

ОДНО ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ БЕЗРИСКОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ

© 2007 г. Академик В. П. Маслов, В. В. Выюгин

Поступило 30.08.2006 г.

Одной из важнейших проблем, связанных с управлением финансами, является задача оптимального распределения инвестиций в условиях постоянно изменяющихся уровней доходности по различным финансовым инструментам. В данной работе на основе понятий энтропии фондового рынка и алгоритмической сложности распределения инвестиций приводится одно достаточное условие существования безрискового инвестиционного портфеля.

КОМБИНАТОРНАЯ МОДЕЛЬ ФОНДОВОГО РЫНКА

Как отмечается в новейших исследованиях [6], движение фондового рынка в большей степени зависит от структуры и ограничений торговой системы в целом, чем от индивидуальных стратегий участников рынка (эффект Zero Intelligence). Однако применение вероятностных методов для анализа финансовых данных встречается с трудностями, связанными с тем, что мы имеем дело только с одной "исторической" траекторией цен финансового инструмента (акции, облигации и т.д.), тогда как вероятностные модели применимы в условиях повторяемости данных при одинаковых условиях. В связи с этим возникает необходимость использования методов анализа, применимых к индивидуальным объектам. Один из таких методов использует понятие колмогоровской алгоритмической сложности, на основе которой определяется понятие стохастичности индивидуального объекта при заданных ограничениях.

Мы рассмотрим простейшую математическую модель фондового рынка, аналогичную модели [8]. Имеется M финансовых инструментов (акций, облигаций или других ценных бумаг), которые пронумерованы числами $i = 1, 2, \dots, M$. Предпола-

гаем, что единица измерения количества инвестиций измеряется в долях стоимости всего рынка. В качестве такой единицы выбираем $\frac{1}{N}$ часть стоимости рынка, где N – некоторое достаточно большое натуральное число. Далее величины M и N будут одинакового порядка. При таком выборе единицы измерения, если общая стоимость всех финансовых инструментов рынка в рублях (долларах и др.) возрастает (или уменьшается), то в той же пропорции и в той же валюте возрастает (соответственно уменьшается) стоимость нашей единицы измерения.

Структуру распределения общей суммы долей рынка между всеми финансовыми инструментами рынка в момент $t - 1$ можно характеризовать вектором $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$, где n_i – число единиц рынка, вложенных в i -й финансовый инструмент, $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, M$. Имеем $n_1 + n_2 + \dots + n_M = N$. Предполагаем, что величины n_i – целые числа. В соответствии с выбором единицы измерения общая сумма долей различных финансовых инструментов в разные моменты времени в целом должна оставаться равной N . Изменение величин этих долей по M финансовым позициям на момент t по сравнению с моментом $t - 1$ характеризуется вектором относительных доходов (потерь) $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M)$, где каждое ϵ_i удовлетворяет неравенству $-1 \leq \epsilon_i < \infty$ и имеет следующий смысл. Если в момент $t - 1$ доля i -го финансового инструмента составляла n_i единиц рынка, то в момент времени t в результате изменения цен этого и других финансовых инструментов эта доля изменилась до величины $(1 + \epsilon_i)n_i$. Здесь $\epsilon_i n_i$ – доход (или потеря) в момент t при инвестиции n_i единиц рынка в i -й финансовый инструмент в момент $t - 1$ (величина ϵ_i измеряет относительный доход от вложенной суммы инвестиций).

Мы отметим два основных свойства рассмотренной модели:

1) условие замкнутости рынка: общая сумма долей различных финансовых инструментов, которая была в момент $t - 1$, остается приблизительно прежней в момент t , т.е. выполнено $(1 + \epsilon_1)n_1 +$

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Институт проблем передачи информации
Российской Академии наук, Москва

$+ (1 + \epsilon_1)n_1 + \dots + (1 + \epsilon_M)n_M \approx N$. Это условие вытекает из определения нашей единицы измерения;

