^m$. Образ $i_c(|\operatorname{bs}(\Delta^{m-1})|)$ представляет собой объединение m гиперграней куба I^m, сходящихся в вершине $(0,\dots,0)$. Для любой пары $I\subset J$ непустых вложенных подмножеств множества $[m]$ все симплексы комплекса $\operatorname{bs}(\Delta^{m-1})$ вида $I=I_1\subset I_2\subset\dots\subset I_k=J$ отображаются на одну и ту же грань $C_{I\subset J}\subset I^m$ (см. (19)). Отображение $i_c\colon|\operatorname{bs}(\Delta^{m-1})|\to I^m$ можно продолжить на $|\operatorname{cone}(\operatorname{bs}(\Delta^{m-1}))|$, переводя вершину конуса в $(1,\dots,1)\in I^m$. Получаемое отображение обозначим $\operatorname{cone}(i_c)$. Его образ есть весь куб I^m. Следовательно, $\operatorname{cone}(i_c)\colon|\operatorname{cone}(\operatorname{bs}(\Delta^{m-1}))|\to I^m$ является PL-гомеоморфизмом, линейным на симплексах полиэдра $|\operatorname{cone}(\operatorname{bs}(\Delta^{m-1}))|$. Это определяет *каноническую триангуляцию* куба I^m. Таким образом, каноническая триангуляция куба I^m получается при отождествлении его с конусом над барицентрическим подразделением симплекса Δ^{m-1}.

Конструкция 1.5.5 (кубическое разбиение простого многогранника). Пусть $P^n\subset\mathbb{R}^n$ – простой многогранник с m гипергранями $F_1^{n-1},\dots,F_m^{n-1}$. Выберем по точке во внутренности каждой грани многогранника P^n (включая вершины и сам многогранник). В результате мы получаем множество $\mathscr{S}$ из $1+f_0+f_1+\dots+f_{n-1}$ точек (здесь $\boldsymbol{f}(P^n)=(f_0,f_1,\dots,f_{n-1})$ – f-вектор многогранника P^n). Для каждой вершины $v\in P^n$ определим подмножество $\mathscr{S}_v\subset\mathscr{S}$, состоящее из выбранных точек во внутренностях граней, содержащих v. Так как P^n является простым, число k-граней, сходящихся в v, равно $\binom{n}{k}$, $0\leqslant k\leqslant n$. Таким образом, $\#\mathscr{S}_v=2^n$. Множество $\mathscr{S}_v$ является множеством вершин некоторого n-куба, обозначаемого C_v^n. Грани куба C_v^n описываются следующим образом. Пусть $G_1^k\subset G_2^l$ – две вложенные грани P^n, содержащие v. Тогда имеется в точности 2^{l-k} граней G многогранника P^n таких, что $G_1^k\subset G\subset G_2^l$. Соответствующие 2^{l-k} точек из $\mathscr{S}$ образуют множество вершин некоторой $(l-k)$-грани куба C_v^n. Обозначим эту грань $C_{G_1\subset G_2}^{l-k}$. Любая грань куба C_v^n имеет вид $C_{G_1\subset G_2}^i$ для некоторых G_1,G_2, содержащих v. Пересечение любых двух кубов C_v^n, $C_{v'}^n$ является гранью каждого из них. Действительно, пусть $G^i\subset P^n$ –

наименьшая грань, содержащая обе вершины v и v'. Тогда $C_v^n \cap C_{v'}^n = C^{n-i}_{G^i \subset P^n}$ является гранью как I_v^n, так и $I_{v'}^n$. Таким образом, мы построили кубическое разбиение многогранника P^n с $f_{n-1}(P^n)$ кубами размерности n. Обозначим этот кубический комплекс $\mathscr{C}(P^n)$.

Имеется вложение комплекса $\mathscr{C}(P^n)$ в I^m, которое строится следующим образом. Каждая $(n-k)$-грань G^{n-k} многогранника P^n есть пересечение k гиперграней: $G^{n-k} = F_{i_1}^{n-1} \cap \dots \cap F_{i_k}^{n-1}$. Отобразим соответствующую точку множества $\mathscr{S}$ в вершину $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in I^m$, где $\varepsilon_i = 0$, если $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$, и $\varepsilon_i = 1$ иначе. Это определяет отображение множества вершин $\mathscr{S}$ комплекса $\mathscr{C}(P^n)$ в множество вершин куба I^m. Используя каноническую триангуляцию куба I^m (конструкция 1.5.4), мы можем продолжить это отображение до PL-вложения $i_P : P^n \to I^m$. Для любой вершины $v = F_{i_1}^{n-1} \cap \dots \cap F_{i_n}^{n-1} \in P^n$ мы имеем

$$i_P(C_v^n) = \bigl\{(y_1, \dots, y_m) \in I^m : y_j = 1 \text{ при } j \notin \{i_1, \dots, i_n\}\bigr\}, \tag{20}$$

т.е. $i_P(C_v^n) = C_{\{i_1,\dots,i_n\}} \subset I^m$ (в обозначениях (19)). Вложение $i_P : P^n \to I^m$ для $n = 2, m = 3$ показано на рис. 2.

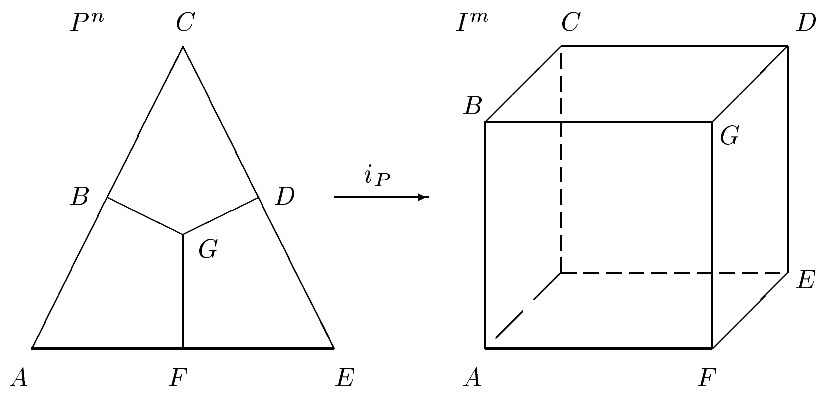


Рис. 2. Вложение $i_P : P^n \to I^m$ для $n = 2, m = 3$

Сведем факты из предыдущей конструкции в следующем утверждении.

Теорема 1.5.6. *Простой многогранник P^n с m гипергранями можно разбить на кубы C_v^n, по одному на каждую вершину $v \in P^n$. Получаемый кубический комплекс $\mathscr{C}(P^n)$ канонически вкладывается в границу куба I^m, как описано в* (20).

Лемма 1.5.7. *Число k-граней кубического комплекса $\mathscr{C}(P^n)$ есть*

$$\begin{aligned} f_k\bigl(\mathscr{C}(P^n)\bigr) &= \sum_{i=0}^{n-k} \tbinom{n-i}{k} f_{n-i-1}(P^n) \\ &= \tbinom{n}{k} f_{n-1}(P^n) + \tbinom{n-1}{k} f_{n-2}(P^n) + \dots + f_{k-1}(P^n), \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Доказательство. Это вытекает из того факта, что k-грани комплекса $\mathcal{C}(P^n)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами $G_1^i \subset G_2^{i+k}$ вложенных граней многогранника P^n.

Конструкция 1.5.8. Пусть K^{n-1} – симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Тогда K естественным образом является подкомплексом симплекса Δ^{m-1} и $\operatorname{bs}(K)$ является подкомплексом в $\operatorname{bs}(\Delta^{m-1})$. Как вытекает из конструкции 1.5.4, имеется PL-вложение $i_c|_{\operatorname{bs}(K)} \colon |\operatorname{bs}(K)| \to I^m$. Образ $i_c(|\operatorname{bs}(K)|)$ представляет собой $(n-1)$-мерный кубический подкомплекс в I^m, который мы обозначаем $\operatorname{cub}(K)$. Тогда

$$\operatorname{cub}(K) = \bigcup_{\varnothing \neq I \subset J \in K} C_{I \subset J} \subset I^m, \tag{21}$$

т.е. $\operatorname{cub}(K)$ есть объединение граней $C_{I \subset J} \subset I^m$ по всем парам $I \subset J$ непустых симплексов комплекса K.

Конструкция 1.5.9. Поскольку комплекс $\operatorname{cone}(\operatorname{bs}(K))$ является подкомплексом в $\operatorname{cone}(\operatorname{bs}(\Delta^{m-1}))$, конструкция 1.5.4 также определяет PL-вложение

$$\operatorname{cone}(i_c)|_{\operatorname{cone}(\operatorname{bs}(K))} \colon |\operatorname{cone}(\operatorname{bs}(K))| \to I^m.$$

Образ этого вложения представляет собой n-мерный кубический подкомплекс в I^m, обозначаемый $\operatorname{cc}(K)$. Тогда легко видеть, что

$$\operatorname{cc}(K) = \bigcup_{J \in K} C_{I \subset J} \subset I^m. \tag{22}$$

Так как $C_{I \subset J} \subset C_{\varnothing \subset J} = C_J$, мы также можем написать $\operatorname{cc}(K) = \bigcup_{J \in K} C_J$.

Следующее утверждение сводит вместе результаты двух предыдущих конструкций.

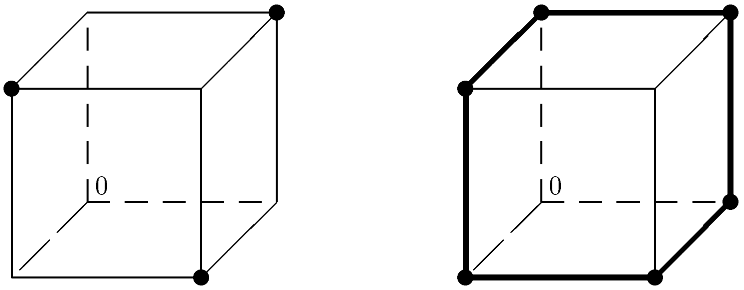
Теорема 1.5.10. *Для любого симплициального комплекса K на множестве $[m]$ имеется PL-вложение полиэдра $|K|$ в куб I^m, линейное на симплексах из* $\operatorname{bs}(K)$. *Образом этого вложения является кубический подкомплекс* (21). *Кроме того, имеется PL-вложение полиэдра $|\operatorname{cone}(K)|$ в I^m, линейное на симплексах из* $\operatorname{cone}(\operatorname{bs}(K))$. *Образом этого вложения является кубический подкомплекс* (22).

Как и для симплициальных комплексов, кубический комплекс $\mathcal{C}'$ называется *кубическим подразделением* кубического комплекса $\mathcal{C}$, если каждый куб из $\mathcal{C}$ есть объединение конечного числа кубов из $\mathcal{C}'$.

Предложение 1.5.11. *Для каждого кубического комплекса $\mathcal{C}$ существует кубическое подразделение $\mathcal{C}'$, которое может быть реализовано как подкомплекс в некотором кубе I^q.*

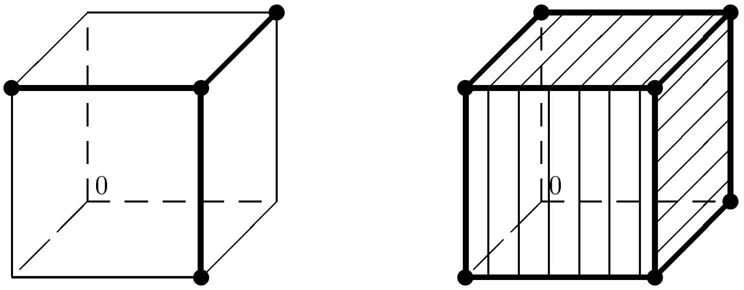
Доказательство. Разбивая каждый куб комплекса $\mathcal{C}$, как описано в конструкции 1.5.4, мы получаем симплициальный комплекс, скажем, $K_{\mathcal{C}}$. Далее, применяя конструкцию 1.5.8 к $K_{\mathcal{C}}$, мы получаем кубический комплекс, который подразбивает $|K_{\mathcal{C}}| \cong \mathcal{C}$ и вкладывается в некоторый куб I^q (см. теорему 1.5.10) как подкомплекс $\mathrm{cub}(K_{\mathcal{C}})$.

Пример 1.5.12. На рис. 3 (а) показан кубический комплекс $\mathrm{cub}(K)$ в случае, когда K является несвязным объединением 3 вершин ($K = \because$). На рис. 3 (б) показан тот же кубический комплекс в случае, когда K является границей 2-симплекса ($K = \partial\Delta^2$). Кубический комплекс $\mathrm{cc}(K)$ в обоих случаях показан на рис. 4 (а) и (б).



(а) $K = \because$ (б) $K = \partial\Delta^2$

Рис. 3. Кубический комплекс $\mathrm{cub}(K)$



(а) $K = \because$ (б) $K = \partial\Delta^2$

Рис. 4. Кубический комплекс $\mathrm{cc}(K)$

Замечание. Как топологическое пространство $\mathrm{cub}(K)$ гомеоморфен $|K|$, в то время как $\mathrm{cc}(K)$ гомеоморфен $|\,\mathrm{cone}(K)|$. Для симплициального комплекса $\mathrm{cone}(K)$ мы можем построить кубический комплекс $\mathrm{cub}(\mathrm{cone}(K))$, который также гомеоморфен $|\,\mathrm{cone}(K)|$. Однако, как *кубические комплексы* $\mathrm{cc}(K)$ и $\mathrm{cub}(\mathrm{cone}(K))$ отличаются (так как $\mathrm{cone}(\mathrm{bs}(K))$ и $\mathrm{bs}(\mathrm{cone}(K))$ – разные симплициальные комплексы).

Пусть P – простой n-многогранник и K_P – соответствующая симплициальная $(n-1)$-сфера (граница полярного симплициального многогранника P^*). Тогда $\mathrm{cc}(K_P)$ совпадает с кубическим комплексом $\mathcal{C}(P)$ из конструкции 1.5.5 (точнее, $\mathrm{cc}(K_P) = i_P(\mathcal{C}(P))$). Таким образом, конструкция 1.5.5 является частным случаем конструкции 1.5.9.

Замечание. Некоторые версии приведенных выше наших конструкций уже появлялись в литературе. Вариант конструкции 1.5.9 можно найти в [33; с. 434] (там он использовался для изучения некоторых действий тора; мы вернемся к этому в следующей главе). Версия нашего подкомплекса $\mathrm{cub}(K) \subset I^m$ появлялась в [76] в связи с проблемой 1.5.2.

Глава 2. Торические и квазиторические многообразия

§ 2.1. Алгебраические торические многообразия. Торические многообразия возникли в алгебраической геометрии в начале 1970-х годов в связи с задачей компактификации орбиты действия алгебраического тора (см. ниже). Очень быстро геометрия торических многообразий превратилась в один из самых красивых разделов алгебраической геометрии и нашла приложения в различных областях математики, которые до этого казались далекими от алгебраической геометрии. Мы уже отмечали доказательство Стенли условия необходимости в g-теореме для симплициальных многогранников. Другие замечательные приложения включают вычисление объемов и числа целых точек решеточных многогранников; взаимосвязи с многочленами Ньютона и особенностями, найденные в работах Хованского и Кушниренко; дискриминанты, результанты и гипергеометрические функции (по работам Гельфанда, Зелевинского и Капранова); рефлексивные многогранники и приложения к зеркальной симметрии для торических гиперповерхностей Калаби–Яо, найденные Батыревым и другими авторами. Стандартными ссылками по геометрии торических многообразий являются обзор Данилова [32] и книги Оды [63] и Фултона [40]. Более современный обзор Кокса [31] охватывает новые приложения, включая упомянутые выше. В наши задачи не входит новый обзор по торической геометрии. В этом параграфе мы концентрируемся на некоторых топологических и комбинаторных аспектах теории торических многообразий. Мы также приводим доказательство Стенли условия необходимости в g-теореме.

Пусть $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ обозначает мультипликативную группу комплексных чисел. Произведение n копий $\mathbb{C}^*$, обозначаемое $(\mathbb{C}^*)^n$, в теории алгебраических групп называется тором. В топологии *тором* T^n называется произведение n окружностей. Мы используем топологическую терминологию, а $(\mathbb{C}^*)^n$ мы будем называть *алгебраическим тором*. Тор T^n стандартным образом описывается как подгруппа алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^n$:

$$T^n = \bigl\{(e^{2\pi i\varphi_1}, \dots, e^{2\pi i\varphi_n}) \in \mathbb{C}^n\bigr\}, \tag{23}$$

где набор параметров $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ пробегает пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.1.1. *Торическое многообразие* – это нормальное алгебраическое многообразие M, содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^n$ в качестве открытого по Зарискому подмножества таким образом, что естественное действие $(\mathbb{C}^*)^n$ на себе продолжается до действия на M.

Таким образом, $(\mathbb{C}^*)^n$ действует на M с плотной орбитой.

Каждое торическое многообразие задается набором комбинаторных данных, а именно (рациональным многогранным) *веером* в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство и $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ – целочисленная решетка. Для любого конечного множества векторов $\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_s \in \mathbb{R}^n$ определим *выпуклый многогранный конус* σ, порожденный $\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_s$, как

$$\sigma = \bigl\{r_1\boldsymbol{l}_1 + \dots + r_s\boldsymbol{l}_s \in \mathbb{R}^n : r_i \geqslant 0\bigr\}.$$

Каждый выпуклый многогранный конус является выпуклым полиэдром в смысле определения 1.1.2. Таким образом, определены *грани* конуса. Конус σ называется *рациональным*, если его образующие векторы $\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_s$ могут быть выбраны из решетки $\mathbb{Z}^n$, и *строго выпуклым*, если он не содержит никакой прямой, проходящей через начало координат. Все конусы, рассматриваемые ниже, являются строго выпуклыми и рациональными. Конус называется *симплициальным* (соответственно *неособым*), если он порождается частью базиса пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно решетки $\mathbb{Z}^n$). *Веером* называется множество Σ конусов в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$ такое, что каждая грань конуса из Σ также принадлежит Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них. Веер Σ называется *симплициальным* (соответственно *неособым*), если все конусы из Σ симплициальны (соответственно неособы). Веер Σ в $\mathbb{R}^n$ называется *полным*, если объединение всех конусов из Σ есть все $\mathbb{R}^n$.

Каждый веер Σ в $\mathbb{R}^n$ определяет торическое многообразие M_Σ комплексной размерности n, структура орбит которого описывается комбинаторикой веера Σ. А именно, k-мерные конусы веера Σ соответствуют орбитам коразмерности k действия алгебраического тора. В частности, n-мерные конусы соответствуют неподвижным точкам, а начало координат соответствует единственной плотной орбите. Торическое многообразие M_Σ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ является полным. Если Σ симплициален, то многообразие M_Σ является *орбифолдом* (т.е. локально гомеоморфно фактор-пространству $\mathbb{R}^{2n}$ по действию конечной группы). Наконец, если веер Σ является неособым, то (как можно было бы догадаться из названия) многообразие M_Σ является неособым (гладким).

Пусть Σ – симплициальный веер в $\mathbb{R}^n$ с m одномерными конусами (или *лучами*). Выберем в качестве образующих этих m лучей некоторые целочисленные примитивные (т.е. с взаимно простыми координатами) векторы $\boldsymbol{l}_1, \dots, \boldsymbol{l}_m$. Веер Σ определяет симплициальный комплекс K_Σ на множестве вершин $[m]$. По определению подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ является симплексом в K_Σ, если векторы $\boldsymbol{l}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{l}_{i_k}$ порождают некоторый конус из Σ. Легко видеть, что если веер Σ полный, то K_Σ является симплициальной $(n-1)$-сферой.

Обозначим $l_{ij} := (\boldsymbol{l}_j)_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Таким образом, $\boldsymbol{l}_j = (l_{1j}, \dots, l_{nj})^t \in \mathbb{Z}^n$. Поставим в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{l}_j$ переменную v_j степени 2 и определим линейные формы

$$\theta_i := l_{i1}v_1 + \dots + l_{im}v_m \in \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m], \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Обозначим через $\mathscr{J}_\Sigma$ идеал в $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$, порожденный этими линейными формами, т.е. $\mathscr{J}_\Sigma = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Образы форм $\theta_1, \dots, \theta_n$ и идеала $\mathscr{J}_\Sigma$ в кольце Стенли–Райснера $\mathbb{Z}(K_\Sigma) = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/\mathscr{I}_{K_\Sigma}$ (см. определение 1.3.1) мы будем обозначать теми же символами $\theta_1, \dots, \theta_n$ и $\mathscr{J}_\Sigma$.

Теорема 2.1.2 (Данилов, Юркевич). *Пусть Σ – полный неособый веер в $\mathbb{R}^n$ и M_Σ – соответствующее торическое многообразие. Тогда*

(а) *числа Бетти (ранги групп гомологий) многообразия M_Σ равны нулю в нечетных размерностях, а в четных размерностях задаются формулой*

$$b^{2i}(M_\Sigma) = h_i(K_\Sigma), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\boldsymbol{h}(K_\Sigma) = (h_0, \ldots, h_n)$ – h-вектор комплекса K_Σ;

(б) *замыкания орбит, соответствующих 1-мерным конусам веера Σ, являются подмногообразиями коразмерности 2 (дивизорами) D_i многообразия M_Σ. Пусть v_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, – соответствующие 2-мерные классы когомологий. Тогда кольцо когомологий M_Σ есть*

$$H^*(M_\Sigma; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/(\mathscr{I}_{K_\Sigma} + \mathscr{J}_\Sigma) = \mathbb{Z}(K_\Sigma)/\mathscr{J}_\Sigma.$$

Кроме того, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ является регулярной последовательностью в $\mathbb{Z}(K_\Sigma)$.

Эта теорема была доказана Юркевичем для проективных гладких торических многообразий и Даниловым [32; теорема 10.8] в общем случае. Заметим, что первая часть теоремы 2.1.2 вытекает из второй части и леммы 1.3.3.

Теорема 2.1.2 показывает, что кольцо когомологий многообразия M_Σ отождествляется с *кольцом Чжоу* [40; § 5.1] и порождено двумерными классами. Заметим, что идеал $\mathscr{I}_{K_\Sigma}$ зависит лишь от симплициального комплекса K_Σ (т.е. от решетки пересечений веера), в то время как идеал $\mathscr{J}_\Sigma$ зависит от самого веера.

Замечание. Как было показано Даниловым, теорема 2.1.2 имеет место также для симплициальных вееров и определяемых ими торических многообразий, если заменить кольцо коэффициентов $\mathbb{Z}$ на любое поле нулевой характеристики (например, $\mathbb{Q}$).

Конструкция 2.1.3 (нормальный веер и торические многообразия, возникающие из многогранников). Пусть дан n-многогранник (1) с вершинами в точках целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (такие многогранники называются *целочисленными* или *решеточными*). Тогда векторы $\boldsymbol{l}_i$ в (1), $1 \leqslant i \leqslant m$, могут быть выбраны целочисленными и примитивными, а числа a_i могут быть выбраны целыми. Заметим, что каждый $\boldsymbol{l}_i$ представляет собой нормальный вектор гиперграни $F_i \subset P^n$, направленный внутрь многогранника. Определим полный веер $\Sigma(P)$, конусы которого порождены такими наборами нормальных векторов $\boldsymbol{l}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{l}_{i_k}$, что соответствующие гиперграни $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ имеют непустое пересечение в P; $\Sigma(P)$ называется *нормальным веером* многогранника P. По-другому, если $0 \in P$, то нормальный веер состоит из конусов над гранями полярного многогранника P^*. Определим торическое многообразие $M_P := M_{\Sigma(P)}$. Многообразие M_P является гладким тогда и только тогда, когда P – простой многогранник и нормальные векторы $\boldsymbol{l}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{l}_{i_n}$ любого набора из n гиперграней $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}$, сходящихся в одной вершине, образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$.

Замечание. Любой комбинаторный простой многогранник является *рациональным*, т.е. допускает геометрическую реализацию с рациональными (или, эквивалентно, целыми) координатами вершин. Действительно, небольшое возмущение определяющих неравенств в (1), делающее их рациональными, не меняет комбинаторного типа (так как полупространства, определяемые неравенствами, находятся в общем положении). В результате мы получаем простой многогранник P' того же комбинаторного типа, но с рациональными координатами вершин. Для того чтобы получить реализацию с целыми координатам вершин, надо рассмотреть увеличенный многогранник kP' с соответствующим коэффициентом $k \in \mathbb{Z}$. Достаточно неожиданным фактом является то, что существуют *нерациональные* выпуклые многогранники (не простые и не симплициальные), см. [89; пример 6.21]. Возвращаясь к простым многогранникам, заметим, что различные реализации данного комбинаторного простого многогранника как решеточного многогранника могут давать различные (даже топологически) торические многообразия M_P. В то же время существуют комбинаторные простые многогранники, которые не допускают *ни одной* геометрической реализации с гладким M_P. Мы приведем один из таких примеров в следующем параграфе (см. пример 2.2.14).

Далее в этом параграфе все многогранники предполагаются простыми. Конструкция 2.1.3 позволяет построить симплициальный веер $\Sigma(P)$ и торическое многообразие M_P по любому решеточному простому многограннику P. При этом, однако, многогранник P содержит больше информации, чем веер $\Sigma(P)$. Действительно, кроме нормальных векторов $\boldsymbol{l}_i$, мы также имеем числа $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ (см. (1)). Линейная комбинация $D = a_1D_1 + \cdots + a_mD_m$ (см. теорему 2.1.2) является *обильным дивизором*. Этот дивизор определяет проективное вложение $M_P \subset \mathbb{C}P^r$ для некоторого r (которое можно взять равным числу вершин многогранника P). Таким образом, все торические многообразия, возникающие из многогранников, являются проективными. Обратно, если имеется гладкое проективное торическое многообразие $M \subset \mathbb{C}P^r$, то мы имеем очень обильный дивизор (линейное расслоение) D гиперплоского сечения, нулевые когомологии которого порождены сечениями, соответствующими целым точкам внутри некоторого простого многогранника P. Для этого P мы имеем $M = M_P$. Пусть $\omega := a_1v_1 + \cdots + a_mv_m \in H^2(M_P;\mathbb{Q})$ – класс когомологий D.

Теорема 2.1.4 (сильная теорема Лефшеца для торических многообразий). *Пусть P^n – решеточный простой многогранник* (1), *M_P – проективное торическое многообразие, определяемое P, и $\omega = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m \in H^2(M_P;\mathbb{Q})$. Тогда отображения*

$$H^{n-i}(M_P;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cdot\,\omega^i} H^{n+i}(M_P;\mathbb{Q}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

являются изоморфизмами.

Из проективности вытекает, что если M_P гладко, то оно является кэлеровым многообразием и ω – класс кэлеровой 2-формы.

Замечание. Если заменить обычные когомологии на *когомологии пересечений* Горески–Макферсона, то теорема 2.1.4 имеет место для любого проективного торического многообразия, а не только для многообразий, происходящих из простых решеточных многогранников (см. обсуждение в [40; § 5.2]).

Пример 2.1.5. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n = \{(z_0 : z_1 : \cdots : z_n),\ z_i \in \mathbb{C}\}$ является торическим многообразием. $(\mathbb{C}^*)^n$ действует на $\mathbb{C}P^n$ как $(t_1, \ldots, t_n) \cdot (z_0 : z_1 : \cdots : z_n) = (z_0 : t_1z_1 : \cdots : t_nz_n)$. Очевидно, $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}P^n$ является открытым всюду плотным подмножеством. Веер, определяющий $\mathbb{C}P^n$, состоит из конусов, порожденных всеми собственными подмножествами множества из $(n+1)$ векторов $e_1, \dots, e_n, -e_1 - \dots - e_n$ в $\mathbb{R}^n$. Теорема 2.1.2 отождествляет кольцо когомологий $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]/(u^{n+1})$, $\dim u = 2$, с фактор-кольцом $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_{n+1}]/(v_1 \cdots v_{n+1}, v_1 - v_{n+1}, \dots, v_n - v_{n+1})$. Торическое многообразие $\mathbb{C}P^n$ возникает из многогранника: $\mathbb{C}P^n = M_P$, где P – стандартный n-симплекс (2). Класс $\omega \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$ из теоремы 2.1.4 в данном случае есть $\omega = v_{n+1}$.

Теперь мы можем привести доказательство Стенли условия необходимости в g-теореме для симплициальных многогранников.

Доказательство условия необходимости в теореме 1.1.17. Реализуем простой многогранник как решеточный многогранник $P^n \subset \mathbb{R}^n$. Пусть M_P – соответствующее торическое многообразие. Часть (а) уже доказана (теорема 1.1.11). Из теоремы 2.1.4 вытекает, что умножение на $\omega \in H^2(M_P; \mathbb{Q})$ является мономорфизмом $H^{2i-2}(M_P; \mathbb{Q}) \to H^{2i}(M_P; \mathbb{Q})$ при $i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Это вместе с частью (б) теоремы 2.1.2 дает $h_{i-1} \leqslant h_i$, $0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, и тем самым часть (б) доказана. Для доказательства части (в) введем градуированную коммутативную $\mathbb{Q}$-алгебру $A := H^*(M_P; \mathbb{Q})/(\omega)$. Тогда $A^0 = \mathbb{Q}$, $A^{2i} = H^{2i}(M_P; \mathbb{Q})/\omega \cdot H^{2i-2}(M_P; \mathbb{Q})$ при $1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ и A порождена элементами степени два (так как это выполнено для $H^*(M_P; \mathbb{Q})$). Из теоремы 1.1.18 вытекает, что числа $\dim A^{2i} = h_i - h_{i-1}$, $0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, являются компонентами M-вектора, что доказывает (в) и всю теорему.

Замечание. Соотношения Дена–Соммервилля теперь также вытекают из двойственности Пуанкаре для M_P (которая также имеет место для особых M_P при условии, что P – простой многогранник).

Теперь мы рассмотрим действие тора $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$ на неособом компактном торическом многообразии M. Это действие локально эквивалентно стандартному действию T^n на $\mathbb{C}^n$ (точное определение приведено в следующем параграфе). Пространство орбит M/T^n гомеоморфно n-мерному шару, снабженному топологической структурой *многообразия с углами* при помощи множеств неподвижных точек соответствующих торических подгрупп, см. [40; § 4.1]. Многообразие с углами представляет собой пространство, окрестность каждой точки которого моделируется некоторым открытым подмножеством положительного конуса $\mathbb{R}^n_+$, см. (4). Из этого нестрогого описания несложно восстановить точное определение, см. [49], которое мы не приводим ввиду его некоторой громоздкости.

Конструкция 2.1.6. Пусть P^n – простой многогранник. Для каждой вершины $v \in P^n$ обозначим через U_v открытое подмножество в P^n, получаемое удалением всех граней, не содержащих v. Очевидно, U_v диффеоморфно $\mathbb{R}^n_+$ (и даже аффинно изоморфно некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n_+$, содержащему 0). Отсюда вытекает, что P^n является многообразием с углами, с атласом $\{U_v\}$.

Если $M = M_P$ возникает из некоторого (простого) многогранника P^n, то пространство орбит M/T^n диффеоморфно P^n как многообразие с углами. Более того, имеется явное отображение $M_P \to \mathbb{R}^n$ (*отображение моментов*), образом которого является P^n, а слоями – T^n-орбиты [40; § 4.2] (мы рассмотрим взаимосвязи с отображениями моментов и некоторыми аспектами симплектической геометрии более детально в § 5.2). При этом отображении внутренность грани коразмерности k отождествляется с множеством орбит, имеющих одну и ту же стационарную подгруппу размерности k. В частности, действие свободно над внутренностью многогранника. Рассматриваемое как гладкое многообразие, M_P отождествляется с фактор-пространством $T^n \times P^n/\sim$ по некоторому отношению эквивалентности $\sim$. Такое описание действия тора на неособом торическом многообразии привело к созданию содержательного топологического аналога теории алгебраических торических многообразий – теории *квазиторических многообразий.*

§ **2.2. Квазиторические многообразия.** Квазиторическое многообразие[3] представляет собой гладкое многообразие с действием тора, свойства которого аналогичны свойствам действия (компактного) тора на неособом проективном торическом многообразии. Это понятие появилось в [33]. В последующих определениях мы следуем этой работе, принимая во внимание ряд существенных доработок из [26].

Как и в предыдущем параграфе, мы рассматриваем тор T^n как стандартную подгруппу (23) в $(\mathbb{C}^*)^n$, тем самым фиксируя ориентацию и координатные подгруппы $T_i \cong S^1$, $i = 1, \ldots, n$, в T^n. Мы будем называть представление тора T^n диагональными матрицами в $U(n)$ *стандартным* действием на $\mathbb{C}^n$. Пространство орбит этого действия представляет собой положительный конус $\mathbb{R}^n_+$. Каноническая проекция

$$T^n \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}^n : (t_1, \ldots, t_n) \times (x_1, \ldots, x_n) \to (t_1x_1, \ldots, t_nx_n)$$

позволяет отождествить $\mathbb{C}^n$ с фактор-пространством $T^n \times \mathbb{R}^n_+/\sim$ по отношению эквивалентности $\sim$, которое далее будет играть важную роль.

Пусть M^{2n} – $2n$-мерное гладкое многообразие с действием тора T^n. Скажем, что действие T^n является *локально стандартным*, если любая точка $x \in M^{2n}$ лежит в некоторой T^n-инвариантной окрестности $U(x)$, для которой существует ψ-эквивариантный гомеоморфизм $f : U(x) \to W$ на некоторое (T^n-инвариантное) открытое подмножество $W \subset \mathbb{C}^n$. Это означает, что существует автоморфизм $\psi\colon T^n \to T^n$ такой, что $f(t \cdot y) = \psi(t)f(y)$ для любых $t \in T^n$, $y \in U(x)$. Пространство орбит для локально стандартного действия тора на M^{2n} является n-мерным многообразием с углами. Квазиторические многообразия соответствуют важному частному случаю, когда пространство орбит диффеоморфно, как многообразие с углами, некоторому простому многограннику P^n.

Определение 2.2.1. Пусть P^n – простой многогранник. Многообразие M^{2n} с локально стандартным действием тора T^n называется *квазиторическим многообразием над* P^n, если существует проекция $\pi\colon M^{2n} \to P^n$, слоями которой являются орбиты действия.

При проекции π точки, имеющие одну и ту же стационарную подгруппу коразмерности k, отображаются во внутренность некоторой k-грани многогранника P^n. В частности, действие тора свободно над внутренностью многогранника, в то время как вершины P^n соответствуют неподвижным точкам многообразия M^{2n}.

Замечание. Два простых многогранника комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда они диффеоморфны как многообразия с углами.

[3] В англоязычной литературе также используется термин *toric manifold.*

Предположим, P^n имеет m гиперграней $F_1, \dots, F_m$. Для каждой гиперграни F_i прообраз $\pi^{-1}(F_i)$ является подмногообразием $M_i^{2(n-1)} \subset M^{2n}$ с одномерной стационарной подгруппой $T(F_i)$ в T^n, которая описывается следующим образом:

$$T(F_i) = \{(e^{2\pi i\lambda_{1i}\varphi}, \dots, e^{2\pi i\lambda_{ni}\varphi}) \in T^n\}, \tag{24}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ и $\boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni})^t \in \mathbb{Z}^n$ – некоторый примитивный вектор. Этот вектор $\boldsymbol{\lambda}_i$ определяется подгруппой $T(F_i)$ лишь с точностью до знака. Выбор знака задает ориентацию для $T(F_i)$. В настоящий момент мы не будем заботиться об этом знаке и выберем его произвольно. Более детальное исследование вопросов, связанных с выбором этих знаков, является предметом следующего параграфа. Мы будем называть $\boldsymbol{\lambda}_i$ *вектором гиперграни* F_i. Действие тора $T^n/T(F_i)$ на M_i описывает M_i как квазиторическое многообразие над F_i. Соответствие

$$\ell\colon F_i \mapsto T(F_i) \tag{25}$$

называется *характеристическим отображением* многообразия M^{2n}. Предположим, грань G^{n-k} коразмерности k записана как пересечение k гиперграней: $G^{n-k} = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$. Тогда подмногообразия $M_{i_1}, \dots, M_{i_k}$ пересекаются трансверсально по некоторому подмногообразию $M(G)^{2(n-k)}$. Отображение $T(F_{i_1}) \times \dots \times T(F_{i_k}) \to T^n$ инъективно, так как $T(F_{i_1}) \times \dots \times T(F_{i_k})$ отождествляется с k-мерной стационарной подгруппой многообразия $M(G)^{2(n-k)}$. Отсюда вытекает, что векторы $\boldsymbol{\lambda}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{i_k}$ образуют часть базиса решетки $\mathbb{Z}^n$.

Рассмотрим целочисленную $(n \times m)$-матрицу Λ, i-й столбец которой образован координатами вектора $\boldsymbol{\lambda}_i$, $i = 1, \dots, m$. Каждая вершина $v \in P^n$ есть пересечение n гиперграней: $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$. Пусть $\Lambda_{(v)} := \Lambda_{(i_1,\dots,i_n)}$ – максимальный минор матрицы Λ, образованный столбцами $i_1, \dots, i_n$. Тогда

$$\det \Lambda_{(v)} = \pm 1. \tag{26}$$

Соответствие

$$G^{n-k} \mapsto \text{стационарная подгруппа многообразия } M(G)^{2(n-k)}$$

продолжает характеристическое отображение (25) до отображения решетки граней многогранника P^n в решетку торических подгрупп тора T^n.

Как и в случае стандартного действия тора T^n на $\mathbb{C}^n$, имеется проекция $T^n \times P^n \to M^{2n}$, слой которой над $x \in M^{2n}$ имеет вид (стационарная подгруппа точки x) $\times$ (орбита точки x). Это соображение может быть использовано для восстановления квазиторического многообразия по любой заданной паре (P^n, ℓ), где P^n – (комбинаторный) простой многогранник, а ℓ – отображение из множества гиперграней многогранника P^n в одномерные подгруппы тора T^n такое, что $\ell(F_{i_1}) \times \dots \times \ell(F_{i_k}) \to T^n$ инъективно при условии $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \varnothing$. Такая пара (P^n, ℓ) называется *характеристической парой*. Отображение ℓ непосредственно продолжается до отображения решетки граней многогранника P^n в решетку торических подгрупп тора T^n.

Конструкция 2.2.2 (построение квазиторического многообразия по характеристической паре). Заметим, что каждая точка q многогранника P^n лежит во внутренности единственной грани $G(q)$. Рассмотрим фактор-пространство $(T^n \times P^n)/\sim$, где $(t_1, q) \sim (t_2, q)$ тогда и только тогда, когда $t_1 t_2^{-1}$ принадлежит подгруппе $\ell(G(q))$. Свободное действие тора T^n на $T^n \times P^n$ определяет действие на $(T^n \times P^n)/\sim$ с пространством орбит P^n. Последнее действие свободно над внутренностью многогранника и имеет по одной неподвижной точке для каждой вершины. Аналогично тому, как многогранник P^n покрывается открытыми множествами U_v, диффеоморфными $\mathbb{R}^n_+$ (см. конструкцию 2.1.6), пространство $(T^n \times P^n)/\sim$ покрывается открытыми множествами $(T^n \times U_v)/\sim$, гомеоморфными $(T^n \times \mathbb{R}^n_+)/\sim$ или $\mathbb{C}^n$. Отсюда вытекает, что действие тора на $(T^n \times P^n)/\sim$ локально стандартно и, следовательно, $M^{2n}(\ell) := (T^n \times P^n)/\sim$ является квазиторическим многообразием.

Пусть $\psi\colon T^n \to T^n$ – некоторый автоморфизм. Скажем, что два квазиторических многообразия M_1^{2n}, M_2^{2n} над одним многогранником P^n являются *ψ-эквивариантно диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм $f\colon M_1^{2n} \to M_2^{2n}$ такой, что $f(t \cdot x) = \psi(t) f(x)$ для всех $t \in T^n$, $x \in M_1^{2n}$. Автоморфизм ψ индуцирует автоморфизм ψ_* решеток торических подгрупп тора T^n. Каждый такой автоморфизм определяет *ψ-преобразование* характеристических пар, при котором два характеристических отображения отличаются на ψ_*. Следующее предложение доказано в [26; предложение 2.6] и обобщает предложение 1.8 из [33].

Предложение 2.2.3. *Для любого автоморфизма ψ конструкция* 2.2.2 *определяет биекцию между классами ψ-эквивариантно диффеоморфных квазиторических многообразий и ψ-преобразованиями пар (P^n, ℓ).*

Если ψ – тождественный автоморфизм, то мы получаем, что два квазиторических многообразия эквивариантно диффеоморфны тогда и только тогда, когда их характеристические пары совпадают.

Ниже мы, следуя [33], строим клеточное разбиение многообразия M^{2n}, имеющее клетки лишь в четных размерностях, и вычисляем его числа Бетти.

Конструкция 2.2.4. Вспомним "идеи из теории Морса", использованные при доказательстве соотношений Дена–Соммервилля (теоремы 1.1.11). Там мы превратили 1-остов многогранника P^n в ориентированный граф и определили индекс $\operatorname{ind}(v)$ вершины $v \in P^n$ как число ребер, направленных к v. Эти ребра порождают грань G_v размерности $\operatorname{ind}(v)$. Обозначим через $\widehat{G}_v$ подмножество грани G_v, получаемое удалением из нее всех граней, не содержащих v. Очевидно, $\widehat{G}_v$ диффеоморфно $\mathbb{R}_+^{\operatorname{ind}(v)}$ и содержится в открытом множестве $U_v \subset P^n$ из конструкции 2.1.6. Тогда $e_v := \pi^{-1}\widehat{G}_v$ отождествляется с $\mathbb{C}^{\operatorname{ind}(v)}$ и объединение подмножеств e_v по всем вершинам многогранника определяет клеточное разбиение многообразия M^{2n}. Заметим, что все клетки имеют четную размерность и замыкание клетки e_v есть в точности подмногообразие $M(G_v)^{2\operatorname{ind}(v)} \subset M^{2n}$. Эта конструкция была ранее применена Хованским [50] для построения клеточных разбиений торических многообразий.

Предложение 2.2.5. *Числа Бетти многообразия M^{2n} равны нулю в нечетных размерностях, а в четных размерностях находятся как*

$$b_{2i}(M^{2n}) = h_i(P^n), \qquad i = 0, 1, \dots, n,$$

где $\boldsymbol{h}(P^n) = (h_0, \dots, h_n)$ – h-вектор многогранника P^n.

Доказательство. Число Бетти $b_{2i}(M^{2n})$ равно числу $2i$-мерных клеток в построенном выше клеточном комплексе. Последнее число равно числу вершин индекса i, что, в свою очередь, есть $h_i(P^n)$, как показано при доказательстве теоремы 1.1.11.

Для любого квазиторического многообразия M^{2n} с характеристическим отображением (25) и векторами гиперграней $\boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni})^t \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, m$, определим линейные формы

$$\theta_i := \lambda_{i1}v_1 + \dots + \lambda_{im}v_m \in \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m], \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{27}$$

Образы этих линейных форм в кольце граней $\mathbb{Z}(P^n)$ будут обозначаться теми же буквами.

Лемма 2.2.6 (Дэвис, Янушкевич). *Для любого квазиторического многообразия M^{2n} над P^n последовательность $\theta_1, \dots, \theta_n$ является регулярной последовательностью (степени два) в кольце $\mathbb{Z}(P^n)$.*

Пусть $\mathcal{J}_\ell$ обозначает идеал в кольце $\mathbb{Z}(P^n)$, порожденный элементами $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Теорема 2.2.7 (Дэвис, Янушкевич). *Пусть v_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, – двумерные классы когомологий, двойственные к подмногообразиям $M_i^{2(n-1)} \subset M^{2n}$. Тогда кольцо когомологий многообразия M^{2n} есть*

$$H^*(M^{2n}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{J}_\ell) = \mathbb{Z}(P^n)/\mathcal{J}_\ell.$$

Мы приводим доказательство двух предыдущих утверждений в § 3.4.

Замечание. Изменение знака вектора $\boldsymbol{\lambda}_i$ соответствует переходу от v_i к $-v_i$ в описании кольца когомологий из теоремы 2.2.7. Этот факт будет иметь принципиальное значение в следующем параграфе.

Пример 2.2.8. Неособое проективное торическое многообразие M_P, возникающее из решеточного простого многогранника P^n, является квазиторическим многообразием над P^n. Соответствующее характеристическое отображение $\ell\colon F_i \mapsto T(F_i)$ определяется формулой (24), где $\boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ni})^t$ суть нормальные векторы $\boldsymbol{l}_i$ гиперграней многогранника P^n, $i = 1, \dots, m$ (см. (1)). Соответствующая характеристическая $(n \times m)$-матрица Λ совпадает с матрицей L из конструкции 1.1.4. В частности, если P^n есть стандартный симплекс Δ^n (2), то M_P есть $\mathbb{C}P^n$ (пример 2.1.5), а $\Lambda = (E \mid -\boldsymbol{1})$, где E – единичная $(n \times n)$-матрица и $\boldsymbol{1}$ – столбец из единиц. См. также пример 2.4.14 ниже.

В общем случае неособое торическое многообразие не обязано быть квазиторическим: хотя пространство орбит (по действию T^n) является многообразием с углами (см. § 2.1), оно может не быть диффеоморфным (или комбинаторно эквивалентным) какому-либо простому многограннику. Авторы благодарны Н. Стрикланду за то, что он обратил наше внимание на этот факт. Тем не менее, нам не известны соответствующие примеры. В [40; с. 71] приведен пример полного неособого веера Σ в $\mathbb{R}^3$, который не может быть получен путем взятия конусов с вершиной 0 над гранями геометрического симплициального многогранника. При этом, однако, соответствующий симплициальный комплекс K_Σ (являясь симплициальной 2-сферой) комбинаторно эквивалентен некоторой многогранной 2-сфере. Это означает, что неособое торическое многообразие M_Σ, не будучи проективным, тем не менее является квазиторическим многообразием.

Проблема 2.2.9. *Построить пример неособого торического многообразия, которое не является квазиторическим многообразием.*

Решение этой проблемы представляется авторам несложным и сводится к построению полного неособого веера Σ, ассоциированный симплициальный комплекс K_Σ которого является сферой Барнетта или любой другой PL-сферой, не являющейся многогранной сферой (см. § 1.2). Как было указано Н. Стрикландом, определение квазиторического многообразия может быть видоизменено таким образом, чтобы все неособые торические многообразия автоматически становились квазиторическими многообразиями. Для этого в определении 2.2.1 необходимо заменить простой многогранник на многогранный комплекс, двойственный к некоторой симплициальной сфере. Соответствующие конструкции в настоящее время находятся в стадии разработки.

С другой стороны, легко построить пример квазиторического многообразия, которое не является торическим. Простейшим из таких примеров является многообразие $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ (связная сумма двух экземпляров $\mathbb{C}P^2$), которое является квазиторическим многообразием над квадратом I^2 (это следует из конструкции эквивариантной связной суммы, см. [33; 1.11], а также § 2.3 и следствие 2.5.5 ниже), но не допускает даже почти комплексной структуры (комплексной структуры в касательном расслоении). В связи с этим возникает следующая проблема.

Проблема 2.2.10. *Пусть P^n – простой многогранник с m гипергранями, ℓ – характеристическое отображение* (25) *и $M^{2n}(\ell)$ – построенное по ней квазиторическое многообразие* (*конструкция* 2.2.2). *Найти необходимые и достаточные условия на P^n и ℓ, обеспечивающие существование T^n-инвариантной комплексной* (*соответственно почти комплексной*) *структуры на $M^{2n}(\ell)$.*

В почти комплексном случае последняя проблема была сформулирована в [33; проблема 7.6]. Пример 2.2.8 (характеристические отображения решеточных многогранников) дает достаточное условие для проблемы 2.2.10 (так как неособое торическое многообразие является комплексным). Тем не менее, это условие, очевидно, не является необходимым даже для существования комплексной структуры. Действительно, имеются неособые (непроективные) торические многообразия, которые не происходят из решеточных простых многогранников (см. уже упоминавшийся пример из [40; с. 71]). В то же время, нам не известны примеры *не торических* комплексных квазиторических многообразий.

Проблема 2.2.11. *Построить пример не торического квазиторического многообразия, допускающего T^n-инвариантную комплексную структуру.*

Хотя общее квазиторическое многообразие может не быть комплексным или почти комплексным, оно всегда допускает T^n-инвариантную комплексную структуру в *стабильном* касательном расслоении. Соответствующие конструкции изложены в следующем параграфе.

Другой класс проблем связан с классификацией квазиторических многообразий над заданным комбинаторным простым многогранником. Общая задача классификации рассмотрена в § 2.5. Как показывает пример 2.2.14 ниже, существуют комбинаторные простые многогранники, которые не допускают характеристического отображения (и тем самым не могут быть пространствами орбит для квазиторических многообразий).

Проблема 2.2.12. *Дать комбинаторное описание многогранников P^n, допускающих хотя бы одно характеристическое отображение* (25).

Обобщение этой проблемы приведено в § 4.4 (проблема 4.4.1).

Характеристическое отображение определяется целочисленной $(n \times m)$-матрицей Λ, удовлетворяющей условию (26) для любой вершины $v \in P^n$. Условие $(\det \Lambda_{(v)})^2 = 1$ выделяет гиперповерхность в пространстве $\mathscr{M}(n,m;\mathbb{Z})$ целочисленных $(n \times m)$-матриц. Проблема 2.2.12 допускает следующую очевидную переформулировку.

Предложение 2.2.13. *Множество всех характеристических матриц представляет собой пересечение гиперповерхностей*

$$\bigcap_{v\in P^n} \bigl\{(\det \Lambda_{(v)})^2 = 1\bigr\} \tag{28}$$

в пространстве $\mathscr{M}(n,m;\mathbb{Z})$, где v пробегает множество вершин многогранника P^n.

Пример 2.2.14 (многогранник, не допускающий характеристического отображения, [33; пример 1.22]). Пусть P^n – 2-смежностный простой многогранник с $m \geqslant 2^n$ гипергранями (например, полярный многогранник для циклического многогранника $C^n(m)$ (пример 1.1.9) с $n \geqslant 4$ и $m \geqslant 2^n$). Тогда P^n не допускает ни одного характеристического отображения и, следовательно, не может быть пространством орбит никакого квазиторического многообразия. Действительно, согласно предложению 2.2.13 достаточно доказать, что пересечение (28) пусто. Так как $m \geqslant 2^n$, у любой матрицы $\Lambda \in \mathscr{M}(n,m;\mathbb{Z})$ (без нулевых столбцов) найдутся два столбца, скажем i-й и j-й, совпадающие по модулю 2. Так как P^n – 2-смежностный многогранник, соответствующие две гиперграни F_i и F_j имеют непустое пересечение в P^n. Следовательно, столбцы i и j матрицы Λ входят в какой-то из ее миноров вида $\Lambda_{(v)}$. Это означает, что определитель этого минора четен и пересечение (28) пусто.

§ 2.3. Стабильно комплексные структуры и квазиторические представители в классах кобордизмов. Этот параграф содержит, в основном, результаты, полученные первым автором совместно с Н. Рэем в работах [24]–[26].

Стабильно комплексная структура на (гладком) многообразии M определяется комплексной структурой в векторном расслоении $\tau(M) \oplus \mathbb{R}^k$ для некоторого k, где $\tau(M)$ – *касательное расслоение* к M, а $\mathbb{R}^k$ обозначает тривиальное вещественное k-расслоение над M. *Стабильно комплексное многообразие* (в других терминах, *слабо почти комплексное многообразие* или *U-многообразие*) – это многообразие с фиксированной стабильно комплексной структурой, т.е. пара (M,ξ), где ξ – комплексное расслоение, изоморфное, как вещественное расслоение, расслоению $\tau(M)\oplus\mathbb{R}^k$ для некоторого k. Если M само является комплексным многообразием, то на нем имеется *каноническая* стабильно комплексная структура $(M,\tau(M))$. Операции несвязного объединения и прямого произведения стабильно комплексных многообразий задают на множестве классов их кобордизмов $[M,\xi]$ структуру градуированного кольца – *кольца комплексных кобордизмов* Ω^U. Согласно теореме Милнора и Новикова $\Omega^U\cong\mathbb{Z}[a_1,a_2,\dots]$, $\deg a_i=2i$ (см. [62], [84]). Это кольцо служит кольцом коэффициентов обобщенной теории (ко)гомологий, известной как *комплексные (ко)бордизмы*.

Стабильно комплексным многообразиям было уделено большое внимание в докладе Ф. Хирцебруха на математическом конгрессе в Эдинбурге 1958 г. (см. [60]). Используя *гиперповерхности Милнора* (см. пример 2.3.10) и теорему Милнора–Новикова, было показано, что каждый класс комплексных кобордизмов содержит неособое алгебраическое многообразие (не обязательно связное). До сих пор остается нерешенной следующая проблема.

Проблема 2.3.1 (Хирцебрух). *Какие классы кобордизмов из Ω^U содержат связные неособые алгебраические многообразия?*

Пример 2.3.2. Группа $\Omega_2^U\cong\mathbb{Z}$ двумерных кобордизмов порождается классом $[\mathbb{C}P^1]$ (римановой сферы). Каждый класс $k[\mathbb{C}P^1]\in\Omega_2^U$ содержит неособое алгебраическое многообразие, а именно, при $k>0$ – несвязное объединение k экземпляров $\mathbb{C}P^1$, а при $k<0$ – несвязное объединение k экземпляров римановой поверхности рода 2. В то же время *связное* алгебраическое многообразие содержится лишь в классах кобордизмов вида $k[\mathbb{C}P^1]$, где $k\leqslant 1$.

Задачи выбора образующих специального вида в кольце Ω^U естественно возникают в теории кобордизмов и ее приложениях. Далее в этом параграфе мы приводим решение аналога проблемы 2.3.1 для квазиторических многообразий, недавно полученное в работах [25] и [26]. Это решение опирается на введение дополнительной структуры на квазиторическом многообразии – *полиориентации*, задающей на нем каноническую стабильно комплексную структуру в комбинаторных терминах.

Пусть $\pi\colon M^{2n}\to P^n$ – квазиторическое многообразие с характеристическим отображением ℓ. Фиксируя ориентацию тора T^n согласно (23), мы получаем, что выбор ориентации для P^n эквивалентен выбору ориентации для M^{2n} (ориентация многогранника P^n определяется ориентацией объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$).

Определение 2.3.3. *Полиориентацией* квазиторического многообразия M^{2n} называется выбор его ориентации вместе с ориентациями каждого из подмногообразий $M_i^{2(n-1)}=\pi^{-1}(F_i)$, $i=1,\dots,m$.

Таким образом, на данном M^{2n} всего имеется 2^{m+1} полиориентаций.

Полиориентация многообразия M^{2n} определяет ориентацию каждого нормального расслоения $\nu_i:=\nu(M_i\subset M^{2n})$, $i=1,\dots,m$. Так как каждое ν_i является двумерным вещественным расслоением, ориентация ν_i задает в нем структуру одномерного комплексного расслоения. Стационарная подгруппа $T(F_i)$ подмногообразия $M_i^{2(n-1)}=\pi^{-1}(F_i)$ действует в нормальном расслоении ν_i, $i=1,\dots,m$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.3.4. *Выбор полиориентации M^{2n} эквивалентен выбору ориентации P^n вместе с однозначным (а не с точностью до знака) выбором векторов $\boldsymbol{\lambda}_i$, $i=1,\dots,m$, в* (24).

Будем называть характеристическое отображение ℓ *направленным*, если все окружности $\ell(F_i)$, $i=1,\dots,m$, ориентированы. Это подразумевает, что знаки векторов гиперграней $\boldsymbol{\lambda}_i=(\lambda_{1i},\dots,\lambda_{ni})^t$, $i=1,\dots,m$, выбраны однозначно. В предыдущем параграфе мы сводили векторы гиперграней в целочисленную $(n\times m)$-матрицу Λ. Эта матрица удовлетворяет условию (26). В силу (24) задание матрицы Λ эквивалентно заданию направленного характеристического отображения. Пусть $\mathbb{Z}^{\mathscr{F}}$ обозначает m-мерный свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный множеством $\mathscr{F}$ гиперграней многогранника P^n. Тогда матрица Λ определяет эпиморфизм $\lambda\colon\mathbb{Z}^{\mathscr{F}}\to\mathbb{Z}^n$ $(\lambda(F_i)=\boldsymbol{\lambda}_i)$ и эпиморфизм $T^{\mathscr{F}}\to T^m$, который мы будем обозначать той же буквой λ. Далее мы будем писать $\mathbb{Z}^m$ вместо $\mathbb{Z}^{\mathscr{F}}$ и T^m вместо $T^{\mathscr{F}}$, используя соглашение, что вектор e_i стандартного базиса $\mathbb{Z}^m$ соответствует $F_i\in\mathbb{Z}^{\mathscr{F}}$, $i=1,\dots,m$ (и аналогично для T^m). *Направленная характеристическая пара* (P^n,Λ) состоит из ориентированного многогранника P^n и целочисленной матрицы Λ (или, эквивалентно, эпиморфизма $\lambda\colon\mathbb{Z}^m\to\mathbb{Z}^n$), удовлетворяющей (26).

Предложение 2.3.4 показывает, что характеристическая пара полиориентированного квазиторического многообразия является направленной. С другой стороны, квазиторическое многообразие, определяемое при помощи конструкции 2.2.2 из направленной характеристической пары, является полиориентированным.

Конструкция 2.3.5. Выбор ориентации в расслоении ν_i над M_i задает целочисленный класс Тома в группе когомологий $H^2(M(\nu_i))$, который представляется некоторым комплексным одномерным расслоением над пространством Тома $M(\nu_i)$. Отображение Понтрягина–Тома $M^{2n}\to M(\nu_i)$ индуцирует некоторое расслоение над M^{2n}, которое мы обозначим ρ_i. Ограничение ρ_i на $M_i\subset M^{2n}$ есть ν_i.

Теорема 2.3.6 [26; теорема 3.8]. *Каждая полиориентация квазиторического многообразия M^{2n} задает на нем каноническую стабильно комплексную структуру при помощи следующего изоморфизма вещественных $2m$-расслоений*:

$$\tau(M^{2n})\oplus\mathbb{R}^{2(m-n)}\cong\rho_1\oplus\dots\oplus\rho_m.$$

Отсюда следует, что направленная характеристическая пара (P^n,Λ) определяет класс кобордизмов $[M^{2n},\rho_1\oplus\dots\oplus\rho_m]\in\Omega^U$. В то же время, предыдущие конструкции могут быть непосредственно применены к вычислению кольца комплексных кобордизмов $\Omega^*_U(M^{2n})$ полиориентированного квазиторического многообразия.

Теорема 2.3.7 [26; 5.3]. *Пусть v_i обозначает первый класс Чженя $c_1(\rho_i)\in\Omega^2_U(M^{2n})$ расслоения ρ_i в комплексных кобордизмах, $1\leqslant i\leqslant m$. Тогда кольцо кобордизмов M^{2n} есть*

$$\Omega^*_U(M^{2n})\cong\Omega^U[v_1,\dots,v_m]/(\mathscr{I}_P+\mathscr{J}_\Lambda),$$

где идеалы $\mathscr{I}_P$ и $\mathscr{J}_\Lambda$ определяются так же, как и в теореме 2.2.7.

Заметим, что по построению расслоения ρ_i класс Чженя $c_1(\rho_i)$ двойственен по Пуанкаре вложению $M_i^{2(n-1)}\subset M^{2n}$. В качестве следствия мы получаем замечательный факт, что группы комплексных бордизмов $\Omega_*^U(M^{2n})$ порождаются *вложенными* подмногообразиями. Фундаментальный класс кобордизмов $\langle M^{2n}\rangle \in \Omega_U^{2n}(M^{2n})$ по определению двойственен по Пуанкаре классу бордизмов точки. Поэтому $\langle M^{2n}\rangle = v_{i_1}\cdots v_{i_n}$ для любого набора $i_1,\dots,i_n$ такого, что $F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$ – вершина многогранника P^n.

Пример 2.3.8 (многообразие ограниченных флагов [24]). *Ограниченным флагом* в $\mathbb{C}^{n+1}$ называется полный флаг $U=\{U_1\subset U_2\subset\dots\subset U_{n+1}=\mathbb{C}^{n+1}\}$ такой, что U_k содержит координатное подпространство $\mathbb{C}^{k-1}$ (порожденное первыми $k-1$ векторами стандартного базиса) при $2\leqslant k\leqslant n$. Как показано в [26; пример 2.8], действие тора T^n на $\mathbb{C}^{n+1}$ по формуле $t\cdot z=(t_1z_1,\dots,t_nz_n,z_{n+1})$ задает на $2n$-мерном многообразии B_n всех ограниченных флагов в $\mathbb{C}^{n+1}$ структуру квазиторического многообразия над кубом I^n.

Пример 2.3.9. В [25] введено семейство многообразий $B_{i,j}$, $0\leqslant i\leqslant j$. Точками многообразия $B_{i,j}$ являются пары (U,W), где U – ограниченный флаг в $\mathbb{C}^{n+1}$ (см. пример 2.3.8), а W – одномерное подпространство в $U_1^{\perp}\oplus\mathbb{C}^{j-i}$. Таким образом, $B_{i,j}$ является пространством гладкого расслоения над B_i со слоем $\mathbb{C}P^{j-1}$. В [26; пример 2.9] показано, что $B_{i,j}$ является квазиторическим многообразием над произведением $I^i\times D^{j-1}$ куба и симплекса.

Канонические стабильно комплексные структуры и полиориентации на многообразиях B_n и $B_{i,j}$ описаны в [26; примеры 4.3, 4.5].

Замечание. Произведение двух квазиторических многообразий $M_1^{2n_1}$ и $M_2^{2n_2}$ над многогранниками $P_1^{n_1}$ и $P_2^{n_2}$ является квазиторическим многообразием над $P_1^{n_1}\times P_2^{n_2}$. Эта конструкция обобщается на полиориентированные квазиторические многообразия и согласована со стабильно комплексными структурами (детали можно найти в [26; предложение 4.7]).

Как показано в [25], классы многообразий $B_{i,j}$ мультипликативно порождают кольцо Ω^U, т.е. каждое $2n$-мерное стабильно комплексное многообразие содержит в своем классе кобордизмов несвязное объединение многообразий

$$B_{i_1,j_1}\times B_{i_2,j_2}\times\dots\times B_{i_k,j_k}, \tag{29}$$

где $\sum_{q=1}^{k}(i_q+j_q)-2k=n$. Каждое такое произведение является квазиторическим многообразием. Это – основной результат работы [25]. Стабильно комплексные структуры на произведениях (29) индуцированы полиориентациями и поэтому сохраняются под действием тора.

Пример 2.3.10. Стандартный набор многообразий, порождающих кольцо Ω^U, состоит из проективных пространств $\mathbb{C}P^i$, $i\geqslant 0$, и *гиперповерхностей Милнора* $H_{i,j}\subset\mathbb{C}P^i\times\mathbb{C}P^j$, $1\leqslant i\leqslant j$. Гиперповерхности $H_{i,j}$ определяются следующим образом:

$$H_{i,j}=\left\{(z_0:\dots:z_i)\times(w_0:\dots:w_j)\in\mathbb{C}P^i\times\mathbb{C}P^j:\sum_{q=0}^{i}z_qw_q=0\right\}.$$

При этом, как показано в [25], гиперповерхности $H_{i,j}$ *не являются* квазиторическими многообразиями при $i\geqslant 2$.

Для того чтобы задать по-настоящему квазиторических представителей (которые по определению связны) в каждом классе кобордизмов размерности > 2, остается лишь заменить несвязные объединения произведений (29) на их связные суммы. Это сделано в [26; § 6], используя конструкцию 1.1.7 и ее продолжение на полиориентированные квазиторические многообразия.

Теорема 2.3.11 (Бухштабер, Рэй). *В размерностях > 2 каждый класс комплексных кобордизмов содержит квазиторическое многообразие, непременно связное, стабильно комплексная структура которого индуцирована полиориентацией u, таким образом, согласована с действием тора.*

Эта теорема дает решение аналога проблемы 2.3.1 для квазиторических многообразий.

§ 2.4. Комбинаторные формулы для родов Хирцебруха квазиторических многообразий. Конструкции из предыдущего параграфа открывают дорогу для вычисления инвариантов кобордизмов (чисел Чженя, родов Хирцебруха и др.) полиориентированных квазиторических многообразий в терминах комбинаторики пространства орбит. В данном параграфе мы излагаем результаты, полученные в этом направлении вторым автором в работах [69], [70]. А именно, применяя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 1.1.11, мы строим на любом квазиторическом многообразии действие окружности, имеющее лишь изолированные неподвижные точки. Если M^{2n} полиориентировано, то такое действие сохраняет стабильно комплексную структуру и его локальные представления вблизи неподвижных точек описываются при помощи характеристической матрицы Λ. Это позволило вычислить χ_y-род Хирцебруха как сумму вкладов, соответствующих вершинам многогранника, в которой слагаемые зависят лишь от “локальной комбинаторики” вблизи вершины. Используя некоторые дополнительные соображения, мы получили в качестве следствия комбинаторные формулы для сигнатуры и рода Тодда многообразия.