2) второе свойство следует из свойств алгоритмической сложности набора долей финансовых инструментов. Предварительно уточним условие 1) и введем понятие сложности. Фиксируем некоторую неубывающую неограниченную функцию $\alpha(N)$, такую, что $\alpha(N) = o(N)$ при $N \rightarrow \infty$. Пусть $\mathcal{D}_N(\bar{\epsilon})$ – множество всех целочисленных векторов $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$, удовлетворяющих условиям $n_i \geq 0$ при $i = 1, 2, \dots, M$, а также

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \dots + n_M &= N, \\ |n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots + n_M\epsilon_M| &\leq \alpha(N). \end{aligned} \quad (1)$$

Точное определение понятия сложной структуры долей финансовых инструментов основано на понятии колмогоровской (алгоритмической) сложности индивидуального объекта [3, 7]. Пусть $F(p, y)$ – вычислимая функция, принимающая значения в множестве всех слов в некотором алфавите B – способ декодирования. Здесь p – конечное двоичное слово, y – слово (возможно, в другом, отличном от B алфавите). Мера сложности слова x при известном y определяется как

$$\mathcal{K}_F(x|y) = \min\{l(p) \mid F(p, y) = x\},$$

где $l(p)$ – длина двоичного слова p , которое является кодом слова x при условии y (полагаем $\min\emptyset = \infty$). Существует оптимальный способ декодирования $F(p, y)$ такой, что для любого другого способа декодирования $F(p, y)$ выполнено $\mathcal{K}_F(x|y) \leq \mathcal{K}_F(x|y) + O(1)$, где константа $O(1)$ не зависит от x и y (но зависит от функции F). Мера сложности $\mathcal{K}_F(x|y)$ обозначается $\mathcal{K}(x|y)$ и называется (условной) колмогоровской сложностью x относительно y . Безусловная сложность слова x определяется как $\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(x|\Lambda)$, где Λ – пустое слово.

Для задания произвольного элемента x конечного множества D достаточно знать D , например в виде списка элементов, и порядковый номер x в этом списке. Поэтому¹ $\mathcal{K}(x|D) \leq \lg |D| + O(1)$. Более того, для произвольного $m > 0$ число всех $x \in D$, для которых $\mathcal{K}(x|D) < |D| - m$, не превосходит $2^{-m}|D|$, т.е. большинство элементов множества D имеют условную колмогоровскую сложность, близкую к максимальной. В частности, для $(1 - 2^{-m})|\mathcal{D}_N(\bar{\epsilon})|$ элементов \bar{n} множества $\mathcal{D}_N(\bar{\epsilon})$ выполнено

$$\lg |\mathcal{D}_N(\bar{\epsilon})| + -m \leq \mathcal{K}(\bar{n}|\mathcal{D}_N(\bar{\epsilon})) \leq \lg |\mathcal{D}_N(\bar{\epsilon})| + c, \quad (2)$$

где $K(\bar{n}|\mathcal{D}_N(\bar{\epsilon}))$ – условная колмогоровская сложность набора долей финансовых инструментов \bar{n} , c – некоторая положительная константа.

¹ Здесь и далее \log обозначает логарифм по основанию 2, $|D|$ обозначает число элементов множества D .

Переход от (2) к какой-либо аналитической оценке можно провести путем “огрубления” информации. Мы введем статистическую макроструктуру типов финансовых инструментов и уровней относительного дохода по интегрированным инструментам. Предполагаем, что все финансовые инструменты разделены на группы инструментов, приносящих одинаковые относительные доходы или потери. Такие группы естественно сформировать путем объединения j -х финансовых инструментов, имеющих близкие значения ϵ_j . Присыпываем финансовым инструментам каждой такой группы одинаковые уровни относительных доходов. Пусть имеется всего n таких групп, $n \leq M$. Пусть к i -й группе \mathcal{G}_i относится G_i инструментов, приносящих долю относительного дохода λ_i . Обозначим $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. По определению, имеем

$$\sum_{i=1}^n G_i = M. \quad \text{Введем обозначения: } p_i = \frac{G_i}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$\dots, n, \rho = \frac{N}{M}$ – “плотность инвестиций”. Предполагаем, что плотность ρ , число групп n и доли групп p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, являются положительными константами.