Определение 2.4.1. *Родом Хирцебруха*, ассоциированным со степенным рядом

$$Q(x) = 1 + \sum q_k x^k, \qquad q_k \in \mathbb{Q},$$

называется кольцевой гомоморфизм $\varphi_Q \colon \Omega^U \to \mathbb{Q}$, который на классе кобордизмов $[M^{2n}] \in \Omega^U_{2n}$ принимает значение

$$\varphi_Q[M^{2n}] = \biggl(\prod_{i=1}^{n} Q(x_i), \langle M^{2n}\rangle\biggr).$$

Здесь M^{2n} – гладкое многообразие с комплексной структурой в стабильном касательном расслоении $\tau(M^{2n})$ с полным классом Чженя

$$c(\tau) = 1 + c_1(\tau) + \dots + c_n(\tau) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i),$$

а $\langle M^{2n}\rangle$ обозначает фундаментальный класс в гомологиях.

Важным примером рода Хирцебруха является *χ_y-род*, соответствующий ряду

$$Q(x) = \frac{x(1+ye^{-x(1+y)})}{1-e^{-x(1+y)}},$$

где $y \in \mathbb{R}$ – некоторый параметр. В частных случаях $y=-1,0,1$ мы получаем соответственно n-е число Чженя, *род Тодда* и *сигнатуру* многообразия M^{2n}.

В случае комплексного многообразия M^{2n} значение $\chi_y(M^{2n})$ вычисляется в терминах эйлеровых характеристик *комплексов Дольбо* многообразия M^{2n}. Общую информацию о родах Хирцебруха можно найти в [45].

Далее мы предполагаем заданным полиориентированное квазиторическое многообразие M^{2n} над некоторым P^n, с характеристической матрицей Λ. Это определяет стабильно комплексную структуру на M^{2n}, как описано в предыдущем параграфе. Ориентация M^{2n} определяет фундаментальный класс $\langle M^{2n}\rangle \in H_{2n}(M^{2n};\mathbb{Z})$.

Конструкция 2.4.2. Пусть v – вершина многогранника, заданная как пересечение n гиперграней:

$$v = F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}. \tag{30}$$

Сопоставим каждой гиперграни F_{i_k} ребро $E_k := \bigcap_{j\ne k} F_{i_k}$ (т.е. E_k содержит v и противоположно F_{i_k}). Пусть $\boldsymbol{e}_k$ – вектор вдоль E_k с началом v. Тогда $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ – базис $\mathbb{R}^n$, который может быть как положительно, так и отрицательно ориентирован, в зависимости от порядка гиперграней в (30). На протяжении всего этого параграфа мы предполагаем, что этот порядок таков, что $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ – положительно ориентированный базис.

При фиксированном порядке гиперграней в (30) векторы $\boldsymbol{\lambda}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\lambda}_{i_n}$ гиперграней в вершине v могут, в свою очередь, составлять как положительно, так и отрицательно ориентированный базис, в зависимости от знака минора $\Lambda_{(v)} = (\boldsymbol{\lambda}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\lambda}_{i_n})$ (см. (26)).

Определение 2.4.3. *Знак* вершины $v = F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$ многогранника P^n есть

$$\sigma(v) := \det\Lambda_{(v)}.$$

Набор знаков вершин многогранника P^n является важным инвариантом полиориентированного квазиторического многообразия. Заметим, что обращение ориентации многообразия M^{2n} изменяет все знаки $\sigma(v)$ на противоположные. В то же время изменение направления вектора гиперграни обращает знаки лишь тех вершин, которые содержатся в соответствующей гиперграни.

Пусть E – ребро P^n. Стационарная подгруппа 2-мерного подмногообразия $\pi^{-1}(E)\subset M^{2n}$ является $(n-1)$-мерным тором, который мы обозначим $T(E)$. Тогда мы имеем

$$T(E) = \bigl\{(e^{2\pi i\varphi_1},\dots,e^{2\pi i\varphi_n})\in T^n : \mu_1\varphi_1+\dots+\mu_n\varphi_n = 0\bigr\} \tag{31}$$

для некоторых целых чисел $\mu_1,\dots,\mu_n$. Мы будем называть $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1,\dots,\mu_n)^t$ *вектором ребра E*. Этот вектор $\boldsymbol{\mu}$ является примитивным вектором в двойственной решетке $(\mathbb{Z}^n)^*$; он определяется ребром E лишь с точностью до знака. При этом нет канонического способа выбрать эти знаки одновременно для всех ребер. Однако, следующая лемма показывает, что полиориентация многообразия M^{2n} предоставляет канонический способ выбора знаков векторов ребер “локально” в каждой вершине.

Лемма 2.4.4. *Для каждой вершины $v \in P^n$ направления векторов $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_n$ ребер, сходящихся в v, можно выбрать таким образом, чтобы $(n \times n)$-матрица $\mathrm{M}_{(v)} := (\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_n)$ удовлетворяла соотношению*

$$\mathrm{M}_{(v)}^t \cdot \Lambda_{(v)} = \mathrm{E},$$

где E – единичная матрица. Другими словами, $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_n$ и $\boldsymbol{\lambda}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{i_n}$ являются сопряженными базисами.

Доказательство. Вначале выберем знаки векторов ребер в v произвольно и представим v как в (30). Тогда $\boldsymbol{\mu}_k$ – вектор ребра E_k, противоположного гиперграни F_{i_k} (конструкция 2.4.2), $k = 1, \dots, n$. Таким образом, $E_k \subset F_{i_l}$ и $T(F_{i_l}) \subset T(E_k)$ при $l \neq k$. Следовательно,

$$\langle \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\lambda}_{i_l} \rangle = 0, \qquad l \neq k, \tag{32}$$

(см. (24) и (31)). Так как $\boldsymbol{\mu}_k$ является примитивным вектором, из (32) вытекает, что $\langle \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\lambda}_{i_k} \rangle = \pm 1$. Изменяя, если необходимо, знак вектора $\boldsymbol{\mu}_k$ на противоположный, мы получаем

$$\langle \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\lambda}_{i_k} \rangle = 1,$$

что вместе с (32) дает $\mathrm{M}_{(v)}^t \cdot \Lambda_{(v)} = \mathrm{E}$, что и требовалось.

Далее мы предполагаем, что знаки векторов ребер выбраны в каждой вершине v, как описано в лемме 2.4.4. Из этой леммы вытекает также, что векторы $\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_n$ ребер, сходящихся в v, образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$ и

$$\det \mathrm{M}_{(v)} = \sigma(v). \tag{33}$$

Пусть $M^{2n} = M_P$ – неособое торическое многообразие, возникающее из решеточного простого многогранника P, определяемого формулой (1). Тогда $\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{l}_i$, $i = 1, \dots, m$ (см. пример 2.2.8), в то время как векторы ребер в вершине $v \in P^n$ суть примитивные векторы $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ вдоль ребер с началом в v. Как следует из конструкции 2.4.2, в этом случае $\sigma(v) = 1$ для всех v. Лемма 2.4.4 в этом случае выражает тот факт, что $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{l}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{l}_{i_n}$ – сопряженные базисы решетки $\mathbb{Z}^n$. Аналогично, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.4.5. *Пусть полиориентация квазиторического многообразия M^{2n} происходит из некоторой T^m-инвариантной почти комплексной структуры (т.е. комплексной структуры в касательном расслоении $\tau(M^{2n})$). Тогда $\sigma(v) = 1$ для любой вершины $v \in P^n$.*

Доказательство. Ориентация многогранника P^n индуцируется канонической ориентацией почти комплексного многообразия M^{2n} и ориентацией тора (23). Так как почти комплексная структура на M^{2n} является T^n-инвариантной, подмногообразия $M_i^{2(n-1)}$, неподвижные относительно $T(F_i) \subset T^n$, также являются почти комплексными. Отсюда вытекает, что для любой вершины (30) векторы $\boldsymbol{\lambda}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{i_n}$ образуют положительно ориентированный базис пространства $\mathbb{R}^n$.

Предложение 2.4.5 дает необходимое условие существования T^n-инвариантной почти комплексной структуры на M^{2n} (см. проблему 2.2.10).

Замечание. Глобально лемма 2.4.4 дает два направления (знака) для вектора ребра, по одному для каждого из его концов. Эти знаки всегда различны при условии, что M^{2n} – почти комплексное многообразие (например, торическое многообразие), однако в общем случае это неверно.

Пусть $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_n)^t\in\mathbb{Z}^n$ – примитивный вектор такой, что

$$\langle\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\rangle\ne 0 \ \text{ для любого вектора ребра } \boldsymbol{\mu}. \tag{34}$$

Вектор $\boldsymbol{\nu}$ определяет одномерную ориентированную подгруппу

$$T_{\boldsymbol{\nu}}:=\bigl\{(e^{2\pi i\nu_1\varphi},\dots,e^{2\pi i\nu_n\varphi})\in T^n:\varphi\in\mathbb{R}\bigr\}.$$

Лемма 2.4.6 [70; лемма 2.1]. *Для любого $\boldsymbol{\nu}$, удовлетворяющего* (34), *окружность $T_{\boldsymbol{\nu}}$ действует на M^{2n} с изолированными неподвижными точками* (*соответствующими вершинам P^n*). *Для каждой вершины $v=F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$ действие окружности $T_{\boldsymbol{\nu}}$ индуцирует S^1-представление в касательном пространстве T_vM^{2n} с весами $\langle\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\nu}\rangle,\dots,\langle\boldsymbol{\mu}_n,\boldsymbol{\nu}\rangle$.*

Замечание. Если $M^{2n}=M_P$ – неособое торическое многообразие, то условие общего положения (34) эквивалентно условию из доказательства теоремы 1.1.11.

Определение 2.4.7. Пусть задан примитивный вектор $\boldsymbol{\nu}$, удовлетворяющий (34). Введем *индекс* вершины $v\in P^n$ как число отрицательных весов S^1-представления в T_vM^{2n} из леммы 2.4.6. Таким образом, если $v=F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$, то

$$\operatorname{ind}_{\boldsymbol{\nu}}(v)=\{\sharp k:\langle\boldsymbol{\mu}_k,\boldsymbol{\nu}\rangle<0\}.$$

Замечание. Индекс вершины v можно также определить в терминах векторов гиперграней, сходящихся в v. Действительно, лемма 2.4.4 показывает, что если $v=F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$, то

$$\boldsymbol{\nu}=\langle\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\nu}\rangle\boldsymbol{\lambda}_{i_1}+\dots+\langle\boldsymbol{\mu}_n,\boldsymbol{\nu}\rangle\boldsymbol{\lambda}_{i_n}.$$

Таким образом, $\operatorname{ind}_\nu(v)$ равен числу отрицательных коэффициентов в представлении вектора $\boldsymbol{\nu}$ в виде линейной комбинации базисных векторов $\boldsymbol{\lambda}_{i_1},\dots,\boldsymbol{\lambda}_{i_n}$.

Теорема 2.4.8 [70; теорема 3.1]. *Для любого $\boldsymbol{\nu}$, удовлетворяющего* (34), *χ_y-род многообразия M^{2n} может быть вычислен как*

$$\chi_y(M^{2n})=\sum_{v\in P^n}(-y)^{\operatorname{ind}_\nu(v)}\sigma(v).$$

Доказательство этой теоремы основано на применении формулы Атьи–Хирцебруха [6] к действию окружности, определенному в лемме 2.4.6.

Значение χ_y-рода $\chi_y(M^{2n})$ при $y=-1$ равно n-му числу Чженя $c_n(\xi)[M^{2n}]$ для любого $2n$-мерного стабильно комплексного многообразия $[M^{2n},\xi]$. В случае квазиторического многообразия теорема 2.4.8 дает

$$c_n[M^{2n}]=\sum_{v\in P^n}\sigma(v). \tag{35}$$

Если M^{2n} является почти комплексным многообразием (например, неособым торическим многообразием), то $\sigma(v) = 1$ для всех вершин $v \in P^n$ (предложение 2.4.5) и $c_n[M^{2n}]$ равно эйлеровой характеристике $e(M^{2n})$. Таким образом, для почти комплексных M^{2n} эйлерова характеристика равна числу вершин многогранника P^n (что хорошо известно для торических многообразий). Для общих квазиторических M^{2n} эйлерова характеристика также равна числу вершин P^n (так как эйлерова характеристика произвольного S^1-многообразия равна сумме эйлеровых характеристик подмногообразий неподвижных точек), но последнее число может быть отлично от $c_n[M^{2n}]$ (см. пример 2.4.15 ниже).

Значение χ_y-рода в $y = 1$ есть сигнатура (или *L-род*). Теорема 2.4.8 в этом случае дает

Следствие 2.4.9. *Сигнатура полиориентированного квазиторического многообразия M^{2n} вычисляется как*

$$\operatorname{sign}(M^{2n}) = \sum_{v \in P^n} (-1)^{\operatorname{ind}_\nu(v)} \sigma(v).$$

Будучи инвариантом класса *ориентированных* кобордизмов, сигнатура многообразия M^{2n} не зависит от стабильно комплексной структуры (т.е. от полиориентации) и определяется лишь ориентацией M^{2n} (или P^n). Следующая модификация следствия 2.4.9 дает формулу для $\operatorname{sign}(M^{2n})$, которая не зависит от полиориентации.

Следствие 2.4.10 [70; следствие 3.3]. *Сигнатура ориентированного квазиторического многообразия M^{2n} вычисляется как*

$$\operatorname{sign}(M^{2n}) = \sum_{v \in P^n} \det(\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_1, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_n),$$

где $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}_k$, $k = 1, \dots, n$, – векторы ребер, сходящихся в v, направленные таким образом, что $\langle \widetilde{\boldsymbol{\mu}}_k, \boldsymbol{\nu} \rangle > 0$.

Если $M^{2n} = M_P$ является неособым торическим многообразием, то $\sigma(v) = 1$ для любой вершины $v \in P^n$ и следствие 2.4.9 дает

$$\operatorname{sign}(M_P) = \sum_{v \in P^n} (-1)^{\operatorname{ind}_\nu(v)}.$$

Так как в этом случае индекс $\operatorname{ind}_\nu(v)$ совпадает с индексом из доказательства теоремы 1.1.11, мы получаем

$$\operatorname{sign}(M_P) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h_k(P). \tag{36}$$

Заметим, что если n нечетно, то правая часть предыдущей формулы обращается в нуль ввиду соотношений Дена–Соммервилля. Формула (36) появляется в более общем контексте в недавней работе Леунга и Райнера [55]. Число в правой части формулы (36) возникает в следующей известной комбинаторной гипотезе.

Проблема 2.4.11 (гипотеза Черни–Дэвиса). *Пусть K – $(2q-1)$-мерный флаговый горенштейнов* комплекс с h-вектором $(h_0,h_1,\dots,h_{2q-1})$. Верно ли, что*

$$(-1)^q(h_0-h_1+\dots+h_{2q})\geqslant 0?$$

Эта гипотеза была высказана в [29; гипотеза D] для флаговых симплициальных гомологических сфер. Ее обобщение на случай горенштейновых* комплексов принадлежит Стенли [83; гипотеза 4]. Гипотеза Черни–Дэвиса тесно связана со следующей гипотезой из дифференциальной геометрии.

Проблема 2.4.12 (гипотеза Хопфа). *Пусть M^{2q} – риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Верно ли, что эйлерова характеристика $\chi(M^{2n})$ удовлетворяет неравенству*

$$(-1)^q\chi(M^{2q})\geqslant 0?$$

Известно, что обе гипотезы имеют место при $q=1,2$, а также в ряде частных случаев. Дополнительные подробности можно найти в [29]. Взаимосвязям двух предыдущих проблем с сигнатурой торического многообразия посвящена работа [55].

Теперь мы вернемся снова к χ_y-роду полиориентированного квазиторического многообразия. Следующим важным частным случаем является род Тодда, соответствующий $y=0$. В этом случае слагаемые в формуле из теоремы 2.4.8 не определены для вершин, имеющих индекс 0, так что этот случай требует дополнительного анализа.

Теорема 2.4.13 [69; теорема 7], [70; теорема 3.4]. *Род Тодда полиориентированного квазиторического многообразия вычисляется как*

$$\mathrm{td}(M^{2n})=\sum_{v\in P^n:\mathrm{ind}_\nu(v)=0}\sigma(v)$$

(*сумма берется по всем вершинам индекса* 0).

В случае неособого торического многообразия имеется лишь одна вершина индекса 0. Это – “нижняя” вершина многогранника P^n, для которой все инцидентные ребра направлены от нее (в обозначениях, используемых при доказательстве теоремы 1.1.11). Так как $\sigma(v)=1$ для любой $v\in P^n$, теорема 2.4.13 дает $\mathrm{td}(M_P)=1$, что хорошо известно (см., например, [40; §5.3]; род Тодда для алгебраических многообразий равен *арифметическому роду*).

Если же M^{2n} является почти комплексным многообразием, то, как показывают предложение 2.4.5 и теорема 2.4.13, мы имеем $\mathrm{td}(M^{2n})>0$.

Пример 2.4.14. Проективное пространство $\mathbb{C}P^2$, рассматриваемое как торическое многообразие, возникает из стандартного решеточного 2-симплекса Δ^2 (с вершинами $v_1=(0,0)$, $v_2=(1,0)$, $v_3=(0,1)$). Ориентация стандартная (определяется комплексной структурой). Полиориентация определяется векторами гиперграней $\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\boldsymbol{\lambda}_3$, которые в этом случае являются примитивными нормальными векторами, направленными внутрь многогранника. Векторы ребер являются примитивными векторами вдоль ребер, направленными от вершины. Это изображено на рис. 5. Соответствующая стабильно комплексная структура стандартна, т.е. определяется изоморфизмом расслоений $\tau(\mathbb{C}P^2)\oplus\mathbb{R}^2 \cong \bar\eta\oplus\bar\eta\oplus\bar\eta$, где η – каноническое одномерное расслоение Хопфа. Вычислим род Тодда и сигнатуру при помощи следствия 2.4.9 и теоремы 2.4.13. Мы имеем $\sigma(v_1) = \sigma(v_2) = \sigma(v_3) = 1$. Возьмем $\boldsymbol{\nu} = (1,2)$, тогда $\mathrm{ind}_\nu(v_1) = 0$, $\mathrm{ind}_\nu(v_2) = 1$, $\mathrm{ind}_\nu(v_3) = 2$ (напомним, что индекс есть число отрицательных скалярных произведений векторов ребер с $\boldsymbol{\nu}$). Итак, $\mathrm{sign}(\mathbb{C}P^2) = \mathrm{sign}[\mathbb{C}P^2, \bar\eta\oplus\bar\eta\oplus\bar\eta] = 1$, $\mathrm{td}(\mathbb{C}P^2) = \mathrm{td}[\mathbb{C}P^2, \bar\eta\oplus\bar\eta\oplus\bar\eta] = 1$.

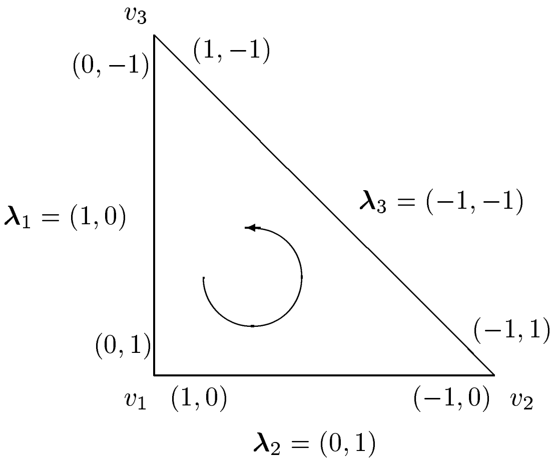


Рис. 5. $\tau(\mathbb{C}P^2)\oplus\mathbb{C}\simeq\bar\eta\oplus\bar\eta\oplus\bar\eta$

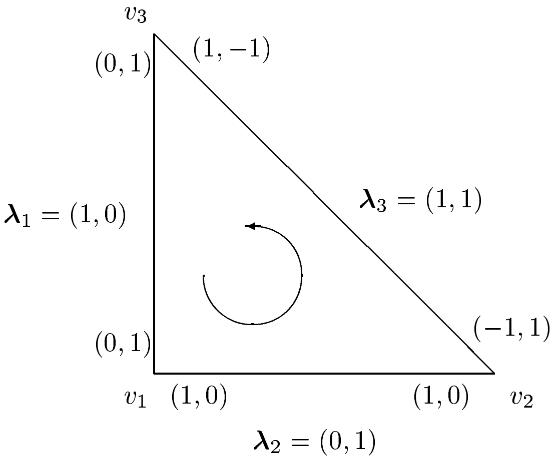


Рис. 6. $\tau(\mathbb{C}P^2)\oplus\mathbb{C}\simeq\bar\eta\oplus\bar\eta\oplus\eta$

Пример 2.4.15. Теперь рассмотрим $\mathbb{C}P^2$ с полиориентацией, определяемой тремя векторами гиперграней $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3$, изображенными на рис. 6. Эта полиориентация отличается от предыдущего примера знаком вектора $\boldsymbol{\lambda}_3$. Соответствующая стабильно комплексная структура определяется изоморфизмом $\tau(\mathbb{C}P^2)\oplus\mathbb{R}^2 \cong \bar\eta\oplus\bar\eta\oplus\eta$.

Используя (33), вычисляем

$$\sigma(v_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \sigma(v_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \sigma(v_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Для $\boldsymbol{\nu} = (1,2)$ находим $\mathrm{ind}_\nu(v_1) = 0$, $\mathrm{ind}_\nu(v_2) = 0$, $\mathrm{ind}_\nu(v_3) = 1$. Итак, $\mathrm{sign}[\mathbb{C}P^2, \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta] = 1$, $\mathrm{td}[\mathbb{C}P^2, \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta] = 0$. Заметим, что в этом случае формула (35) дает $c_n[\mathbb{C}P^2, \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \eta] = \sigma(v_1) + \sigma(v_2) + \sigma(v_3) = -1$, в то время как эйлерова характеристика $\mathbb{C}P^2$ есть $c_n[\mathbb{C}P^2, \bar\eta \oplus \bar\eta \oplus \bar\eta] = 3$.

T^n-эквивариантные стабильно комплексные и почти комплексные многообразия рассматриваются в работах Хаттори [44] и Масуды [57] как альтернативное обобщение торических многообразий (соответствующие многообразия названы в этих работах *унитарными торическими многообразиями*). Вместо характеристических отображений из [33] для описания комбинаторной структуры пространства орбит в [57] используется понятие *мульти-веера*. Мульти-веер представляет собой набор конусов, которые, в отличие от обычного веера, могут накладываться друг на друга. Род Тодда унитарного торического многообразия был вычислен в [57] в терминах конусов мульти-веера. Ответ эквивалентен нашей теореме 2.4.13 в случае квазиторических многообразий.

§ 2.5. Задача классификации квазиторических многообразий над заданным простым многогранником. Строго говоря, имеется две задачи классификации: эквивариантная (с точностью до эквивариантного диффеоморфизма) и топологическая (с точностью до диффеоморфизма). В силу предложения 2.2.3 задача эквивариантной классификации сводится к описанию всех характеристических отображений для данного простого многогранника P^n. Задача топологической классификации, как правило, требует дополнительного анализа.

Пусть M^{2n} – некоторое квазиторическое многообразие над P^n с характеристическим отображением ℓ. Мы также будем предполагать, что первые n гиперграней $F_1, \dots, F_n$ имеют общую вершину.

Лемма 2.5.1. *С точностью до ψ-преобразования, мы можем предполагать, что $\ell(F_i)$ есть i-я координатная подгруппа $T_i \subset T^n$, $i = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Так как одномерные подгруппы $\ell(F_i)$, $i = 1, \dots, n$, порождают T^n, мы можем определить ψ как произвольный автоморфизм тора T^n, который переводит $\ell(F_i)$ в T_i, $i = 1, \dots, n$.

Отсюда также вытекает, что на M^{2n} можно выбрать полиориентацию таким образом, что соответствующая характеристическая $(n \times m)$-матрица Λ имеет вид $(\mathbb{E} \,|\, *)$, где $\mathbb{E}$ – единичная матрица, а $*$ означает некоторую целочисленную $(n \times (m-n))$-матрицу.

В простейшем случае $P^n = \Delta^n$ эквивариантная (и топологическая) классификация квазиторических многообразий сводится к следующему простому результату.

Предложение 2.5.2. *Любое квазиторическое многообразие над симплексом Δ^n эквивариантно диффеоморфно $\mathbb{C}P^n$ (рассматриваемому как торическое многообразие, см. примеры* 2.1.5 *и* 2.2.8).

Доказательство. Характеристическое отображение для $\mathbb{C}P^n$ имеет вид

$$\ell_{\mathbb{C}P^n}(F_i) = T_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \ell_{\mathbb{C}P^n}(F_{n+1}) = S_d,$$

где $S_d^1 := \{(e^{2\pi i\varphi}, \ldots, e^{2\pi i\varphi}) \in T^n\}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, – диагональная подгруппа в T^n. Пусть M^{2n} – квазиторическое многообразие над Δ^n с характеристическим отображением ℓ_M. В силу леммы 2.5.1 мы можем предполагать, что $\ell(F_i) = T_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда из условия (26) легко выводится

$$\ell(F_{n+1}) = \bigl\{(e^{2\pi i\varepsilon_1\varphi}, \ldots, e^{2\pi i\varepsilon_n\varphi}) \in T^n\bigr\}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$. Теперь определим автоморфизм $\psi\colon T^n \to T^n$ как

$$\psi(e^{2\pi i\varphi_1}, \ldots, e^{2\pi i\varphi_n}) = (e^{2\pi i\varepsilon_1\varphi_1}, \ldots, e^{2\pi i\varepsilon_n\varphi_n}).$$

Тогда легко видеть, что $\psi \cdot \ell_M = \ell_{\mathbb{C}P^n}$, и утверждение вытекает из предложения 2.2.3.

Заметим, что эквивариантный диффеоморфизм, существование которого утверждается в предложении 2.5.2, вообще говоря, не сохраняет ориентацию квазиторического многообразия M^{2n}.

Следующим случаем, когда задача топологической и эквивариантной классификации допускает полное решение, является случай $n = 2$ (т.е. случай квазиторических многообразий над многоугольниками).

Пример 2.5.3. *Поверхностью Хирцебруха* называется двумерное комплексное многообразие $H_p = \mathbb{C}P(\zeta_p \oplus \mathbb{C})$, где ζ_p – одномерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P^1$ с первым классом Чженя p и $\mathbb{C}$ – одномерное тривиальное расслоение, а $\mathbb{C}P(\,\cdot\,)$ обозначает проективизацию комплексного векторного расслоения. Таким образом, имеется расслоение $H_p \to \mathbb{C}P^1$ со слоем $\mathbb{C}P^1$. Топологически H_p представляет собой $S^2 \times S^2$ при четных p и $\mathbb{C}P^2 \mathbin{\#} \overline{\mathbb{C}P}^2$ при нечетных p, где $\overline{\mathbb{C}P}^2$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращенной ориентацией. Как показано в [40; с. 8], поверхности Хирцебруха являются неособыми проективными торическими многообразиями. Пространство орбит для H_p, рассматриваемого как квазиторическое многообразие, представляет собой комбинаторный квадрат; для нахождения соответствующих характеристических отображений можно воспользоваться примером 2.2.8 (см. также [33; пример 1.19]).

Теорема 2.5.4 [64; с. 553]. *Любое квазиторическое многообразие размерности 4 эквивариантно диффеоморфно эквивариантной связной сумме нескольких экземпляров $\mathbb{C}P^2$ и поверхностей Хирцебруха H_p.*

Следствие 2.5.5. *Любое квазиторическое многообразие размерности 4 диффеоморфно связной сумме нескольких экземпляров $\mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P}^2$ и $S^2 \times S^2$.*

Задача классификации квазиторических многообразий над заданным простым многогранником может рассматриваться как обобщение соответствующей задачи для неособых торических многообразий. В [63] каждому торическому многообразию над простым 3-многогранником P^3 ставится в соответствие два целых *веса* на каждом ребре двойственного симплициального комплекса K_P. При помощи специальных “условий монодромии” на веса в [63] построена полная классификация торических многообразий над простыми 3-многогранниками с числом гиперграней не более 8. В [53] аналогичная конструкция использована для получения классификации торических многообразий над P^n с числом гиперграней $m = n + 2$ (заметим, что любой такой простой многогранник является произведением двух симплексов).

В работе [36] конструкция весов из [63] обобщена на случай квазиторических многообразий. Это позволило получить критерий [36; теорема 3] существования квазиторического многообразия с данным набором весов и знаков вершин $\sigma(v)$ (см. определение 2.4.3; заметим, что наши знаки вершин соответствуют двухцветной раскраске, используемой в [36]). В качестве приложения в [36] получена полная классификация характеристических отображений для куба I^3 и ряд результатов относительно классификации квазиторических многообразий над произведениями произвольного числа симплексов.

Глава 3. Момент-угол комплексы

§ 3.1. Момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$, определяемые простыми многогранниками. Для любого простого многогранника P^n с m гипергранями Дэвис и Янушкевич ввели в [33] пространство $\mathcal{Z}_P$ с действием тора T^m с пространством орбит P^n. Это пространство является универсальным для всех квазиторических многообразий над P^n в том смысле, что для любого квазиторического многообразия $\pi\colon M^{2n} \to P^n$ существует главное T^{m-n}-расслоение $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$, композиция которого с проекцией π дает проекцию на пространство орбит для $\mathcal{Z}_P$. Пространство $\mathcal{Z}_P$ и его обобщения оказались очень важным и эффективным инструментом для изучения различных комбинаторных объектов, таких как кольца Стенли–Райснера, конфигурации подпространств, кубические комплексы и т. д., методами алгебраической топологии. В этом параграфе мы воспроизводим оригинальное определение $\mathcal{Z}_P$ и модифицируем его для последующих обобщений.

Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ – множество гиперграней многогранника P^n. Для каждой гиперграни $F_i \in \mathcal{F}$ обозначим через T_{F_i} одномерную координатную подгруппу тора $T^{\mathcal{F}} \cong T^m$, соответствующую F_i. Поставим теперь в соответствие каждой грани G координатную торическую подгруппу

$$T_G = \bigoplus_{F_i \supset G} T_{F_i} \subset T^{\mathcal{F}}.$$

Заметим, что $\dim T_G = \operatorname{codim} G$. Напомним, что для каждой точки $q \in P^n$ мы обозначали через $G(q)$ единственную грань, содержащую точку q в своей внутренности.

Определение 3.1.1 [33; § 4]. Для любого простого многогранника P^n введем фактор-пространство

$$\mathcal{Z}_P = (T^{\mathcal{F}} \times P^n)/{\sim},$$

где $(t_1, q) \sim (t_2, q)$ тогда и только тогда, когда $t_1 t_2^{-1} \in T_{G(q)}$.

Свободное действие тора T^m на $T^{\mathcal{F}} \times P^n$ определяет действие на $\mathcal{Z}_P$ с пространством орбит P^n. Пусть $\rho\colon \mathcal{Z}_P \to P^n$ – проекция на пространство орбит. Действие T^m на $\mathcal{Z}_P$ является свободным над внутренностью многогранника, в то время как каждая вершина $v \in P^n$ представляет орбиту $\rho^{-1}(v)$ с максимальной стационарной подгруппой размерности n.

Лемма 3.1.2. *Пространство $\mathcal{Z}_P$ является гладким многообразием размерности $m+n$.*

В настоящей работе мы предоставляем несколько различных способов доказательства этой леммы, каждый из которых возникает из эквивалентного определения $\mathcal{Z}_P$. Для того чтобы привести первое доказательство, нам понадобится следующее простой топологический факт.

Предложение 3.1.3. *Тор T^k допускает гладкое вложение в $\mathbb{R}^{k+1}$.*

Доказательство. Мы построим вложение при помощи гладкой функции $g_{k+1}(x_1,\dots,x_{k+1})$ такой, что уравнение $g_{k+1}=0$ определяет гиперповерхность, диффеоморфную T^k. При $k=1$ возьмем $g_2(x_1,x_2)=x_1^2+(x_2-2)^2-1$; далее продолжим по индукции по k. Пусть мы имеем функцию $g_i(x_1,\dots,x_i)$ такую, что $\{g_i=0\}$ определяет гладкое вложение $T^{i-1}\hookrightarrow\mathbb{R}^i$, причем $x_i>0$ для любого набора $(x_1,\dots,x_i)$, удовлетворяющего уравнению $g_i=0$. Тогда положим

$$g_{i+1}(x_1,\dots,x_i,x_{i+1}):=g_i\bigl(x_1,\dots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}\,\bigr).$$

Нетрудно проверить, что гиперповерхность $\{g_{i+1}=0\}\subset\mathbb{R}^{i+1}$ диффеоморфна T^i.

Доказательство леммы 3.1.2. Конструкция 2.1.6 определяет атлас $\{U_v\}$ для P^n как многообразия с углами. Множество U_v содержит вершину v и диффеоморфно $\mathbb{R}^n_+$. Тогда $\rho^{-1}(U_v)\cong T^{m-n}\times\mathbb{R}^{2n}$. Мы утверждаем, что $T^{m-n}\times\mathbb{R}^{2n}$ может быть реализовано как открытое подмножество в $\mathbb{R}^{m+n}$, таким образом задавая карту для $\mathcal{Z}_P$. Чтобы увидеть это, вложим T^{m-n} в $\mathbb{R}^{m-n+1}$ как замкнутую гиперповерхность H (предложение 3.1.3). Так как нормальное расслоение тривиально, малая окрестность гиперповерхности $H\subset\mathbb{R}^{m-n+1}$ гомеоморфна $T^{m-n}\times\mathbb{R}$. Беря декартово произведение с $\mathbb{R}^{2n-1}$, мы получаем открытое подмножество в $\mathbb{R}^{m+n}$, гомеоморфное $T^{m-n}\times\mathbb{R}^{2n}$.

Следующее утверждение легко вытекает из определения $\mathcal{Z}_P$.

Предложение 3.1.4. *Если $P=P_1\times P_2$ для некоторых простых многогранников P_1, P_2, то $\mathcal{Z}_P=\mathcal{Z}_{P_1}\times\mathcal{Z}_{P_2}$. Если $G\subset P$ – грань, то $\mathcal{Z}_G$ является подмногообразием в $\mathcal{Z}_P$.*

Предположим теперь, что нам дано характеристическое отображение ℓ на P^n и $M^{2n}(\ell)$ – определяемое им квазиторическое многообразие (конструкция 2.2.2). Выбирая полиориентацию произвольным образом, мы получаем направленное характеристическое отображение $\lambda\colon T^{\mathcal{F}}\to T^n$. Обозначим его ядро через $H(\ell)$ (оно зависит лишь от ℓ); тогда $H(\ell)$ есть $(m-n)$-мерная торическая подгруппа в $T^{\mathcal{F}}$.

Предложение 3.1.5. *Подгруппа $H(\ell)$ действует на $\mathcal{Z}_P$ свободно, таким образом определяя главное T^{m-n}-расслоение $\mathcal{Z}_P\to M^{2n}(\ell)$.*

Доказательство. Как вытекает из (26), подгруппа $H(\ell)$ пересекает каждую стационарную подгруппу лишь по единице. Это означает, что действие $H(\ell)$ на $\mathcal{Z}_P$ свободно. По определению $\mathcal{Z}_P$ и $M^{2n}(\ell)$ проекция $\lambda\times\mathrm{id}\colon T^{\mathcal{F}}\times P^n\to T^n\times P^n$ определяет проекцию

$$(T^{\mathcal{F}}\times P^n)/{\sim}\longrightarrow(T^n\times P^n)/{\sim},$$

которая описывает $\mathcal{Z}_P$ как главное T^{m-n}-расслоение над $M^{2n}(\ell)$.

Для упрощения обозначений мы будем писать T^m, $\mathbb{C}^m$ и т. д. вместо $T^{\mathscr{F}}$, $\mathbb{C}^{\mathscr{F}}$ и т. д. Определим единичный полидиск $(D^2)^m$ в комплексном пространстве как

$$(D^2)^m = \bigl\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i| \leqslant 1,\ i = 1, \dots, m\bigr\}.$$

Тогда $(D^2)^m$ инвариантен относительно стандартного действия T^m на $\mathbb{C}^m$, а пространство орбит есть стандартный куб $I^m \subset \mathbb{R}^m_+$.

Лемма 3.1.6. *Кубическое вложение $i_P\colon P^n \to I^m$ из конструкции 1.5.5 накрывается эквивариантным вложением $i_e\colon \mathscr{Z}_P \to (D^2)^m$.*

Доказательство. Напомним, что кубическое разбиение многогранника P^n состоит из кубов C^n_v, соответствующих вершинам $v \in P^n$. Заметим, что C^n_v содержится в открытом множестве $U_v \subset P^n$ (см. конструкцию 2.1.6). Вложение $C^n_v \subset U_v$ накрывается эквивариантным вложением $B_v \subset \mathbb{C}^m$, где $B_v = \rho^{-1}(C^n_v)$ – замкнутое подмножество, гомеоморфное $(D^2)^n \times T^{m-n}$. Так как $\mathscr{Z}_P = \bigcup_{v \in P^n} B_v$ и B_v инвариантно относительно T^m-действия, получаемое вложение $\mathscr{Z}_P \to (D^2)^m$ эквивариантно.

Из доказательства вытекает, что многообразие $\mathscr{Z}_P$ представляется в виде объединения $f_{n-1}(P)$ замкнутых T^m-инвариантных карт B_v. В §3.3 мы приводим два различных способа построения клеточного разбиения каждого из B_v, таким образом вводя на $\mathscr{Z}_P$ структуру клеточного комплекса. Пока мы лишь отметим, что если $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, то

$$i_e(B_v) = (D^2)^n_{i_1,\dots,i_n} \times T^{m-n}_{[m]\setminus\{i_1,\dots,i_n\}} \subset (D^2)^m,$$

или, точнее,

$$i_e(B_v) = \bigl\{(z_1, \dots, z_m) \in (D^2)^m : |z_i| = 1 \text{ при } i \notin \{i_1, \dots, i_n\}\bigr\}.$$

Вспоминая, что вершины P^n соответствуют максимальным симплексам многогранной сферы K_P (границы полярного многогранника P^*), мы можем написать

$$i_e(\mathscr{Z}_P) = \bigcup_{I \in K_P} (D^2)_I \times T_{[m]\setminus I} \subset (D^2)^m. \tag{37}$$

Это может рассматриваться как альтернативное определение $\mathscr{Z}_P$. Вводя полярные координаты на $(D^2)^m$, мы видим, что $i_e(B_v)$ параметризуется n радиальными (или моментными) и m угловыми координатами. Ввиду этого мы называем $\mathscr{Z}_P$ *момент-угол многообразием*, определяемым многогранником P^n.

Пример 3.1.7. Пусть $P^n = \Delta^n$ (n-симплекс). Тогда $\mathscr{Z}_P$ гомеоморфно $(2n+1)$-сфере S^{2n+1}. Кубический комплекс $\mathscr{C}(\Delta^n)$ (см. конструкцию 1.5.5) состоит из $(n+1)$ кубов C^n_v. Каждое подмножество $B_v = \rho^{-1}(C^n_v)$ гомеоморфно $(D^2)^n \times S^1$. В частности, при $n = 1$ мы получаем известное представление 3-сферы S^3 в виде объединения двух полноторий $D^2 \times S^1$.

Другой способ построения эквивариантного вложения $\mathscr{Z}_P$ в $\mathbb{C}^m$ основан на использовании конструкции 1.1.4.

Конструкция 3.1.8. Формула (6) определяет (аффинное) вложение $A_P\colon P^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m_+$. Это вложение накрывается эквивариантным вложением $\mathscr{Z}_P \hookrightarrow \mathbb{C}^m$. Выбор матрицы W в конструкции 1.1.4 задает базис в $(m-n)$-мерном подпространстве, ортогональном n-мерной плоскости, содержащей $A_P(P^n)$ (см. (6)). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.1.9 (см. также [26; §3]). *Вложение $\mathscr{Z}_P \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ имеет тривиальное нормальное расслоение.*

§ **3.2. Общие момент-угол комплексы $\mathscr{Z}_K$.** В этом параграфе мы обобщаем конструкцию пространства $\mathscr{Z}_P$ на случай произвольного симплициального комплекса K. Получаемое пространство $\mathscr{Z}_K$ в общем случае уже не является многообразием, однако это имеет место в случае, когда K является симплициальной сферой.

Обозначим через ρ каноническую проекцию $(D^2)^m \to I^m$, а также ее ограничение на произвольное замкнутое T^m-инвариантное подмножество полидиска $(D^2)^m$. Для каждой грани $C_{I\subset J}$ куба I^m (см. (19)) определим

$$
\begin{aligned}
B_{I\subset J} &:= \rho^{-1}(C_{I\subset J}) \\
&= \bigl\{(z_1,\dots,z_m)\in (D^2)^m : z_i = 0 \text{ при } i\in I,\ |z_i| = 1 \text{ при } i\notin J\bigr\}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Если $\#I = i$, $\#J = j$, то $B_{I\subset J} \cong (D^2)^{j-i}\times T^{m-j}$, где сомножители-диски $D^2 \subset (D^2)^{j-i}$ параметризуются множеством $J\setminus I$, а сомножители-окружности $S^1\subset T^{m-j}$ параметризуются множеством $[m]\setminus J$.

Определение 3.2.1. Пусть $\mathscr{C}$ – кубический подкомплекс в I^m. *Момент-угол комплексом* $\mathrm{ma}(\mathscr{C})$, соответствующим $\mathscr{C}$, называется T^m-инвариантное разбиение подмножества $\rho^{-1}(\mathscr{C})$ на "момент-угол" блоки $B_{I\subset J}$ (38), соответствующие граням $C_{I\subset J}$ кубического комплекса $\mathscr{C}$. Таким образом, $\mathrm{ma}(\mathscr{C})$ определяется из коммутативной диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{ma}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & (D^2)^m \\
\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\
\mathscr{C} & \longrightarrow & I^m
\end{array}
\quad .
$$

Тор T^m действует на $\mathrm{ma}(\mathscr{C})$ с пространством орбит $\mathscr{C}$.

В §1.5 мы связали с каждым симплициальным комплексом K^{n-1} на m вершинах два канонических кубических подкомплекса в I^m, а именно, $\mathrm{cub}(K)$ (21) и $\mathrm{cc}(K)$ (22). Обозначим соответствующие момент-угол комплексы через $\mathscr{W}_K$ и $\mathscr{Z}_K$. Таким образом, мы имеем

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{W}_K & \longrightarrow & (D^2)^m \\
{\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\
\mathrm{cub}(K) & \longrightarrow & I^m
\end{array}
\quad \text{и} \quad
\begin{array}{ccc}
\mathscr{Z}_K & \longrightarrow & (D^2)^m \\
{\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\
\mathrm{cc}(K) & \longrightarrow & I^m
\end{array}
\quad ,
\tag{39}
$$

где горизонтальные стрелки являются вложениями, а вертикальные – проекциями на пространства орбит для T^m-действий. Заметим, что $\dim \mathscr{Z}_K = m+n$ и $\dim \mathscr{W}_K = m+n-1$.

Замечание. Пусть $K = K_P$ для некоторого простого многогранника P. Тогда из (37) вытекает, что $\mathcal{Z}_K$ отождествляется с $\mathcal{Z}_P$ (или, точнее, с $i_e(\mathcal{Z}_P)$).

Лемма 3.2.2. *Если K – симплициальная $(n-1)$-сфера, то $\mathcal{Z}_K$ является $(m+n)$-мерным (замкнутым) многообразием.*

Доказательство. В этом доказательстве мы будем отождествлять полиэдры $|K|$ и $|\operatorname{cone}(K)|$ с их образами $\operatorname{cub}(K) \subset I^m$ и $\operatorname{cc}(K) \subset I^m$ при отображении $|\operatorname{cone}(K)| \to I^m$, см. теорему 1.5.10. Для каждой вершины $\{i\} \in K$ обозначим через F_i объединение $(n-1)$-кубов комплекса $\operatorname{cub}(K)$, содержащих $\{i\}$. По другому, F_i есть полиэдр $|\operatorname{star}_{\operatorname{bs}(K)}\{i\}|$. Эти $F_1, \dots, F_m$ являются аналогами гиперграней простого многогранника. Более того, если $K = K_P$ для некоторого P, то F_i есть образ некоторой гиперграни многогранника P при отображении $i_P\colon \mathcal{C}(P) \to I^m$ (конструкция 1.5.5). Как и в случае простых многогранников, определим "грани" комплекса $\operatorname{cc}(K)$ как непустые пересечения "гиперграней" $F_1, \dots, F_m$. Тогда "вершины" (т.е. непустые пересечения n "гиперграней") представляют собой барицентры $(n-1)$-симплексов полиэдра $|K|$. Для каждого такого барицентра b обозначим через U_b открытое подмножество в $\operatorname{cc}(K)$, получаемое удалением всех "граней", не содержащих b. Тогда U_b отождествляется с $\mathbb{R}^n_+$, а $\rho^{-1}(U_b)$ гомеоморфно $T^{m-n} \times \mathbb{R}^{2n}$. Это определяет на n-мерном шаге $\operatorname{cc}(K) = |\operatorname{cone}(K)|$ структуру многообразия с углами, с атласом $\{U_b\}$. При этом $\mathcal{Z}_K = \rho^{-1}(\operatorname{cc}(K))$ является многообразием с атласом $\{\rho^{-1}(U_b)\}$.

Проблема 3.2.3. *Описать класс симплициальных комплексов K, для которых $\mathcal{Z}_K$ является многообразием.*

Как мы увидим ниже (теорема 4.2.1), структура гомологий $\mathcal{Z}_K$ показывает, что если $\mathcal{Z}_K$ является многообразием, то K есть горенштейнов* комплекс. Таким образом, решение проблемы 3.2.3 находится где-то между "симплициальными сферами" и "горенштейновыми* комплексами".

§ **3.3. Клеточные структуры на момент-угол комплексах.** Здесь мы рассматриваем два клеточных разбиения полидиска $(D^2)^m$, которые задают клеточную структуру на момент-угол комплексах. Первое клеточное разбиение имеет 5^m клеток и определяет клеточное структуру (с 5 типами клеток) на любом момент-угол комплексе $\operatorname{ma}(\mathcal{C}) \subset (D^2)^m$. Второе клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$ имеет лишь 3^m клеток, однако определяет клеточную структуру (с 3 типами клеток) только для момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_K$.

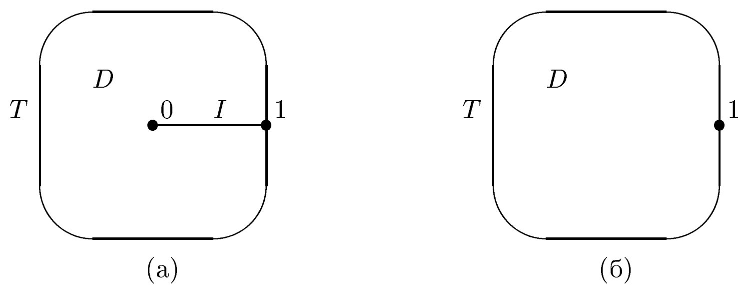


Рис. 7. Клеточные разбиения диска D^2

Рассмотрим клеточное разбиение диска D^2, имеющее одну 2-клетку D, две 1-клетки I, T и две 0-клетки 0, 1, см. рис. 7 (а). Оно определяет клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$, имеющее 5^m клеток. Каждая клетка этого клеточного комплекса представляет собой произведение клеток 5 различных типов: D_i, I_i, 0_i, T_i и 1_i, $i=1,\dots,m$. Мы будем записывать клетки полидиска $(D^2)^m$ "словами" вида $D_I I_J 0_L T_P 1_Q$, где I,J,L,P,Q – попарно непересекающиеся подмножества в $[m]$ такие, что $I\cup J\cup L\cup P\cup Q=[m]$. Иногда мы будем опускать последний сомножитель 1_Q, так что в наших обозначениях $D_I I_J 0_L T_P = D_I I_J 0_L T_P 1_{[m]\setminus I\cup J\cup L\cup P}$. Замыкание клетки $D_I I_J 0_L T_P 1_Q$ гомеоморфно произведению $\#I$ дисков, $\#J$ отрезков и $\#P$ окружностей. Построенное клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$ позволяет отождествлять момент-угол комплексы как некоторые клеточные подкомплексы в $(D^2)^m$.

Лемма 3.3.1. *Для любого кубического подкомплекса $\mathscr{C}$ в I^m соответствующий момент-угол комплекс* $\mathrm{ma}(\mathscr{C})$ *является клеточным подкомплексом в $(D^2)^m$.*

Доказательство. Действительно, $\mathrm{ma}(\mathscr{C})$ представляет собой объединение некоторых "момент-угол" блоков $B_{I\subset J}$ (38), а каждый $B_{I\subset J}$ есть замыкание клетки $D_{J\setminus I} I_{\varnothing} 0_I T_{[m]\setminus J} 1_{\varnothing}$.

Теперь мы сосредоточимся на момент-угол комплексе $\mathscr{Z}_K$, соответствующем кубическому комплексу $\mathrm{cc}(K)\subset I^m$ (см. (39)). По определению $\mathscr{Z}_K$ есть объединение момент-угол блоков $B_{I\subset J}\subset (D^2)^m$ с $J\in K$. Обозначим

$$B_J := B_{\varnothing\subset J} = \bigl\{(z_1,\dots,z_m)\in (D^2)^m : |z_j|=1 \text{ при } j\notin J\bigr\}. \tag{40}$$

Тогда $B_J=\rho^{-1}(C_J)$ (напомним, что $C_J:=C_{\varnothing\subset J}$) и $B_{I\subset J}\subset B_J$ для любого $I\subset J$. Отсюда следует, что

$$\mathscr{Z}_K = \bigcup_{J\in K} B_J \tag{41}$$

(сравните это с замечанием после (22)).

Замечание. Если $K=K_P$ для некоторого простого многогранника P и $\#J=n$, то B_J есть в точности $i_e(B_v)$ для $v=\bigcap_{j\in J}F_j$. Таким образом, (41) в этом случае сводится к (37).

Заметим, что $B_J\cap B_{J'}=B_{J\cap J'}$. Это позволяет упростить клеточное разбиение из леммы 3.3.1 в случае $\mathrm{ma}(\mathscr{C})=\mathscr{Z}_K$. Для этого мы заменим объединение клеток 0, I, D (см. рис. 7 (а)) на одну 2-мерную клетку (которую мы также будем обозначать D). Получаемое в результате клеточное разбиение диска D^2 с 3 клетками показано на рис. 7 (б). Оно определяет клеточное разбиение полидиска $(D^2)^m$ с 3^m клетками, каждая из которых представляет собой произведение клеток 3 различных типов: D_i, T_i и 1_i, $i=1,\dots,m$. Мы будем записывать эти клетки полидиска $(D^2)^m$ словами $D_I T_P 1_Q$, где I,P,Q – попарно различные подмножества в $[m]$ такие, что $I\cup P\cup Q=[m]$. Обозначим $D_I T_P := D_I T_P 1_{[m]\setminus I\cup P}$. Замыкание клетки $D_I T_P$ есть произведение $\#I$ дисков и $\#P$ окружностей.

Лемма 3.3.2. *Момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ является клеточным подкомплексом в $(D^2)^m$ относительно клеточного разбиения с 3^m клетками (рис. 7 (б)). Каждая клетка из $\mathcal{Z}_K$ имеет вид $D_I T_P$, $I \in K$.*

Доказательство. Так как $B_J = B_{\varnothing \subset J}$ – замыкание клетки $D_J T_{[m]\setminus J} 1_\varnothing$, утверждение вытекает из (41).

Замечание. Для произвольного $\mathscr{C}$ момент-угол комплекс $\mathrm{ma}(\mathscr{C})$ *не является* клеточным подкомплексом в 3^m-клеточном разбиении полидиска $(D^2)^m$.

По определению (конструкция 1.5.9) кубический комплекс $\mathrm{cc}(K)$ всегда содержит вершину $(1,\dots,1) \in I^m$. Таким образом, тор $T^m = \rho^{-1}(1,\dots,1)$ содержится в $\mathcal{Z}_K$.

Лемма 3.3.3. *Вложение $T^m = \rho^{-1}(1,\dots,1) \hookrightarrow \mathcal{Z}_K$ является клеточным отображением, гомотопным отображению в точку, т.е. тор $T^m = \rho^{-1}(1,\dots,1)$ является стягиваемым клеточным подкомплексом в $\mathcal{Z}_K$.*

Доказательство. Для доказательства того факта, что $T^m = \rho^{-1}(1,\dots,1)$ является клеточным подкомплексом в $\mathcal{Z}_K$, мы заметим, что этот тор является замыканием m-клетки $D_\varnothing T_{[m]} \subset \mathcal{Z}_K$. Остается доказать, что T^m стягиваем в $\mathcal{Z}_K$. Для этого мы покажем, что вложение $T^m \subset (D^2)^m$ гомотопно отображению в точку $(1,\dots,1) \in T^m \subset (D^2)^m$. На первом шаге мы заметим, что $\mathcal{Z}_K$ содержит клетку $D_1 T_{2,\dots,m}$, замыкание которой содержит T^m и гомеоморфно $D^2 \times T^{m-1}$. Таким образом, наш тор T^m может быть стянут на $1 \times T^{m-1}$ внутри $\mathcal{Z}_K$. На втором шаге мы замечаем, что $\mathcal{Z}_K$ содержит клетку $D_2 T_{3,\dots,m}$, замыкание которой содержит $1 \times T^{m-1}$ и гомеоморфно $D^2 \times T^{m-2}$. Таким образом, $1 \times T^{m-1}$ может быть стянуто на $1 \times 1 \times T^{m-2}$ внутри $\mathcal{Z}_K$, и т. д. На k-м шаге мы замечаем, что $\mathcal{Z}_K$ содержит клетку $D_k T_{k+1,\dots,m}$, замыкание которой содержит $1 \times \dots \times 1 \times T^{m-k+1}$ и гомеоморфно $D^2 \times T^{m-k}$. Таким образом, $1 \times \dots \times 1 \times T^{m-k+1}$ может быть стянуто на $1 \times \dots \times 1 \times T^{m-k}$ внутри $\mathcal{Z}_K$. В конце мы получим точку $1 \times \dots \times 1$, к которой стягивается весь тор T^m.

Следствие 3.3.4. *Для любого симплициального комплекса K момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ односвязен.*

Доказательство. Действительно, 1-остов нашего клеточного разбиения $\mathcal{Z}_K$ содержится в торе $T^m = \rho^{-1}(1,\dots,1)$.

§ 3.4. Конструкция Бореля и пространство Стенли–Райснера. Пусть ET^m – стягиваемое пространство универсального главного T^m-расслоения над классифицирующим пространством BT^m. Известно, что в качестве BT^m можно взять произведение m копий бесконечномерного проективного пространства $\mathbb{C}P^\infty$. Клеточное разбиение пространства $\mathbb{C}P^\infty$ с одной клеткой в каждой четной размерности определяет *каноническое* клеточное разбиение для BT^m. Когомологии BT^m (с коэффициентами в $\mathbf{k}$) представляют собой кольцо многочленов $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$, $\deg v_i = 2$.

Определение 3.4.1. Пусть X – пространство с действием тора T^m. *Конструкция Бореля* (в другой терминологии *гомотопическое пространство орбит* или *ассоциированное расслоение*) для X есть фактор-пространство

$$ET^m \times_{T^m} X := ET^m \times X/\sim,$$

где $(e,x) \sim (eg, g^{-1}x)$ для любых $e \in ET^m$, $x \in X$, $g \in T^m$.

Проекция $(e,x)\to e$ определяет $ET^m\times_{T^m}X$ как тотальное пространство расслоения $ET^m\times_{T^m}X\to BT^m$ со слоем X и структурной группой T^m. В то же время, имеется главное T^m-расслоение $ET^m\times X\to ET^m\times_{T^m}X$.

Далее мы будем обозначать конструкцию Бореля $ET^m\times_{T^m}X$, соответствующую T^m-пространству X, через B_TX. В частности, для любого симплициального комплекса K на m вершинах определены конструкция Бореля $B_T\mathscr{Z}_K$ и расслоение $p\colon B_T\mathscr{Z}_K\to BT^m$ со слоем $\mathscr{Z}_K$.

Для каждого $i=1,\dots,m$ обозначим i-е координатное подпространство в $BT^m=(\mathbb{C}P^\infty)^m$ через BT_i. Для любого подмножества $I\subset[m]$ обозначим через BT_I произведение координатных подпространств BT_i с $i\in I$. Очевидно, BT_I является клеточным подкомплексом в BT^m, и если $\#I=k$, то $BT_I\cong BT^k$.

Определение 3.4.2. Для любого симплициального комплекса K мы называем клеточный подкомплекс
$$\bigcup_{I\in K}BT_I\subset BT^m$$
пространством Стенли–Райснера и обозначаем его $SR(K)$.

Название объясняется следующим утверждением, которое непосредственно вытекает из определения 1.3.1 кольца Стенли–Райснера $\mathbf{k}(K)$.

Предложение 3.4.3. *Алгебра клеточных коцепей $C^*(SR(K))$ и алгебра когомологий $H^*(SR(K))$ изоморфны кольцу граней $\mathbf{k}(K)$. Клеточное вложение $i\colon SR(K)\hookrightarrow BT^m$ индуцирует эпиморфизм $i^*\colon\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]\to\mathbf{k}(K)=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{I}_K$ в когомологиях.*

Теорема 3.4.4. *Расслоение $p\colon B_T\mathscr{Z}_K\to BT^m$ гомотопически эквивалентно клеточному вложению $i\colon SR(K)\hookrightarrow BT^m$. Точнее, имеется деформационная ретракция $B_T\mathscr{Z}_K\to SR(K)$ такая, что диаграмма*
$$\begin{array}{ccc} B_T\mathscr{Z}_K & \xrightarrow{p} & BT^m\\ \downarrow & & \|\\ SR(K) & \xrightarrow{i} & BT^m\end{array}$$
коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим разложение (41). Так как каждое подмножество $B_J\subset\mathscr{Z}_K$ является T^m-инвариантным, конструкция Бореля $B_T\mathscr{Z}_K=ET^m\times_{T^m}\mathscr{Z}_K$ склеивается из конструкций Бореля $ET^m\times_{T^m}B_J$, $J\in K$. Пусть $\#J=j$; тогда $B_J\cong(D^2)^j\times T^{m-j}$ (см. (40)). По определению конструкции Бореля $ET^m\times_{T^m}B_J\cong(ET^j\times_{T^j}(D^2)^j)\times ET^{m-j}$. Пространство $ET^j\times_{T^j}(D^2)^j$ является пространством $(D^2)^j$-расслоения над BT^j. Отсюда следует, что имеется деформационная ретракция $ET^m\times_{T^m}B_J\to BT_J$, которая задает гомотопическую эквивалентность между ограничением проекции $p\colon B_T\mathscr{Z}_K\to BT^m$ на $ET^m\times_{T^m}B_J$ и клеточным вложением $BT_J\hookrightarrow BT^m$. Эти гомотопические эквивалентности, соответствующие различным симплексам $J\in K$, согласованы между собой и определяют требуемую гомотопическую эквивалентность между $p\colon B_T\mathscr{Z}_K\to BT^m$ и $i\colon SR(K)\hookrightarrow BT^m$.

Следствие 3.4.5. *Момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ является гомотопическим слоем клеточного вложения $i\colon SR(K)\hookrightarrow BT^m$.*

Следствие 3.4.6. *Алгебра когомологий $H^*(B_T\mathcal{Z}_K)$ изоморфна кольцу граней $\mathbf{k}(K)$. Проекция $p\colon B_T\mathcal{Z}_K\to BT^m$ индуцирует эпиморфизм $p^*\colon \mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]\to \mathbf{k}(K)=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathcal{I}_K$ в когомологиях.*

Замечание. Предыдущее утверждение в случае многогранников ($\mathcal{Z}_K=\mathcal{Z}_P$) было доказано в [33; теорема 4.8] другими методами.

Из предыдущих конструкций извлекается следующая информация о гомотопических группах комплекса $\mathcal{Z}_K$.

Теорема 3.4.7. (а) *Комплекс $\mathcal{Z}_K$ является 2-связным (т.е. $\pi_1(\mathcal{Z}_K)=\pi_2(\mathcal{Z}_K)=0$), и $\pi_i(\mathcal{Z}_K)=\pi_i(B_T\mathcal{Z}_K)=\pi_i(SR(K))$ при $i\geqslant 3$.*

(б) *Если $K=K_P$ и P является q-смежностным, то $\pi_i(\mathcal{Z}_K)=0$ при $i<2q+1$, а $\pi_{2q+1}(\mathcal{Z}_P)$ представляет собой свободную абелеву группу, образующие которой соответствуют $(q+1)$-элементным недостающим граням комплекса K_P (или, эквивалентно, образующим степени $(2q+2)$ идеала $\mathcal{I}_P$, см. определение* 1.1.20).

Доказательство. Заметим, что $BT^m=K(\mathbb{Z}^m,2)$ и 3-остов пространства $SR(K)$ совпадает с 3-остовом BT^m. Если P является q-смежностным, то, как следует из определения 3.4.2, $(2q+1)$-остов пространства $SR(K_P)$ совпадает с $(2q+1)$-остовом BT^m. Теперь оба утверждения вытекают из точной гомотопической последовательности отображения $i\colon SR(K)\to BT^m$ с гомотопическим слоем $\mathcal{Z}_K$ (следствие 3.4.5).

Замечание. Скажем, что симплициальный комплекс K на множестве $[m]$ является *q-смежностным*, если любое q-элементное подмножество в $[m]$ является его симплексом (это определение является очевидным обобщением понятия q-смежностного симплициального многогранника на произвольные симплициальные комплексы). Тогда вторая часть теоремы 3.4.7 имеет место для произвольного q-смежностного симплициального комплекса.

Предположим теперь, что $K=K_P$ для некоторого простого n-многогранника P, и пусть M^{2n} – квазиторическое многообразие над P с характеристическим отображением ℓ. Тогда мы имеем свободно действующую на $\mathcal{Z}_P$ подгруппу $H(\ell)\subset T^m$ и главное T^{m-n}-расслоение $\mathcal{Z}_P\to M^{2n}$ (предложение 3.1.5).

Предложение 3.4.8. *Конструкция Бореля $ET^n\times_{T^n}M^{2n}$ гомотопически эквивалентна $B_T\mathcal{Z}_P$.*

Доказательство. Так как $H(\ell)$ свободно действует на $\mathcal{Z}_P$, мы имеем

$$\begin{aligned} B_T\mathcal{Z}_P&=ET^m\times_{T^m}\mathcal{Z}_P\\ &=EH(\ell)\times\bigl(E\bigl(T^m/H(\ell)\bigr)\times_{T^m/H(\ell)}\mathcal{Z}_P/H(\ell)\bigr)\simeq ET^n\times_{T^n}M^{2n}. \end{aligned}$$

Теорема 3.4.9 [33; теорема 4.12]. *Спектральная последовательность Лере–Серра расслоения*

$$ET^n\times_{T^n}M^{2n}\to BT^n \tag{42}$$

со слоем M^{2n} вырождается в члене E_2, т.е. $E_2^{p,q}=E_\infty^{p,q}$.

Доказательство. Дифференциалы спектральной последовательности тривиальны по соображениям размерности, так как и BT^n и M^{2n} имеют клетки лишь в четных размерностях (см. предложение 2.2.5).

Следствие 3.4.10. *Проекция* (42) *индуцирует мономорфизм* $\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]\to\mathbf{k}(K)$ *в когомологиях. Вложение слоя* $M^{2n}\hookrightarrow ET^n\times_{T^n}M^{2n}$ *индуцирует эпиморфизм* $\mathbf{k}(K)\to H^*(M^{2n})$.

Теперь мы можем доказать утверждения из § 2.2.

Доказательство леммы 2.2.6 и теоремы 2.2.7. Мономорфизм $H^*(BT^n)=\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]\to\mathbf{k}(K)=H^*(ET^n\times_{T^n}M^{2n})$ переводит t_i в θ_i, $i=1,\dots,n$. Так как $\mathbf{k}(K)$ является свободным $\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]$-модулем (заметим, что это вытекает из теоремы 3.4.9, так что нам не нужно использовать теорему 1.3.8), $\theta_1,\dots,\theta_n$ есть регулярная последовательность. Отсюда вытекает, что ядро эпиморфизма $\mathbf{k}(K)\to H^*(M^{2n})$ есть в точности $\mathscr{J}_\ell=(\theta_1,\dots,\theta_n)$.

§ **3.5. Обобщения, аналоги и дополнительные комментарии.** Ряд важных конструкций нашего обзора (кубический комплекс $\mathrm{cc}(K)$, момент-угол комплекс $\mathscr{Z}_K$, конструкция Бореля $B_T\mathscr{Z}_K$, пространство Стенли–Райснера $SR(K)$, а также дополнение $U(K)$ конфигурации координатных подпространств из § 5.2) допускают единообразное изложение при помощи следующей конструкции, предложенной Н. Стрикландом.