Пусть $N_i = \sum_{j \in \mathcal{G}_i} n_j$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Макроструктура инвестиций характеризуется вектором $\bar{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n)$. Обозначим $v_i = \frac{N_i}{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Условие (1) заменяется на условие

$$N_1 + N_2 + \dots + N_n = N, \quad \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i \right| \leq \alpha(N). \quad (3)$$

Обозначим через $\mathcal{C}_N(\bar{\lambda})$ множество всех векторов $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$, макроструктура \bar{N} которых удовлетворяет условиям (3). Имеет место аналогичное (2) неравенство, в котором $\mathcal{D}_N(\bar{\epsilon})$ заменено на $\mathcal{C}_N(\bar{\lambda})$.

Пусть $\Xi(\bar{N})$ – множество всех векторов \bar{n} , имеющих фиксированную макроструктуру $\bar{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n)$. Число элементов множества $\Xi(\bar{N})$ равно общему числу неотрицательных целочисленных решений системы независимых уравнений

$$\sum_{j=1}^{G_i} x_{i,j} = N_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому

$$|\Xi(\bar{N})| = \binom{N_1 + G_1 - 1}{G_1 - 1} \cdots \binom{N_n + G_n - 1}{G_n - 1}. \quad (4)$$

Представим (4) в виде

$$\lg |\Xi(\bar{N})| = NH(\bar{v}) + O(n \lg N),$$

где

$$H(\bar{v}) = \sum_{i=1}^n \rho^{-1} p_i \left(\left(\frac{\rho v_i}{p_i} + 1 \right) \lg \left(\frac{\rho v_i}{p_i} + 1 \right) - \frac{\rho v_i}{p_i} \lg \frac{\rho v_i}{p_i} \right)$$

– это гладкая по переменным v_i функция, которую мы будем называть энтропией²

Максимум этой функции при ограничениях³

$$\sum_{i=1}^n v_i \lambda_i = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1 \quad (6)$$

вычисляется стандартным образом с помощью функционала Лагранжа

$$L = H + \beta \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \mu \left(\sum_{i=1}^n v_i - 1 \right).$$

Легко видеть [1], что он достигается при

$$\tilde{v}_i = \frac{\rho^{-1} p_i}{2^{\beta \lambda_i - \mu} - 1},$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, а параметры β и μ определяются из условий (5), (6). Заметим, что в наших условиях параметры β и μ могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от набора λ_i .

По аналогии с термодинамикой вводится величина $T = -\frac{1}{\beta}$, которая называется температурой рынка.

Величину $H_{\max} = H(\tilde{v})$, где $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)$, будем называть энтропией рынка.

Имеет место теорема – слабый закон больших чисел'.

Теорема 1. Пусть $n \geq 3$.

1. Для произвольного достаточно малого положительного ϵ доля всех микроструктур $\bar{n} \in$

² При такой H возможные варианты микроструктуры инвестиций рынка удовлетворяют статистике Бозе–Эйнштейна (статистика неразличимых квантовых частиц [5]).

³ Энтропия $H(\bar{v})$ является выпуклой функцией, а ограничения являются линейными. Поэтому она имеет единственный максимум [2].

$\in \mathcal{C}_N(\bar{\lambda})$, удовлетворяющих при некотором $i, 1 \leq i \leq n$, неравенству

$$|v_i(\bar{n}) - \tilde{v}_i| \geq \epsilon, \quad (7)$$

не превосходит $2^{-c\epsilon^2 N}$ для всех достаточно больших N , где c – некоторая положительная константа, $v_i(\bar{n}) = \frac{N_i}{N}$ при $i = 1, 2, \dots, n$, а значения N_i определяются по вектору \bar{n} (см. выше).

Более точная, алгоритмическая версия этой теоремы имеет вид

2. Пусть $\sigma(N)$ – неотрицательная невозрастающая вычислимая функция. Тогда для всех микроструктур $\bar{n} \in \mathcal{C}_N(\bar{\lambda})$, за исключением их доли $2^{-\sigma(N) + O(n \lg N)}$, выполнено

$$NH_{\max} - \sigma(N) \leq \mathcal{K}(\bar{n}) \leq NH_{\max} + O(n \lg N) \quad (8)$$

при $N \rightarrow \infty$.