Конструкция 3.5.1. Пусть X – некоторое топологическое пространство, W – его подпространство и K – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Введем следующее подмножество в произведении m экземпляров X:

$$K_\bullet(X,W)=\bigcup_{I\in K}\Bigl(\prod_{i\in I}X\times\prod_{i\notin I}W\Bigr).$$

Пример 3.5.2. 1. $\mathrm{cc}(K)=K_\bullet(I^1,1)$ (см. (22)).
2. $\mathscr{Z}_K=K_\bullet(D^2,S^1)$ (см. (41)).
3. $SR(K)=K_\bullet(\mathbb{C}P^\infty,*)$ (см. определение 3.4.2).
4. $B_T\mathscr{Z}_K=K_\bullet(ES^1\times_{S^1}D^2,ES^1\times_{S^1}D^2)$ (см. доказательство теоремы 3.4.4).

Отметим, что конструкция 3.5.1 естественно обобщается на случай набора из m пар $(X_1,W_1),\dots,(X_m,W_m)$; при этом можно также использовать расслоенное произведение вместо декартова.

При помощи конструкции 3.5.1 Н. Стрикланд независимо получил часть теоремы 1.5.10, касающуюся комплекса $\mathrm{cc}(K)$, и теорему 5.2.5.

В нашей работе большинство конструкций так или иначе связано с действием тора, представляющего собой произведение окружностей S^1. Эти конструкции допускают естественные $\mathbb{Z}/2$-аналоги. Для этого мы заменим тор T^m на его "вещественный аналог", т.е. группу $(\mathbb{Z}/2)^m$. Тогда стандартный куб $I^m=[0,1]^m$ представляет собой пространство орбит для действия $(\mathbb{Z}/2)^m$ на большем кубе $[-1,1]^m$, который является "вещественным аналогом" полидиска $(D^2)^m\subset\mathbb{C}^m$. Теперь по кубическому подкомплексу $\mathscr{C}\subset I^m$ мы можем построить $(\mathbb{Z}/2)^m$-симметричный кубический комплекс в $[-1,1]^m$ аналогично тому, как это делалось в определении 3.2.1. В частности, для любого симплициального комплекса K на множестве вершин $[m]$ можно определить кубические комплексы $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ и $\mathbb{R}\mathcal{W}_K$, которые являются “вещественными аналогами” момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_K$ и $\mathcal{W}_K$ (39). В обозначениях конструкции 3.5.1 мы имеем

$$\mathbb{R}\mathcal{Z}_K = K_\bullet\bigl([-1,1],\{-1,1\}\bigr).$$

Если K является симплициальной $(n-1)$-сферой, то $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ является n-мерным многообразием (доказательство аналогично доказательству леммы 3.2.2). Таким образом, по каждой симплициальной сфере K^{n-1} с m вершинами мы можем построить $(\mathbb{Z}/2)^m$-симметричное n-многообразие, снабженное $(\mathbb{Z}/2)^m$-инвариантным кубическим разбиением. Этот класс кубических многообразий может быть полезен при построении кубического аналога комбинаторной теории f-векторов симплициальных комплексов (см. также [83]). Наконец, вещественный аналог $\mathbb{R}\mathcal{Z}_P$ многообразия $\mathcal{Z}_P$ (соответствующего случаю многогранной симплициальной сферы K^{n-1}) известен как *универсальное абелево накрытие* многогранника P^n, рассматриваемого как орбифолд (или многообразие с углами), см. [43; §4.5]. В работе [47] многообразия $\mathbb{R}\mathcal{Z}_P$ и $\mathcal{Z}_P$ интерпретируются как конфигурационные пространства для плоских и пространственных *шарнирных механизмов*.

Замена группы T^n на $(\mathbb{Z}/2)^n$ в определении 2.2.1 приводит к вещественным аналогам квазиторических многообразий, которые были введены в [33] под названием *малые накрытия*[4]. Таким образом, каждое малое накрытие простого многогранника P^n представляет собой некоторое многообразие M^n с действием $(\mathbb{Z}/2)^n$ и пространством орбит P^n. Название объясняется тем, что любое разветвленное накрытие многогранника P^n гладким многообразием имеет по крайней мере 2^n листов. Малые накрытия изучались в [33] параллельно с квазиторическими многообразиями, и большинство результатов из [33] для квазиторических многообразий, приведенных в §2.2, имеют аналоги для малых накрытий. С другой стороны, каждое малое накрытие является фактор-пространством универсального накрытия $\mathbb{R}\mathcal{Z}_P$ по некоторому свободному действию группы $(\mathbb{Z}/2)^{m-n}$.

Важный класс малых накрытий над трехмерными простыми многогранниками P^3 был рассмотрен в работе [48]. Можно показать, что простой многогранник P^3 допускает раскраску двумерных граней в три цвета так, что любые две смежные грани имеют различный цвет тогда и только тогда, когда каждая его двумерная грань содержит четное число ребер. Каждая такая раскраска ϱ определяет некоторое квазиторическое многообразие $M^6(\varrho)$ и малое накрытие $M^3(\varrho)$. В [48] показано, что каждое многообразие $M^3(\varrho)$ допускает эквивариантное вложение в $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ со стандартным действием $(\mathbb{Z}/2)^3$ на $\mathbb{R}^3$ и тривиальным действием на $\mathbb{R}$. Там же показано, что такие многообразия $M^3(\varrho)$ получаются из набора трехмерных торов при помощи операций эквивариантной связной суммы и *эквивариантной перестройки Дена*.

Можно построить также кватернионный аналог момент-угол комплексов, заменяя T^n на кватернионный тор $Sp(1)^n\cong(S^3)^n$. Развитие кватернионного аналога торических и квазиторических многообразий, бесспорно, представляет большой интерес. На это указывают, например, важные результаты из [16].

Приведем теперь приложение описанных выше конструкций к случаю общей группы G.

[4] В оригинале *small covers*.

Пример 3.5.3 (классифицирующее пространство группы G). Пусть K – некоторый симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Положим $\mathscr{Z}_K(G) := K_\bullet(\operatorname{cone}(G), G)$ (см. конструкцию 3.5.1), где $\operatorname{cone}(G)$ – конус над G. По построению на $\mathscr{Z}_K(G)$ действует группа G^m с пространством орбит $\operatorname{cone} K$. Диагональное вложение $G \hookrightarrow G^m$ задает свободное действие группы G на $\mathscr{Z}_K(G)$.

Пусть теперь $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_i \subset \cdots$ – последовательность вложенных симплициальных комплексов таких, что K_i является q_i-смежностным, где $q_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Такую последовательность можно получить, например, полагая $K_{i+1} := K_i * K$ (см. конструкцию 1.2.5), где K_0 и K – любые два симплициальных комплекса. На пространстве $\varinjlim \mathscr{Z}_{K_i}(G)$ группа G действует свободно, и соответствующее фактор-пространство дает реализацию классифицирующего пространства BG. Таким образом получается фильтрация в универсальном расслоении $EG \to BG$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{Z}_{K_0}(G) & \hookrightarrow & \mathscr{Z}_{K_1}(G) & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \mathscr{Z}_{K_i}(G) & \hookrightarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
\mathscr{Z}_{K_0}(G)/G & \hookrightarrow & \mathscr{Z}_{K_1}(G)/G & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \mathscr{Z}_{K_i}(G)/G & \hookrightarrow & \cdots
\end{array}.$$

Известная *фильтрации Милнора* в универсальном расслоении группы G соответствует случаю $K_i = \Delta^i$.

Глава 4. Когомологии момент-угол комплексов и комбинаторика симплициальных многообразий

§ **4.1. Спектральная последовательность Эйленберга–Мура.** В работе 1966 г. [39] Эйленбергом и Муром была построена спектральная последовательность, которая приобрела большое значение в алгебраической топологии. Эта спектральная последовательность может рассматриваться как результат обобщения подхода Адамса к вычислению когомологий пространств петель [1]. В 1960–70-х годах спектральная последовательность Эйленберга–Мура позволила получить важные результаты о когомологиях пространств петель и однородных пространств для групп Ли. В нашей работе мы описываем новые приложения этой спектральной последовательности к комбинаторным проблемам. Этот параграф содержит необходимую информацию о спектральной последовательности; здесь мы следуем работе Смита [77].

Вообще говоря, имеется две спектральные последовательности Эйленберга–Мура: алгебраическая и топологическая.

Теорема 4.1.1 (Эйленберг–Мур [77; теорема 1.2]). *Пусть A – дифференциальная градуированная $\mathbf{k}$-алгебра и M, N – дифференциальные градуированные A-модули. Тогда существует спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}$, сходящаяся к $\operatorname{Tor}_A(M,N)$, член E_2 которой имеет вид*

$$E_2^{-i,j} = \operatorname{Tor}_{H[A]}^{-i,j}(H[M], H[N]), \qquad i, j \geqslant 0,$$

где $H[\,\cdot\,]$ обозначает алгебру (модуль) когомологий.

Спектральная последовательность из теоремы 4.1.1 располагается во *втором* квадранте, и дифференциал d_r прибавляет $(r, 1-r)$ к бистепени. Эта спектральная последовательность называется (алгебраической) *спектральной последовательностью*

Эйленберга–Мура. Она определяет убывающую фильтрацию $\{F^{-p}\operatorname{Tor}_A(M,N)\}$ в $\operatorname{Tor}_A(M,N)$, удовлетворяющую

$$E_\infty^{-p,n+p} = F^{-p}\Big(\sum_{-i+j=n}\operatorname{Tor}_A^{-i,j}(M,N)\Big)\Big/F^{-p+1}\Big(\sum_{-i+j=n}\operatorname{Tor}_A^{-i,j}(M,N)\Big).$$

Топологические приложения теоремы 4.1.1 возникают в случае, когда A, M, N являются алгебрами сингулярных (или клеточных) коцепей некоторых топологических пространств. Классическая ситуация описывается коммутативным квадратом

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ B & \longrightarrow & B_0 \end{array}, \tag{43}$$

где $E_0 \to B_0$ – расслоение Серра со слоем F над односвязной базой B_0, а $E \to B$ – расслоение, индуцированное непрерывным отображением $B \to B_0$. Для любого пространства X будем обозначать через $C^*(X)$ алгебру сингулярных коцепей для X или алгебру клеточных коцепей (в случае, если X является клеточным комплексом). Очевидно, $C^*(E_0)$ и $C^*(B)$ являются $C^*(B_0)$-модулями. При этих предположениях имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.1.2 [77; предложение 3.4]. $\operatorname{Tor}_{C^*(B_0)}(C^*(E_0),C^*(B))$ *естественным образом наделяется структурой алгебры, и имеет место канонический изоморфизм алгебр*

$$\operatorname{Tor}_{C^*(B_0)}\big(C^*(E_0),C^*(B)\big) \to H^*(E).$$

Применяя теорему 4.1.1 в случае $A = C^*(B_0)$, $M = C^*(E_0)$, $N = C^*(B)$ и принимая во внимание лемму 4.1.2, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1.3 (Эйленберг–Мур). *Существует спектральная последовательность $\{E_r,d_r\}$ коммутативных алгебр такая, что*

(а) $E_r \Rightarrow H^*(E)$;
(б) $E_2^{-i,j} = \operatorname{Tor}^{-i,j}_{H^*(B_0)}(H^*(E_0),H^*(B))$.

Спектральная последовательность из теоремы 4.1.3 называется (топологической) *спектральной последовательностью Эйленберга–Мура*. В важном частном случае, когда B есть точка (см. (43)), мы получаем

Следствие 4.1.4. *Пусть $E \to B$ – расслоение над односвязной базой B со слоем F. Тогда существует спектральная последовательность $\{E_r,d_r\}$ коммутативных алгебр такая, что*

(а) $E_r \Rightarrow H^*(F)$,
(б) $E_2 = \operatorname{Tor}_{H^*(B)}(H^*(E),\mathbf{k})$.

Мы будем называть спектральную последовательность из следствия 4.1.4 *спектральной последовательностью Эйленберга–Мура расслоения $E \to B$*.

Пример 4.1.5. Пусть M^{2n} – квазиторическое многообразие над P^n. Рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения $ET^n \times_{T^n} M^{2n} \to BT^n$ со слоем M^{2n}. В силу предложения 3.4.8 $H^*(ET^n \times_{T^n} M^{2n}) = H^*(B_T\mathscr{Z}_P) \cong \mathbf{k}(P^n)$. Мономорфизм

$$\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n] = H^*(BT^n) \to H^*(ET^n \times_{T^n} M^{2n}) = \mathbf{k}(P^n)$$

переводит t_i в θ_i, $i = 1,\dots,n$, см. (27). Член E_2 спектральной последовательности Эйленберга–Мура имеет вид

$$E_2^{*,*} = \mathrm{Tor}^{*,*}_{H^*(BT^n)}\bigl(H^*(ET^n \times_{T^n} M^{2n}),\mathbf{k}\bigr) = \mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}\bigl(\mathbf{k}(P^n),\mathbf{k}\bigr).$$

Так как $\mathbf{k}(P^n)$ является свободным $\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]$-модулем, мы имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}^{*,*}_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}\bigl(\mathbf{k}(P^n),\mathbf{k}\bigr) &= \mathrm{Tor}^{0,*}_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}\bigl(\mathbf{k}(P^n),\mathbf{k}\bigr)\\ &= \mathbf{k}(P^n)\otimes_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}\mathbf{k} = \mathbf{k}(P^n)/(\theta_1,\dots,\theta_n).\end{aligned}$$

Следовательно, $E_2^{0,*} = \mathbf{k}(P^n)/\mathscr{J}_\ell$ и $E_2^{-p,*} = 0$ при $p > 0$. Отсюда вытекает, что спектральная последовательность Эйленберга–Мура вырождается в члене E_2 и $H^*(M^{2n}) = \mathbf{k}(P^n)/J_\ell$ в соответствии с теоремой 2.2.7.

§ 4.2. Когомологии момент-угол комплекса $\mathscr{Z}_K$: случай общего K. Здесь мы применяем спектральную последовательность Эйленберга–Мура для вычисления алгебры когомологий момент-угол комплекса $\mathscr{Z}_K$ с коэффициентами в поле $\mathbf{k}$. Тем самым мы описываем $H^*(\mathscr{Z}_K)$ как *биградуированную алгебру*. Соответствующие биградуированные числа Бетти являются важными комбинаторными инвариантами комплекса K.

Теорема 4.2.1. *Имеет место следующий изоморфизм градуированных алгебр*:

$$H^*(\mathscr{Z}_K) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\bigr).$$

В частности,

$$H^p(\mathscr{Z}_K) \cong \sum_{-i+2j=p} \mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\bigr).$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & ET^m \arrow[d] \\ SR(K) \arrow[r, "i"] & BT^m \end{tikzcd}, \qquad (44)$$

где левая вертикальная стрелка обозначает расслоение, индуцированное отображением i. Следствие 3.4.5 показывает, что E гомотопически эквивалентно комплексу $\mathscr{Z}_K$.

В силу предложения 3.4.3 отображение $i\colon SR(K) \hookrightarrow BT^m$ индуцирует эпиморфизм $i^*\colon C^*(BT^m) = \mathbf{k}[v_1,\dots,v_m] \to \mathbf{k}(K) = C^*(SR(K))$, где $C^*(\cdot)$ обозначает алгебру клеточных коцепей. Используя каноническую коцепную эквивалентность $C^*(ET^m) \simeq \mathbf{k}$, получаем изоморфизм

$$\operatorname{Tor}_{C^*(BT^m)}\bigl(C^*(SR(K)), C^*(ET^m)\bigr) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\bigr). \tag{45}$$

Спектральная последовательность Эйленберга–Мура коммутативного квадрата (44) имеет

$$E_2 = \operatorname{Tor}_{H^*(BT^m)}\bigl(H^*(SR(K)), H^*(ET^m)\bigr)$$

и сходится к $\operatorname{Tor}_{C^*(BT^m)}(C^*(SR(K)), C^*(ET^m))$ (теорема 4.1.1). Так как

$$\operatorname{Tor}_{H^*(BT^m)}\bigl(H^*(SR(K)), H^*(ET^m)\bigr) = \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\bigl(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\bigr),$$

изоморфизм (45) показывает, что спектральная последовательность вырождается в члене E_2, т.е. $E_2 = E_\infty$. Из леммы 4.1.2 вытекает, что модуль

$$\operatorname{Tor}_{C^*(BT^m)}(C^*(SR(K)), C^*(ET^m))$$

является алгеброй, изоморфной алгебре $H^*(\mathcal{Z}_K)$, что завершает доказательство.

Теорема 4.2.1 задает в когомологиях комплекса $\mathcal{Z}_K$ структуру *биградуированной* алгебры и показывает, что соответствующие биградуированные числа Бетти $b^{-i,2j}(\mathcal{Z}_K)$ совпадают с числами Бетти кольца $\mathbf{k}(K)$, определенными в (17). Используя резольвенту Кошуля для $\mathbf{k}$ и лемму 1.4.6, мы получаем

Теорема 4.2.2. *Имеет место следующий изоморфизм биградуированных алгебр*:

$$H^{*,*}(\mathcal{Z}_K) \cong H\bigl[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}(K), d\bigr],$$

где биградуированная структура и дифференциал в правой части определяются формулами (16).

Далее мы будем обозначать мономы

$$u_{i_1}\dots u_{i_p}v_{j_1}\dots v_{j_q} \in \bigl[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}(K), d\bigr],$$

не содержащие квадратов, через $u_I v_J$, где $I=\{i_1,\dots,i_p\}$, $J=\{j_1,\dots,j_q\}$. Заметим, что $\operatorname{bideg} u_I v_J = (-p, 2(p+q))$.

Замечание. Так как дифференциал d в (16) не меняет второй градуировки, дифференциальная биградуированная алгебра $[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}(K), d]$ распадается в сумму дифференциальных алгебр, состоящих из элементов с фиксированной второй градуировкой.

Следствие 4.2.3. *Спектральная последовательность Лере–Серра главного T^m-расслоения $ET^m\times\mathcal{Z}_K \to B_T\mathcal{Z}_K$ вырождается в члене E_3.*

Доказательство. Рассматриваемая спектральная последовательность сходится к $H^*(ET^m \times \mathscr{Z}_K) = H^*(\mathscr{Z}_K)$ и имеет

$$E_2 = H^*(B_T\mathscr{Z}_K) \otimes H^*(T^m) = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K).$$

Дифференциал в члене E_2 действует как в (16). Следовательно,

$$E_3 = H[E_2, d] = H\big[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K)\big] = H^*(\mathscr{Z}_K)$$

(последнее тождество вытекает из теоремы 4.2.2).

Конструкция 4.2.4. Пусть $A^{-q}(K) \subset \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K)$ – подпространство, порожденное мономами u_I и $u_I v_J$, где J – симплекс комплекса K, $\#I = q$ и $I \cap J = \varnothing$. Положим

$$A^*(K) = \bigoplus_{q=0}^{m} A^{-q}(K).$$

Так как $du_i = v_i$, мы имеем $d\big(A^{-q}(K)\big) \subset A^{-q+1}(K)$. Следовательно, $A^*(K)$ – коцепной подкомплекс в $[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K), d]$. Более того, $A^*(K)$ наследует биградуированную структуру из $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K)$ с дифференциалом d, прибавляющем $(1, 0)$ к бистепени. Итак, мы имеем аддитивное вложение (т.е. мономорфизм биградуированных модулей) $i_a \colon A^*(K) \hookrightarrow \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K)$. Наконец, $A^*(K)$ очевидным образом является алгеброй, но *не* подалгеброй алгебры $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K)$ (так как, например, $v_1^2 = 0$ в $A^*(K)$, но не в $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K)$). Тем не менее, мы имеем мультипликативную *проекцию* (эпиморфизм биградуированных алгебр) $j_m \colon \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K) \to A^*(K)$. Аддитивное вложение i_a и мультипликативная проекция j_m, очевидно, удовлетворяют $j_m \cdot i_a = \mathrm{id}$.

Лемма 4.2.5. *Коцепные комплексы $[\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K), d]$ и $[A^*(K), d]$ имеют одни и те же когомологии. Таким образом, имеет место следующий изоморфизм биградуированных $\mathbf{k}$-модулей*:

$$H[A^*(K), d] \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]}\big(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\big).$$

Доказательство. Рутинная проверка показывает, что оператор коцепной гомотопии s для резольвенты Кошуля (см. доказательство предложения VII.2.1 в [56]) устанавливает коцепную гомотопическую эквивалентность между отображениями id и $i_a \cdot j_m$ Tor-алгебры на себя. Это означает, что

$$ds + sd = \mathrm{id} - i_a \cdot j_m.$$

Мы лишь проиллюстрируем это тождество на нескольких примерах:

1) $s(u_1v_2) = u_1u_2, \quad ds(u_1v_2) = u_2v_1 - u_1v_2, \quad sd(u_1v_2) = u_1v_2 - u_2v_1,$
следовательно, $(ds + sd)(u_1v_2) = 0 = (\mathrm{id} - i_a \cdot j_m)(u_1v_2)$;
2) $s(u_1v_1) = u_1^2 = 0, \quad ds(u_1v_1) = 0, \quad d(u_1v_1) = v_1^2, \quad sd(u_1v_1) = u_1v_1,$
следовательно, $(ds + sd)(u_1v_1) = u_1v_1 = (\mathrm{id} - i_a \cdot j_m)(u_1v_1)$;
3) $s(v_1^2) = u_1v_1, \quad ds(v_1^2) = v_1^2, \quad d(v_1^2) = 0,$
следовательно, $(ds + sd)(v_1^2) = v_1^2 = (\mathrm{id} - i_a \cdot j_m)(v_1^2)$.

Теперь вспомним наше клеточное разбиение комплекса $\mathscr{Z}_K$ (лемма 3.3.2). Клетками его являются $D_I T_J$, где $J \subset [m]$, $I \in K$ и $I \cap J = \varnothing$. Пусть $C_*(\mathscr{Z}_K)$ и $C^*(\mathscr{Z}_K)$ обозначают соответствующие комплексы клеточных цепей и клеточных коцепей. Оба комплекса $C^*(\mathscr{Z}_K)$ и $A^*(K)$ имеют одни и те же когомологии $H^*(\mathscr{Z}_K)$. Комплекс $C^*(\mathscr{Z}_K)$ имеет базис, состоящий из коцепей $(D_I T_J)^*$. Как алгебра $C^*(\mathscr{Z}_K)$ порождена коцепями T_i^*, D_i^* размерностей 1 и 2 соответственно, двойственными к клеткам T_i и D_i, $i, j = 1, \ldots, m$. В то же время, алгебра $A^*(K)$ порождена элементами u_i, v_i, $i, j = 1, \ldots, m$.

Теорема 4.2.6. *Соответствие $v_I u_J \mapsto (D_I T_J)^*$ устанавливает канонический изоморфизм дифференциальных градуированных алгебр $A^*(K)$ и $C^*(\mathscr{Z}_K)$.*

Доказательство. Непосредственно из определений $A^*(K)$ и $C^*(\mathscr{Z}_K)$ вытекает, что рассматриваемое отображение является изоморфизмом градуированных алгебр. Таким образом, остается проверить, что оно коммутирует с дифференциалом. Пусть d, d_c и ∂_c обозначают дифференциалы в $A^*(K)$, $C^*(\mathscr{Z}_K)$ и $C_*(\mathscr{Z}_K)$ соответственно. Так как $d(v_i) = 0$, $d(u_i) = v_i$, нам необходимо показать, что $d_c(D_i^*) = 0$, $d_c(T_i^*) = D_i^*$. Имеем $\partial_c(D_i) = T_i$, $\partial_c(T_i) = 0$. Любая 2-клетка в $\mathscr{Z}_K$ есть либо D_j, либо T_{jk}, $k \neq j$. Тогда

$$(d_c T_i^*, D_j) = (T_i^*, \partial_c D_j) = (T_i^*, T_j) = \delta_{ij}, \qquad (d_c T_i^*, T_{jk}) = (T_i^*, \partial_c T_{jk}) = 0,$$

где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$ иначе. Следовательно, $d_c(T_i^*) = D_i^*$. Далее, любая 3-клетка в $\mathscr{Z}_K$ есть либо $D_j T_k$, либо $T_{j_1 j_2 j_3}$. Тогда

$$\begin{gathered}(d_c D_i^*, D_j T_k) = (D_i^*, \partial_c(D_j T_k)) = (D_i^*, T_{jk}) = 0,\\ (d_c D_i^*, T_{j_1 j_2 j_3}) = (D_i^*, \partial_c T_{j_1 j_2 j_3}) = 0.\end{gathered}$$

Следовательно, $d_c(D_i^*) = 0$.

Теорема 4.2.6 дает топологическую интерпретацию дифференциальной алгебры $[A^*(K), d]$. Далее мы не будем различать коцепные комплексы $A^*(K)$ и $C^*(\mathscr{Z}_K)$ и отождествим u_i с T_i^*, v_i с D_i^*.

Теперь вспомним, что алгебра $[A^*(K), d]$ является биградуированной. Изоморфизм из теоремы 4.2.6 задает биградуированную структуру в комплексе клеточных цепей $[C_*(\mathscr{Z}_K), \partial_c]$, где

$$\operatorname{bideg}(D_i) = (0,2), \quad \operatorname{bideg}(T_i) = (-1,2), \quad \operatorname{bideg}(1_i) = (0,0). \tag{46}$$

Дифференциал ∂_c прибавляет $(-1,0)$ к бистепени, и клеточные гомологии комплекса $\mathscr{Z}_K$ также приобретают биградуированную структуру.

Далее мы будем предполагать, что основное поле $\mathbf{k}$ имеет нулевую характеристику (например, $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел). Введем биградуированные числа Бетти

$$b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K) = \dim H_{-q,2p}[C_*(\mathscr{Z}_K), \partial_c], \qquad q, p = 0, \ldots, m. \tag{47}$$

Теорема 4.2.6 и лемма 4.2.5 показывают, что

$$b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K) = \dim \operatorname{Tor}^{-q,2p}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\big) = \beta^{-q,2p}\big(\mathbf{k}(K)\big) \tag{48}$$

(см. (17)). Другими словами, $b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K)$ равно размерности $(-q,2p)$-й биградуированной компоненты алгебры когомологий $H[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}(K),d]$. Для обычных чисел Бетти $b_k(\mathscr{Z}_K)$ имеет место

$$b_k(\mathscr{Z}_K)=\sum_{-q+2p=k} b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K),\qquad k=0,\dots,m+n. \tag{49}$$

Ниже мы описываем некоторые основные свойства биградуированных чисел Бетти (47).

Лемма 4.2.7. *Пусть K^{n-1} – $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс с $m=f_0$ вершинами и f_1 ребрами, и $\mathscr{Z}_K$ – соответствующий момент-угол комплекс,* $\dim\mathscr{Z}_K=m+n$. *Тогда*

(а) $b_{0,0}(\mathscr{Z}_K)=b_0(\mathscr{Z}_K)=1$, $b_{0,2p}(\mathscr{Z}_K)=0$ *при* $p>0$;
(б) $b_{-q,2p}=0$ *при* $p>m$ *или* $q>p$;
(в) $b_1(\mathscr{Z}_K)=b_2(\mathscr{Z}_K)=0$;
(г) $b_3(\mathscr{Z}_K)=b_{-1,4}(\mathscr{Z}_K)=\binom{f_0}{2}-f_1$;
(д) $b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K)=0$ *при* $q\geqslant p>0$ *или* $p-q>n$;
(е) $b_{m+n}(\mathscr{Z}_K)=b_{-(m-n),2m}(\mathscr{Z}_K)$.

Доказательство. Мы будем проводить вычисления с коцепным комплексом $A^*(K)\subset\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}(K)$. Модуль $A^*(K)$ имеет базис из мономов u_Jv_I с $I\in K$ и $I\cap J=\varnothing$. Так как $\operatorname{bideg}v_i=(0,2)$, $\operatorname{bideg}u_j=(-1,2)$, биградуированная компонента $A^{-q,2p}(K)$ порождена мономами u_Jv_I с $\#I=p-q$ и $\#J=q$. В частности, $A^{-q,2p}(K)=0$ при $p>m$ или $q>p$, откуда вытекает утверждение (б). Для доказательства (а) мы заметим, что $A^{0,0}(K)$ порождается 1, в то время как любой моном $v_I\in A^{0,2p}(K)$, $p>0$, является кограницей, откуда $H^{0,2p}(\mathscr{Z}_K)=0$, $p>0$.

Далее мы докажем утверждение (д). Каждый моном $u_Jv_I\in A^{-q,2p}(K)$ имеет $I\in K$, а любой симплекс из K имеет размерность не более $(n-1)$. Отсюда следует, что $A^{-q,2p}(K)=0$ при $p-q>n$. В силу (б) $b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K)=0$ при $q>p$, поэтому остается доказать, что $b_{-q,2q}(\mathscr{Z}_K)=0$ при $q>0$. Модуль $A^{-q,2q}(K)$ порожден мономами u_J, $\#J=q$. Так как $d(u_i)=v_i$, легко видеть, что в $A^{-q,2q}(K)$ нет ненулевых коциклов. Поэтому $H^{-q,2q}(\mathscr{Z}_K)=0$.

Утверждение (в) вытекает из (д) и (49).

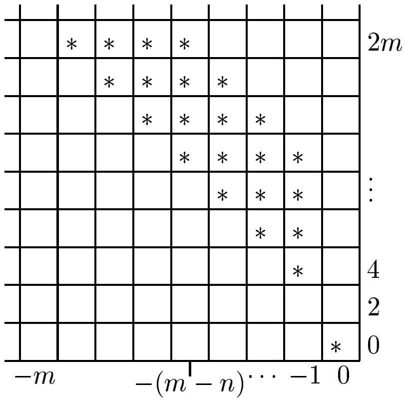
Из (д) также следует, что $H^3(\mathscr{Z}_K)=H^{-1,4}(\mathscr{Z}_K)$. Базис в $A^{-1,4}(K)$ состоит из мономов u_jv_i, $i\ne j$. Имеем $d(u_jv_i)=v_iv_j$ и $d(u_iu_j)=u_jv_i-u_iv_j$. Отсюда следует, что u_jv_i является коциклом тогда и только тогда, когда $\{i,j\}$ не является 1-симплексом в K; в этом случае два коцикла u_jv_i и u_iv_j представляют один класс когомологий. Отсюда вытекает утверждение (г).

Оставшееся утверждение (е) следует из того факта, что моном $u_Iv_J\in A^*(K)$ максимальной полной степени $m+n$ обязан иметь $\#I+\#J=m$, $\#J=n$, $\#I=m-n$.

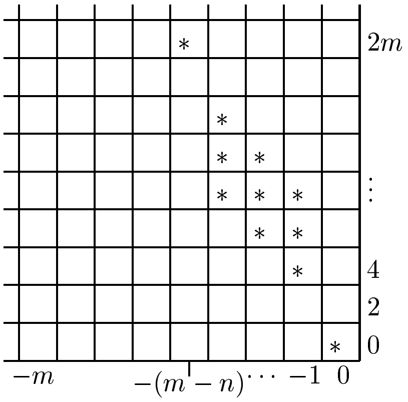
Лемма 4.2.7 показывает, что ненулевые биградуированные числа Бетти $b_{r,2p}(\mathscr{Z}_K)$, $r\ne0$, могут появляться только в “полосе”, ограниченной прямыми $p=m$, $r=-1$, $p+r=1$ и $p+r=n$ во втором квадранте (см. рис. 8 (а)).

Биоднородная компонента $C_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K)$ имеет базис из клеточных цепей D_IT_J с $I\in K$, $\#I=p-q$, $\#J=q$. Отсюда получаем

$$\dim C_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K)=f_{p-q-1}\binom{m-p+q}{q} \tag{50}$$



(а) произвольный K^{n-1}



(б) $|K| = S^{n-1}$

Рис. 8. Возможные месторасположения ненулевых биградуированных чисел Бетти $b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K)$ (обозначены $*$)

(мы полагаем $\binom{i}{j} = 0$ при $i < j$ или $j < 0$), где $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ – f-вектор комплекса K^{n-1} и $f_{-1} = 1$. Дифференциал ∂_c не изменяет второй градуировки, т.е.

$$\partial_c \colon C_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K) \to C_{-q-1,2p}(\mathscr{Z}_K).$$

Следовательно, цепной комплекс $C_{*,*}(\mathscr{Z}_K)$ представляется в виде

$$[C_{*,*}(\mathscr{Z}_K), \partial_c] = \bigoplus_{p=0}^{m} [C_{*,2p}(\mathscr{Z}_K), \partial_c].$$

Замечание. Аналогичное разложение имеет место и для комплекса клеточных коцепей $[C^{*,*}(\mathscr{Z}_K), d_c] \cong [A^{*,*}(K), d]$.

Рассмотрим эйлерову характеристику комплекса $[C_{*,2p}(\mathscr{Z}_K), \partial_c]$:

$$\chi_p(\mathscr{Z}_K) := \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \dim C_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K). \tag{51}$$

Введем порождающий многочлен $\chi(\mathscr{Z}_K; t)$ как

$$\chi(\mathscr{Z}_K; t) = \sum_{p=0}^{m} \chi_p(\mathscr{Z}_K) t^{2p}.$$

Следующая теорема вычисляет этот многочлен в терминах h-вектора комплекса K.