Кроме того, для произвольной микроструктуры $\bar{n} \in \mathcal{C}_N(\bar{\lambda})$ условие (8) влечет неравенство

$$|v_i(\bar{n}) - \tilde{v}_i| \leq \sqrt{\frac{c(|\beta| \alpha(N) + \sigma(N) + n \lg N)}{N}} \quad (9)$$

для всех i , где c – положительная константа, константа β определяется из условий (5), (6).

Доказательство этой теоремы основано на замечании, что мощность произвольной макроструктуры, набор частот которой максимизирует энтропию при заданных ограничениях, экспоненциально больше суммарной мощности макроструктур, частоты которых обладают свойством (7) хотя бы для одного i .

СЛОЖНЫЕ ИНВЕСТИЦИОННЫЕ ПОРТФЕЛИ

Под инвестиционным портфелем понимается любой набор неотрицательных целых чисел (k_1, k_2, \dots, k_M) , где величины k_i интерпретируются как величины инвестиций (количество единиц рынка), вложенных в i -й финансовый инструмент, $i = 1, 2, \dots, M$, где M – число финансовых инструментов, по которым распределяется общая сумма портфеля $K = \sum_{i=1}^M k_i$ (в единицах рынка).

Мы рассмотрим одношаговый вариант введенной модели рынка. В случае длинной позиции портфель инвестиций формируется в начале торгового периода (например, в начале дня). В конце торгового периода (например, в конце дня) определен вектор \bar{e} относительных доходов при инвестициях, сформированных в начале торгового пе-

риода и сумма долей инвестиций K изменяется на

$$\text{величину } \delta K = \sum_{i=1}^M \epsilon_i k_i, \text{ где } \epsilon_i - \text{ величины относи-}$$

тельного изменения доли инвестиций, вложенных в i -й финансовый инструмент. Таким образом, общая сумма инвестиций портфеля в долях рынка в конце шага $K^{+1} = K + \delta K$. В отличие от общей суммы инвестиций замкнутого рынка величина δK может иметь большое абсолютное значение, т.е. владелец портфеля может получить доход в долях рынка или потерпеть убыток. Аналогичным образом можно рассмотреть случай короткой позиции (при которой начало и конец торгового периода меняются местами).

Пусть определены укрупненные группы \mathcal{G}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, финансовых инструментов, а также определен вектор относительных доходов по укрупненным группам $\bar{\lambda}$. Пусть $\delta(N)$ – некоторая функция (принимающая неотрицательные рациональные значения), такая, что $\delta(N) = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$ и $\liminf_{N \rightarrow \infty} \delta(N)/(\lg N/N) = \infty$.

Теорема 1 определила основную группу распределений долей финансовых инструментов \bar{n} рынка в целом, удовлетворяющих условиям (3), а также условию

$$\frac{\mathcal{K}(\bar{n})}{N} \geq H_{\max} - \delta(N).$$

Понятие сложности распределения долей финансовых инструментов и теорема 2, приводимая ниже, позволяют получить некоторые свойства инвестиционного портфеля, при выполнении которых его общая сумма ведет себя подобно рынку в целом.

Пусть в начале шага сумма инвестиционного портфеля K вкладывается в M' финансовых инструментов, разбитых на группы \mathcal{G}'_i , $i = 1, 2, \dots, n$, где $\mathcal{G}'_i \subseteq \mathcal{G}_i$. Кроме того, пропорции инвестиций

те же, что и у всего рынка, т.е. $\rho = \frac{K}{M'}$ и $p_i = \frac{|\mathcal{G}'_i|}{M'}$.