Теорема 4.2.8. *Для любого $(n-1)$-мерного симплициального комплекса K с m вершинами имеет место соотношение*

$$\chi(\mathscr{Z}_K; t) = (1 - t^2)^{m-n}(h_0 + h_1 t^2 + \cdots + h_n t^{2n}), \tag{52}$$

где $(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ есть h-вектор комплекса K.

Доказательство. Из (51) и (50) вытекает

$$\chi_p(\mathcal{Z}_K)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{p-j}f_{j-1}\binom{m-j}{p-j}. \tag{53}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{Z}_K;t)&=\sum_{p=0}^{m}\chi_p(K)t^{2p}=\sum_{p=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}t^{2j}t^{2(p-j)}(-1)^{p-j}f_{j-1}\binom{m-j}{p-j}\\&=\sum_{j=0}^{m}f_{j-1}t^{2j}(1-t^2)^{m-j}=(1-t^2)^m\sum_{j=0}^{n}f_{j-1}(t^{-2}-1)^{-j}.\end{aligned} \tag{54}$$

Обозначим $h(t)=h_0+h_1t+\cdots+h_nt^n$. Тогда из (7) получаем

$$t^nh(t^{-1})=(t-1)^n\sum_{i=0}^{n}f_{i-1}(t-1)^{-i}.$$

Подставляя в последнем тождестве t^{-2} вместо t и учитывая (54), мы окончательно получаем

$$\frac{\chi(\mathcal{Z}_K;t)}{(1-t^2)^m}=\frac{t^{-2n}h(t^2)}{(t^{-2}-1)^n}=\frac{h(t^2)}{(1-t^2)^n}\,,$$

что эквивалентно (52).

Теорема 4.2.8 позволяет выражать числа граней симплициального комплекса в терминах биградуированных чисел Бетти соответствующего момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$.

Следствие 4.2.9. *Для любого симплициального комплекса K эйлерова характеристика соответствующего момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ равна нулю.*

Доказательство. Мы имеем

$$\chi(\mathcal{Z}_K)=\sum_{p,q=0}^{m}(-1)^{-q+2p}b_{-q,2p}(\mathcal{Z}_K)=\sum_{p=0}^{m}\chi_p(\mathcal{Z}_K)=\chi(\mathcal{Z}_K;1).$$

Теперь утверждение вытекает из (52).

Замечание. Другое доказательство предыдущего следствия можно получить, заметив, что диагональная подгруппа $S^1_d\subset T^m$ всегда действует свободно на $\mathcal{Z}_K$ (см. также §4.4). Поэтому существует главное S^1-расслоение $\mathcal{Z}_K\to\mathcal{Z}_K/S^1_d$, откуда вытекает $\chi(\mathcal{Z}_K)=0$.

Тор $T^m=\rho^{-1}(1,\dots,1)$ является клеточным подкомплексом в $\mathcal{Z}_K$ (см. лемму 3.3.3). Клеточный коцепной комплекс $C^*(T^m)\subset C^*(\mathcal{Z}_K)\cong A^*(K)$ имеет базис из коцепей $(T_I)^*$ и отображается во внешнюю алгебру $\Lambda[u_1,\dots,u_m]\subset A^*(K)$ при изоморфизме из теоремы 4.2.6. Отсюда вытекает, что имеет место изоморфизм модулей

$$C^*(\mathcal{Z}_K,T^m)\cong A^*(K)/\Lambda[u_1,\dots,u_m]. \tag{55}$$

Аналогично тому, как мы делали выше, введем биградуированные относительные числа Бетти

$$b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K, T^m) = \dim H^{-q,2p}\bigl[C^*(\mathscr{Z}_K, T^m), d\bigr], \qquad q, p = 0, \dots, m, \tag{56}$$

определим p-ю относительную эйлерову характеристику $\chi_p(\mathscr{Z}_K, T^m)$ как

$$\chi_p(\mathscr{Z}_K, T^m) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \dim C^{-q,2p}(\mathscr{Z}_K, T^m) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q b_{-q,2p}(\mathscr{Z}_K, T^m) \tag{57}$$

и введем порождающий многочлен $\chi(\mathscr{Z}_K, T^m; t)$ как

$$\chi(\mathscr{Z}_K, T^m; t) = \sum_{p=0}^{m} \chi_p(\mathscr{Z}_K, T^m) t^{2p}.$$

Теорема 4.2.10. *Для любого $(n-1)$-мерного симплициального комплекса K с m вершинам имеет место соотношение*

$$\chi(\mathscr{Z}_K, T^m; t) = (1-t^2)^{m-n}(h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n}) - (1-t^2)^m. \tag{58}$$

Доказательство. Так как $C^*(T^m) = \Lambda[u_1, \dots, u_m]$ и $\operatorname{bideg} u_i = (-1, 2)$, мы имеем

$$\dim C^{-q}(T^m) = \dim C^{-q,2q}(T^m) = \tbinom{m}{q}.$$

Из (55), (51) и (57) получаем

$$\chi_p(\mathscr{Z}_K, T^m) = \chi_p(\mathscr{Z}_K) - (-1)^p \dim C^{-p,2p}(T^m).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \chi(\mathscr{Z}_K, T^m; t) &= \chi(\mathscr{Z}_K; t) - \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \tbinom{m}{p} t^{2p} \\ &= (1-t^2)^{m-n}(h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n}) - (1-t^2)^m, \end{aligned}$$

где мы использовали (52).

Мы будем использовать теорему 4.2.10 в § 4.5.

Теорема 4.2.11. *Пусть K^{n-1} является комплексом Коэна–Маколея, и пусть $\mathscr{J}$ – идеал в $\mathbf{k}(K)$, порожденный некоторой регулярной последовательностью длины n из элементов степени два. Тогда имеет место следующий изоморфизм алгебр*:

$$H^*(\mathscr{Z}_K) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{J}}\bigl(\mathbf{k}(K)/\mathscr{J}, \mathbf{k}\bigr).$$

Доказательство. Это вытекает из теоремы 4.2.1 и леммы 1.4.9.

Заметим, что $\mathbf{k}$-алгебра $\mathbf{k}(K)/\mathscr{J}$ конечномерна. Ввиду этого обстоятельства теорема 4.2.11 иногда более удобна для вычислений (в случае комплексов Коэна–Маколея), чем общая теорема 4.2.1.

§ 4.3. Когомологии момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$: случай сферического K. Для K, являющегося симплициальной сферой, комплекс $\mathcal{Z}_K$ является многообразием (лемма 3.2.2). В этом параграфе мы описываем вытекающие из этого дополнительные результаты о когомологиях $\mathcal{Z}_K$ и получаем интерпретацию некоторых комбинаторных проблем из главы 1 в терминах этих результатов.

Теорема 4.3.1. *Пусть K – $(n-1)$-мерная симплициальная сфера и $\mathcal{Z}_K$ – соответствующее момент-угол многообразие, $\dim \mathcal{Z}_K = m+n$. Тогда фундаментальный когомологический класс многообразия $\mathcal{Z}_K$ представляется любым мономом $\pm v_I u_J \in A^*(K)$ бистепени $(-(m-n), 2m)$ таким, что I есть $(n-1)$-симплекс в K и $I \cap J = \varnothing$. Знак зависит от ориентации $\mathcal{Z}_K$.*

Доказательство. Мы имеем $H^{m+n}(\mathcal{Z}_K) = H^{-(m-n),2m}(\mathcal{Z}_K)$ (лемма 4.2.7 (e)). По определению модуль $A^{-(m-n),2m}(K)$ порожден мономами $v_I u_J$ такими, что $I \in K^{n-1}$, $\#I = n$, $J = [m] \setminus I$. Любой такой моном является коциклом. Пусть I, I' – два $(n-1)$-симплекса комплекса K^{n-1}, имеющие общую $(n-2)$-грань. Мы утверждаем, что соответствующие коциклы $v_I u_J, v_{I'} u_{J'}$, где $J = [m] \setminus I$, $J' = [m] \setminus I'$, представляют один и тот же класс когомологий (с точностью до знака). Действительно, пусть $v_I u_J = v_{i_1} \cdots v_{i_n} u_{j_1} \cdots u_{j_{m-n}}$, $v_{I'} u_{J'} = v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} v_{j_1} u_{i_n} u_{j_2} \cdots u_{j_{m-n}}$. Так как любая $(n-2)$-грань комплекса K содержится ровно в двух $(n-1)$-гранях, в $A^*(K) \subset \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K)$ имеет место тождество

$$
\begin{aligned}
d(v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} u_{i_n} u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_{m-n}}) \\
= v_{i_1} \cdots v_{i_n} u_{j_1} \cdots u_{j_{m-n}} - v_{i_1} \cdots v_{i_{n-1}} v_{j_1} u_{i_n} u_{j_2} \cdots u_{j_{m-n}}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $[v_I u_J] = [v_{I'} u_{J'}]$ (как классы когомологий). Так как K^{n-1} является симплициальной сферой, любые два $(n-1)$-симплекса могут быть соединены цепью симплексов такой, что любые два последовательных симплекса имеют общую $(n-2)$-грань. Отсюда следует, что все мономы $v_I u_J$ в $A^{-(m-n),2m}(K)$ представляют один класс когомологий (с точностью до знака). Этот класс есть образующая $H^{m+n}(\mathcal{Z}_K)$, т.е. фундаментальный класс когомологий $\mathcal{Z}_K$.

Замечание. В доказательстве предыдущей теоремы мы использовали два комбинаторных свойства комплекса K^{n-1}. Во-первых, что любая $(n-2)$-грань содержится ровно в двух $(n-1)$-гранях и, во-вторых, что любые два $(n-1)$-симплекса могут быть соединены цепью симплексов такой, что любые два последовательных симплекса имеют общую $(n-2)$-грань. Оба этих свойства имеют место для произвольного симплициального многообразия. Следовательно, если K^{n-1} – симплициальное многообразие, то $b_{m+n}(\mathcal{Z}_K) = b_{-(m-n),2m}(\mathcal{Z}_K) = 1$, и образующая в $H^{m+n}(\mathcal{Z}_K)$ может быть выбрана как описано в теореме 4.3.1.

Следствие 4.3.2. *Двойственность Пуанкаре для момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_K$, определяемого симплициальной сферой K^{n-1}, сохраняет биградуированную структуру в (ко)гомологиях, т.е.*

$$H^{-q,2p}(\mathcal{Z}_K) \cong H_{-(m-n)+q,2(m-p)}(\mathcal{Z}_K).$$

В частности,

$$b_{-q,2p}(\mathcal{Z}_K) = b_{-(m-n)+q,2(m-p)}(\mathcal{Z}_K). \tag{59}$$

Следствие 4.3.3. *Пусть K^{n-1} – $(n-1)$-мерная симплициальная сфера и $\mathcal{Z}_K$ – соответствующий момент-угол комплекс, $\dim\mathcal{Z}_K = m+n$. Тогда*

(а) $b_{-q,2p}(\mathcal{Z}_K)=0$ *при* $q\geqslant m-n$, *с единственным исключением* $b_{-(m-n),2m}=1$;
(б) $b_{-q,2p}(\mathcal{Z}_K)=0$ *при* $p-q\geqslant n$, *с единственным исключением* $b_{-(m-n),2m}=1$.

Отсюда следует, что если K^{n-1} – симплициальная сфера, то ненулевые биградуированные числа Бетти $b_{r,2p}(\mathcal{Z}_K)$, $r\neq 0$, $r\neq m-n$, могут появляться только в "полосе", ограниченной прямыми $r=-(m-n-1)$, $r=-1$, $p+r=1$ и $p+r=n-1$ во втором квадранте (см. рис. 8 (б)). Сравните это с рис. 8 (а), соответствующим случаю общего K.

Пример 4.3.4. Пусть $K=\partial\Delta^{m-1}$. Тогда $\mathbf{k}(K)=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/(v_1\cdots v_m)$ (пример 1.3.4). Легко видеть, что все группы когомологий $H[\mathbf{k}(K)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m],d]$ (см. теорему 4.2.2) порождаются коциклами 1 и $[v_1v_2\cdots v_{m-1}u_m]$. Имеем

$$\deg(v_1v_2\cdots v_{m-1}u_m)=2m-1,$$

и теорема 4.3.1 показывает, что $v_1v_2\cdots v_{m-1}u_m$ представляет фундаментальный класс когомологий многообразия $\mathcal{Z}_K\cong S^{2m-1}$ (пример 3.1.7).

Пример 4.3.5. Пусть K – граничный комплекс m-угольника P^2 с $m\geqslant 4$. Мы имеем $\mathbf{k}(K)=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathcal{I}_P$, где $\mathcal{I}_P$ порожден мономами v_iv_j, $i-j\neq 0,1 \bmod m$. Комплекс $\mathcal{Z}_K=\mathcal{Z}_P$ является гладким многообразием размерности $m+2$. Числа Бетти и кольца когомологий этих многообразий были вычислены в [20]. А именно,

$$\dim H^k(\mathcal{Z}_P)=\begin{cases}1 & \text{при } k=0,m+2;\\ 0 & \text{при } k=1,2,m,m+1;\\ (m-2)\binom{m-2}{k-2}-\binom{m-2}{k-1}-\binom{m-2}{k-3} & \text{при } 3\leqslant k\leqslant m-1.\end{cases}$$

Например, в случае $m=5$ группа $H^3(\mathcal{Z}_P)$ имеет 5 образующих, представленных коциклами $v_iu_{i+2}\in\mathbf{k}(K)\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_5]$, $i=1,\dots,5$, а группа $H^4(\mathcal{Z}_P)$ имеет 5 образующих, представленных коциклами $v_ju_{j+2}u_{j+3}$, $j=1,\dots,5$. Как вытекает из теоремы 4.3.1, произведение коциклов v_iu_{i+2} и $v_ju_{j+2}u_{j+3}$ представляет нетривиальный класс когомологий в $H^7(\mathcal{Z}_P)$ тогда и только тогда, когда все индексы $i,i+2,j,j+2$, $j+3$ различны. Следовательно, для каждого из 5 классов когомологий $[v_iu_{i+2}]$ существует единственный (двойственный по Пуанкаре) класс когомологий $[v_ju_{j+2}u_{j+3}]$ такой, что произведение $[v_iu_{i+2}]\cdot[v_ju_{j+2}u_{j+3}]$ не тривиально.

Из (51) и (59) вытекает, что для любой симплициальной сферы K имеет место соотношение

$$\chi_p(\mathcal{Z}_K)=(-1)^{m-n}\chi_{m-p}(\mathcal{Z}_K).$$

Отсюда и из (52) мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{h_0+h_1t^2+\dots+h_nt^{2n}}{(1-t^2)^n}&=(-1)^{m-n}\frac{\chi_m+\chi_{m-1}t^2+\dots+\chi_0t^{2m}}{(1-t^2)^m}\\&=(-1)^n\frac{\chi_0+\chi_1t^{-2}+\dots+\chi_mt^{-2m}}{(1-t^{-2})^m}\\&=(-1)^n\frac{h_0+h_1t^{-2}+\dots+h_nt^{-2n}}{(1-t^{-2})^n}\\&=\frac{h_0t^{2n}+h_1t^{2(n-1)}+\dots+h_n}{(1-t^2)^n}.\end{aligned}$$

Следовательно, $h_i = h_{n-i}$. Таким образом, соотношения Дена–Соммервилля являются следствием биградуированной двойственности Пуанкаре (59).

Тождество (52) позволяет интерпретировать различные неравенства для f-векторов симплициальных сфер (соответственно симплициальных многообразий) в терминах топологических инвариантов – биградуированных чисел Бетти соответствующих момент-угол многообразий (соответственно комплексов) $\mathcal{Z}_K$.

Пример 4.3.6. Как вытекает из леммы 4.2.7, для любого K имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\chi_0(\mathcal{Z}_K) = 1, && \chi_1(\mathcal{Z}_K) = 0,\\ &\chi_2(\mathcal{Z}_K) = -b_{-1,4}(\mathcal{Z}_K) = -b_3(\mathcal{Z}_K), && \chi_3(\mathcal{Z}_K) = b_{-2,6}(\mathcal{Z}_K) - b_{-1,6}(\mathcal{Z}_K) \end{aligned}$$

(заметим, что $b_4(\mathcal{Z}_K) = b_{-2,6}(\mathcal{Z}_K)$, в то время как $b_5(\mathcal{Z}_K) = b_{-1,6}(\mathcal{Z}_K) + b_{-3,8}(\mathcal{Z}_K)$). Далее, из тождества (52) получаем

$$\begin{aligned} h_0 &= 1,\\ h_1 &= m - n,\\ h_2 &= \tbinom{m-n+1}{2} - b_3(\mathcal{Z}_K),\\ h_3 &= \tbinom{m-n+2}{3} - (m-n)b_{-1,4}(\mathcal{Z}_K) + b_{-2,6}(\mathcal{Z}_K) - b_{-1,6}(\mathcal{Z}_K). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что неравенство $h_1 \leqslant h_2$ $(n \geqslant 4)$ из Обобщенной Гипотезы о Верхней Границе (13) для симплициальных сфер эквивалентно неравенству

$$b_3(\mathcal{Z}_K) \leqslant \tbinom{m-n}{2}. \tag{60}$$

Следующее неравенство $h_2 \leqslant h_3$ $(n \geqslant 6)$ из (13) эквивалентно следующему неравенству для биградуированных чисел Бетти многообразия $\mathcal{Z}_K$:

$$\tbinom{m-n+1}{3} - (m-n-1)b_{-1,4}(\mathcal{Z}_K) + b_{-2,6}(\mathcal{Z}_K) - b_{-1,6}(\mathcal{Z}_K) \geqslant 0. \tag{61}$$

Мы видим, что неравенства из Обобщенной Гипотезы о Верхней Границе интерпретируются как "топологические" неравенства для (биградуированных) чисел Бетти некоторого многообразия. Для доказательства неравенств типа (60) или (61) можно использовать топологические методы (такие как эквивариантная топология и теория Морса). Такой топологический подход к проблемам типа g-гипотезы или Обобщенной Гипотезы о Верхней Границе имеет преимущество независимости от того, является ли симплициальная сфера K многогранной или нет. Действительно, все известные доказательства необходимости g-теоремы для симплициальных многогранников (включая оригинальное доказательство Стенли, приведенное в § 2.1, доказательство Макмюллена [59] и недавнее доказательство В. А. Тиморина [86]) следуют одной и той же схеме. А именно, числа h_i, $i = 1, \dots, n$, интерпретируются как размерности градуированных компонент A^i некоторой алгебры A, удовлетворяющей сильной теореме Лефшеца. Последнее утверждение означает, что существует элемент $\omega \in A^1$ такой, что умножение на ω определяет *мономорфизм* $A^i \to A^{i+1}$ при $i < \left[\frac{n}{2}\right]$. Отсюда выводится, что $h_i \leqslant h_{i+1}$ при $i < \left[\frac{n}{2}\right]$ (см. § 2.1). Однако такой элемент ω отсутствует для симплициальных сфер K, не являющихся многогранными сферами. Это означает, что для доказательства g-гипотезы для симплициальных сфер необходимо выработать принципиально новую технику.

Как уже отмечалось в § 1.3, симплициальные сферы являются горенштейновыми* комплексами. Используя теоремы 1.4.12, 1.4.13 и нашу теорему 4.2.1, мы получаем следующее решение аналога проблемы 3.2.3.

Теорема 4.3.7. *Комплекс $\mathcal{Z}_K$ является комплексом Пуанкаре (над $\mathbf{k}$) тогда и только тогда, когда для любого симплекса $I \in K$ (включая $I = \varnothing$) подкомплекс* $\operatorname{link} I$ *имеет гомологии как у сферы размерности* $\dim(\operatorname{link} I)$.

§ 4.4. Фактор-пространства многообразия $\mathcal{Z}_P$ по свободным действиям тора. Здесь мы возвращаемся к случаю многогранной сферы K (т.е. $K = K_P$) и изучаем фактор-пространства $\mathcal{Z}_P$ по свободно действующим подгруппам $H \subset T^m$.

Для любого комбинаторного простого многогранника P^n обозначим через $s(P^n)$ максимальную размерность подгрупп $H \subset T^m$, которые действуют на $\mathcal{Z}_P$ свободно. Число $s(P^n)$, очевидно, является комбинаторным инвариантом многогранника P^n.

Проблема 4.4.1 (В. М. Бухштабер). *Выразить $s(P^n)$ через известные комбинаторные инварианты многогранника P^n.*

Предложение 4.4.2. *Если P^n имеет m гиперграней, то $s(P^n) \leqslant m - n$.*

Доказательство. Каждая подгруппа размерности $> m - n$ в торе T^m нетривиально пересекается с любой n-мерной стационарной подгруппой и поэтому не может действовать на $\mathcal{Z}_P$ свободно.

Предложение 4.4.3. *Диагональная одномерная подгруппа*

$$S_d := \{(e^{2\pi i\varphi}, \dots, e^{2\pi i\varphi}) \in T^m\}, \qquad \varphi \in \mathbb{R},$$

действует на любом $\mathcal{Z}_P$ свободно. Поэтому $s(P^n) \geqslant 1$.

Доказательство. Так как любая стационарная подгруппа для $\mathcal{Z}_P$ является координатной подгруппой (см. определение 3.1.1), она пересекается с S_d лишь по единице.

Другая нижняя оценка числа $s(P^n)$ было предложена в работе [48]. Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ – множество гиперграней многогранника P^n. Сюръективное отображение $\varrho\colon \mathcal{F} \to [k]$ (где $[k] = \{1, \dots, k\}$) называется *правильной k-цветной раскраской гиперграней P^n*, если $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ влечет $\varrho(F_i) \neq \varrho(F_j)$. *Хроматическим числом* $\gamma(P^n)$ многогранника P^n называется наименьшее k, для которого существует правильная k-цветная раскраска гиперграней P^n.

Пример 4.4.4. Если P^n – 2-смежностный простой многогранник с m гипергранями, то $\gamma(P^n) = m$.

Предложение 4.4.5 [48]. *Имеет место неравенство*

$$s(P^n) \geqslant m - \varrho(P^n).$$

Доказательство. Отображение $\varrho\colon \mathscr{F} \to [k]$ определяет эпиморфизм торов $\tilde{\varrho}\colon T^m \to T^k$. Легко видеть, что если ϱ является правильной раскраской, то $\ker\tilde{\varrho} \cong T^{m-k}$ свободно действует на $\mathscr{Z}_P$.

Пусть $H \subset T^m$ – подгруппа размерности $r \leqslant m-n$. Выбрав базис в H, мы можем записать ее в виде

$$H = \bigl\{(e^{2\pi i(s_{11}\varphi_1+\dots+s_{1r}\varphi_r)}, \dots, e^{2\pi i(s_{m1}\varphi_1+\dots+s_{mr}\varphi_r)}) \in T^m\bigr\}, \tag{62}$$

где $\varphi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,r$. Целочисленная матрица $S = (s_{ij})$ размера $m \times r$ определяет мономорфизм $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^m$ на прямое слагаемое. Для каждого подмножества $\{i_1,\dots,i_n\} \subset [m]$ обозначим через $S_{\widehat{i}_1,\dots,\widehat{i}_n}$ подматрицу размера $(m-n)\times r$ матрицы S, получаемую удалением строк $i_1,\dots,i_n$. Напомним, что любая вершина $v \in P^n$ есть пересечение n гиперграней (см. (30)). Имеет место следующий критерий свободности действия H на $\mathscr{Z}_P$.

Лемма 4.4.6. *Подгруппа* (62) *действует свободно на $\mathscr{Z}_P$ тогда и только тогда, когда для любой вершины $v = F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$ многогранника P^n подматрица $S_{\widehat{i}_1,\dots,\widehat{i}_n}$ размера $(m-n)\times r$ определяет мономорфизм $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^{m-n}$ на прямое слагаемое.*

Доказательство. Как вытекает из определения 3.1.1, орбиты T^m-действия на $\mathscr{Z}_P$, соответствующие вершинам P^n, имеют максимальные стационарные подгруппы (ранга n). Стационарная подгруппа, соответствующая вершине $v = F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$, является координатной подгруппой $T^n_{i_1,\dots,i_n} \subset T^m$. Подгруппа (62) действует на $\mathscr{Z}_P$ свободно тогда и только тогда, когда она пересекает каждую стационарную подгруппу лишь в единице. Это эквивалентно тому, что отображение $H \times T^n_{i_1,\dots,i_n} \to T^m$ инъективно для любой вершины $v = F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$. Такое отображение инъективно, если и только если образ соответствующего отображения $\mathbb{Z}^{r+n} \to \mathbb{Z}^m$ является прямым слагаемым в $\mathbb{Z}^m$. Матрица этого отображения $\mathbb{Z}^{r+n} \to \mathbb{Z}^m$ получается добавлением n столбцов $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^t$ (1 стоит на месте i_j, $j = 1,\dots,n$) к матрице S. Эта матрица определяет мономорфизм на прямое слагаемое тогда и только тогда, когда то же самое верно для каждой матрицы $S_{\widehat{i}_1,\dots,\widehat{i}_n}$.

В частности, для подгрупп ранга $m-n$ мы получаем

Следствие 4.4.7. *Подгруппа* (62) *ранга $r = m-n$ действует свободно на $\mathscr{Z}_P$ тогда и только тогда, когда для любой вершины $v = F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$ многогранника P^n минор $S_{\widehat{i}_1,\dots,\widehat{i}_n}$ удовлетворяет* $\det S_{\widehat{i}_1\dots\widehat{i}_n} = \pm 1$.

Предложение 4.4.8. *Простой многогранник P^n допускает характеристическое отображение тогда и только тогда, когда $s(P^n) = m-n$.*

Доказательство. Предложение 3.1.5 показывает, что если P^n допускает характеристическое отображение ℓ, то $(m-n)$-мерная подгруппа $H(\ell)$ действует свободно на $\mathscr{Z}_P$, откуда $s(P^n) = m-n$. Пусть теперь $s(P^n) = m-n$, т.е. существует подгруппа (62) ранга $r = m-n$, которая свободно действует на $\mathscr{Z}_P$. Соответствующая $(m\times(m-n))$-матрица S определяет мономорфизм $\mathbb{Z}^{m-n} \to \mathbb{Z}^m$ на прямое слагаемое. Тогда существует $(n\times m)$-матрица Λ такая, что последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{m-n} \xrightarrow{S} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}^n \longrightarrow 0$$

является точной. Так как S удовлетворяет условию из следствия 4.4.7, матрица Λ удовлетворяет условию (26) и, таким образом, определяет характеристическое отображение для P^n.

Для каждой подгруппы (62) ранга $r = m - n$ определим следующие линейные формы в $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$:

$$w_i = s_{1i}v_1 + \dots + s_{mi}v_m, \qquad i = 1, \dots, m-n. \tag{63}$$

Пусть M^{2n} – квазиторическое многообразие над P^n с характеристическим отображением ℓ. Запишем подгруппу $H(\ell)$ в виде (62); это определяет элементы (63). При этих предположениях имеет место следующее утверждение.

Лемма 4.4.9. *Имеет место следующий изоморфизм алгебр*:

$$H^*(\mathscr{Z}_P) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[w_1,\dots,w_{m-n}]}\bigl(H^*(M^{2n}), \mathbf{k}\bigr),$$

где структура $\mathbf{k}[w_1, \dots, w_{m-n}]$*-модуля в* $H^*(M^{2n}) = \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/\mathscr{I}_P + \mathscr{J}_\ell$ *задается при помощи формул* (63).

Доказательство. Теорема 4.2.11 показывает, что

$$H^*(\mathscr{Z}_K) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{J}_\ell}\bigl(\mathbf{k}(K)/\mathscr{J}_\ell, \mathbf{k}\bigr).$$

Фактор-кольцо $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]/\mathscr{J}_\ell$ отождествляется с $\mathbf{k}[w_1, \dots, w_{m-n}]$.

Теорема 4.4.10. *Спектральная последовательность Лере–Серра* T^{m-n}*-расслоения* $\mathscr{Z}_P \to M^{2n}$ *вырождается в члене* E_3. *Кроме того, имеет место следующий изоморфизм алгебр*:

$$\begin{gathered}
H^*(\mathscr{Z}_P) \cong H\bigl[\Lambda[u_1, \dots, u_{m-n}] \otimes (\mathbf{k}(P)/\mathscr{J}_\ell), d\bigr],\\
\operatorname{bideg} v_i = (0,2), \quad \operatorname{bideg} u_i = (-1,2);\\
d(u_i) = w_i, \quad d(v_i) = 0.
\end{gathered}$$

Доказательство. Так как $H^*(T^{m-n}) = \Lambda[u_1, \dots, u_{m-n}]$, $H^*(M^{2n}) = \mathbf{k}(P)/\mathscr{J}_\ell$, мы имеем

$$E_3 \cong H\bigl[(\mathbf{k}(P)/\mathscr{J}_\ell) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_{m-n}], d\bigr].$$

Из леммы 1.4.6 вытекает

$$H\bigl[(\mathbf{k}(P)/\mathscr{J}_\ell) \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_{m-n}], d\bigr] \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[w_1,\dots,w_{m-n}]}\bigl(H^*(M^{2n}), \mathbf{k}\bigr).$$

Сопоставляя два предыдущих тождества с леммой 4.4.9, мы получаем $E_3 = H^*(\mathscr{Z}_P)$, что завершает доказательство.

Теперь мы опишем кольцо когомологий фактор-пространства $\mathscr{Z}_P/H$ для любой свободно действующей подгруппы H. Вначале запишем H в виде (62) и выберем $((m-r) \times m)$-матрицу $T = (t_{ij})$ ранга $(m-r)$, удовлетворяющую $T \cdot S = 0$. Это делается таким же образом, как при доказательстве предложения 4.4.8 (в частности, T – характеристическая матрица квазиторического многообразия $\mathscr{Z}_P/H$ в случае $r = m - n$).

Теорема 4.4.11. *Имеет место следующий изоморфизм алгебр*:

$$H^*(\mathscr{Z}_P/H) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-r}]}\big(\mathbf{k}(P),\mathbf{k}\big),$$

где структура $\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-r}]$*-модуля в* $\mathbf{k}(P)=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\mathscr{I}_P$ *задается отображением*

$$\begin{aligned} k[t_1,\dots,t_{m-r}] &\to k[v_1,\dots,v_m] \\ t_i &\to t_{i1}v_1+\dots+t_{im}v_m \end{aligned}\quad .$$

Замечание. Теорема 4.4.11 сводится к теореме 4.2.1 в случае $r=0$ и к примеру 4.1.5 в случае $r=m-n$.

Доказательство теоремы 4.4.11. Вложение подгруппы $T^r\cong H\hookrightarrow T^m$ определяет отображение классифицирующих пространств $h\colon BT^r\to BT^m$. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B_TP \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ BT^r & \xrightarrow{\ h\ } & BT^m \end{array}\quad ,$$

где левая вертикальная стрелка обозначает расслоение, индуцированное отображением h. Легко показать, что E гомотопически эквивалентно фактор-пространству $\mathscr{Z}_P/H$. Спектральная последовательность Эйленберга–Мура предыдущего коммутативного квадрата сходится к когомологиям $\mathscr{Z}_P/H$ и имеет

$$E_2=\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbf{k}(P),\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r]\big),$$

где структура $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$-модуля в $\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r]$ задается матрицей S, т.е. отображением $v_i\to s_{i1}w_1+\dots+s_{ir}w_r$. Таким же образом, как и в доказательстве теоремы 4.2.1 (используя клеточные разбиения), показывается, что спектральная последовательность вырождается в члене E_2 и имеет место изоморфизм алгебр

$$H^*(\mathscr{Z}_P/H)=\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbf{k}(P),\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r]\big). \tag{64}$$

Положим теперь в теореме 1.4.10

$$\Lambda=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m],\quad \Gamma=\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-r}],\quad A=\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r]\quad \text{и}\quad C=\mathbf{k}(P).$$

Так как Λ является свободным Γ-модулем и $\Omega=\Lambda/\Gamma=k[w_1,\dots,w_r]$, возникает спектральная последовательность $\{\widetilde{E}_s,\widetilde{d}_s\}$. Ее член E_2 есть

$$\widetilde{E}_2=\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r]}\big(\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r],\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-r}]}(\mathbf{k}(P),\mathbf{k})\big),$$

и она сходится к $\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbf{k}(P),\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r])$. Так как $\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r]$ является свободным $\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r]$-модулем, мы имеем

$$\widetilde{E}_2^{p,q}=0\quad\text{при}\quad p\neq 0,\qquad \widetilde{E}_2^{0,q}=\mathrm{Tor}^q_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-r}]}\big(\mathbf{k}(P),\mathbf{k}\big).$$

Следовательно, спектральная последовательность вырождается в члене E_2, и имеет место изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]}\big(\mathbf{k}(P),\mathbf{k}[w_1,\dots,w_r]\big)\cong\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-r}]}\big(\mathbf{k}(P),\mathbf{k}\big),$$

который вместе с (64) доказывает теорему.

Следствие 4.4.12. $H^*(\mathcal{Z}_P/H) \cong H\bigl[\Lambda[u_1,\dots,u_{m-r}]\otimes\mathbf{k},d\bigr]$, *где* $du_i = (t_{i1}v_1 + \dots + t_{im}v_m)$, $dv_i = 0$, $\operatorname{bideg} v_i = (0,2)$, $\operatorname{bideg} u_i = (-1,2)$.

Пример 4.4.13. Пусть $H = S_d$ (см. предложение 4.4.3). В этой ситуации матрица S представляет собой столбец из m единиц. По теореме 4.4.11,

$$H^*(\mathcal{Z}_P/S_d) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-1}]}\bigl(\mathbf{k}(P),\mathbf{k}\bigr), \tag{65}$$

где структура $\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-1}]$-модуля в $\mathbf{k}(P) = \mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/I$ определяется отображением

$$t_i \to v_i - v_m, \qquad i = 1,\dots,m-1.$$

S^1-расслоение $\mathcal{Z}_P \to \mathcal{Z}_P/S_d$ классифицируется некоторым отображением $c\colon \mathcal{Z}_P/S_d \to BT^1 \cong \mathbb{C}P^\infty$. Так как $H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbf{k}[w]$, определен элемент $c^*(w) \in H^2(\mathcal{Z}_P/S_d)$.

Лемма 4.4.14. *P^n является q-смежностным тогда и только тогда, когда* $\bigl(c^*(w)\bigr)^q \neq 0$.

Доказательство. Отображение c^* переводит кольцо когомологий $H^*(BT^1) \cong \mathbf{k}[w]$ в подкольцо $\mathbf{k}(P)\otimes_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-1}]}\mathbf{k} = \operatorname{Tor}^0_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_{m-1}]}(\mathbf{k}(P),\mathbf{k})$ кольца $H^*(\mathcal{Z}_P/H)$. Это подкольцо изоморфно фактор-кольцу $\mathbf{k}(P)/(v_1 = \dots = v_m)$. Теперь утверждение вытекает из того факта, что многогранник P^n является q-смежностным, если и только если идеал $\mathcal{I}_P$ не содержит мономов степени $< q+1$.

§ 4.5. Биградуированная двойственность Пуанкаре и аналоги соотношений Дена–Соммервилля для симплициальных многообразий. Здесь мы предполагаем, что K^{n-1} является симплициальным многообразием. В этом случае момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$, вообще говоря, не является многообразием, однако его особенности легко описываются. Действительно, кубический комплекс $\operatorname{cc}(K)$ (конструкция 1.5.9) гомеоморфен $|\operatorname{cone}(K)|$, и вершиной конуса является точка $p = (1,\dots,1) \in \operatorname{cc}(K) \subset I^m$. Пусть $U_\varepsilon(p) \subset \operatorname{cc}(K)$ – малая окрестность точки p в $\operatorname{cc}(K)$. Тогда замыкание окрестности $U_\varepsilon(p)$ также гомеоморфно $|\operatorname{cone}(K)|$. Из определения $\mathcal{Z}_K$ (см. (39)) вытекает, что $U_\varepsilon(T^m) := \rho^{-1}(U_\varepsilon(p)) \subset \mathcal{Z}_K$ – малая инвариантная окрестность тора $T^m = \rho^{-1}(p)$ в $\mathcal{Z}_K$. Тогда для малых ε замыкание окрестности $U_\varepsilon(T^m)$ гомеоморфно $|\operatorname{cone}(K)|\times T^m$. Удаляя $U_\varepsilon(T^m)$ из $\mathcal{Z}_K$, мы получаем многообразие с границей, которое будем обозначать W_K. Итак, мы имеем

$$W_K = \mathcal{Z}_K \setminus U_\varepsilon(T^m), \qquad \partial W_K = |K|\times T^m.$$

Заметим, что, поскольку окрестность $U_\varepsilon(T^m)$ является T^m-инвариантной, тор T^m действует на W_K.

Теорема 4.5.1. *Многообразие с границей W_K эквивариантно гомотопически эквивалентно момент-угол комплексу $\mathcal{W}_K$ (см. (39)). Имеет место канонический относительный гомеоморфизм пар $(W_K,\partial W_K)\to(\mathcal{Z}_K,T^m)$.*

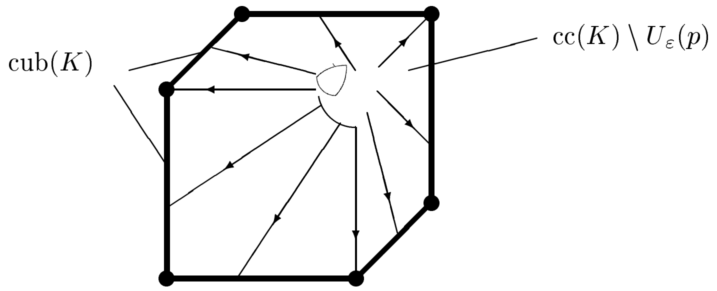


Рис. 9. Гомотопическая эквивалентность $\mathrm{cc}(K) \setminus U_\varepsilon(p) \to \mathrm{cub}(K)$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения построим гомотопическую эквивалентность $\mathrm{cc}(K) \setminus U_\varepsilon(p) \to \mathrm{cub}(K)$, как показано на рис. 9. Это отображение накрывается эквивариантной гомотопической эквивалентностью $W_K = \mathscr{Z}_K \setminus U_\varepsilon(T^m) \to \mathscr{W}_K$. Второе утверждение легко следует из определения W_K.

Как показывает лемма 3.3.1, момент-угол комплекс $\mathscr{W}_K \subset (D^2)^m$ имеет клеточную структуру с 5 различными типами клеток D_i, I_i, 0_i, T_i, 1_i, $i = 1, \dots, m$ (см. рис. 7). Гомологии комплекса $\mathscr{W}_K$ (а значит, и многообразия W_K) можно вычислять при помощи соответствующего клеточного цепного комплекса, который мы будем обозначать $\left[\mathscr{C}_*(\mathscr{W}_K), \partial_c\right]$. Несмотря на то, что $\mathscr{W}_K$ имеет больше типов клеток, чем $\mathscr{Z}_K$ (напомним, что $\mathscr{Z}_K$ имеет лишь три типа клеток $D_i, T_i, 1_i$), комплекс клеточных цепей $[\mathscr{C}_*(\mathscr{W}_K), \partial_c]$ также имеет каноническую *биградуированную* структуру. А именно, имеет место следующее утверждение (сравните с (46)).

Лемма 4.5.2. *Положим*

$$\begin{aligned} \operatorname{bideg} D_i = (0, 2), \quad \operatorname{bideg} T_i = (-1, 2), \quad \operatorname{bideg} I_i = (1, 0), \\ \operatorname{bideg} 0_i = \operatorname{bideg} 1_i = (0, 0), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{66}$$

Это превращает клеточный цепной комплекс $[\mathscr{C}_*(\mathscr{W}_K), \partial_c]$ в биградуированный дифференциальный модуль с дифференциалом ∂_c, уменьшающим бистепень на $(1, 0)$. Исходная градуировка в $\mathscr{C}_*(\mathscr{W}_K)$ по размерностям клеток соответствует полной степени (т.е. размерность клетки есть сумма ее двух степеней).

Доказательство. Необходимо лишь проверить, что дифференциал ∂_c уменьшает бистепень на $(1, 0)$. Это вытекает из (66) и

$$\partial_c D_i = T_i, \qquad \partial_c I_i = 1_i - 0_i, \qquad \partial_c T_i = \partial_c 1_i = \partial_c 0_i = 0.$$

Заметим, что, в отличие от биградуированной структуры в $\mathscr{C}_*(\mathscr{Z}_K)$, элементы комплекса $\mathscr{C}_{*,*}(\mathscr{W}_K)$ могут иметь *положительную* первую градуировку (из-за положительной первой градуировки клетки I_i). При этом дифференциал ∂_c не меняет второй градуировки (как и в случае $\mathscr{Z}_K$), что позволяет представить биградуированный комплекс $\mathscr{C}_{*,*}(\mathscr{W}_K)$ в виде суммы комплексов $\mathscr{C}_{*,2p}(\mathscr{W}_K)$, $p = 0, \dots, m$.

Аналогично тому, как мы это делали для комплекса $\mathscr{Z}_K$ и для пары $(\mathscr{Z}_K, T^m)$, введем

$$b_{q,2p}(\mathscr{W}_K) = \dim H_{q,2p}\bigl[\mathscr{C}_{*,*}(\mathscr{W}_K), \partial_c\bigr], \qquad -m \leqslant q \leqslant m, \quad 0 \leqslant p \leqslant m; \tag{67}$$

$$\chi_p(\mathscr{W}_K) = \sum_{q=-m}^{m} (-1)^q \dim \mathscr{C}_{q,2p}(\mathscr{W}_K) = \sum_{q=-m}^{m} (-1)^q b_{q,2p}(\mathscr{W}_K); \tag{68}$$

$$\chi(\mathscr{W}_K; t) = \sum_{p=0}^{m} \chi_p(\mathscr{W}_K) t^{2p}$$

(заметим, что q здесь может быть как положительным, так и отрицательным).

Следующая теорема дает точную формулу для порождающего многочлена $\chi(\mathscr{W}_K; t)$ и аналогична теоремам 4.2.8 и 4.2.10.

Теорема 4.5.3. *Для любого симплициального комплекса K^{n-1} с m вершинами имеет место соотношение*

$$\begin{aligned}\chi(\mathscr{W}_K; t) &= (1-t^2)^{m-n}(h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n}) + \bigl(\chi(K) - 1\bigr)(1-t^2)^m \\ &= (1-t^2)^{m-n}(h_0 + h_1 t^2 + \dots + h_n t^{2n}) + (-1)^{n-1} h_n (1-t^2)^m,\end{aligned}$$

где $\chi(K) = f_0 - f_1 + \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1} h_n$ – эйлерова характеристика комплекса K.

Доказательство. Из определения $\mathscr{W}_K$ (см. (39)) следует, что $D_I I_J 0_L T_P 1_Q$ (см. § 3.3) является клеткой в $\mathscr{W}_K$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(а) множество $I \cup J \cup L$ является симплексом комплекса K^{n-1};

(б) $\#L \geqslant 1$.

Пусть $c_{ijlpq}(\mathscr{W}_K)$ обозначает число клеток $D_I I_J 0_L T_P 1_Q \subset \mathscr{W}_K$ с $i = \#I$, $j = \#J$, $l = \#L$, $p = \#P$, $q = \#Q$, $i + j + l + p + q = m$. Тогда

$$c_{ijlpq}(\mathscr{W}_K) = f_{i+j+l-1} \tbinom{i+j+l}{i} \tbinom{j+l}{l} \tbinom{m-i-j-l}{p}, \tag{69}$$

где $(f_0, \dots, f_{n-1})$ – f-вектор комплекса K (мы полагаем $f_{-1} = 1$ и $f_k = 0$ при $k < -1$ или $k > n-1$). В силу (66)

$$\operatorname{bideg}(D_I I_J 0_L T_P 1_Q) = (j - p, 2(i + p)).$$

Вычислим $\chi_r(\mathscr{W}_K)$, используя (68) и (69):

$$\chi_r(\mathscr{W}_K) = \sum_{\substack{i,j,l,p \\ i+p=r,\, l\geqslant 1}} (-1)^{j-p} f_{i+j+l-1} \tbinom{i+j+l}{i} \tbinom{j+l}{l} \tbinom{m-i-j-l}{p}.$$

Подставляя $s = i + j + l$ в предыдущей формуле, получаем

$$\begin{aligned}\chi_r(\mathscr{W}_K) &= \sum_{\substack{l,s,p \\ l\geqslant 1}} (-1)^{s-r-l} f_{s-1} \tbinom{s}{r-p} \tbinom{s-r+p}{l} \tbinom{m-s}{p} \\ &= \sum_{s,p} \biggl((-1)^{s-r} f_{s-1} \tbinom{s}{r-p} \tbinom{m-s}{p} \sum_{l\geqslant 1} (-1)^l \tbinom{s-r+p}{l} \biggr).\end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{l\geqslant 1}(-1)^l\binom{s-r+p}{l}=\begin{cases}-1, & s>r-p,\\ 0, & s\leqslant r-p,\end{cases}$$

мы имеем

$$\begin{aligned}\chi_r(\mathscr{W}_K)&=-\sum_{\substack{s,p\\ s>r-p}}(-1)^{s-r}f_{s-1}\binom{s}{r-p}\binom{m-s}{p}\\ &=-\sum_{s,p}(-1)^{r-s}f_{s-1}\binom{s}{r-p}\binom{m-s}{p}+\sum_{s}(-1)^{r-s}f_{s-1}\binom{m-s}{r-s}.\end{aligned}$$

Вторая сумма в последней формуле есть в точности $\chi_r(\mathscr{Z}_K)$ (см. (53)). Для того чтобы вычислить первую сумму, заметим, что $\sum_p\binom{s}{r-p}\binom{m-s}{p}=\binom{m}{r}$ (это получается при вычислении коэффициента при α^r в обеих частях тождества $(1+\alpha)^s\times(1+\alpha)^{m-s}=(1+\alpha)^m$). Следовательно,

$$\chi_r(\mathscr{W}_K)=-\sum_s(-1)^{r-s}f_{s-1}\binom{m}{r}+\chi_r(\mathscr{Z}_K)=(-1)^r\binom{m}{r}\bigl(\chi(K)-1\bigr)+\chi_r(\mathscr{Z}_K),$$

так как $-\sum_s(-1)^sf_{s-1}=\chi(K)-1$ (напомним, что $f_{-1}=1$). Наконец, используя (52), мы находим

$$\begin{aligned}\chi(\mathscr{W}_K;t)&=\sum_{r=0}^{m}\chi_r(\mathscr{W}_K)t^{2r}=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}\bigl(\chi(K)-1\bigr)t^{2r}+\sum_{r=0}^{m}\chi_r(\mathscr{Z}_K)t^{2r}\\ &=\bigl(\chi(K)-1\bigr)(1-t^2)^m+(1-t^2)^{m-n}(h_0+h_1t^2+\dots+h_nt^{2n}).\end{aligned}$$

Предположим, что K является ориентируемым симплициальным многообразием. Тогда легко видеть, что W_K также ориентируемо. Таким образом, имеют место изоморфизмы относительной двойственности Пуанкаре:

(70) $$H_k(W_K)\cong H^{m+n-k}(W_K,\partial W_K),\qquad k=0,\dots,m.$$

Следствие 4.5.4 (обобщенные соотношения Дена–Соммервилля). *Следующие соотношения имеют место для h-вектора $(h_0,h_1,\dots,h_n)$ ориентируемого симплициального многообразия K^{n-1}:*

$$h_{n-i}-h_i=(-1)^i\bigl(\chi(K^{n-1})-\chi(S^{n-1})\bigr)\binom{n}{i},\qquad i=0,1,\dots,n,$$

где $\chi(S^{n-1})=1+(-1)^{n-1}$ – эйлерова характеристика $(n-1)$-сферы.

Доказательство. Как вытекает из теоремы 4.5.1, $H^{m+n-k}(W_K, \partial_c W_K) = H^{m+n-k}(\mathscr{Z}_K, T^m)$ и $H_k(W_K) = H_k(\mathscr{W}_K)$. Более того, можно показать таким же образом, как и следствии 4.3.2, что изоморфизмы (70) сохраняют биградуированную структуру в (ко)гомологиях комплекса $\mathscr{W}_K$ и пары $(\mathscr{Z}_K, T^m)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} b_{-q,2p}(\mathscr{W}_K) &= b_{-(m-n)+q,2(m-p)}(\mathscr{Z}_K, T^m),\\ \chi_p(\mathscr{W}_K) &= (-1)^{m-n}\chi_{m-p}(\mathscr{Z}_K, T^m), \\ \chi(\mathscr{W}_K; t) &= (-1)^{m-n}t^{2m}\chi\big(\mathscr{Z}_K, T^m; \tfrac{1}{t}\big). \end{aligned} \tag{71}$$

Используя (58), находим

$$\begin{aligned} &(-1)^{m-n}t^{2m}\chi\big(\mathscr{Z}_K, T^m; \tfrac{1}{t}\big)\\ &\quad= (-1)^{m-n}t^{2m}(1-t^{-2})^{m-n}(h_0 + h_1t^{-2} + \dots + h_nt^{-2n})\\ &\qquad - (-1)^{m-n}t^{2m}(1-t^{-2})^m\\ &\quad= (1-t^2)^{m-n}(h_0t^{2n} + h_1t^{2n-2} + \dots + h_n) + (-1)^{n-1}(1-t^2)^m. \end{aligned}$$

Подставляя формулу для $\chi(\mathscr{W}_K; t)$ из теоремы 4.5.3 и предыдущее выражение в (71), получаем

$$\begin{aligned} &(1-t^2)^{m-n}(h_0 + h_1t^2 + \dots + h_nt^{2n}) + \big(\chi(K) - 1\big)(1-t^2)^m\\ &\qquad= (1-t^2)^{m-n}(h_0t^{2n} + h_1t^{2n-2} + \dots + h_n) + (-1)^{n-1}(1-t^2)^m. \end{aligned}$$

Разделив это соотношение на $(1-t^2)^{m-n}$ и вычисляя коэффициент при t^{2i} в обеих его частях, мы получаем $h_{n-i} - h_i = (-1)^i\big(\chi(K^{n-1}) - \chi(S^{n-1})\big)\binom{n}{i}$, что и требовалось.

Если $|K| = S^{n-1}$ или $(n-1)$ нечетно, следствие 4.5.4 дает классические соотношения $h_{n-i} = h_i$.

Следствие 4.5.5. *Если K^{n-1} – симплициальное многообразие с h-вектором $(h_0, \dots, h_n)$, то*

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i(h_n - 1)\binom{n}{i}, \qquad i = 0, 1, \dots, n.$$

Доказательство. Так как $\chi(K^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}h_n$, $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$, мы имеем

$$\chi(K^{n-1}) - \chi(S^{n-1}) = (-1)^{n-1}(h_n - 1) = (h_n - 1)$$

(коэффициент $(-1)^{n-1}$ может быть опущен, так как для нечетных $(n-1)$ левая часть обращается в нуль).

Следствие 4.5.6. *Для любого $(n-1)$-мерного ориентируемого симплициального многообразия числа $h_{n-i} - h_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, являются гомотопическими инвариантами. В частности, они не зависят от триангуляции.*

В частном случае PL-многообразий топологическая инвариантность чисел $h_{n-i} - h_i$ была впервые наблюдена Пахнером в [68; (7.11)].

Пример 4.5.7. Рассмотрим триангуляции двумерного тора T^2. Мы имеем $n = 3$, $\chi(T^2) = 0$. Из $\chi(K^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}h_n$ мы получаем $h_3 = -1$. Следствие 4.5.4 дает

$$h_3 - h_0 = -2, \qquad h_2 - h_1 = 6.$$

Например, триангуляция на рис. 10 имеет $f_0 = 9$ вершин, $f_1 = 27$ ребер и $f_2 = 18$ треугольников. Соответствующий h-вектор есть $(1, 6, 12, -1)$.

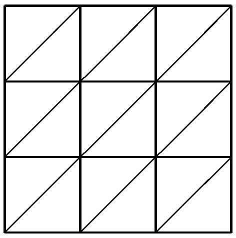


Рис. 10. Триангуляция тора T^2 с $\boldsymbol{f} = (9, 27, 18)$, $\boldsymbol{h} = (1, 6, 12, -1)$

Глава 5. Конфигурации подпространств и кольца когомологий их дополнений

§ 5.1. Обзор результатов о когомологиях дополнений к общим конфигурациям. *Конфигурацией* называется конечное множество $\mathscr{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ плоскостей (аффинных подпространств) в некотором аффинном пространстве (вещественном или комплексном). Для каждой конфигурации $\mathscr{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ в $\mathbb{C}^m$ определим ее *носитель* $|\mathscr{A}|$ как

$$|\mathscr{A}| := \bigcup_{i=1}^{r} L_i \subset \mathbb{C}^m,$$

и *дополнение* $U(\mathscr{A})$ как

$$U(\mathscr{A}) := \mathbb{C}^m \setminus |\mathscr{A}|,$$

и аналогично для конфигураций в $\mathbb{R}^m$.

Конфигурации и их дополнения играют ключевую роль во многих конструкциях комбинаторики, алгебраической и симплектической геометрии и т. д.; они также возникают как конфигурационные пространства для различных классических механических систем. При изучении конфигураций весьма важно иметь достаточно детальное описание топологии дополнений $U(\mathscr{A})$ (оно включает число связных компонент, гомотопический тип, группы гомологий, кольца когомологий и т. д.). Множество замечательных результатов в этом направлении было получено в течение последних трех десятилетий, однако общая картина далека от завершения. Теория берет начало от работы Арнольда [4], в которой классифицирующее пространство для группы кос B_n описано как дополнение конфигурации диагональных гиперплоскостей $\{z_i = z_j\}$ в $\mathbb{C}^n$. Там же было вычислено кольцо когомологий дополнения этой конфигурации. Этот результат был обобщен Брискорном [18] и мотивировал дальнейшее развитие теории *конфигураций комплексных гиперплоскостей* (т.е. конфигураций комплексных аффинных подпространств коразмерности один). Одним из основных результатов здесь является следующая теорема.

Теорема 5.1.1 [4], [18], [65]. *Пусть $\mathscr{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ – конфигурация комплексных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^m$, причем гиперплоскость L_i задается как множество нулей линейной функции l_i, $i = 1, \dots, r$. Тогда алгебра целочисленных когомологий дополнения $\mathbb{C}^m \setminus |\mathscr{A}|$ изоморфна алгебре, порожденной замкнутыми дифференциальными 1-формами $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{dl_i}{l_i}$.*

Соотношения между формами $\dfrac{1}{2\pi i}\,\dfrac{dl_i}{l_i}$ явно описаны. В случае конфигурации диагональных гиперплоскостей $\{z_i = z_j\}$ мы имеем формы $\omega_{ij} = \dfrac{1}{2\pi i}\,\dfrac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$ и соотношения

$$\omega_{ij}\wedge\omega_{jk}+\omega_{jk}\wedge\omega_{ki}+\omega_{ki}\wedge\omega_{ij}=0.$$

Теория конфигураций комплексных гиперплоскостей, возможно, является наиболее разработанной областью общей теории конфигураций. По ней уже выпущено несколько монографий; мы упомянем лишь [66], где можно найти дальнейшие ссылки. Взаимосвязи между конфигурациями *вещественных* гиперплоскостей, многогранниками и *ориентированными матроидами* обсуждаются в [89; лекция 7].

В общей ситуации теорема Горески–Макферсона [42; ч. III] выражает группы когомологий $H^i(U(\mathscr{A}))$ (без кольцевой структуры) как сумму групп гомологий подкомплексов некоторого симплициального комплекса. Мы приводим этот результат ниже. Обзор результатов об общих конфигурациях плоскостей содержится в работе [14]. Ряд ключевых вопросов в этом направлении изложен в монографии [87].

Пусть $\mathscr{A}=\{L_1,\dots,L_r\}$ – конфигурация плоскостей в $\mathbb{R}^n$. Пересечения

$$v = L_{i_1}\cap\dots\cap L_{i_k}$$

образуют частично упорядоченное множество $(\mathscr{P},<)$ по отношению к включению (т.е. $v<w$ тогда и только тогда, когда v и w различны и v содержится в w). Мы предполагаем, что частично упорядоченное множество $\mathscr{P}$ содержит единственный максимальный элемент T, соответствующий объемлющему пространству конфигурации. *Функция ранга* d на $\mathscr{P}$ определяется как $d(v)=\dim v$. Порядковый комплекс $K(\mathscr{P})$ (пример 1.2.7) называется *порядковым комплексом конфигурации* $\mathscr{A}$. Положим

$$\mathscr{P}_{(v,w)}=\{x\in\mathscr{P}: v<x<w\},\qquad \mathscr{P}_{>v}=\{x\in\mathscr{P}: x>v\}.$$

Теорема 5.1.2 (Горески, Макферсон [42; ч. III]). *Имеет место следующая формула для гомологий дополнения* $U(\mathscr{A})$:

$$H_i\big(U(\mathscr{A});\mathbb{Z}\big)=\bigoplus_{v\in\mathscr{P}} H^{n-d(v)-i-1}\big(K(\mathscr{P}_{>v}),K(\mathscr{P}_{(v,T)});\mathbb{Z}\big),$$

где принято соглашение $H^{-1}(\varnothing,\varnothing)=\mathbb{Z}$.

Доказательство этой теоремы использует *стратифицированную теорию Морса*, разработанную в [42].

Замечание. Группы гомологий комплексной конфигурации в $\mathbb{C}^n$ можно вычислять, рассматривая ее как вещественную конфигурацию в $\mathbb{R}^{2n}$.

Кольца когомологий дополнений конфигураций изучены значительно хуже. Вообще говоря, кольцо целочисленных когомологий дополнения $U(\mathscr{A})$ *не определяется* частично упорядоченным множеством $\mathscr{P}$. Один из подходов к вычислению алгебры когомологий дополнения $U(\mathscr{A})$ был предложен Де Кончини и Прочези [34]. В частности, они доказали, что кольцо *рациональных* когомологий дополнения $U(\mathscr{A})$ определяется комбинаторикой пересечений. Этот результат был развит Юзвинским в [88].

§ 5.2. Конфигурации координатных подпространств и когомологии комплекса $\mathscr{Z}_K$. Конфигурация $\mathscr{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ называется *координатной*, если все плоскости L_i, $i = 1, \dots, r$, являются координатными подпространствами. В этом параграфе мы применяем результаты главы 4 к вычислению алгебр когомологий дополнений к конфигурациям комплексных координатных подпространств. Случай вещественных координатных конфигураций обсуждается в конце параграфа.

Любое координатное подпространство в $\mathbb{C}^m$ имеет вид

$$L_I = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}, \tag{72}$$

где $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ – некоторое подмножество в $[m]$. Очевидно, $\dim L_I = m - \#I$.

Конструкция 5.2.1. Для любого симплициального комплекса K на множестве $[m]$ введем комплексную координатную конфигурацию $\mathscr{CA}(K)$ как множество подпространств L_I таких, что I не является симплексом в K:

$$\mathscr{CA}(K) = \{L_I : I \notin K\}.$$

Обозначим дополнение конфигурации $\mathscr{CA}(K)$ через $U(K)$, т.е.

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin K} L_I. \tag{73}$$

Аналогичным образом определяется вещественная координатная конфигурация $U_{\mathbb{R}}(K)$. Если $K' \subset K$ – подкомплекс, то $U(K') \subset U(K)$.

Предложение 5.2.2. *Сопоставление $K \mapsto U(K)$ определяет сохраняющее порядок взаимно однозначное соответствие между симплициальными комплексами на множестве $[m]$ и дополнениями конфигураций координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{CA}$ – конфигурация координатных подпространств в $\mathbb{C}^m$. Определим

$$K(\mathscr{CA}) := \{I \subset [m] : L_I \not\subset |\mathscr{CA}|\}. \tag{74}$$

Легко видеть, что $K(\mathscr{CA})$ является симплициальным комплексом. По построению $K(\mathscr{CA})$ зависит лишь от $|\mathscr{CA}|$ (т.е. от $U(\mathscr{CA})$) и $U(K(\mathscr{CA})) = U(\mathscr{CA})$, откуда и вытекает утверждение.

Если координатная конфигурация $\mathscr{A}$ содержит некоторую гиперплоскость, скажем, $\{z_i = 0\}$, то ее дополнение $U(\mathscr{A})$ раскладывается как $U(\mathscr{A}_0) \times \mathbb{C}^*$, где $\mathscr{A}_0$ – координатная конфигурация в гиперплоскости $\{z_i = 0\}$ и $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Таким образом, для любой координатной конфигурации $\mathscr{A}$ дополнение $U(\mathscr{A})$ представляется в виде

$$U(\mathscr{A}) = U(\mathscr{A}') \times (\mathbb{C}^*)^k,$$

где $\mathscr{A}'$ – конфигурация координатных подпространств в $\mathbb{C}^{m-k}$, которая не содержит гиперплоскостей. С другой стороны, (74) показывает, что $\mathscr{CA}$ содержит гиперплоскость $\{z_i = 0\}$ тогда и только тогда, когда $\{i\}$ не является вершиной комплекса $K(\mathscr{CA})$. Отсюда вытекает, что $U(K)$ является дополнением координатной конфигурации, не содержащей гиперплоскостей, тогда и только тогда, когда множество вершин комплекса K есть все $[m]$. Принимая во внимание эти замечания, мы ограничимся рассмотрением координатных конфигураций без гиперплоскостей и симплициальных комплексов на множестве вершин $[m]$.

Замечание. Используя конструкцию 3.5.1, мы имеем $U(K) = K_{\bullet}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$.

Пример 5.2.3. 1. Если $K = \Delta^{m-1}$ ($(m-1)$-симплекс), то $U(K) = \mathbb{C}^m$.

2. Если $K = \partial\Delta^{m-1}$ (граница симплекса), то $U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$.

3. Если K представляет собой несвязное объединение m вершин, то $U(K)$ получается удалением из $\mathbb{C}^m$ всех координатных подпространств коразмерности два (т.е. вида $z_i = z_j = 0, i, j = 1, \ldots, m$).

Действие алгебраического тора $(\mathbb{C}^*)^m$ на $\mathbb{C}^m$ индуцирует действие на $U(K)$. В частности, на $U(K)$ определено стандартное действие тора T^m. Фактор-пространство $U(K)/T^m$ можно отождествить с пересечением $U(K) \cap \mathbb{R}^m_+$, где $\mathbb{R}^m_+$ рассматривается как подмножество в $\mathbb{C}^m$.

Лемма 5.2.4. $\mathrm{cc}(K) \subset U(K) \cap \mathbb{R}^m_+$ *и* $\mathcal{Z}_K \subset U(K)$ (*см. конструкцию* 1.5.9 *и* (39)).

Доказательство. Рассмотрим $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathrm{cc}(K)$. Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ обозначает максимальное подмножество в $[m]$ такое, что $y \in L_I \cap \mathbb{R}^n_+$ (т.е. $y_{i_1} = \cdots = y_{i_k} = 0$). Тогда из определения $\mathrm{cc}(K)$ (см. (22)) вытекает, что I является симплексом в K. Следовательно, $L_I \notin \mathcal{CA}(K)$ и $y \in U(K)$. Таким образом, первое утверждение доказано. Так как $\mathrm{cc}(K)$ является пространством орбит для действия тора T^m на $\mathcal{Z}_K$, второе утверждение следует из первого.

Теорема 5.2.5. *Имеет место эквивариантная деформационная ретракция* $U(K) \to \mathcal{Z}_K$.

Доказательство. Вначале мы построим деформационную ретракцию $r\colon U(K) \cap \mathbb{R}^m_+ \to \mathrm{cc}(K)$. Это делается по индукции. Мы начнем с граничного комплекса $(m-1)$-симплекса и будем удалять симплексы положительных размерностей, пока не получим K. На каждом шаге мы будем строить деформационную ретракцию, и композиция всех этих ретракций даст требуемую ретракцию r.

Если $K = \partial\Delta^{m-1}$ – граничный комплекс $(m-1)$-симплекса, то $U(K) \cap \mathbb{R}^m_+ = \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$. В этом случае ретракция r показана на рис. 11.

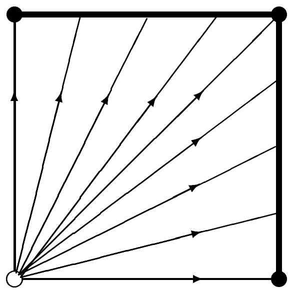


Рис. 11. Ретракция $r\colon U(K) \cap \mathbb{R}^m_+ \to \mathrm{cc}(K)$ для $K = \partial\Delta^{m-1}$

Пусть теперь K получается удалением одного $(k-1)$-мерного симплекса $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ из симплициального комплекса K', т.е. $K \cup J = K'$. По предположению индукции имеется деформационная ретракция $r'\colon U(K') \cap \mathbb{R}^m_+ \to \mathrm{cc}(K')$. Пусть $a \in \mathbb{R}^m_+$ – точка с координатами $y_{j_1} = \cdots = y_{j_k} = 0$, $y_i = 1$ при $i \notin J$. Так как J – не симплекс комплекса K, мы имеем $a \notin U(K) \cap \mathbb{R}^m_+$. В то же время, $a \in C_J$ (см. (19)). Таким образом, мы можем применить ретракцию, изображенную на рис. 11, на грани $C_J \subset I^m$ с центром в точке a. Обозначим эту ретракцию через r_J. Тогда $r = r_J \circ r'$ – требуемая деформационная ретракция.