Подобные финансовые инструменты можно получить путем разбиения исходных M инструментов на малые группы, каждая из которых содержит $\frac{N}{K}$ исходных финансовых инструментов и является подмножеством некоторой укрупненной группы \mathcal{G}_i . Для простоты изложения считаем, что N делится на K и подобное разбиение возможно. В качестве новых финансовых инструментов можно выбрать по одному исходному инструменту из каждой малой группы, всего их будет M' . Инвестиционный портфель $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_{M'})$ состоит из

сумм, вложенных в выбранные финансовые инструменты. При этом элементами новых укрупненных групп \mathcal{G}'_i являются финансовые инструменты, выбранные из тех малых групп, объединение которых равно \mathcal{G}_i . Каждому финансовому инструменту из новой укрупненной группы \mathcal{G}'_i соответствует прежнее значение λ_i относительного дохода.

Как было замечено выше, температура рынка может быть как положительной, так и отрицательной (или равной бесконечности). Имеет место

Теорема 2. *Пусть величины относительных доходов λ_i , где $-1 \leq \lambda_i < \infty$ при $i = 1, 2, \dots, n$, заданы, в этом случае энтропия H_{\max} фондового рынка и его температура T определены. Пусть также инвестиционный портфель \bar{k} удовлетворяет условию⁴*

$$\frac{\mathcal{K}(\bar{k})}{K} \geq H_{\max} - \delta(K). \quad (10)$$

1. *Пусть $T \geq 0$. Тогда любой инвестиционный портфель, удовлетворяющий условию (10), является асимптотически безрисковым в длинной позиции:*

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} \frac{K^{+1}}{K} \geq 1.$$

2. *Пусть $T < 0$. Тогда любой инвестиционный портфель, удовлетворяющий условию (10), является асимптотически безрисковым в короткой позиции:*

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{K^{+1}}{K} \leq 1.$$

3. *Пусть $T = \infty$. Тогда любой инвестиционный портфель, удовлетворяющий условию (10), является асимптотически безрисковым в обоих позициях – длинной и короткой:*

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K^{+1}}{K} = 1.$$

В этой теореме частично формализуется интуитивное представление о том, что при $T \geq 0$ по свойству 1 невозможно проиграть в относительных рыночных единицах в конце торгового периода, если сформировать достаточно сложный инвестиционный портфель в начале этого периода (длинная позиция). В случае $T < 0$ по свойству 2, имея сложный портфель инвестиций в условиях контракта по короткой позиции при продаже в начале торгового периода, мы теряем меньше, чем при продаже в конце торгового периода.

⁴ Таким образом, согласно теореме 1, портфель \bar{k} относительно не менее сложный, чем большинство возможных структур рынка в целом.

Как можно заметить, знак температуры T зависит от того, как расположена точка максимума энтропии, вычисленного при единственном условии (6). При $T < 0$ (т.е. при $\beta > 0$) точка максимума H находится не выше гиперплоскости (6). Легко видеть, что это происходит при условии

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \leq 0,$$

т.е. когда средняя стоимость всех финансовых инструментов (в единицах рынка) в конце рассматриваемого шага не увеличивается. При $T \geq 0$ (т.е. при $\beta < 0$) точка максимума H находится не ниже гиперплоскости (6). Легко видеть, что это проис-

ходит при

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \geq 0,$$

т.е. когда средняя стоимость всех финансовых инструментов (в единицах рынка) в конце рассматриваемого шага не уменьшается. При $T = \infty$ (т.е. при $\beta = 0$) точка максимума находится на гиперплоскости (6) и соответствующая сумма равна нулю.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00122).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вьюгин В.В., Маслов В.П. // Пробл. передачи информации. 2005. Т. 41. № 2. С. 72–88.
2. Кюнци Г.П., Крелле В. Нелинейное программирование. М.: Сов. радио, 1965.
3. Колмогоров А.Н. // Пробл. передачи информации. 1965. Т. 1. № 1. С. 3–11.
4. Колмогоров А.Н. // УМН. 1983. Т. 38. № 4. С. 27–36.
5. Ландау Л.Д., Лицшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. Ч. 1.
6. Farmer J.D., Patelli P., Zovko I. // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2005. V. 102. № 6. P. 2254–2259.
7. Li M., Vitányi P. An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications. N. Y.: Springer, 1997.
8. Shafer G., Vovk V. Probability and Finance. It's Only a Game! N. Y.: Wiley, 2001.