Деформационная ретракция $r\colon U(K) \cap \mathbb{R}^m_+ \to \mathrm{cc}(K)$ накрывается эквивариантной деформационной ретракцией $U(K) \to \mathscr{Z}_K$.

В случае, когда $K = K_P$ есть многогранная симплициальная сфера, соответствующая простому многограннику P^n, деформационная ретракция $U(K_P) \to \mathscr{Z}_P$ из теоремы 5.2.5 может быть реализована как проекция на пространство орбит для действия стягиваемой группы. Введем обозначение $U(P^n) := U(K_P)$. Положим

$$\mathbb{R}^m_> = \bigl\{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m : y_i > 0,\ i = 1, \dots, m\bigr\} \subset \mathbb{R}^m_+.$$

Тогда $\mathbb{R}^m_>$ является группой по умножению, которая действует покоординатным умножением на $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$ и $U(P^n)$. Имеет место изоморфизм $\exp\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m_>$ между аддитивной и мультипликативной группой, который переводит $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ в $(e^{y_1}, \dots, e^{y_m}) \in \mathbb{R}^m_>$.

Рассмотрим матрицу W размера $m \times (m-n)$, построенную в конструкции 1.1.4 по простому многограннику (1).

Предложение 5.2.6. *Для любой вершины $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ многогранника P^n максимальный минор $W_{\widehat{i_1} \dots \widehat{i_n}}$ матрицы W, получаемый удалением n строк $i_1, \dots, i_n$, невырожден*: $\det W_{\widehat{i_1} \dots \widehat{i_n}} \neq 0$.

Доказательство. Если $\det W_{\widehat{i_1} \dots \widehat{i_n}} = 0$, то векторы $\boldsymbol{l}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{l}_{i_n}$ (см. (1)) линейно зависимы, что невозможно.

Матрица W определяет подгруппу

$$R_W = \bigl\{\bigl(e^{w_{11}\tau_1 + \dots + w_{1,m-n}\tau_{m-n}}, \dots, e^{w_{m1}\tau_1 + \dots + w_{m,m-n}\tau_{m-n}}\bigr)\bigr\} \subset \mathbb{R}^m_>, \tag{75}$$

где набор параметров $(\tau_1, \dots, \tau_{m-n})$ пробегает пространство $\mathbb{R}^{m-n}$. Очевидно, $R_W \cong \mathbb{R}^{m-n}_>$.

Теорема 5.2.7 [22; теорема 2.3]. *Подгруппа $R_W \subset \mathbb{R}^m_>$ действует на $U(P^n) \subset \mathbb{C}^m$ свободно. Композиция $\mathscr{Z}_P \hookrightarrow U(P^n) \to U(P^n)/R_W$ вложения i_e (лемма 3.1.6) и проекции на пространство орбит является эквивариантными (относительно действия T^m) диффеоморфизмом.*

Доказательство. Точка в $\mathbb{C}^m$ имеет нетривиальную стационарную подгруппу относительно действия $\mathbb{R}^m_>$ на $\mathbb{C}^m$ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из ее координат обращается в нуль. Из (73) вытекает, что если точка $x \in U(P^n)$ имеет некоторые нулевые координаты, то соответствующие этим координатам гиперграни P^n имеют хотя бы одну общую вершину $v \in P^n$. Пусть $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$. Стационарная подгруппа точки x относительно действия подгруппы R_W нетривиальна, только если некоторая линейная комбинация столбцов матрицы W лежит в координатном пространстве, порожденном $\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_n}$. Но это означает, что $\det W_{\widehat{i_1} \dots \widehat{i_n}} = 0$, что противоречит предложению 5.2.6. Итак, R_W действует на $U(P^n)$ свободно.

Для доказательства второй части теоремы достаточно показать, что каждая орбита действия R_W на $U(P^n) \subset \mathbb{C}^m$ пересекает образ $i_e(\mathscr{Z}_P)$ в единственной точке. Так как вложение i_e эквивариантно относительно действия T^m, последнее утверждение эквивалентно тому, что каждая орбита действия R_W на $U(P^n) \cap \mathbb{R}^m_+$ пересекает образ $i_P(P^n)$ (см. теорему 1.5.6) в единственной точке. Пусть $y \in i_P(P^n) \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $y = (y_1, \ldots, y_m)$ лежит на некоторой n-грани $i_P(C^n_v)$ куба $I^m \subset \mathbb{R}^m$, см. (20). Мы должны доказать, что $(m-n)$-мерное подпространство, порожденное векторами $(w_{11}y_1, \ldots, w_{m1}y_m)^t, \ldots, (w_{1,m-n}y_1, \ldots, w_{m,m-n}y_m)^t$, находится в общем положении с n-гранью $i_P(C^n_v)$ куба I^m. Но это вытекает непосредственно из (20) и предложения 5.2.6.

Предположим теперь, что P^n является решеточным простым многогранником, и пусть M_P – соответствующее торическое многообразие (конструкция 2.1.3). Наряду с вещественной подгруппой $R_W \subset \mathbb{R}^m_>$ (75) определим

$$C_W = \left\{(e^{w_{11}\phi_1+\cdots+w_{1,m-n}\phi_{m-n}}, \ldots, e^{w_{m1}\phi_1+\cdots+w_{m,m-n}\phi_{m-n}})\right\} \subset (\mathbb{C}^*)^m,$$

где набор параметров $(\phi_1, \ldots, \phi_{m-n})$ пробегает пространство $\mathbb{C}^{m-n}$. Очевидно, $C_W \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n}$. В работах [7], [11], [31] показано, что C_W действует свободно на $U(P^n)$ и торическое многообразие M_P может быть отождествлено с пространством орбит (или *геометрическим фактором*) $U(P^n)/C_W$. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U(P^n) \arrow[r, "R_W \cong \mathbb{R}^{m-n}_>"] \arrow[d, "C_W \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n}"'] & \mathscr{Z}_P \arrow[d, "T^{m-n}"] \\ M_P \arrow[r, equal] & M_P \end{tikzcd} \tag{76}$$

Замечание. Можно показать [31; теорема 2.1], что *любое* торическое многообразие M_Σ, построенное по вееру $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ с m одномерными конусами, отождествляется с универсальным категорным фактор-пространством $U(\mathscr{CA}_\Sigma)/G$, где $U(\mathscr{CA}_\Sigma)$ – дополнение некоторой координатной конфигурации, определяемой веером Σ, а $G \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n}$. Категорный фактор является геометрическим фактором тогда и только тогда, когда веер Σ симплициален. В этом случае $U(\mathscr{CA}_\Sigma) = U(K_\Sigma)$.

С другой стороны, если проективное торическое многообразие M_P неособо, то M_P является симплектическим многообразием размерности $2n$ и действие тора T^n на нем гамильтоново [7]. В этом случае диаграмма (76) описывает M_P как результат так называемой *симплектической редукции*. А именно, пусть $H_W \cong T^{m-n}$ – максимальная компактная подгруппа в C_W и $\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ – *отображение моментов* для гамильтонова действия группы H_W на $\mathbb{C}^m$. Тогда для любого регулярного значения $a \in \mathbb{R}^{m-n}$ отображения μ имеет место диффеоморфизм

$$\mu^{-1}(a)/H_W \longrightarrow U(P^n)/C_W = M_P$$

(подробности см. в [7]). Тогда $\mu^{-1}(a)$ есть в точности наше многообразие $\mathscr{Z}_P$. Таким образом, мы получаем еще одну интерпретацию многообразия $\mathscr{Z}_P$ как многообразия уровня отображения моментов (в случае, когда P^n допускает геометрическую реализацию, дающую неособое торическое многообразие).

Пример 5.2.8. Пусть $P^n = \Delta^n$ (n-симплекс). Тогда $m = n+1$, $U(P^n) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, а $R_W \cong \mathbb{R}_>$, $C_W \cong \mathbb{C}^*$ и $H_W \cong S^1$ – диагональные подгруппы в $\mathbb{R}_>^{n+1}$, $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ и T^{m+1} соответственно (см. пример 1.1.5). Итак, $\mathscr{Z}_P \cong S^{2n+1} = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}_>$ и $M_P = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}P^n$. Отображение моментов $\mu\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ переводит $(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ в $\frac{1}{2}(|z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2)$, и для $a \neq 0$ мы имеем $\mu^{-1}(a) \cong S^{2n+1} \cong \mathscr{Z}_K$.

Предыдущие обсуждения иллюстрируют важность вычисления когомологий дополнений конфигураций координатных подпространств.

Теорема 5.2.9 (Бухштабер, Панов). *Имеет место следующий изоморфизм градуированных алгебр*:

$$H^*\big(U(K)\big) \cong \operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\big) = H\big[\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbf{k}(K), d\big].$$

Доказательство. Это вытекает из теорем 5.2.5, 4.2.1 и 4.2.2.

Теорема 5.2.9 дает весьма эффективный способ вычисления алгебры когомологий дополнения произвольной конфигурации комплексных координатных подпространств. Модели этой алгебры, использованные де Кончини и Прочези [34] и Юзвинским [88], также можно интерпретировать как приложение резольвенты Кошуля. Однако этими авторами не обсуждались взаимоотношения с кольцом Стенли–Райснера в случае координатных конфигураций.

Проблема 5.2.10. *Описать алгебру когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ дополнения конфигурации координатных подпространств и связать ее с соответствующей* Tor-*алгеброй* $\operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}(K), \mathbb{Z})$.

Пример 5.2.11. Пусть K – несвязное объединение m вершин. Тогда $U(K)$ получается удалением из $\mathbb{C}^m$ всех координатных подпространств коразмерности два, т.е. вида $z_i = z_j = 0$, $i, j = 1, \ldots, m$ (см. пример 5.2.3). Кольцо граней есть $\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]/\mathscr{I}_K$, где идеал $\mathscr{I}_K$ порожден мономами v_iv_j, $i \neq j$. Простое вычисление с использованием теоремы 5.2.9 показывает, что подпространство коциклов в $\mathbf{k}(K) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ имеет базис, состоящий из мономов $v_{i_1}u_{i_2}u_{i_3}\cdots u_{i_k}$ с $k \geqslant 2$, $i_p \neq i_q$ при $p \neq q$. Так как $\deg(v_{i_1}u_{i_2}u_{i_3}\cdots u_{i_k}) = k+1$, пространство $(k+1)$-мерных коциклов имеет размерность $m\binom{m-1}{k-1}$. Пространство $(k+1)$-мерных кограниц имеет размерность $\binom{m}{k}$ (оно порождается кограницами вида $d(u_{i_1}\cdots u_{i_k})$). Следовательно,

$$\dim H^0\big(U(K)\big) = 1, \qquad H^1\big(U(K)\big) = H^2\big(U(K)\big) = 0,$$
$$\dim H^{k+1}\big(U(K)\big) = m\tbinom{m-1}{k-1} - \tbinom{m}{k} = (k-1)\tbinom{m}{k}, \qquad 2 \leqslant k \leqslant m,$$

а умножение в когомологиях тривиально.

В частности, при $m = 3$ мы имеем 6 трехмерных классов когомологий $[v_iu_j]$, $i \neq j$, с 3 соотношениями $[v_iu_j] = [v_ju_i]$ и 3 четырехмерных класса когомологий $[v_1u_2u_3]$, $[v_2u_1u_3]$, $[v_3u_1u_2]$ с одним соотношением

$$[v_1u_2u_3] - [v_2u_1u_3] + [v_3u_1u_2] = 0.$$

Следовательно, $\dim H^3(U(K)) = 3$, $\dim H^4(U(K)) = 2$, а умножение тривиально.

Пример 5.2.12. Пусть K – граница m-угольника на плоскости с $m \geqslant 3$. Тогда

$$U(K) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{i-j\neq 0,1 \bmod m} \{z_i = z_j = 0\}.$$

Из теоремы 5.2.9 вытекает, что кольцо когомологий $H^*(U(K);\mathbf{k})$ изоморфно кольцу, описанному в примере 4.3.5.

Как показано в [41], в случае конфигураций *вещественных* координатных подпространств имеет место лишь *аддитивный* аналог нашей теоремы 5.2.9. А именно, рассмотрим теперь кольцо многочленов $\mathbf{k}[x_1,\dots,x_m]$, в котором $\deg x_i = 1$, $i = 1,\dots,m$, и соответственно сменим градуировки в кольце граней $\mathbf{k}(K)$. Тогда числа Бетти вещественной координатной конфигурации $U_{\mathbb{R}}(K)$ вычисляются при помощи следующего результата.

Теорема 5.2.13 [41; теорема 3.1]. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^p\bigl(U_{\mathbb{R}}(K)\bigr) \cong \sum_{-i+j=p} \operatorname{Tor}^{-i,j}_{\mathbf{k}[x_1,\dots,x_m]}\bigl(\mathbf{k}(K),\mathbf{k}\bigr) = H^{-i,j}\bigl[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}(K),d\bigr],$$

где $\operatorname{bideg} u_i = (-1,1)$, $\operatorname{bideg} v_i = (0,1)$, $du_i = x_i$, $dx_i = 0$.

Как было отмечено в [41], мультипликативный изоморфизм, аналогичный теореме 5.2.9, для вещественных конфигураций *не имеет места*, т.е. алгебры $H^*(U_{\mathbb{R}}(K))$ и $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[x_1,\dots,x_m]}(\mathbf{k}(K),\mathbf{k})$, вообще говоря, не изоморфны. В [41] также содержится формулировка первого мультипликативного изоморфизма из нашей теоремы 5.2.9 для комплексных координатных конфигураций (см. [41; теорема 3.6]) со ссылкой на неопубликованную работу Бабсона и Чана.

До сих пор мы использовали описание координатных подпространств при помощи уравнений (см. (72)). С другой стороны, их можно задавать в виде линейных оболочек соответствующих подмножеств множества базисных векторов $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m\}$. Это приводит к двойственному подходу в описании конфигураций координатных подпространств, который соответствует переходу от симплициального комплекса K к ассоциированному симплициальному комплексу $\widehat{K}$ (пример 1.2.4). Этот подход использован в [35]. Там было показано, что слагаемые в формуле Горески–Макферсона (теорема 5.1.2) в случае координатных конфигураций являются группами гомологий линков симплексов из $\widehat{K}$. Это позволило интерпретировать операцию умножения классов когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств (вещественных или комплексных) в терминах комбинаторики линков симплексов комплекса $\widehat{K}$ (см. [35; теорема 1.1]).

Обратим внимание, что наши теоремы 4.2.2 и 5.2.5 позволяют установить эквивалентность результата Горески–Макферсона (теорема 5.1.2) в случае конфигураций координатных подпространств и теоремы Хохстера (теорема 1.4.5).

§ 5.3. Конфигурации диагональных подпространств и когомологии пространства петель $\Omega\mathscr{Z}_K$. В настоящем параграфе мы устанавливаем взаимосвязи между результатами работы [71] о когомологиях дополнений вещественных диагональных координатных подпространств и когомологиями пространств петель $\Omega B_T\mathscr{Z}_K$ и $\Omega\mathscr{Z}_K$.

Для каждого подмножества $I=\{i_1,\dots,i_k\}\subset[m]$ определим *диагональное подпространство* D_I в $\mathbb{R}^m$ как

$$D_I=\bigl\{(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m : y_{i_1}=\dots=y_{i_k}\bigr\}.$$

Аналогично определяются диагональные подпространства в $\mathbb{C}^m$. Конфигурация $\mathscr{A}=\{L_1,\dots,L_r\}$ (вещественная или комплексная) называется *диагональной*, если все плоскости L_i, $i=1,\dots,r$, являются диагональными подпространствами. Классическим примером комплексной диагональной конфигурации является конфигурация всевозможных диагональных гиперплоскостей $\{z_i=z_j\}$ в $\mathbb{C}^m$, дополнение которой представляет собой классифицирующее пространство для группы кос B_m, см. [4].

Конструкция 5.3.1. Для любого симплициального комплекса K на множестве вершин $[m]$ введем вещественную диагональную конфигурацию $\mathscr{D}\mathscr{A}(K)$ как множество подпространств D_I, где I не является симплексом в K:

$$\mathscr{D}\mathscr{A}(K)=\{D_I : I\notin K\}.$$

Обозначим дополнение конфигурации $\mathscr{D}\mathscr{A}(K)$ через $M(K)$.

Аналогично тому, как это делалось в § 5.2 для координатных конфигураций, доказывается следующее утверждение.

Предложение 5.3.2. *Сопоставление $K\mapsto M(K)$ определяет сохраняющее порядок взаимно однозначное соответствие между симплициальными комплексами на множестве вершин $[m]$ и дополнениями конфигураций диагональных подпространств в $\mathbb{R}^m$.*

Здесь мы, как и ранее, предполагаем, что $\mathbf{k}$ – поле. Мультиградуированная (или $\mathbb{N}^m$-градуированная) структура в кольце $\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$ (конструкция 1.4.7), определяет $\mathbb{N}^m$-градуировку в кольце Стенли–Райснера $\mathbf{k}(K)$. При этом моном $v_1^{i_1}\cdots v_m^{i_m}$ приобретает мультистепень $(2i_1,\dots,2i_m)$. Рассмотрим модули $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}(K)}(\mathbf{k},\mathbf{k})$; их можно вычислять, например, при помощи минимальной свободной резольвенты (пример 1.4.2) поля $\mathbf{k}$, рассматриваемого как $\mathbf{k}(K)$-модуль. Минимальная резольвента также несет естественную $\mathbb{N}^m$-градуировку, и мы будем обозначать подгруппу элементов мультиградуировки $(2i_1,\dots,2i_m)$ в $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}(K)}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ через $\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}(K)}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{(2i_1,\dots,2i_m)}$.

Теорема 5.3.3 [71; теорема 1.3]. *Для групп когомологий дополнения $M(K)$ вещественной конфигурации диагональных подпространств имеет место изоморфизм*

$$H^i\bigl(M(K);\mathbf{k}\bigr)\cong\operatorname{Tor}^{-(m-i)}_{\mathbf{k}(K)}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{(2,\dots,2)}.$$

Замечание. Вместо симплициальных комплексов K на множестве вершин $[m]$ в [71] рассматривались мономиальные идеалы $\mathscr{I}\subset\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]$, имеющие базис из мономов без квадратов. Эквивалентность этих двух подходов вытекает из предложения 1.3.2.

Теорема 5.3.4. *Имеет место аддитивный изоморфизм*

$$H^*(\Omega B_T\mathcal{Z}_K;\mathbf{k}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}(K)}(\mathbf{k},\mathbf{k}).$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную последовательность Эйленберга–Мура расслоения в смысле Серра $P \to SR(K)$ со слоем $\Omega SR(K)$, где $SR(K)$ – пространство Стенли–Райснера (определение 3.4.2), а P – пространство путей над $SR(K)$. В силу следствия 4.1.4 мы имеем

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(SR(K))}\big(H^*(P),\mathbf{k}\big) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}(K)}(\mathbf{k},\mathbf{k}), \tag{77}$$

и спектральная последовательность сходится к

$$\mathrm{Tor}_{C^*(SR(K))}(C^*(P),\mathbf{k}) \cong H^*(\Omega SR(K)).$$

Так как P стягиваемо, мы имеем коцепную эквивалентность $C^*(P) \simeq \mathbf{k}$. Кроме того, $C^*(SR(K)) \cong \mathbf{k}(K)$. Следовательно,

$$\mathrm{Tor}_{C^*(SR(K))}\big(C^*(P),\mathbf{k}\big) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}(K)}(\mathbf{k},\mathbf{k}),$$

что вместе с (77) показывает, что спектральная последовательность вырождается в члене E_2, т.е.

$$H^*(\Omega SR(K)) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}(K)}(\mathbf{k},\mathbf{k}).$$

Наконец, теорема 3.4.4 показывает, что

$$H^*(\Omega SR(K)) \cong H^*(\Omega B_T\mathcal{Z}_K),$$

что завершает доказательство.

Предложение 5.3.5. *Имеет место изоморфизм алгебр*

$$H^*(\Omega B_T\mathcal{Z}_K) \cong H^*(\Omega\mathcal{Z}_K) \otimes \Lambda[u_1,\ldots,u_m].$$

Доказательство. Рассмотрим расслоение $B_T\mathcal{Z}_K \to BT^m$ со слоем $\mathcal{Z}_K$. Нетрудно доказать, что соответствующее расслоение петель $\Omega B_T\mathcal{Z}_K \to T^m$ со слоем $\Omega\mathcal{Z}_K$ тривиально (заметим, что $\Omega BT^m \cong T^m$). Для доказательства утверждения остается заметить, что $H^*(T^m) \cong \Lambda[u_1,\ldots,u_m]$.

Теоремы 5.2.5 и 5.2.9 позволяют использовать теорию момент-угол комплексов для вычисления кольца когомологий дополнения координатной конфигурации. Аналогично, теоремы 5.3.3, 5.3.4 и предложение 5.3.5 позволяют связать когомологии дополнений конфигураций диагональных подпространств и когомологии пространства петель над момент-угол комплексом $\mathcal{Z}_K$. Однако в этом случае ситуация значительно сложнее, чем в случае конфигураций координатных подпространств. В частности, мы не имеем аналога *мультипликативного* изоморфизма из теоремы 5.2.9. Поэтому данный заключительный параграф мы рассматриваем лишь как первый шаг в изучении дополнений диагональных конфигураций при помощи теории момент-угол комплексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Adams J. F. On the cobar construction // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. V. 42. P. 409–412.

[2] Adams J. F. On the non-existence of elements of Hopf invariant one // Ann. of Math. (2). 1960. V. 72. №1. P. 20–104.

[3] Akbulut S., McCarthy J. D. Casson's Invariant for Oriented Homology 3-spheres. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1990.

[4] Арнольд В. И. Кольцо когомологий группы крашенных кос // Матем. заметки. 1969. Т. 5. С. 227–231.

[5] Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I // Ann. of Math. (2). 1967. V. 86. №2. P. 374–407.

[6] Atiyah M. F., Hirzebruch F. Spin-manifolds and group actions // Essays in Topology and Related Topics. Berlin: Springer-Verlag, 1970. P. 18–28.

[7] Audin M. The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Boston: Birkhäuser, 1991.

[8] Bahri A., Bendersky M. The KO-theory of toric manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. №3. P. 1191–1202; `http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/9904087`.

[9] Barnette D. The triangulations of the 3-sphere with up to 8 vertices // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1973. V. 14. P. 37–42.

[10] Barnette D. A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes // Pacific J. Math. 1973. V. 46. P. 349–354.

[11] Batyrev V. V. Quantum cohomology rings of toric manifolds // Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Juillet, 1992). Paris: Sociéte Mathématique de France, 1993. P. 9–34 (Astérisque. V. 218.); `http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9310004`.

[12] Bayer M., Billera L. Generalized Dehn–Sommerville relations for polytopes, spheres and Eulerian partially ordered sets // Invent. Math. 1985. V. 79. P. 143–157.

[13] Billera L., Lee C. Sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial polytopes // Bull. Amer. Math. Soc. 1980. V. 2. P. 181–185.

[14] Björner A. Subspace arrangements // Proc. of the First European Congress of Mathematics (Paris, 1992). V. 1 / ed. A. Joseph et al. Birkhäuser: Basel, 1994. P. 321–370.

[15] Björner A., Lutz F. Simplicial manifolds, bistellar flips and 16-vertex triangulation of the Poincaré homology 3-sphere // Preprint, 1999; `http://www.math.kth.se/~bjorner/papers.html`.

[16] Boyer C., Galicki K., Mann B., Rees E. Compact 3-Sasakian 7-manifolds with arbitrary second Betti number // Invent. Math. 1998. V. 131. P. 321–344.

[17] Brieskorn E. Sur les groupes de tresses (d'après V.I. Arnol'd) // Séminaire Bourbaki 1971/72. Berlin: Springer-Verlag, 1973. P. 21–44. (Lecture Notes in Math. V. 317.)

[18] Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.

[19] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками // УМН. 1998. Т. 53. №3. С. 195–196.

[20] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Действия тора и комбинаторика многогранников // Труды МИРАН. 1999. Т. 225. С. 96–131.

[21] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Действия тора, эквивариантные момент-угол-комплексы и конфигурации координатных подпространств // Зап. научн. семин. ПО МИРАН. 2000. Т. 266. С. 29–50.

[22] Buchstaber V. M., Panov T. E. Torus actions determined by simple polytopes // Contemp. Math. 2000. V. 258. P. 33–46.

[23] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Момент-угол комплексы и комбинаторика симплициальных многообразий // УМН. 2000. Т. 55. №3. С. 171–172.

[24] Buchstaber V. M., Ray N. Flag manifolds and the Landweber–Novikov algebra // Geometry & Topology. 1998. V. 2. P. 79–101; `http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/`.

[25] Бухштабер В. М., Рай Н. Торические многообразия и комплексные кобордизмы // УМН. 1998. Т. 53. №2. С. 139–140.

[26] Buchstaber V. M., Ray N. Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes // Preprint UMIST no. 2000/5, Manchester, 2000; Internat. Math. Res. Notices (to appear).

[27] Cannon J. W. Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three // Ann. of Math. (2). 1979. V. 110. P. 83–112.

[28] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.

[29] Charney R., Davis M. The Euler characteristic of a nonpositively curved, piecewise Euclidean manifold // Pacific J. Math. 1995. V. 171. P. 117–137.

[30] Chen B., Yan M. Singularity from Eulerian viewpoint // Труды МИРАН. 1998. Т. 221. С. 305–319.

[31] Cox D. A. Recent developments in toric geometry // Proc. Sympos. Pure Math. 1997. V. 62. P. 389–436; `http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9606016`.

[32] Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. №2. С. 85–134.

[33] Davis M., Januszkiewicz T. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. V. 62. №2. P. 417–451.

[34] De Concini C., Procesi C. Wonderful models of subspace arrangements // Selecta Math. New Ser. 1995. V. 1. P. 459–494.

[35] De Longueville M. The ring structure on the cohomology of coordinate subspace arrangements // Math. Z. 2000. V. 233. №3. P. 553–577.

[36] Добринская Н. Э. Задача классификации квазиторических многообразий над заданным простым полиэдром // Функц. анализ и прил. 2000. Т. 34. №4 (в печати).

[37] Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. Кубические подкомплексы в правильных решетках // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. №2. С. 277–279.

[38] Edwards R. D. The topology of manifolds and cell-like maps // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978). Helsinki, 1980. P. 111–127.

[39] Eilenberg S., Moore J. C. Homology and fibrations. I // Comment. Math. Helv. 1966. V. 40. P. 199–236.

[40] Fulton W. Introduction to Toric Varieties. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.

[41] Gasharov V., Peeva I., Welker V. Coordinate subspace arrangements and monomial ideals // Preprint, 1999; `http://www.mathematik.uni-marburg.de/~welker/sections/preprints.html`.

[42] Грески М., Макферсон Р. Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.

[43] Gromov M. Hyperbolic groups // Essays in Group Theory / ed. S.M. Gersten. New York: Springer-Verlag, 1987. P. 75–264. (Math. Sci. Res. Inst. Publ. V. 8.)

[44] Hattori A. Almost complex toric manifolds and complex line bundles // Banach Center Publ. V. 45, 1998. P. 95–114.

[45] Hirzebruch F., Berger T., Jung R. Manifolds and Modular Forms. Bonn: Max-Planc-Institut für Mathematik, 1994.

[46] Hochster M. Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes // Ring Theory II. Proc. Second Oklahoma Conference / ed. B.R. McDonald and R. Morris. New York: Dekker, 1977. P. 171–223.

[47] Изместьев И. В. Многообразия, определяемые простыми многогранниками, как конфигурационные пространства шарнирных механизмов // УМН. 2000. Т. 55. №1. С. 185–186.

[48] Изместьев И. В. 3-мерные многообразия, определяемые раскраской граней простого многогранника // Матем. заметки. 2001. Т. 66 (в печати).

[49] Jänich K. On the classification of $O(n)$-manifolds // Math. Ann. 1968. V. 176. P. 53–76.

[50] Хованский А. Г. Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского // Функц. анализ и прил. 1986. Т. 20. №1. С. 50–61.

[51] Kirby R. C., Siebenmann L. C. Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1977. (Ann. of Math. Stud. V. 88.)

[52] Klee V. A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem // Canad. J. Math. 1964. V. 16. P. 517–531.

[53] Kleinschmidt P. A classification of toric varieties with few generators // Aequationes Math. 1988. V. 35. №2–3. P. 254–266.

[54] Landweber P. S. Homological properties of comodules over $MU_*(MU)$ and $BP_*(BP)$ // Amer. J. Math. 1976. V. 98. P. 591–610.

[55] Leung N. C., Reiner V. The signature of a toric variety // Preprint, 1999; http://www.math.umn.edu/~reiner/Papers/papers.html.

[56] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.

[57] Masuda M. Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index // Tohoku Math. J. 1999. V. 51. P. 237–265.

[58] McMullen P. The numbers of faces of simplicial polytopes // Israel J. Math. 1971. V. 9. P. 559–570.

[59] McMullen P. On simple polytopes // Invent. Math. 1993. V. 113. P. 419–444.

[60] Международный математический конгресс в Эдинбурге 1958 г. (обзорные доклады). М.: Физматлит, 1962.

[61] Moise E. E. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. New York: Springer-Verlag, 1977.

[62] Novikov S. P. Topology I. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[63] Oda T. Convex Bodies and Algebraic Geometry. New York: Springer-Verlag, 1988.

[64] Orlik P., Raymond F. Actions of the torus on 4-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 152. P. 531–559.

[65] Orlik P., Solomon L. Combinatorics and topology of complements of hyperplanes // Invent. Math. 1980. V. 56. P. 167–189.

[66] Orlik P., Terao H. Arrangements of Hyperplanes. New York: Springer-Verlag, 1992.

[67] Pachner U. Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1986. V. 57. P. 69–85.

[68] Pachner U. P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings // European J. Combin. 1991. V. 12. P. 129–145.

[69] Панов Т. Е. Комбинаторные формулы для χ_y-рода полиориентированного квазиторического многообразия // УМН. 1999. Т. 54. №5. С. 169–170.

[70] Panov T. E. Hirzebruch genera of manifolds with torus actions // Preprint, 1999; http://xxx.lanl.gov/abs/math.AT/9910083.

[71] Peeva I., Reiner V., Welker V. Cohomology of real diagonal subspace arrangements via resolutions // Compositio Math. 1999. V. 117. №1. P. 99–115.

[72] Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1986.

[73] Ranicki A. A. On the Hauptvermutung // The Hauptvermutung book, K-Monogr. Math. V. 1. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 3–31.

[74] Reisner G. Cohen–Macaulay quotients of polynomial rings // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 30–49.

[75] Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно-линейную топологию. М.: Мир, 1974.

[76] Штанько М. А., Штогрин М. И. О вложениях кубических многообразий и комплексов в кубическую решетку // УМН. 1992. Т. 47. №1. С. 219–220.

[77] Smith L. Homological algebra and the Eilenberg–Moore spectral sequence // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 129. P. 58–93.

[78] Sommerville D. M. Y. The relations connecting the angle-sums and volume of a polytope in space of n dimensions // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1927. V. 115. P. 103–119.

[79] Stanley R. Hilbert functions of graded algebras // Adv. Math. 1978. V. 28. P. 57–83.

[80] Stanley R. The number of faces of simplicial convex polytope // Adv. Math. 1980. V. 35. P. 236–238.

[81] Stanley R. A monotonicity property of h-vectors and h^*-vectors // European J. Combin. 1993. V. 14. P. 251–258.

[82] Stanley R. Combinatorics and Commutative Algebra. Boston: Birkhäuser, 1996.

[83] Stanley R. Positivity problems and conjectures in algebraic combinatorics // Mathematics: Frontiers and Perspectives / ed. V. Arnold et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. P. 295–319.
[84] Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.
[85] Tay T., White N., Whiteley W. Skeletal rigidity of simplicial complexes. I, II // European. J. Combin. 1995. V. 16. №4. P. 381–403; №5. P. 503–523.
[86] Тиморин В. А. Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников // УМН. 1999. Т. 54. №2. С. 113–162.
[87] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.
[88] Yuzvinsky S. Small rational model of subspace complement // Preprint, 1999; `http://xxx.lanl.gov/abs/math.CO/9806143`.
[89] Ziegler G. Lectures on Polytopes. New York: Springer-Verlag, 1995.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
10.08.2000

E-mail: `buchstab@mech.math.msu.su`, `buchstab@mendeleevo.ru`;
`tpanov@mech.math.msu.su`